Esericizi svolti Elementi di Teoria degli Insiemi

Vittorio Meini

Anno Accademico 2016/2017
Prof. Mauro di Nasso, Università di Pisa

Introduzione

Questo file contiene i miei svolgimenti di alcuni esercizi assegnati dal prof. Mauro di Nasso durante il corso di Elementi di Teoria degli Insiemi per il corso di laurea in Matematica dell'Università di Pisa, tenutosi nell'anno accademico 2016/2017.
Alcune consegne non sono state trascritte, perché si trovano sulle dispense del professore, reperibili a questi indirizzi:
`http://people.dm.unipi.it/dinasso/ETI/dispensa1.pdf`
`http://people.dm.unipi.it/dinasso/ETI/dispensa2.pdf`
`http://people.dm.unipi.it/dinasso/ETI/dispensa3.pdf`
`http://people.dm.unipi.it/dinasso/ETI/dispensa4.pdf`
`http://people.dm.unipi.it/dinasso/ETI/dispensa5.pdf`
Nelle dispense, inoltre, è possibile trovare anche altri esercizi assegnati durante l'anno, che qui non sono presentati.

Attenzione!

Questi esercizi non sono stati corretti, dunque potrebbero contenere errori e\o imprecisioni.

Indice

1 Coppie Ordinate

Dimostrare che la definizione di coppia ordinata
$(a,b) = \{\{a,\emptyset\},\{b,\{\emptyset\}\}\}$ *verifica la proprietà* $(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow$
$a = a' \wedge b = b'$

Consideriamo la definizione
$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow \{\{a,\emptyset\},\{b,\{\emptyset\}\}\} = \{\{a',\emptyset\},\{b',\{\emptyset\}\}\}$ dobbiamo dunque dimostrare l'implicazione
$\{\{a,\emptyset\},\{b,\{\emptyset\}\}\} = \{\{a',\emptyset\},\{b',\{\emptyset\}\}\} \Rightarrow a = a' \wedge b = b'$
Partendo dall'uguaglianza $\{\{a,\emptyset\},\{b,\{\emptyset\}\}\} = \{\{a',\emptyset\},\{b',\{\emptyset\}\}\}$ si deduce che $\{a,\emptyset\} \in \{\{a',\emptyset\},\{b',\{\emptyset\}\}\}$ e dunque
$\{a,\emptyset\} = \{a',\emptyset\} \vee \{a,\emptyset\} = \{b',\{\emptyset\}\}$
<u>Caso 1</u>
Se $\{a,\emptyset\} = \{a',\emptyset\}$ allora $a = a'$ (se $a = \emptyset$ siamo nel caso $a = \emptyset = a'$), sostituendo nell'equazione iniziale otteniamo
$\{\{a',\emptyset\},\{b,\{\emptyset\}\}\} = \{\{a',\emptyset\},\{b',\{\emptyset\}\}\} \Rightarrow \{b,\{\emptyset\}\} \in \{\{a',\emptyset\},\{b',\{\emptyset\}\}\}$, ci sono dunque nuovamente due casi diversi $\{b,\{\emptyset\}\} = \{a',\emptyset\} \vee$ $\{b,\{\emptyset\}\} = \{b',\{\emptyset\}\}$
<u>Caso 1.1</u>
Se $\{b,\{\emptyset\}\} = \{a',\emptyset\}$, allora $\{\emptyset\} \in \{a',\emptyset\}$ e concludiamo che $a' = \{\emptyset\} = a$, da cui $b = \emptyset$, sostituendo questi dati nell'equazione iniziale
$\{\{\{\emptyset\},\emptyset\}\} = \{\{\{\emptyset\},\emptyset\},\{b',\{\emptyset\}\}\}$ da cui $b' = \emptyset = b$ dà la tesi.
<u>Caso 1.2</u>
Se $\{b,\{\emptyset\}\} = \{b',\{\emptyset\}\}$, $b = b'$, che dà la tesi.
<u>Caso 2</u>
Se $\{a,\emptyset\} = \{b',\{\emptyset\}\}$, allora $\emptyset \in \{b',\{\emptyset\}\}$ e, poichè $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, $\emptyset = b'$, da cui, sostituendo, $\{a,\emptyset\} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, quindi $a = \{\emptyset\}$.
Sostituendo nell'equazione iniziale i valori di a e b',
$\{\{\{\emptyset\},\emptyset\},\{b,\{\emptyset\}\}\} = \{\{a',\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$, quindi $\{a',\emptyset\} = \{b,\{\emptyset\}\}$, da cui $b = \emptyset = b'$ e $a' = \{\emptyset\} = a$. Si ha la tesi.

2 Cardinalità ed equipotenza

Dimostra che, se $|A| = |A'|$ *e* $|B| = |B'|$*, allora:*
1. $|A \cup B| = |A' \cup B'|$*, purchè* $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$
2. $|A \times B| = |A' \times B'|$
3. $|Fun(A, B)| = |Fun(A', B')|$
4. $|P(A)| = |P(A')|$

Se $|A| = |A'|$ e $|B| = |B'|$ allora $\exists^{no} f : A \to A'$ e $g : B \to B'$ bigettive, sulla base di queste bigezioni è possibile definirne altre che mettono in bigezione gli altri insiemi dei quattro punti, dimostrandone in questo modo l'equipotenza.
1. Definisco $h : A \cup B \to A' \cup B'$ tale che $h(c) = f(c)$ se $c \in A$, invece $h(c) = g(c)$ se $c \in B$, dal momento che $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$, la funzione h è ben definita, dalla bigettività di f e g segue quella di h.
2. Definisco $h : A \times B \to A' \times B'$ tale che $h[(a, b)] = (f(a), g(b))$, dalla bigettività di f e g segue quella di h
3. Definisco così $L : Fun(A, B) \to Fun(A', B')$. Sia $h \in Fun(A, B)$, allora $L(h) = g \circ h \circ f^{-1}$, la funzione è ben definita, perchè f e g sono bigettive.
$L(h) = L(h') \Rightarrow g \circ h \circ f^{-1} = g \circ h' \circ f^{-1} \Rightarrow h = h'$ dimostra l'iniettività, l'ultima freccia viene dall'invertibilità di g e f.
$\forall u \in Fun(A', B')$ vale che $L(g^{-1} \circ u \circ f) = u$, questo dimostra la surgettività.
4. Dato $C \subseteq A$, abbiamo definito $f(C)$, l'immagine di C, è dunque possibile definire $f' : P(A) \to P(A')$ tale che $f'(C) = f(C)$, la bigettività segue da quella di f.

1. Dimostra $|A^B \times A^C| = |A^{B \cup C}|$*, se* $B \cap C = \emptyset$
2. Dimostra $|(A^B)^C| = |A^{B \times C}|$

1. Sia $f : B \to A$ e $g : C \to A$, definiamo $L : A^B \times A^C \to A^{B \cup C}$, tale che $L[(f, g)] = h$, dove $h : B \cup C \to A$ è definita così:
$h(x) = f(x)$, se $x \in B \vee h(x) = g(x)$, se $x \in C$. h è ben definita proprio per l'ipotesi $B \cap C = \emptyset$.
L è iniettiva, infatti $L[(f, g)] = L[(f', g')] \Rightarrow h = h' \Rightarrow f = f' \wedge g = g'$.
L è surgettiva, infatti $\forall h \in A^{B \cup C}$, si ha che $h = L[(h\big|_B, h\big|_C)]$
2. Sia $g : C \to A^B$, sia $g' : B \times C \to A$, definita sulla base di g, tale che $g'(b, c) = [g(c)](b)$, allora la funzione $G : (A^B)^C \to A^{B \times C}$, tale che $G(g) = g'$ è bigettiva.
Infatti $G(i) = G(j) \Rightarrow i' = j' \Rightarrow i'(b, c) = j'(b, c) \forall b \in B, \forall c \in C \Rightarrow [i(c)](b) = [j(c)](b) \forall b \in B, \forall c \in C \Rightarrow i(c) = j(c) \forall c \in C \Rightarrow i = j$
E $\forall h' : B \times C \to A$, se in particolare $h'(b, c) = a$, sia $h : C \to A^B$ tale che $h(c) = f$, dove $f(b) = a, \forall (b, c) \in B \times C, \forall a \in Imm(h')$, allora $G(h) = h'$

Dimostare che:
1) $|[0,1]| = |(0,1)|$,
2) $|(a,b)| = |(0,1)|$,
3) $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$

1) Si procede con Cantor-Bernstein. Ovviamente è vero che $|(0,1)| \leq |[0,1]|$, l'identità è un'ovvia iniezione da un insieme a un altro. Definiamo adesso un'iniezione da $[0,1]$ a $(0,1)$. Sia $f : (0,1) \to [0,1]$, tale che $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$.
f è ben definita? Cioè, $f([0,1]) \in (0,1)$?
$f(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} < 1 \Leftrightarrow x < 2$, sempre verificato.
$f(x) < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow x > 0$, l'unico punto nel dominio che non rispetta la condizione è $x = 0$, c'è dunque un problema di definizione da risolvere.
Qual è l'immagine di f? Notiamo che $f'(x) = -\frac{1}{2}$, dunque f è una funzione decrescente, perciò $Imm(f) = [f(1), f(0)) = [\frac{1}{2}, 1)$.
Possiamo quindi definire la funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x), x \neq 0 \\ \frac{1}{4}, x = 0 \end{cases}$$

che risolve il problema della buona definizione e mantiene l'iniettività. Abbiamo l'iniezione cercata, dunque la tesi.
2) La funzione $f : (a,b) \to (0,1)$, tale che

$$f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-a}{b-a})$$

è una bigezione, appositamente ottenuta da una dilatazione e una traslazione della funzione seno.
3) Abbiamo appena dimostrato che $|(a,b)| = |(0,1)| \forall a, b \in \mathbb{R}$, scegliamo $a = -\frac{\pi}{2}$ e $b = \frac{\pi}{2}$, dunque $|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})| = |(0,1)|$, ma la funzione $\arctan(x) : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, è una bigezione, dunque $|(0,1)| = |(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})| = |\mathbb{R}|$.

Sia $A \subset \mathbb{R}$, tale che $|A| \leq \aleph_0$, allora $\mathbb{R} \backslash A$ è denso.

Sia $c = |\mathbb{R}|$
Procediamo per assurdo. Supponiamo che $\exists^{no} a, b \in \mathbb{R} \backslash A$, tali che $a < b$ e tali che $\forall r \in \mathbb{R}$ che verifica $a < r < b$, $r \notin \mathbb{R} \backslash A$, che equivale a scrivere $r \in A$. Notiamo che $R = \{r \in \mathbb{R} | a < r < b\} = (a,b)$, in base alle nostre ipotesi $R = (a,b) \subseteq A$, ma, in base a un esercizio della seconda settimana, $|(a,b)| = c$. Dunque abbiamo $c = |(a,b)| \leq |A| \leq \aleph_0$, assurdo.

Determinare la cardinalità di:
$F_1 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} | f \textit{ limitata}\}$
$F_2 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \exists \lim_{x \to +\infty} f(n) < \infty\}$
$F_3 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \lim_{x \to +\infty} f(n) = \infty\}$

Si noti intanto che $F_1, F_2 \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e che $F_3, F_4 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, quindi tutti e quattro gli insiemi hanno cardinalità al più il continuo. Infatti $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = c$

1) Immergendo l'insieme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ in F_1 dimostro che la cardinalità di F_1 è esattamente quella del continuo. Sia dunque $G : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to F_1$, tale che $G(A) = f_A$, che a sua volta è così definito $f_A(n) = \chi_A(n)$, dove $\chi_A(n) = 1$, se $n \in A$ e $\chi_A(n) = 0$, se $n \notin A$. f_A è limitata $\forall A$ (ad esempio $f_A(n) < 2 \forall n$), dunque la funzione G è ben definita. Inolte $A \neq B \Rightarrow f_A \neq f_B$, quindi G è iniettiva, tesi.
2) Stavolta procedo immergendo $\mathbb{R}$ in F_3 (successioni di reali con limite finito). Sia $G : \mathbb{R} \to F_3$, tale che $G(x) \to x_n$, dove $x_0 = 0$ e $x_n = \frac{1}{n} + x$. Le successioni nell'immagine hanno tutte limite finito (x) e chiaramente $x \neq y \Rightarrow x_n \neq y_n$
3) Esattamente come sopra ma con $x_n = n + x$, che ha limite infinito.

Indicare la cardinalità dei seguenti insiemi:
1.A=$\{$*Partizioni infinite di* $\mathbb{N}\}$
2.B=$\{$*Partizioni numerabili di* $\mathbb{R}\}$
3.C=$\{$*Partizioni in c pezzi di* $\mathbb{R}\}$

1) Ogni partizione infinita dei naturali è sicuramente numerabile.
Sia $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita come a lezione, tale che ad ogni naturale associa il naturale che identifica la partizione che lo contiene. Sia $\theta : A \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, la funzione che associa ad ogni partizione la sua funzione χ. θ è iniettiva, quindi $|A| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = c$.
Sia invece $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to A$. Se $N \subseteq \mathbb{N}$ è infinito, sia $N = \{a_0, a_1, ..., a_n, ...\}$, allora $F(N) = \{a_0, a_1, ..., a_n, ..., N^c\}$, se invece N è finito, N^c è infinito, sia
$N^c = \{c_0, c_1, ..., c_n, ...\}$, dove $c_0 = min(N^c)$. Poniamo dunque
$F(N) = \{c_1, ..., c_n, ..., N \cup \{c_0\}\}$. F è iniettiva. Dunque per Cantor-Bernstein si ha $c = |A|$.
2) Sia $\chi \in \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, definita in modo analogo a quella dell'esercizio precedente. Sempre analogamente all'esercizio precedente si può definire un'iniezione
$\theta : B \to \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$.
Si puó inoltre definire un'iniezione $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to B$, tale che $A \to (A \cup \{1\}, (A \cup \{1\})^c)$. Dunque si ha $2^c \leq |B| \leq \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$. Se dimostriamo che $\mathbb{N}^{\mathbb{R}} = 2^c$, possiamo concludere. Ovviamente $|2^{\mathbb{R}}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{R}}|$ e d'altra parte $|\mathbb{N}^{\mathbb{R}}| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = |(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{R}}| = |2^{\mathbb{R} \times \mathbb{N}}| \leq |2^{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}| = |2^{\mathbb{R}}|$.
3) Sia $\chi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la funzione definita come nei due casi precedenti. Allora la solita funzione $\theta : C \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$è iniettiva. Quindi $|C| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = 2^c$.
Possiamo poi definire un'iniezione $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to C$, definita analogamente a quella del primo esercizio, distinguendo due casi, se il sottoinsieme in oggetto è numerabile (allora il complementare ha cardinalità del continuo), o se ha cardinalità c.
Si ha quindi $|C| = 2^c$

Dimostrare:
$|A| = |B| \Rightarrow |[A]^{\nu}| = |[B]^{\nu}|$

Per ipotesi $\exists f : A \Rightarrow B$ bigettiva, allora $F : [A]^{\nu} \to [B]^{\nu}$ tale che
$F : C \to f(C)$ è ben definita ed è a sua volta una bigezione.

3 Assiomi ZFC

Dimostra che $\forall \mathcal{F}$, famiglia di insiemi, $\exists C = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$

Per l'assioma 4 $\exists A = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ e per l'assioma 6 $\exists C = \{c \in A | \phi(c, \mathcal{F})\}$, dove $\phi(c, \mathcal{F}) = \forall F(F \in \mathcal{F} \to c \in F)$

È stato assegnato l'esercizio 2.3., pag.7, Dispensa 3, diviso in 4 punti.

(1). È possibile definire $Dom(R)$ e $Imm(R)$ in modo tale che l'assioma 6 ce ne garantisca l'esistenza.
$Dom(R) = \{a \in A | \phi(a, R)\}$, dove $\phi(a, B, R) = \exists b(b \in B \wedge (a, b) \in R)$
$Imm(R) = \{b \in B | \phi(b, R)\}$, dove $\phi(b, A, R) = \exists a(a \in A \wedge (a, b) \in R)$
(2). Notiamo che $[a] \in P(A)$, l'insieme delle parti esiste per l'assioma 5, dunque si può definire in questo modo l'insieme quoziente $A \backslash_{\approx} = \{B \in P(A) | \phi(A, B)\}$, dove $\phi(A, B) = \exists a(a \in A \wedge B = [a])$
(3). Possiamo definire le funzioni come insiemi di coppie ordinate, dunque in generale se $f : A \to B$, possiamo dire $f \subseteq A \times B$, cioè $f \in P(A \times B)$, per l'assioma 6 esiste l'insieme $Fun(A, B) = \{f \in P(A \times B) | \phi(f, A, B)\}$, dove $\phi(f, A, B) = \forall a \exists ! b(b \in B \wedge (a \in A \to (a, b) \in f))$
(4).Sia $\mathcal{F} = Imm(< A_i | i \in I >)$. Esiste per l'assioma 6 l'insieme
$\prod_{i \in I} A_i = \{f \in Fun(i, \mathcal{F}) | \phi(f, A_i)\}$, dove $\phi(f, A_i) = \forall i(i \in I \to f(i) \in A_i)$

4 Numeri naturali e assiomi di Peano

Dimostrare $n \in m \Leftrightarrow n \subset m$ *(inclusione stretta)*

$\Rightarrow$) Procediamo per induzione su m
Se $m = 0 = \emptyset$ l'ipotesi diventa $n \in \emptyset$, falso per ogni n, la tesi è dunque vera a vuoto.
Il passo induttivo equivale a dimostrare
$(n \in m \Rightarrow n \subset m) \to (n \in \hat{m} \Rightarrow n \subset \hat{m})$, per ipotesi $n \in \hat{m}$, quindi
$n \in m \vee n = m$, se $n = m$ allora si ha $n = m \subset \hat{m} = m \cup \{m\}$.
Se invece $n \in m$ allora per ipotesi induttiva $n \subset m \subset \hat{m}$.
$\Leftarrow$) Sempre per induzione su m.
Se $m = 0 = \emptyset$ la tesi è vera a vuoto, come sopra.
Il passo induttivo equivale a dimostrare$(n \subset m \Rightarrow n \in m) \to (n \subset \hat{m} \Rightarrow n \in \hat{m})$
Per ipotesi $n \subset \hat{m} = m \cup \{m\}$.
Se $n = m$ si ha la verità della tesi a vuoto.
Invece nel caso $n \subset m$, per ipotesi induttiva $n \in m \in \hat{m}$, per la transitività dell'appartenenza $n \in \hat{m}$, tesi.
Infine se $n \not\subset m$ allora sicuramente $\{m\} \subset n \Rightarrow m \in n$, dunque per la prima implicazione, dimostrata sopra, $m \subset n$, dunque abbiamo $m \subset n \wedge \{m\} \subset n \Rightarrow \hat{m} \subset n$. Ma questo è contro l'ipotesi dell'inclusione stretta, si ha quindi un assurdo.

Dimostrare $x \in n \in \omega \Rightarrow x \in \omega$

Si procede per induzione su n, se $n = 0 = \emptyset$ l'ipotesi è falsa, quindi la tesi è vera a vuoto.
Dimostrare il passo induttivo equivale a dimostrare
$(x \in n \in \omega \Rightarrow x \in \omega) \to (x \in \hat{n} \in \omega \Rightarrow x \in \omega)$, si parte dunque dall'ipotesi $x \in \hat{n} = n \cup \{n\}$, cioè $x \in n \vee x = n$ se $x \in n$, allora per ipotesi induttiva $x \in \omega$.
Se invece $x = n$ si ha $x = n \in \omega$.

Dimostrare $n \cup m \in \omega, n \cap m \in \omega$

Per la tricotomia dell'appartenenza si hanno tre casi, $m = n \vee m \in n \vee n \in m$.
Se $m = n$ si ha che $m \cup n = m \cap n = m = n \in \omega$, tesi.
Se $m \in n$ per la dimostrazione precedente $m \subset n$, dunque $m \cup n = n \in \omega$ e $m \cap n = m \in \omega$. Il caso $n \in m$ è analogo al precedente.

Dimostra che $\hat{n}$ *è il successore immediato di* n *in* $(\omega, \in)$

Procediamo per assurdo. Supponiamo che esista m, tale che $n \in m \in \hat{n}$, allora $m \in \hat{n} = n \cup \{n\}$, si danno quindi due casi $m \in n \vee m = n$, entrambi assurdi.

Dimostrare che, se A e B sono insiemi finiti, allora lo sono anche:
1) $A \cap B$
2) $A \backslash B$
3) $A \cup B$
4) $A \times B$
5) A^B
6) $\mathcal{P}(A)$

Se A e B sono finiti allora $\exists^{no}$ $f : A \to n$ e $f' : B \to m$ bigezioni. Cioè $|A| = |n|$ e $|B| = |m|$.
1. Per definizione $A \cap B = \{a \in A | a \in B\} \subseteq A$, Se $A \cap B = A$, abbiamo $|A \cap B| = |A| = |n|$, tesi. Se invece $A \cap B \subset A$, per una proposizione dimostrata a lezione $\exists n_0 < n$ tale che $|A \cap B| = |n_0|$
2. $A \backslash B = \{x \in A | x \notin B\} \subseteq A$. Si conclude come sopra.
3. Se $A \cap B = \emptyset$, consideriamo la bigezione
$h : m \to \{n, n+1, , ..., n+(m-1)\} \subset n+m$, definita nel modo ovvio $h(x) = n+x$.
La funzione $g : A \cup B \to n + m$, definita come segue:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), x \in A \\ h(f'(x)), x \in B \end{cases}$$

è ben definita, perché A e B sono disgiunti ed è una bigezione per come è definita, infatti f è bigettiva, come lo sono f' e h, dunque anche la loro composizione.
Manca il caso $A \cap B \neq \emptyset$. Consideriamo gli insiemi (che sappiamo essere finiti), $(A \backslash (A \cap B))$ e B, allora valgono le relazioni $(A \backslash (A \cap B)) \cap B = \emptyset$ e
$(A \backslash (A \cap B)) \cup B = A \cup B$, dunque possiamo facilmente ricondurci al caso precedente.
4. Per una proprietà già nota possiamo affermare che $|A \times B| = |n \times m|$.
Consideriamo $g : n \times m \to n \cdot m = \{0, 1, .., n \cdot m - 1\}$, definita in questo modo $g(k, r) = km + r$. La funzione è ben definita e bigettiva, infatti l'iniettività e la suriettività derivano rispettivamente dall'unicità e dall'esistenza della divisione euclidea per m.
5. Per proprietà già note $|A^B| = |n^m|$, dimostriamo che $|n^m| = |n \times n \times ... \times n|$, dove il prodotto cartesiano ha m termini, tale insieme è finito, lo si dimostra applicando induttivamente il punto 4. Consideriamo dunque la funzione
$G : n^m \to n \times n \times ... \times n$, definita in questo modo $G(g) = (g(0), g(1), ..., g(m-1))$.
G è la bigezione cercata.
6. Per un esercizio svolto in passato possiamo dire che $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(n)|$.
Come si forma un sottoinsieme di n? Si può decidere, per ogni elemento di n, se inserirlo o meno nel sottoinsieme.
Consideriamo la funzione $g : \mathcal{P}(n) \to 2^n = \{f : n \to \{0, 1\}\}$.
Definiamo $g(B)$, $B \in \mathcal{P}(A)$, quindi $B \subseteq A$, allora $\exists k < n$, tale che $|B| = |k|$.
Possiamo dunque descrivere B in questo modo, $B = \{b_0, b_1, ..., b_{k-1}\}$.
Diciamo dunque che $g(B) = h \in 2^n$, dove h è definito come segue. $h(m) = 1$, se $\exists j \leq k | m = b_j$, altrimenti $h(m) = 0$.
g è una bigezione, quindi $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(n)| = |2^n|$, inoltre 2^n è finito, come si è dimostrato nel punto 5.

Se $\mathfrak{F}$ è una famiglia finita di insiemi finiti. Allora $\bigcup \mathfrak{F}$ è finito.

$\mathfrak{F}$ è una famiglia finita, quindi $\exists n$, tale che $|\mathfrak{F}| = |n|$, possiamo dunque scrivere $\mathfrak{F} = \{A_0, A_1, .., A_{n-1}\}$. Inoltre $\forall k \in n \exists j_k$ tale che $|A_k| = |j_k|$, perché tutti gli insiemi della famiglia sono finiti. Quindi $A_k = \{a_{k,0}, ..., a_{k,j_k-1}\}$. Applicando induttivamente la dimostrazione del punto 3 dell'esercizio precedente si ottiene una bigezione $g' : \bigcup \mathfrak{F} \to j_0 + j_1 + ... + j_{n-1}$, nel caso gli insiemi della famiglia siano tutti disgiunti. Se gli insiemi hanno elementi in comune la generalizzazione si ottiene sempre applicando l'ultima parte dell'esercizio 3.

Sia $f : A \to B$ una funzione e A finito. Allora $Imm(f)$ è finito.

Se A è finito allora $\exists n \in \omega$, tale che $|A| = |n|$. Definisco dunque $f' : n \to B$ in maniera analoga a f, ossia tale che $f(a_k) = f'(k) \forall k \in n$. Notiamo che $Imm(f) = Imm(f')$. Definisco adesso $g : Imm(f') \to n$, tale che
$g(b) = min\{k \in n | b = f'(k)\}$, la funzione è ben definita, perché abbiamo scelto $b \in Imm(f')$, inoltre è iniettiva, ciò deriva dal fatto che f' è una funzione. Quindi $|Imm(f)| = |Imm(f')| \leq |A|$, quindi per quanto visto a lezione $Imm(f)$ è un insieme finito.

Esercizio 2.2, pagina 7, dispensa 4.

Nelle dimostrazioni seguenti viene usato **PA4**, il principio di induzione, al primo ordine.
1)

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

Si procede per induzione su z.
Se $z = 0$, si ha $x + (y + 0) = x + y = (x + y) + 0$, la tesi segue quindi da **PA3**, applicata nei due sensi.
Nel passo induttivo supponiamo vera $P(z)$ e dimostriamo $P(S(z))$
$x + (y + S(z)) = x + S(y + z) = S(x + (y + z)) = S((x + y) + z) = (x + y) + S(z)$
Dove tutte le uguaglianze derivano da **PA3**, eccetto la terza che si ottiene applicando l'ipotesi induttiva.
3)

$$x + y = y + x$$

Si procede con una prima induzione su y.
Se $y = 0$, per concludere il passo base dobbiamo dimostrare che $x + 0 = 0 + x$, dunque procediamo con una seconda induzione, su x.
Se $x = 0$, $0 + 0 = 0 + 0$, ovvio.
Per quanto riguarda il passo induttivo invece $x + 0 = 0 + x \Rightarrow x = 0 + x \Rightarrow S(x) = S(0 + x) = 0 + S(x)$.
La prima freccia segue da **PA3**, la seconda dal fatto che S è una funzione (**PA2**).
Abbiamo dunque dimostrato il passo base della prima induzione, quella su y, e possiamo passare a dimostrare il passo induttivo.
Partendo dall'ipotesi induttiva, notiamo che $x + y = y + x \Rightarrow$
$S(x + y) = S(y + x) \Rightarrow x + S(y) = y + S(x)$ (sempre per **PA2** e **PA3**).
Se dimostriamo che vale $y + S(x) = S(y) + x$ avremmo, $x + S(y) = S(y) + x$,

ossia la tesi.
Dunque con una terza induzione, anche stavolta su x, dimostriamo che $y + S(x) = S(y) + x$.
Se $x = 0$, allora $y + S(0) = S(y + 0) = S(y) = S(y) + 0$, applicando **PA3** ripetutamente.
Il passo induttivo consiste nel dimostrare $y + S(x) = S(y) + x \Rightarrow y + S(S(x)) = S(y) + S(x)$.
$y + S(S(x)) = S(y + S(x)) = S(S(y) + x) = S(y) + S(x)$, l'ipotesi induttiva si usa nella seconda uguaglianza.
Dimostrando quest'ultima induzione su x, abbiamo dimostrato anche il passo induttivo dell'induzione principale, quella su y.
4)

$$x \cdot 1 = x, 1 \equiv S(0)$$

$x \cdot S(0) = x \cdot 0 + x = 0 + x = x$, abbiamo utilizzato **PA4** per la prima e la seconda uguaglianza e il passo base del precedente esercizio per la terza.
5)

$$x \cdot y = y \cdot x$$

La struttura della dimostrazione è del tutto analoga a quella del punto 3.
Iniziamo con una prima induzione su y.
Se $y = 0$, abbiamo da dimostrare $x \cdot 0 = 0 \cdot x$, cioè (per **PA4**) $0 = 0 \cdot x$.
A questo punto dimostriamo il passo base per induzione su x.
Se $x = 0$ la proprietà è banale. Procediamo con il passo induttivo su x.
$0 \cdot S(x) = 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x = 0$, dove l'ipotesi induttiva è applicata nell'ultima uguaglianza, le altre seguono da **PA3-4**.
Adesso possiamo finalmente sbizzarrirci con il passo induttivo dell'induzione originale, ossia dimostriamo $x \cdot y = y \cdot x \Rightarrow x \cdot S(y) = S(y) \cdot x$.
$x \cdot S(y) = x \cdot y + x = y \cdot x + x$, l'ultima uguaglianza segue dall'ipotesi induttiva.
Se $y \cdot x + x = S(y) \cdot x$, abbiamo la tesi. Dimostriamolo con una nuova induzione su x.
Se $x = 0$ segue banalmente dagli assiomi. Per il passo induttivo scriviamo:
$y \cdot S(x) + S(x) = y \cdot x + y + S(x) = y \cdot x + S(y) + x = S(y) + y \cdot x + x = S(y) + x \cdot S(y) = x \cdot S(y) + S(y) = S(y) \cdot S(x)$
Abbiamo applicato proprietà note dai punti precedenti e l'ipotesi induttiva nella quarta uguaglianza. Tesi.
6)

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Procediamo per induzione su z, se $z = 0$ la proprietà segue banalmente dagli assiomi.
Per quanto riguarda il passo induttivo:
$x \cdot (y + S(z)) = x \cdot (S(x + y)) = x \cdot (y + z) + x = x \cdot y + x \cdot z + x = x \cdot y + x \cdot S(z)$
L'ipotesi induttiva è applicata nella terza uguaglianza, **PA3-4** nelle altre.
2)

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Si procede per induzione su z, se $z = 0$, la proprietà segue banalmente da **PA4**.
Procediamo con il passo induttivo $(x \cdot y) \cdot S(z) = (x \cdot y) \cdot z + x \cdot y = x \cdot (y \cdot z) + x \cdot y = x \cdot (y \cdot z + y) = x \cdot (y \cdot S(z))$.

Dove l'ipotesi induttiva è stata applicata nella seconda uguaglianza e il punto 6 nella terza.

Verificare che $(N, <)$ è un insieme totalmente ordinato

Basta dimostrare la transitività e la tricotomia forte.
Transitività. $a < b \wedge b < c \Rightarrow \exists^{no} z, z' | b = a + S(z) \wedge c = b + S(z') \Rightarrow$ $c = a + S(z) + S(z') \Rightarrow c = a + S(S(z + z'))$, l'ultimo passaggio è giustificato da questa catena: $S(S(z + z')) = S(z + S(z')) = S(S(z') + z) = S(z') + S(z) =$ $= S(z) + S(z')$. Dunque sia $s = z + z'$, si ha che $c = a + S(s) \Rightarrow a < c$
Prima di dimostrare la tricotomia forte ci conviene dimostrare un lemma preliminare:

$$A + B = A + C \Rightarrow B = C$$

Procediamo per induzione su A.
Per $A = 0$, si ha $0 + B = 0 + C$, che, per i precedenti esercizi, equivale a $B = C$.
Il passo induttivo segue da queste osservazioni $S(A) + B = S(A) + C \Rightarrow$ $S(A + B) = S(A + C) \Rightarrow A + B = A + C \Rightarrow B = C$, dove la penultima freccia deriva dall'iniettività di S e l'ultima dall'ipotesi induttiva.
Tricotomia forte. Dimostriamo che $a < b \Rightarrow a \neq b \wedge b \not< a$, sappiamo per definizione che $a < b \Rightarrow \exists x | b = a + S(x)$. Supponiamo $a = b$, abbiamo quindi $a = a + S(x) \Rightarrow a + 0 = a + S(x) \Rightarrow S(x) = 0$, ma ciò conduce a un assurdo, in quanto contraddice **PA1**. Supponiamo che invece $b < a$, quindi $\exists y | a = b + S(y)$, ma del resto per ipotesi $b = a + S(x)$, quindi $a = a + S(x) + S(y) \Rightarrow$ $a = a + S(S(x + y)) \Rightarrow S(S(x + y)) = 0$, stesso assurdo di sopra.
Del tutto analogamente si dimostra

$$a = b \Rightarrow a \not< b \wedge b \not< a \bigwedge b < a \Rightarrow a \neq b \wedge a \not< b$$

Ora resta da verificare che almeno uno dei due casi si verifica sempre, ossia che $b \not< a \wedge a \neq b \Rightarrow a < b$. Dimostriamolo per induzione su a.
Se $a = 0$, sicuramente $b \neq 0 \Rightarrow \exists y | b = S(y) + 0$, per **PA1**, $S(y) + 0 > 0$ per definizione.
Per dimostrare il passo induttivo abbiamo a disposizione l'ipotesi, $b \not< S(a) \wedge b \neq S(a)$, e l'ipotesi induttiva $b \not< a \wedge b \neq a \Rightarrow a < b$.
Se $b < a$ allora $\exists t | a = b + S(t) \Rightarrow S(a) = S(b + S(t)) = b + S(S(T)) \Rightarrow b < S(a)$, contro l'ipotesi.
Se invece $b = a$, allora $S(b) = S(a) \Rightarrow S(b + 0) = S(a) \Rightarrow b + S(0) = S(a) \Rightarrow$ $b < S(a)$, assurdo come sopra.
Abbiamo dunque scoperto che $b \not< a \wedge a \neq b$ e possiamo applicare l'ipotesi induttiva, che ci consente di concludere che $a < b$, da cui $\exists k | b = a + S(k) \Rightarrow$ $b = S(a) + k$, ciò significa, se $k \neq 0$, $S(a) < b$, cioè la tesi. Se invece $k = 0$, si ha $S(a) = b$, contro le ipotesi.

5 Ordinamenti e buoni ordini

Esercizio 5.1 della despensa 1 A.A. 2013-2014, proposto a lezione

Verifico che l'ordine proposto è un ordine totale sull'insieme $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ossia che verifica le proprietà:
<u>Riflessività</u> $f < f$, infatti questa condizione si verifica quando $f(k) < f(k)$, dove $k = min\{n|f(n) \neq f(n)\}$, $f(k)$ è un numero naturale e nessun naturale verifica la relazione $n < n$, tuttavia $\{n|f(n) \neq f(n)\} = \emptyset$, dunque non c'è nessuna verifica da fare.
<u>Antisimmetria</u> $f < g \wedge f > g \Rightarrow f(k) < g(k) \wedge f(k) > g(k)$,
dove $k = min\{n|f(n) \neq g(n)\}$, ma poichè $f(k), g(k) \in \mathbb{N}$, la relazione a destra della freccia non può verificarsi, quindi per il principio del buon ordinamento $\{n|f(n) \neq g(n)\} = \emptyset$, ma questo vuol dire $f = g$
<u>Transitività</u> $f < g \wedge g < h \Rightarrow f < h$
Per ipotesi abbiamo che $f(k) < g(k)$, dove $k = min\{n|f(n) \neq g(n)\}$ e inoltre $g(k') < h(k')$, dove $k' = min\{n|g(n) \neq h(n)\}$
Se $k < k'$ allora sicuramente, per come è definito k', $g(k) = h(k)$,
quindi $f(k) < g(k) = h(k)$
inoltre $k = min\{n|f(n) \neq g(n)\} = min\{n|f(n) \neq h(n)\}$, quindi $f < h$
Se $k > k'$ allora $f(k') = g(k') < h(k')$, un ragionamento analogo al precedente ci porta alla tesi
Nel caso $k = k'$ si ha che $f(k) < g(k) < h(k)$ e $k = min\{n|f(n) \neq h(n)\}$, quindi $f < h$.
<u>Totalità</u> $\neg(f < g) \Rightarrow \neg[f(k) < g(k)]$ dove $k = min\{n|f(n) \neq g(n)\} \Rightarrow$ (per come k è definito) $\neg[f(k) < g(k)] \wedge f(k) \neq g(k) \Rightarrow f(k) > g(k) \Rightarrow f > g$

1. Se $(A, <)$ è ordinato e $\emptyset \neq X \subset A$ è finito, allora $\exists^{no} Max(X)$ e $min(X)$
2. $(n, <)$ è un buon ordine.
3. Se $(A, <)$ è un buon ordine infinito, allora $\exists \psi : \omega \to A$, che preserva l'ordine.

1) Poiché X è un insieme finito $\exists m \in \omega$, tale che $|X| = |m|$, inoltre X è un sottoinsieme di A, dunque è ordinato. Possiamo dunque scrivere
$X = \{x_0 < x_1 < ... < x_{m-1}\}$, quindi $min(X) = x_0$ e $Max(X) = x_{m-1}$.
2) Poichè $(n, <)$ è un insieme ordinato e tutti i suoi sottoinsiemi sono finiti, si applica il punto precedente, per dimostrare che tutti i suoi sottoinsiemi hanno minimo.
3)Poichè A è infinito, sappiamo che $|\omega| \leq |A|$, dunque $\exists g : \omega \to A$, iniettiva, dunque $|\omega| = |g(\omega)|$, inoltre $g(\omega) \subset A$, dunque è bene ordinato. Quindi si può scrivere $g(\omega) = \{\chi_0 < \chi_1 < ... < \chi_n < ...\}$. Definiamo adesso induttivamente una famiglia numerabile di insiemi:

$$\begin{cases} E_0 = g(\omega) \\ E(n) = E_{n-1} \backslash \{min(E_{n-1})\} \end{cases}$$

La funzione $\psi : \omega \to A$, tale che $\psi(n) = min(E_n)$ è la funzione cercata.

Esercizi dalla dispensa 5, 2.4, 2.5, 2.12

Sia $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$, isomorfismi.
2.4) Sicuramente $(\{(a,0)|a \in A\},<) \simeq (\{(f(a),0)|f(a) \in A'\},<)$, perché f è un isomorfismo quindi rispetta l'ordine, analogamente
$(\{(b,0)|b \in B\},<) \simeq (\{(g(b),0)|g(b) \in B'\},<)$, ponendo
$(f(a),0) < (g(b),1)\forall f(a) \in A', \forall g(b) \in B'$, si ha l'isomorfismo cercato:
$A \oplus B \to A' \oplus B'$, tale che $(a,0) \to (f(a),0)$ e $(b,1) \to (g(b),1)$
2.5) Definiamo $F : (A \oplus B) \oplus C \to A \oplus (B \oplus C)$tale che $F((a,0),0) = (a,0)$ e $F((b,1),0) = ((b,0),1)$ e $F(c,1) = ((c,1),1)$, è facile verificare che F è ben definita e mantiene l'ordine.
2.12) La funzione $F : A \otimes B \to A' \otimes B'$, tale che $F(a,b) = (f(a),g(b))$, è ben definita e rispetta l'ordine.
Infatti $(a_1,b_1) < (a_2,b_2) \Leftrightarrow b_1 < b_2 \vee (b_1 = b_2 \wedge a_1 < a_2) \Leftrightarrow g(b_1) < g(b_2) \vee (g(b_1) = g(b_2) \wedge f(a_1) < f(a_2)) \Leftrightarrow (f(a_1),g(b_1)) < (f(a_2),g(b_2))$

A finito, B infinito buon ordine senza massimo. Allora $A \otimes B \simeq B$

Se A è finito allora $\exists n \in \omega$, tale che $|A| = |n|$ e poiché A è ordinato $(A,<) \simeq (n,<)$ quindi $A \otimes B \simeq (\{0,...,n-1\} \otimes B,<)$. Sia $b_0 = minB$, si consideri $f : \{0,...,n-1\} \otimes B \to B$, così definita:
$(0,b_0) \to b_0$, $(1,b_0) \to min(B \backslash \{b_0\}) = b_1$, $(2,b_0) \to min(B \backslash \{b_0,b_1\}) = b_2$ ...
$(n-1,b_0) \to min(B \backslash \{b_0,...,b_{n-2}\}) = b_{n-1}$, $(0,b_1) \to b_n =$ ..., ...
f è l'isomorfismo cercato, infatti mantiene l'ordine.

$n,m \in \omega$, allora
1. $n \oplus m \simeq n + m$
2. $n \otimes m \simeq n \cdot m$

1) Sappiamo che $n + m = |A \cup B|$, dove $|A| = n$ e $|B| = m$ e $A \cap B = \emptyset$, invece $n \oplus m = |\{(j,0)|j \in n\} \vee \{(k,1)|k \in m\}|$.
Scrivendo $A = \{a_0,a_1,...,a_{n-1}\}$ e $B = \{b_0,b_1,...,a_{m-1}\}$,
allora $A \cup B = \{a_0,...,a_{n-1},b_0,...,b_{m-1}\}$, rinominando gli elementi
$A \cup B = \{c_0,...,c_{n-1},c_n,...,c_{n+m-1}\}$.
Definiamo due funzioni $A \cup B \to n + m \to n \oplus m$, tali che

$$c_j \to j \to \begin{cases} (j,0), j \leq n-1 \\ (j-n,1), n \leq j \leq n+m-1 \end{cases}$$

La prima è una bigezione, la seconda un isomorfismo.
2) Definiamo queste due funzioni $A \times B \to n \cdot m \to n \otimes m$
$(a_i,b_i) \to b_i n + a_i \to (a_i,b_i)$, la prima freccia è una bigezione, analoga a una già presentata, la seconda è un isomorfismo, infatti ripsetta l'ordine antilessicografico. $b_i n + a_i < b_j n + a_j \Leftrightarrow b_i < b_j \vee (b_i = b_j \wedge a_i < a_j)$

Trovare un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ isomorfo a:
1.$\omega \oplus \omega$
2.$\omega \otimes \omega$

1) Si consideri $\mathbb{Q} \supset \{q \in \mathbb{Q} | q = 1 - \frac{1}{n} \vee q = n+1, n \in \mathbb{N}\} =$
$\{q \in \mathbb{Q} | q = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{q \in \mathbb{Q} | q = n+1, n \in \mathbb{N}\} = A \cup B$, è facile verificare che i due insiemi sono disgiunti e sono due copie di ω, isomorfe a ω, infatti mantengono l'ordine. Dunque $(A, <) \simeq (\omega \times \{0\}, <)$ e $(B, <) \simeq (\omega \times \{1\}, <)$, si nota inoltre che $a < b, \forall a \in A, \forall b \in B$. Quindi $(A \cup B, <) \simeq \omega \oplus \omega$
2) Si consideri $\mathbb{Q} \supset A = \{q \in \mathbb{Q} | q = (n+1) - \frac{1}{m} | n, m \in \mathbb{N}\} \simeq \{(m,n) | m, n \in \omega\}$.
È facile verificare che, dati $a, a' \in A$, tali che
$a = (n+1) - \frac{1}{m}$ e $a' = (n'+1) - \frac{1}{m'}$, allora $a = a' \Leftrightarrow (m,n) = (m',n')$.
Inoltre vale l'ordine antilessicografico: $a <_{\mathbb{Q}} a' \Leftrightarrow (m,n) < (m',n') \Leftrightarrow$
$n < n' \vee (n' = n \wedge m < m')$, quindi a tutti gli effetti $(A, <) \simeq \omega \otimes \omega$

$A, B \subseteq \mathbb{R}$ *buoni ordini* $\Rightarrow A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ *buon ordine.*

$A + B \subseteq \mathbb{R}$, quindi è ordinato. Preso $S \subseteq A + B$ non vuoto cerchiamone il minimo, consideriamo:
$\emptyset \neq A_S = \{a \in A | \exists b \in B, \exists s \in S | a + b = s\} \subseteq A$
$\emptyset \neq B_S = \{b \in B | \exists a \in A, \exists s \in S | a + b = s\} \subseteq B$
Per definizione $S \subseteq A_S + B_S$. Sia $a_0 = min(A_S)$ e $b_0 = min(B_S)$. Consideriamo:
$B_{a_0} = \{b \in B | b + a_0 \in S\} \neq \emptyset$ e $A_{b_0} = \{a \in A | a + b_0 \in S\} \neq \emptyset$, siano inoltre $\bar{a} = min(A_{b_0})$ e $\bar{b} = min(B_{a_0})$.
Si verifica facilmente che $\forall c \in S$, tale che $c \neq a_0 + \bar{b} \wedge c \neq b_0 + \bar{a}$, si ha $c > a_0 + \bar{b} \wedge c > b_0 + \bar{a}$. Inoltre $a_0 + \bar{b}$, $b_0 + \bar{a} \in \mathbb{R}$, quindi sono confrontabili. Per cui $min(S) = min\{a_0 + \bar{b}, b_0 + \bar{a}\}$.

6 Ordinali

$\omega_1 = \{\alpha$ ordinale $||\alpha| \leq |\omega|\}$. Dimostra che:
1.È un insieme
2.È un ordinale non numerabile
3.È il più piccolo tra gli ordinali più grandi di ogni ordinale numerabile.

L'esercizio è stato corretto a lezione nei suoi primi due punti, il tezo è stato nuovamente assegnato per esercizio
1) Sia $\mathcal{B}$ l'insieme dei buoni ordini su ω, $\mathcal{B}$ è un insieme per separazione, infatti si può scrivere:
$\mathcal{B} = \{(A,<) \in \mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\omega \times \omega) | A \subset \omega$ è un buon ordine su $A\}$. Sia F una funzione classe tale che ad ogni buon ordine su ω associa l'unico ordinale ad esso isomorfo. $F(\mathcal{B}) = \{F(A,<)|(A,<) \in \mathcal{B}\}$ è un insieme per rimpiazzamento, dimostriamo che $F(\mathcal{B}) = \omega_1$.
Se $(A,<) \in \mathcal{B}$ e $\alpha \simeq (A,<)$, allora $|\alpha| = |A| \leq |\omega|$, quindi sicuramente $F(B) \subseteq \omega_1$.
Se invece $\alpha \in \omega_1$, allora $\exists f : \alpha \to \omega$ iniettiva, quindi $\exists A = Immf \subseteq \omega$ tale che $f : \alpha \to A$ biunivoca. Definisco $f(\gamma) \prec f(\delta) \Leftrightarrow \gamma \in \delta$ banalmente $(\alpha, \in) \simeq (A, \prec)$, quindi $\alpha \subseteq F(\mathcal{B})$. Tesi.
2) ω_1 è un insieme transitivo di ordinali, quindi è un ordinale. Se ω_1 fosse numerabile avremmo $|\omega_1| \leq |\omega|$, quindi per definizione $\omega_1 \in \omega_1$, assurdo per un ordinale.
3) Supponiamo di avere un ordinale α, tale che $\alpha \in \omega_1$, quindi $\alpha \subsetneq \omega_1$, se α è più grande di ogni ordinale numerabile significa che contiene ogni ordinale numerabile, quindi $\omega_1 \subseteq \alpha$, quindi $\omega_1 = \alpha$, da cui l'assurdo $\omega_1 \in \omega_1$.

Dimostrare
1. α è ordinale e $\beta \in \alpha$ è il suo massimo, allora $\alpha = \beta \cup \{\beta\} = \beta + 1$
2. λ è un ordinale senza massimo, allora $\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma$
3. Sia X un insieme di ordinali, allora $\bigcup_{\gamma \in X} \gamma = \sup X$ (a) e $\bigcap_{\gamma \in X} \gamma = \min X$ (b).

1) Dimostriamo anzitutto l'uguaglianza $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$.
$\boxed{\supseteq}$ Per ipotesi $\beta \in \alpha$, quindi $\{\beta\} \subseteq \alpha$, inoltre per transitività $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta \subseteq \alpha$, quindi $\beta \cup \{\beta\} \subseteq \alpha$.
$\boxed{\subseteq}$ Poiché β è massimo $\forall \gamma \in \alpha$ si ha che $\gamma = \beta \vee \gamma \in \beta$, che porta alla tesi.
Adesso dimostriamo $\beta \cup \{\beta\} = \beta + 1$.
Supponiamo che esista γ, tale che $\beta \in \gamma \in \beta \cup \{\beta\}$.
Allora $\gamma \in \beta \cup \{\beta\} \Rightarrow \gamma \in \beta \vee \gamma = \beta$, se $\gamma = \beta$ si ha $\beta \in \beta$, assurdo per un ordinale.
Se $\gamma \in \beta$, si ha $\beta \in \gamma \in \beta$, da cui si ha $\beta \subseteq \gamma \subseteq \beta$ e quindi $\beta = \gamma$, dà lo stesso assurdo di sopra.

2)
$\boxed{\supseteq}$ Se $\gamma < \lambda$, allora $\gamma \in \lambda$. Per transitività $\forall \alpha \in \gamma$ e $\forall \gamma \in \lambda$, si ha che $\alpha \in \lambda$, quindi $\bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma \subseteq \lambda$
$\boxed{\subseteq}$ Poiché λ non ha massimo, $\forall \mu \in \lambda\ \exists \xi$, tale che $\mu \in \xi \in \lambda$, quindi per transitività $\mu \in \bigcup_{\gamma\in\lambda} \gamma$
3) (a) Bisogna dimostrare che $\bigcup_{\gamma\in X} \gamma$ è il minimo dei maggioranti. Sia $\alpha \in X$, se $\alpha = \max X$ si ha che $\bigcup_{\gamma\in X} \gamma = \alpha$, perché $\forall \beta \in X$ si ha $\beta \in \alpha$, quindi $\beta \subseteq \alpha$. Essendo il massimo, α è il sup. Se invece $\alpha \neq \max X$ (e\ o non esiste $\max X$), allora sicuramente $\alpha \in X \Rightarrow \alpha \subseteq \bigcup_{\gamma\in X} \gamma$. Supponiamo per assurdo che $\bigcup_{\gamma\in X} \gamma$ non sia il minimo dei maggioranti, cioè esiste δ maggiorante tale $\delta \in \bigcup_{\gamma\in X} \gamma$, quindi $\delta \subset \bigcup_{\gamma\in X} \gamma$. Poichè il contenimento è stretto (altrimenti si avrebbe l'assurdo $\delta \in \delta$) e l'unione presa in considerazione è un ordinale (poiché insieme transitivo di ordinali), si ha che $\exists \sigma \in X$, tale che $\delta \subset \sigma \Rightarrow \delta \in \sigma \Rightarrow$ δ non è maggiorante, assurdo.
(b) Dalla teoria sappiamo che ogni insieme di ordinali ammette minimo, dunque si può bene ordinare X, quindi $X = \{\gamma_0 \in \gamma_1 \in ... \in \gamma_n \in ...\}$, cioè

$$X = \{\gamma_0 \subset \gamma_1 \subset ... \subset \gamma_n \subset ...\}$$

da cui si ricava $\bigcap_{\gamma\in X} \gamma = \gamma_0$, tesi.

Dimostrare
1. $\alpha \cdot \beta \simeq \alpha \otimes \beta$
2. $\alpha^\beta \simeq Exp(\alpha, \beta)$

1) Si procede per induzione transfinita su β.
Se $\beta = 0$, si ha $\alpha \cdot 0 = 0 = \emptyset$, e dall'altra parte $\alpha \otimes 0 = \alpha \otimes \emptyset = \emptyset$
Se β è successore si ha che esiste γ tale che $\beta = \gamma + 1$
$\alpha \cdot (\gamma + 1) = \alpha \cdot \gamma + \alpha \simeq (\alpha \otimes \gamma) + \alpha \simeq (\alpha \otimes \gamma) \oplus \alpha$
La prima uguaglianza segue dalla definizione del prodotto di ordinali, il primo isomorfismo dall'ipotesi induttiva, il secondo dal lemma analogo sulle somme di ordinali.
$\alpha \otimes (\gamma + 1) \simeq \alpha \otimes (\gamma \oplus 1) = (\alpha \otimes \gamma) \oplus (\alpha \otimes 1) \simeq (\alpha \otimes \gamma) \oplus \alpha$
Il primo isomorfismo deriva dal lemma analogo sulla somma fra ordinali, la prima uguaglianza deriva da una proprietà dimostrata su somme e prodotti fra buoni ordini.
Se $\beta = \gamma$, limite.
Per ipotesi induttiva $\forall \gamma < \lambda \exists ! \psi_\gamma : \alpha \cdot \gamma \to \alpha \otimes \gamma$, isomorfismo. I vari ψ_γ sono compatibili, cioè $\gamma < \gamma' < \lambda \Rightarrow \psi_\gamma = \psi_{\gamma'}|_{\alpha\cdot\gamma}$. Quindi la funzione $\Psi = \bigcup_{\gamma<\lambda} \psi_\gamma$ è ben definita ed è l'isomorfismo cercato.

2) Si procede sempre per induzione transfinita su β.
Se $\beta = 1$ si ha che $\alpha^1 = \alpha^0 \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha$ e, d'altra parte, $Exp(\alpha, 1) \simeq \alpha$
Se $\beta = \gamma + 1$, si ha che $\alpha^{\gamma+1} = \alpha^\gamma \cdot \alpha \simeq Exp(\alpha, \gamma) \otimes \alpha$, dove l'isomorfismo deriva dall'ipotesi induttiva.
Diciamo adesso $Exp(\alpha, \gamma) \otimes \alpha \simeq Exp(\alpha, \gamma + 1)$, che dà la tesi:
infatti $\Gamma : Exp(\alpha, \gamma + 1) \to Exp(\alpha, \gamma) \otimes \alpha$, tale che $\Gamma(\phi) = (\phi|_\gamma, \phi(\gamma + 1))$, è un isomorfismo.
Se $\beta = \lambda$ è limite. $\alpha^\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^\gamma \boxed{=} \bigcup_{\gamma<\lambda} Exp(\alpha, \gamma) = Exp(\alpha, \lambda)$.
Dove l'uguaglianza riquadrata viene dall'ipotesi induttiva.

Dimostrare che $\gamma < \delta \Rightarrow \omega^\gamma + \omega^\delta = \omega^\delta$

$\gamma < \delta \Rightarrow \exists \xi | \gamma + \xi = \delta$, quindi
$\omega^\gamma + \omega^\delta = \omega^\gamma + \omega^{\gamma+\xi} = \omega^\gamma + \omega^\gamma \cdot \omega^\xi = \omega^\gamma(1 + \omega^\xi) = \omega^\gamma \bigcup_{\alpha<\omega^\xi}(1+\alpha) \boxed{=} \omega^\gamma \bigcup_{\beta<\omega^\xi} \beta = \omega^\gamma \omega^\xi = \omega^\delta$.
Dove le uguaglianze derivano da proprietà già dimostrate, quella riquadrata dall'uguaglianza dei due sup.

Dimostrare che $\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow$
1. $\alpha_1 + \beta \leq \alpha_2 + \beta$
2. $\alpha_1 \cdot \beta \leq \alpha_2 \cdot \beta$
3. $\alpha_1^\beta \leq \alpha_2^\beta$

In tutti e tre i casi si procede per induzione transfinita su β.
1) Se $\beta = 0$ si ritrova l'ipotesi.
Se $\beta = \delta + 1$, si ha che $\alpha_2 + \delta + 1 = (\alpha_2 + \delta) + 1$, per ipotesi induttiva $\alpha_1 + \delta \leq \alpha_2 + \delta$, quindi, per definizione, $\exists \gamma' | \alpha_1 + \delta + \gamma' = \alpha_2 + \delta$, quindi si ha $(\alpha_2 + \delta) + 1 = (\alpha_1 + \delta) + (\gamma' + 1)$. Adesso, $1 \leq \gamma' + 1$(si verifica facilmente per induzione transifinita), quindi $\exists \xi | \gamma' + 1 = 1 + \xi$ e di conseguenza $(\alpha_2 + \delta) + 1 = (\alpha_1 + \delta) + (\gamma' + 1) = (\alpha_1 + \delta) + (1 + \xi)$, da cui la tesi $\alpha_1 + (\delta + 1) \leq \alpha_2 + (\delta + 1)$.
Se $\beta = \lambda$ limite, per ipotesi induttiva si ha che $\bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_1 + \gamma < \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_2 + \gamma$, da cui $\alpha_1 + \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma < \alpha_2 + \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma$. Le due disuguaglianze sono equivalenti, poiché gli insiemi considerati hanno a due a due gli stessi sup, da qui la tesi.
2) Se $\beta = 0$ si ha $0 = \alpha_1 \cdot 0 \leq \alpha_2 \cdot 0 = 0$
Se $\beta = \delta + 1$, si ha $\alpha_1 \cdot (\delta + 1) = \alpha_1 \cdot \delta + \alpha_1 \leq (\alpha_1 \cdot \delta) + \alpha_2 \leq (\alpha_2 \cdot \delta) + \alpha_2 = \alpha_2(\delta + 1)$, dove la prima disuguaglianza si ha per il punto 1 dell'esercizio e la seconda per l'ipotesi induttiva.
Se $\beta = \lambda$ limite si ha, per ipotesi induttiva $\alpha_1 \cdot \gamma \leq \alpha_2 \cdot \gamma \forall \gamma < \lambda$, quindi $\bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_1 \cdot \gamma \leq \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_2 \cdot \gamma$, da cui $\alpha_1 \cdot \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma \leq \alpha_2 \cdot \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma$, da cui la tesi.
3) Se $\beta = 0$ si ha che $1 = \alpha_1^0 \leq \alpha_2^0 = 1$
Se $\beta = \delta + 1$, si ha che $\alpha_2^{\delta+1} = \alpha_2^\delta \cdot \alpha_2 \geq \alpha_1^\delta \cdot \alpha_2$ per ipotesi induttiva e per il punto 2. Inoltre per ipotesi $\alpha_2 = \alpha_1 + \xi$, quindi $\alpha_1^\delta \cdot \alpha_2 = \alpha_1^\delta(\alpha_1 + \xi) = \alpha_1^{\delta+1} + \alpha_1^\delta \cdot \xi > \alpha_1^{\delta+1}$. Tesi.

Se $\beta = \lambda$ limite, si ha $\alpha_1^\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_1^\gamma \leq \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha_2^\gamma = \alpha_2^\lambda$, dove la disuguaglianza si ha per ipotesi induttiva.

Dimostrare che:
1. α ordinale additivo $\Rightarrow \alpha$ ordinale limite.
2. α è additivo $\Leftrightarrow \forall\beta < \alpha,\ \beta + \alpha = \alpha$

1) Supponiamo che α non sia limite, cioè $\exists\beta = \max\alpha$ quindi, come già dimostrato $\alpha = \beta\cup\{\beta\} = \beta+1$ e, applicando la definizione di ordinale additivo,$\beta < \alpha$, $1 < \alpha \Rightarrow \beta + 1 < \alpha$, cioè $\alpha < \alpha$, assurdo.
2)$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo che α non sia additivo, cioè $\exists^{no}\beta < \alpha, \gamma < \alpha$ tale che $\beta + \gamma \geq \alpha$. Se $\gamma < \alpha$ allora $\exists\xi$ tale che $\gamma + \xi = \alpha$, per proprietà già dimostrate, $\alpha \leq \beta + \gamma < \beta + (\gamma + \xi) = \beta + \alpha = \alpha$, assurdo.
$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\beta$ ordinale, si ha che $\beta \geq 0$, quindi $\beta+\alpha \geq 0+\alpha = \alpha$, suppongo $\beta+\alpha \neq \alpha$, quindi $\beta + \alpha > \alpha$, ma α è ordinale limite, quindi, per un esercizio svolto a lezione, lo è anche $\beta + \alpha$, quindi $\bigcup_{\gamma<\alpha} \beta + \gamma > \bigcup_{\gamma<\alpha} \gamma$, ma, poiché $\gamma < \alpha$, per ipotesi $\beta + \gamma < \alpha$, quindi $\exists\xi < \alpha$ tale che $\beta + \gamma < \xi$ (infatti α è limite), ma quindi $\bigcup_{\gamma<\alpha} \beta + \gamma \leq \bigcup_{\gamma<\alpha} \gamma$, assurdo.

Dimostrare che $\gamma < \omega_1 \Rightarrow \gamma \leq \omega^\gamma$

Si procede per induzione transfinita. Se $\gamma = 0$ si ha $0 \leq \omega^0 = 1$, vero.
Se $\gamma = \delta + 1$ successore si ha per ipotesi induttiva $\delta \leq \omega^\delta$, quindi
$\delta + 1 \leq \omega^\delta + 1 \leq \omega^\delta + \omega^\delta = \omega^\delta \cdot 2 \leq \omega^\delta \cdot \omega = \omega^{\delta+1}$.
Se $\gamma = \lambda$ limite si ha che per ipotesi induttiva $\forall\beta < \lambda$ si ha $\beta \leq \omega^\beta$, da cui $\bigcup_{\beta<\lambda} \beta \leq \bigcup_{\beta<\lambda} \omega^\beta \Rightarrow \lambda \leq \omega^\lambda$

Calcolare $(\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5) \cdot \omega \cdot 3 + (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5) \cdot 5$

Calcolo intanto
$\boxed{(\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5) \cdot 5} = \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5 = \boxed{\omega^2 \cdot 15 + \omega \cdot 15 + 5}$,
da cui si può dedurre che
$(\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5) \cdot n = \omega^2 \cdot 3n + \omega \cdot 15 + 5$, da cui
$(\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5) \cdot n \cdot 3 = ((\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5) \cdot n) \cdot 3 = (\omega^2 \cdot 3n + \omega \cdot 15 + 5) \cdot 3 = \omega^2 \cdot 3n + \omega \cdot 15 + 5 + \omega^2 \cdot 3n + \omega \cdot 15 + 5 + \omega^2 \cdot 3n + \omega \cdot 15 + 5 = \omega^2 \cdot 3 \cdot n \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5$
Inoltre $\boxed{(\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5) \cdot \omega \cdot 3} = \bigcup_{n<\omega} (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5) \cdot n \cdot 3$
In generale $\omega^2 \cdot 3 \cdot n \cdot 3 < \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5) \cdot n \cdot 3 < (\omega^2 \cdot 3 + \omega^2) \cdot n \cdot 3 = \omega^2 \cdot 4 \cdot n \cdot 3$,
passando al limite $\bigcup_{n<\omega} (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5) \cdot n \cdot 3 = \boxed{\omega^3 \cdot 3}$
Da cui, sommando i due risultati riquadrati,
$(\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5) \cdot \omega \cdot 3 + (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 15 + 5) \cdot 5 = \omega^3 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 15 + \omega \cdot 15 + 5$

7 Cardinali

Dimostrare che la funzione $\aleph$ è strettamente crescente

Bisogna dimostrare che $\alpha < \beta \Rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$. Se $\alpha < \beta$ si ha che $\exists \gamma > 0$ tale che $\alpha + \gamma = \beta$, dimostriamo la proprietà per induzione transfinita su γ.
Se $\gamma = 1$ si ha che $\aleph_\beta = \aleph_{\alpha+1} = \mathbb{H}(\aleph_\alpha) = \{\xi | |\xi| \leq \aleph_\alpha\} \supset \aleph_\alpha$, l'ultima inclusione è stretta perchè $\aleph_\alpha + 1$, visto come ordinale, appartiene a $\mathbb{H}(\aleph_\alpha)$ ma non a $\aleph_\alpha$, da qui $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.
Se $\gamma = \delta + 1$ successore. si ha $\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+\delta} < \aleph_{\alpha+(\delta+1)} = \aleph_{\alpha+\gamma} = \aleph_\beta$, dove la prima disuguaglianza deriva dall'ipotesi induttiva e la seconda dal passo base.
Se $\gamma = \lambda$ limite, si ha che anche $\beta = \alpha + \lambda$ è limite, quindi, per definizione, $\bigcup_{\xi<\alpha+\lambda} \aleph_\xi = \aleph_{\alpha+\lambda} = \aleph_\beta$, ma per ipotesi induttiva $\aleph_\alpha < \bigcup_{\xi<\alpha+\lambda} \aleph_\xi = \aleph_\beta$, tesi.

Notazione: Siano $\kappa = |A|$, $\mu = |B|$, $\gamma = |C|$, $\kappa' = |A'|$, $\mu' = |B'|$ e A, B, C, A', B' insiemi a due a due disgiunti.

Verificare che per la somma e il prodotto di cardinali valgono le proprietà commutativa, associativa e distributiva.

Commutativa somma. $\kappa+\mu = |A \cup B| = |B \cup A| = \mu+\kappa$, infatti $A \cup B = B \cup A$
Associativa somma. $(\kappa + \mu) + \gamma = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = \kappa + (\mu + \gamma)$, infatti $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
Commutativa prodotto. $\kappa \cdot \mu = |A \times B| = |B \times A| = \mu \cdot \kappa$, infatti $F : A \times B \to B \times A$, tale che $F : (a, b) \to (b, a)$ è una bigezione.
Associativa prodotto. $\kappa \cdot (\mu \cdot \gamma) = |A \times (B \times C)| = |(A \times B) \times C| = (\kappa \cdot \mu) \cdot \gamma$, infatti $F : A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$, tale che $F : (a, (b, c)) \to ((a, b), c)$ è una bigezione.
Distributiva. $\kappa \cdot (\mu + \gamma) = |A \times (B \cup C)| = |(A \times B) \cup (A \times C)| = \kappa \cdot \mu + \kappa \cdot \gamma$, infatti $B \cap C = \emptyset \Rightarrow A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Verificare che $\sum_{i\in I}(\sum_{j\in I} k_{i,j}) = \sum_{j\in I}(\sum_{i\in I} k_{i,j}) = \sum_{(i,j)\in I\times I} k_{i,j}$

Siano $k_{i,j} = |A_{i,j}|$ e $A_{i,j} \cap A_{i',j'} = \emptyset \forall (i, j) \neq (i', j') \in I \times I$, si ha dunque che $\bigcup_{i\in I}(\bigcup_{j\in I} A_{i,j}) = \bigcup_{j\in I}(\bigcup_{i\in I} A_{i,j}) = \bigcup_{(i,j)\in I\times I} A_{i,j}$, dall'uguaglianza delle cardinalità deriva la tesi.

Verificare che la definizione di $\leq$ nell'aritmetica cardinale è ben posta.

Siano $\kappa = |A|$ e $\mu = |B|$. Se esiste $f : A \to B$ iniettiva si ha $|A| \leq |B|$, quindi $\kappa \leq \mu$.

Dimostrare che
1.$\kappa' \leq \kappa \wedge \mu' \leq \mu \Rightarrow \kappa'^{\mu'} \leq \kappa^{\mu}$
2. $\kappa^{\mu} \cdot \kappa^{\mu'} = \kappa^{\mu+\mu'}$
3. $\kappa + \kappa = \kappa \cdot 2$

1) Bisogna dimostrare che $|Fun(\mu', \kappa')| \leq |Fun(\mu, \kappa)|$, sicuramente, per un esercizio già svolto, si ha che $|Fun(\mu', \kappa')| = |Fun(B', A')|$ e
$|Fun(\mu, \kappa)| = |Fun(B, A)|$.
Per ipotesi esiste $g : B' \to B$ iniettiva, si ha dunque che $Imm(g) \subseteq B$ e $|Imm(g)| = |B'|$. Analogamente esiste $h : A \to A'$ iniettiva, quindi con le proprietà già esposte. Si ha quindi

$$|Fun(B', A')| = |Fun(Imm(g), Imm(h))| \leq |Fun(B, A)|.$$

La disuguaglianza dà la tesi.
2) Basta dimostrare che $|Fun(B, A) \times Fun(B', A)| = |Fun(B \cup B', A)|$, cioè trovare una bigezione $G : Fun(B \cup B', A) \to Fun(B, A) \times Fun(B', A)$. Scegliendo G, tale che $G(g) = (g|_B, g|_{B'})$ si ha una bigezione, poiché $B \cap B' = \emptyset$.
3) Bisogna dimostrare che $\kappa + \kappa = |A \cup D| = |A \times 2| = \kappa \cdot 2$, dove $\kappa = |A| = |D|$ e $A \cap D = \emptyset$, esiste dunque $g : D \to A$, bigettiva. Definiamo $G : A \cup D \to A \times 2$ tale che $G(a) = (a, 0) \forall a \in A$ e $G(d) = (g(d), 1) \forall d \in D$, tale funzione è bigettiva ed è ben definita, poiché A e D sono insiemi disgiunti.

Dimostrare che $\{\kappa_i | i \in I\}$ *è un insieme di cardinali.*

Definita la funzione-classe $F : I \to ORD$ tale che $F(i) = \kappa_i$ si ha che $Imm(F)$ è un insieme per assioma di rimpiazzamento.

Se vale GCH cosa si può dire di $\aleph_\omega^{\aleph_0}$?

Se vale GCH si ha che $\forall n \in \omega, n \geq 1 \Rightarrow \aleph_n^{\aleph_0} = \aleph_n$, per cui
$\aleph_\omega^{\aleph_0} = (\sup_{n<\omega} \aleph_n)^{\aleph_0} = \sup_{n<\omega} \aleph_n = \aleph_\omega$

Data la successione di cardinali $\begin{cases} k_0 = \aleph_0 \\ k_{n+1} = 2^{k_n} \end{cases}$ *, sia* $k = \sup_{k<\omega} k_n$.
k *è il più piccolo limite forte* $> \aleph_0$

A lezione è già stato dimostrato che k è limite forte, dimostriamo che è il più piccolo limite forte $> \aleph_0$. Se m fosse limite forte tale che $\aleph_0 < m < k$, si ha che $m < sup_{n<\omega} k_n \Rightarrow \exists n < \omega$ tale che $k_n \leq m < k_{n+1} = 2^{k_n}$, per un lemma visto a lezione sui limiti forti si ha $k_n < m \Rightarrow 2^{k_n} = k_{n+1} < m$, da cui si ha l'assurdo.

8 Cofinalità

Dimostrare che $Cof(Cof(A)) = Cof(A)$

$\boxed{\leq}$ Dalla definizione di cofinalità si deduce facilmente che $Cof(B) \leq |B|$, da cui scegliendo B, tale che $|B| = Cof(A)$ si ha $Cof(Cof(A)) \leq Cof(A)$
$\boxed{\geq}$ Sfruttando la proprietà già dimostrata, secondo cui $Cof_1(C) = Cof(C)$, dimostriamo che $Cof_1(A) \leq Cof_1(Cof_1(A))$, si ha che
$Cof_1(A) = min\{\alpha \text{ ordinale} | \exists f : \alpha \to A \text{ illimitata}\} = \alpha_1$
$Cof_1(Cof_1(A)) = min\{\beta \text{ ordinale} | \exists g : \beta \to \alpha_1 \text{ illimitata}\} = \beta_1$, consideriamo: $f_1 : \alpha_1 \to A$ e $g_1 : \beta_1 \to \alpha_1$ illimitate, si ha quindi $f_1 \circ g_1 : \beta_1 \to \alpha$ è illimitata, quindi $\beta_1 \geq Cof(A)$, si ha la tesi.

9 Gerarchia di Von Neumann

1. (GCH) Quali sono gli ordinali α tali che $|V_\alpha| = \aleph_\alpha$?
2.$\forall\alpha \in ON, \alpha \subseteq V_\alpha$, ma $\alpha \notin V_\alpha$
3. $x \subseteq A \in V_\beta \Rightarrow x \in V_\beta$
4.$\forall\alpha \in ON, V_\alpha \notin V_\alpha$

1)Notiamo intanto che $|V_0| = 0$ e $|V_1| = 1$.
$\forall n \in \omega$, tale che $n \neq 0, 1$ si ha che $|V_n| = 2^{n-1} \neq n$, proseguendo la scalata si trova
$|V_\omega| = \aleph_0$,
$|V_{\omega+1}| = 2^{\aleph_0} =^{GCH} \aleph_1$, ...,
$|V_{\omega+n}| = \aleph_n$, quindi
$|V_{\omega\cdot 2}| = |V_{\omega+\omega}| = |\bigcup_{n<\omega} V_{\omega+n}| = \bigcup_{n<\omega} \aleph_n = \aleph_\omega$,
$|V_{\omega\cdot 2+1}| = 2^{\aleph_\omega} =^{GCH} \aleph_{\omega+1}$, ...,
$|V_{\omega\cdot 2+n}| = \aleph_{\omega+n}$, ...,
$|V_{\omega\cdot 3}| = |V_{\omega\cdot 2+\omega}| = |\bigcup_{n<\omega} V_{\omega\cdot 2+n}| = \bigcup_{n<\omega} \aleph_{\omega+n} = \aleph_{\omega\cdot 2}$, ...,
$|V_{\omega\cdot n}| = \aleph_{\omega\cdot(n-1)}$,
$|V_{\omega^2}| = |V_{\omega\cdot\omega}| = |\bigcup_{n<\omega} V_{\omega\cdot n}| = \bigcup_{n<\omega} \aleph_{\omega\cdot(n-1)} = \bigcup_{n<\omega} \aleph_{\omega\cdot n} = \aleph_{\omega^2}$.
Adesso bisogna dimostrare che $\forall\beta \geq \omega^2, |V_\beta| = \aleph_\beta$, si procede per induzione transfinita.
$\underline{\beta = \omega^2}$
Appena visto
$\underline{\beta = \gamma + 1}$
$|V_\gamma| = \aleph_\gamma \Rightarrow |V_{\gamma+1}| = |\mathcal{P}(V_\gamma)| = 2^{\aleph_\gamma} =^{GCH} \aleph_{\gamma+1}$
$\underline{\beta = \lambda}$
$|V_\lambda| = |\bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha| =^{hp.ind.} \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha = \aleph_\lambda$.
In conclusione $|V_\alpha| = \aleph_\alpha \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = 1 \vee \alpha \geq \omega^2$
2) Si procede per induzione transfinita.
$\underline{\alpha = \emptyset}$
$\emptyset \subseteq \emptyset$, ma $\emptyset \notin \emptyset$
$\underline{\alpha = \beta + 1}$
Per ipotesi induttiva si ha $\beta \subseteq V_\beta$, ma $\beta \notin V_\beta$, sappiamo inoltre che $\beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, inoltre $\beta \subseteq V_\beta$, ma $\{\beta\} \not\subseteq V_\beta$, perché altrimenti avremmo $\beta \in V_\beta$, contro le ipotesi. Tuttavia $\beta \subseteq V_\beta \Rightarrow \beta \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1} \Rightarrow \{\beta\} \subseteq V_{\beta+1}$. Quindi in conclusione abbiamo $\beta \subseteq V_\beta \wedge \{\beta\} \subseteq V_{\beta+1} \Rightarrow \beta+1 = \beta\cup\{\beta\} \subseteq V_{\beta+1}$. Se per assurdo $\beta \cup \{\beta\} \in V_{\beta+1}$, allora si ha $\beta \cup \{\beta\} \in \mathcal{P}(V_\beta) \Rightarrow \beta \cup \{\beta\} \subseteq V_\beta \Rightarrow \{\beta\} \subseteq V_\beta$, da cui lo stesso assurdo di sopra.
$\underline{\alpha = \lambda}$
Per ipotesi induttiva $\forall\beta < \lambda$, $\beta \subseteq V_\beta$, ma $\beta \notin V_\beta$, quindi $\bigcup_{\beta<\lambda} \beta \subseteq \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta$, cioè $\lambda \subseteq V_\lambda$. Se per assurdo $\lambda \in V_\lambda$, avremmo che $\exists\beta' < \lambda | \lambda \in V_{\beta'} \Rightarrow \bigcup_{\beta<\lambda} \beta \in V_{\beta'} \Rightarrow \beta' \in V_{\beta'}$, contro l'ipotesi induttiva.
3) Si procede per induzione transfinita.
$\underline{\beta = 0}$
La tesi è vera a vuoto

$\underline{\beta = \gamma + 1}$
$x \subseteq A \in V_{\gamma+1} \Rightarrow x \subseteq A \in \mathcal{P}(V_\gamma) \Rightarrow x \subseteq A \subseteq V_\gamma \Rightarrow x \subseteq V_\gamma \Rightarrow x \in \mathcal{P}(V_\gamma) \Rightarrow$
$x \in V_{\gamma+1}$
$\underline{\beta = \lambda}$
$x \subseteq A \in V_\lambda \Rightarrow x \subseteq A \in \bigcup_{\gamma<\lambda} V_\gamma \Rightarrow \exists \gamma' < \lambda | x \subseteq A \in V_{\gamma'} \Rightarrow^{hp.ind} x \in V_{\gamma'} \Rightarrow$
$x \in \bigcup_{\gamma<\lambda} V_\gamma \Rightarrow x \in V_\lambda$
4) Per il punto 2 si ha $\alpha \subseteq V_\alpha$, ma $\alpha \notin V_\alpha$, se per assurdo $V_\alpha \in V_\alpha$, avremmo $\alpha \subseteq V_\alpha \in V_\alpha \Rightarrow \alpha \in V_\alpha$ per il punto 3, assurdo.

$p(x) = \sup\{p(y) + 1 | y \in x\}$

$\boxed{\leq}$ Sia $z = \sup\{p(y) + 1 | y \in x\}$, dimostrare la disuguaglianza equivale a dimostrare che $x \subseteq V_z$, si ha che $\forall y \in x, y \in V_{p(y)+1} \subseteq V_z \Rightarrow y \in V_z$, da cui la tesi.
$\boxed{\geq}$ $p(x) = \min\{\alpha | x \subseteq V_\alpha\} \geq \sup\{p(y) + 1 | y \in x\} = \sup\{p(y) | y \in x\} + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \min\{\alpha | x \subseteq V_\alpha\} > \sup\{p(y) | y \in x\}$, dunque dimostrare l'ultima disuguaglianza consente di ottenere la tesi.
$y \in x \subseteq V_\alpha \Rightarrow y \in V_\alpha$, se α è successore si ha che $\alpha = \gamma + 1$,
$y \in V_{\gamma+1} = \mathcal{P}(V_\gamma) \Rightarrow y \subseteq V_\gamma$.Quindi $\forall y \in x \subseteq V_\alpha$ si ha che $y \subseteq V_\gamma$, con $\gamma < \alpha$. Dimostriamo che α non puó essere limite, infatti se $\alpha = \lambda$ limite si ha che $\forall x \subseteq V_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} V_\gamma \Rightarrow \exists \gamma' < \lambda | x \subseteq V_{\gamma'}$, dunque $\lambda \neq p(x)$. Tesi.