Seminario Geometria Algebrica B

Sui modelli minimali delle superfici complesse rigate

Vittorio Valent

Settembre 2018

Introduzione

In questa breve dissertazione vedremo una prima classificazione delle superfici algebriche complesse rigate non razionali mediante alcuni strumenti della Geometria Algebrica classica.

In primis intrudurremo una forma di intersezione sul gruppo di Picard di una superficie e ne studieremo le proprietà: assumendo la dualità di Serre avremo importanti teoremi quali il Teorema di Riemann-Roch e la formula del genere. In seguito ci occuperemo degli scoppiamenti e delle mappe razionali; in particolare vedremo che ogni superficie si può ottenere con una superficie di partenza e un numero finito di scoppiamenti. Questa parte centrale si concluderà con il criterio di contrattilità di Castelnuovo che caratterizzerà completamente le curve eccezionali degli scoppiamenti mediante le relative proprietà numeriche. Infine passeremo alle superfici rigate (irrazionali) e ne daremo una classificazione completa tramite il loro modello minimale.

Questa dissertazione è stata scritta assumendo tutti i risultati visti nel corso di Geometria Algebrica B (A.A. 2017-2018).

1 Richiami e Nozioni preliminari

1.1 Notazione

Con *superficie* intenderemo sempre una superficie proiettiva (quindi algebrica) liscia sul campo complesso. A volte lasceremo cadere l'ipotesi di liscezza, nel qual caso verrà detto esplicitamente che la superficie in questione non sarà necessariamente liscia.

Data S una superficie e D, D' due divisori, scriveremo $D \equiv D'$ se essi sono linearmente equivalenti. Denoteremo inoltre con $\mathcal{O}_S(D)$ il fibrato in rette corrispondente a D.

Denoteremo con $H^i(S, \mathcal{O}_S(D))$ (o, per semplicità $H^i(D)$) l'i-esimo gruppo di coomologia di $\mathcal{O}_S(D)$; inoltre sarà $h^i(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(D)$.

$\chi(\mathcal{O}_S(D)) = h^0(D) - h^1(D) + h^2(D)$ la caratteristica di Eulero-Poincaré di $\mathcal{O}_S(D)$. $K_S = K$ denoterà sempre il divisore canonico, ovvero un qualsiasi divisore tale che $\mathcal{O}_S(K) = \omega_S^2 = \{$fibrato delle 2-forme differenziali su $S\}$.

$\mathrm{Pic}(S)$ denoterà il gruppo dei divisori di S modulo equivalenza lineare, ovvero i fibrati in rette su S a meno di isomorfismo.

1.2 Teoria dell'intersezione

Definizione 1.1. Siano C, C' due curve irriducibili distinte sulla superficie S, sia $x \in C \cap C'$. Sia $\mathcal{O}_{S,x}$ l'anello locale di S in x. Siano f e g i germi che definiscono C e C' in x. Definiamo allora la molteplicità di intersezione di C e C' in x come

$$m_x(C \cap C') = \dim_{\mathbb{C}} \left({}^{\mathcal{O}_{S,x}} \diagup_{(f,g)} \right).$$

Questa definizione è ben posta: in effetti per il Nullstellensatz l'anello ${}^{\mathcal{O}_{S,x}} \diagup_{(f,g)}$ è uno spazio vettoriale a dimensione finita.

Definizione 1.2. Date C, C' due curve irriducibili distinte sulla superficie S definiamo il numero di intersezione

$$(C.C') = \sum_{x \in C \cap C'} m_x(C \cap C')$$

Definiamo inoltre il fascio $\mathcal{O}_{C \cap C} = {}^{\mathcal{O}_S} \diagup_{\mathcal{O}_S(-C) + \mathcal{O}_S(-C')}$. Questo è chiaramente un fascio grattacielo concentrato sull'insieme finito di punti $C \cap C$; su ognuno di questi punti la spiga è

$$(\mathcal{O}_{C \cap C'})_x = {}^{\mathcal{O}_{S,x}} \diagup_{(f,g)}.$$

Allora è chiaro che

$$(C.C') = \dim_{\mathbb{C}} \left(H^0(S, \mathcal{O}_{C \cap C'}) \right)$$

Lemma 1.3. *Sia $s \in H^0(S, \mathcal{O}_S(C))$ (rispettivamente $s' \in H^0(S, \mathcal{O}_S(C'))$) una sezione diversa da zero che si annulla lungo C (risp. C'). Allora la successione*

$$0 \to \mathcal{O}_S(-C - C') \xrightarrow{(s', -s)} \mathcal{O}_S(-C) \oplus \mathcal{O}_S(-C') \xrightarrow{(s, s')} \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_{C \cap C} \to 0$$

è esatta.

Dimostrazione. Dimostriamo l'enunciato localmente: siano f e g coordinate locali in $x \in C \cap C'$. Allora dobbiamo provare l'esattezza della successione

$$0 \to \mathcal{O}_{S,x} \xrightarrow{(g,-f)} \mathcal{O}_{S,x}^2 \xrightarrow{(f,g)} \mathcal{O}_{S,x} \to {}^{\mathcal{O}_{S,x}} \diagup_{(f,g)} \to 0.$$

Tutte le composizioni sono nulle; l'iniettività a sinistra è chiara e il termine a destra è, per definizione, il conucleo. Infine l'esattezza nel secondo termine è data dal fatto che $\mathcal{O}_{S,x}$ è un dominio a fattorizzazione unica, pertanto l'immagine del primo morfismo è necessariamente il nucleo del secondo: in effetti se $af + bg = 0$ allora esiste un $c \in \mathcal{O}_{S,x}$ tale che $a = cg$ e $b = -cf$, questo perché f e g sono germi coprimi. $\square$

Lemma 1.4. *Sia C una curva irriducibile non singolare sulla superficie S. Allora per ogni $L \in \operatorname{Pic}(S)$ vale*

$$(\mathcal{O}_S(C).L) = \deg(L_{|C}).$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{O}_S(-C) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_C \to 0,$$

tensorizzando con L^{-1} otteniamo

$$0 \to L^{-1}(-C) \to L \to \ L^{-1} \otimes \mathcal{O}_C \to 0.$$

Passando alla caratteristica di Eulero-Poincaré (in entrambe le succesioni) si ha che

$$\chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)) = \chi(\mathcal{O}_C) \quad \text{ e } \quad -\chi(L^{-1}) + \chi(L^{-1}(-C)) = -\chi(L^{-1}_{|C}).$$

Calcolando esplicitamente e sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}(\mathcal{O}_S(C).L) =& \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)) - \chi(L^{-1}) + \chi(L^{-1}(-C))\\ =& \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(L^{-1}_{|C}) \qquad\qquad \text{(per Riemann-Roch applicato a } C)\\ =& -\deg(L^{-1}_{|C})\\ =& \deg(L_{|C}).\end{aligned}$$

□

Fatto 1.5. *Sia D divisore su S. Allora D può essere scritto come differenza di due curve lisce*

$$D \equiv (D + nH) - nH$$

dove H è una sezione di iperpiano su S e n intero positivo sufficientemente grande.

Teorema 1.6. *Sia S superficie e siano $L.L' \in \operatorname{Pic}(S)$. Definiamo*

$$(L.L') = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L^{-1}) - \chi(L'^{-1}) + \chi(L^{-1} \otimes L'^{-1}).$$

Allora (.) è una forma bilineare simmetrica su $\operatorname{Pic}(S)$ tale che, date $C.C'$ curve irriducibili su S, vale

$$(\mathcal{O}_S(C) - \mathcal{O}_S(C')) = (C.C').$$

Dimostrazione. Il Lemma 1.3 restituisce immediatamente la seconda uguaglianza, la simmetria è inoltre ovvia dalla definizione; proviamo quindi la bilinearità. Siano $\operatorname{Pic}(S)$, consideriamo l'espressione

$$s(L_1, L_2, L_3) := (L_1.L_2 \otimes L_3) - (L_1.L_2) - (L_1.L_3).$$

Questa è simmetrica e, per il Lemma 1.4, è nulla quando $L_1 = \mathcal{O}_S(C)$ con C curva non singolare. Siano ora $L, L' \in \operatorname{Pic}(S)$ con $L' = \mathcal{O}_S(A - B)$ e A, B curve lisce su S. Allora, per quanto detto prima, $s(L, L', \mathcal{O}_S(B)) = 0$ e quindi

$$(L.L') = (L.\mathcal{O}_S(A)) - (L'.\mathcal{O}_S(B)).$$

Per simmetria segue la bilinearità. □

In altre parole possiamo facilmente calcolare i numeri di intersezione sostituendo i divisori in questione con degli altri, a patto che siano linearmente equivalenti. Vediamo subito un'utile conseguenza.

Proposizione 1.7. *Sia C curva liscia e $f : S \to C$ morfismo suriettivo. Sia F una fibra di f, allora $F^2 = 0$.*

Dimostrazione. $F = f^*[x]$ per un qualche $x \in C$. Sia A divisore di C linearmente equivalente a $[x]$ tale che $x \notin A$. Allora $F \equiv f^*A$. Poiché F^*A è combinazione lineare di fibre tutte distinte da F abbiamo che

$$F^2 = F - f^*A = 0.$$

□

Ricordiamo ora che esiste un morfismo c_1 che associa ad ogni elemento del gruppo di Picard di S la sua prima classe di Chern:

$$c_1 : \mathrm{Pic}(S) \to H^2(S, \mathbb{Z}).$$

Usiamo questo morfismo per introdurre un nuovo oggetto.

Definizione 1.8. Definiamo il gruppo di Néron-Severi di S

$$NS(S) = c_1(\mathrm{Pic}(S)) \in H^2(S, \mathbb{Z}).$$

Richiamiamo ora, senza dimostrazione, la dualità di Serre.

Teorema 1.9 (Dualità di Serre)**.** *Sia S una superficie e L un fibrato in rette su S. Sia ω_S il fibrato delle 2-forme differenziali su S. Allora $H^2(S, \omega_S)$ è uno spazio vettoriale 1-dimensionale e, per $i = 0, 1, 2$ abbiamo un'accoppiamento bilineare (prodotto cup) ψ*

$$H^i(S, L) \otimes H^{2-i}(S, \omega_S \otimes L^{-1}) \to H^2(S, \omega_S) \cong \mathbb{C}.$$

In particolare $\psi(L) = \psi(\omega_S \otimes L^{-1})$.

Teorema 1.10 (Riemann-Roch)**.** *Sia S una superficie, Allora per ogni divisore $L \in \mathrm{Pic}(S)$ si ha che*

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(L^2 - L.\omega_S).$$

Dimostrazione. Calcoliamo esplicitamente con la definizione:

$$(L^{-1}.L \otimes \omega_S^{-1}) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L) - \chi(\omega_S \otimes L^{-1}) + \chi(\omega_S).$$

Per la dualità di Serre $\chi(\omega_S) = \chi(\mathcal{O}_S)$ e $\chi(\omega_S \otimes L^{-1}) = \chi(L)$. Allora

$$(L^{-1}.L \otimes \omega_S^{-1}) = 2(\chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L)),$$

per bilinearità abbiamo la formula desiderata. $\square$

Il Teorema di Riemann-Roch ha un'importante e immediata conseguenza: questa ci verrà in aiuto in numerose dimostrazioni e ci faciliterà i conti.

Teorema 1.11 (Formula del genere). *Sia C una curva irriducibile su una superficie S. Definito il genere di C $g(C) = h^1(C, \mathcal{O}_C)$ abbiamo che*

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C.K)$$

Dimostrazione. La successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{O}_S(-C) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_C \to 0$$

restituisce $\chi(\mathcal{O}_C) = 1 - g(C) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C))$. La formula segue direttamente da Riemann-Roch.

$\square$

2 Geometria Birazionale

2.1 Scoppiamenti

Definizione 2.1. Sia S superficie e sia $p \in S$. Allora esiste una superficie $\tilde{S}$ e una mappa $\pi : \tilde{S} \to S$ tali che

i) la mappa $\pi : \pi^{-1}(S \setminus \{p\}) \to S \setminus \{p\}$ è un biolomorfismo;

ii) $\pi^{-1}(p) = E$ è isomorfo a $\mathbb{P}^1$.

Diciamo allora che π è lo *scoppiamento* di S in p , E la *curva eccezionale* dello scoppiamento.

Questa è una definizione leggermente diversa da quella data a lezione ma, come vedremo, sarà più utile nella trattazione. Per mostrare la buona definizione costruiamo esplicitamente la mappa π.
Sia U intorno di p con coordinate x, y e $p = (0, 0)$; le curve $x = 0,\ y = 0$ si intersecano trasversalmente e, a meno di restringere U, possiamo considerare che dentro U si intersechino solo in p. Consideriamo ora

$$\tilde{U} = \{((x, y), [X, Y]) | xY = yX\} \subset U \times \mathbb{P}^1.$$

$\tilde{U}$ è chiaramente una sottovarietà di $U \times \mathbb{P}^1$. La proiezione

$$\pi : \tilde{U} \setminus \{(0, 0), [X, Y]\} \to U \setminus \{p\}$$

è inoltre un biolomorfismo. Segue poi che $\pi^{-1}(p) = (0, 0) \times \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^1$. Incolliamo quindi $\tilde{U}$ e $S \setminus \{p\}$ lungo $U \setminus \{p\} \cong \tilde{U} \setminus \pi^{-1}(p)$. La varietà ottenuta tramite lo scoppiamento di S in p si denota con $\mathrm{Bl}_p(S)$.

Dalla costruzione segue che i punti di E sono identificati naturalmente con le direzioni tangenti a S in p, quindi lo scoppiamento non fa altro che "ingrandire" la superficie in p sostituendo il punto con una curva isomorfa alla retta proiettiva (la curva eccezionale). Data poi una curva irriducibile C su S passante per p

(che, in particolare, è una sottovarietà analitica di S) definiamo la *trasformata stretta di C* come $\overline{\pi^{-1}(C \setminus \{p\})} = \tilde{C}$ in $\tilde{S}$. Si osserva che $\tilde{C}$ è irriducibile in $\tilde{S}$.

Ora la mappa

$$\pi : \tilde{S} \to S$$

induce un morfismo (iniettivo) sui gruppi di Picard

$$\pi^* : \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(\tilde{S}).$$

Inoltre abbiamo il seguente Lemma.

Lemma 2.2. *Per ogni curva irriducibile C passante per p con molteplicità m si ha che $\pi^* C = mE + \tilde{C}$.*

Dimostrazione. Dire che C passa per p con molteplicità m significa che l'equazione di definizione in coordinate locali è $\{f(x,y) = \sum a_{ij} x^i y^j = 0\}$, dove f è un polinomio omogeneo di grado almeno m. In queste coordinate possiamo supporre che la mappa di scoppiamento sia

$$\pi(u,v) = (uv, v)$$

e che la curva eccezionale E è data dall'equazione $\{v = 0\}$. Allora un'equazione di definizione locale per $\pi^* C$ è data da

$$(f \circ \pi)(x,y) = f(uv, v) = \sum_{i,j} a_{ij} u^i v^{i+j} = v^m \cdot \sum_{i,j} a_{ij} u^i v^{i+j-m} = v^m \cdot g(u,v).$$

Il primo fattore definisce il divisore mE mentre il secondo è olomorfo (poiché $i+j \geq m$) e non si annulla su E. Il secondo fattore allora è proprio la trasformata stretta di C in $\tilde{S}$. Pertanto si ha che

$$\pi^* C = (f) = (v^m \cdot g(u,v)) = m(v) + (g(u,v)) = mE + \tilde{C}.$$

□

Vediamo ora le principali proprietà che legano una superficie al suo scoppiamento in un punto.

Teorema 2.3. *Sia S una superficie, $\pi : \tilde{S} \to S$ lo scoppiamento in un punto $p \in S$ e sia $E \subset \tilde{S}$ la curva eccezionale. Allora*

(i) *Dati D, D' divisori su S vale che $D.D' = \pi^* D . \pi^* D'$ e $E.\pi^* D = 0$;*

(ii) *$E^2 = -1$;*

(iii) *La mappa $\varphi : \mathrm{Pic}(S) \oplus \mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(\tilde{S})$ dato da $\varphi(D,n) = \pi^* D + nE$ è un isomorfismo;*

(iv) $\mathrm{NS}(\tilde{S}) = \mathrm{NS}(S) \oplus \mathbb{Z}$;

(v) $K_{\tilde{S}} = \pi^* K_S + E$.

Dimostrazione. (i) Per dimostrare le due uguaglianze possiamo supporre, a meno di cambiare rappresentante di equivalenza lineare, che p non appartenga nè a D

nè a D'. Allora le formule sono banalmente verificate.

(ii) Sia C curva passante per p con molteplicità 1. Allora $\tilde{C}$ ed E si intersecano traversalmente in un punto, da cui $\tilde{C}.D = 1$. Ora per il Lemma 2.2 abbiamo che $\tilde{C} = \pi^*C - E$. Applicando poi il prodotto di intersezione per E otteniamo

$$1 = E.\tilde{C} = E.\pi^*C - E.E = -E^2,$$

quindi $E^2 = -1$.

(iii),(iv) La mappa φ è chiaramente un morfismo di gruppi, inoltre in $\tilde{S}$ i divisori sono E e le trasformate strette di divisori su S, pertanto φ è suriettiva. Per verificare l'iniettività sia D divisore in S tale che $\pi^*D + nE = 0$. Applicando il prodotto di intersezione di E otteniamo

$$\pi^*D.E + nE.E = 0 - n = 0$$

e quindi $n = 0$. Applicando π_* otteniamo $D = 0$. La stessa argomentazione vale sostituendo Pic con NS.

(v) É chiaro che $K_{\tilde{S}} = \pi^*K_S + mE$. Per la formula dell'aggiunzione abbiamo che

$$K_E = (K_{\tilde{S}} + E)|_E = (\pi^*K_S + mE + E)|_E.$$

Passando ai gradi e ricordando che $E \cong \mathbb{P}^1$ e $\deg(K_{\mathbb{P}^1}) = \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = -2$ otteniamo

$$-2 = (\pi^*K_S + mE + E).E = -m - 1,$$

da cui $m = 1$ e quindi la tesi. □

2.2 Mappe razionali

Ora passiamo ad analizzare un particolare caso di mappe: le mappe razionali. La definizione che daremo è specifica per le superfici ed è un caso particolare della definizione più generale.

Definizione 2.4. Sia S superficie (liscia) algebrica e Y varietà complessa algebrica. Una mappa $\phi : S \dashrightarrow Y$ si dice *razionale* se è un morfismo da un aperto (denso) $U \subset S$ a Y che non può essere esteso ad un aperto più grande. Diciamo che ϕ è definita in $x \in S$ se $x \in U$. I punti in $S \setminus U = F$ si dicono *punti di indeterminazione*.

Una mappa razionale è quindi una funzione parziale tra varietà algebriche. Mostriamo ora una proprietà fondamentale delle mappe razionali definite su varietà bidimensionali.

Definizione 2.5. Una mappa razionale $f : X \dashrightarrow Y$ che possiede un'inversa $g : Y \dashrightarrow X$ razionale è detta *birazionale*. Se esiste una mappa birazionale tra due varietà queste si dicono *birazionalmente equivalenti* (o semplicemente *birazionali*).

Possiamo altresì combinare le definizioni di mappa (bi)razionale e di morfismo: banalmente un *morfismo (bi)razionale* è un morfismo che sia anche una mappa birazionale. Si osservi che un morfismo birazionale non è necessariamente un isomorfismo: non è richiesto infatti che l'inversa sia un morfismo.

Proposizione 2.6. *Sia S superficie liscia e $\phi : S \dashrightarrow Y$ mappa razionale. Allora i punti di indeterminazione sono in numero finito.*

Dimostrazione. Mostriamo, più in generale, che l'insieme dei punti di indeterminazione di una mappa razionale sono contenuti in una sottovarietà di codimensione almeno 2. Essendo poi Y una varietà algebrica possiamo supporre che $Y = \mathbb{P}^n$. Sia $x \in S$ punto di indeterminazione. Essendo S liscia sappiamo che $\mathcal{O}_{S,x}$ è un'anello locale UFD. Sia

$$\phi = [g_0, \ldots, g_n] \quad \text{con } g_i \in H^0(S, \mathscr{M}_S^*),$$

e sia $g \in H^0(S, \mathscr{M}_S^*)$ fattore comune a g_i. Allora $g \cdot g_i \in \mathcal{O}_{S,x}$ e possiamo assumere che g sia tale che i g_i non abbiano fattori comuni in $\mathcal{O}_{S,x}$; si osservi che, per omogeneità, la moltiplicazione per g non cambia ϕ. Se esistesse Z di codimensione 1 luogo di indeterminazione, allora Z sarebbe definita da un'equazione data da $f = 0$ per cui f è necessariamente un fattore comune a $g \cdot g_i$. Ciò conduce ad un assurdo, pertanto la codimensione di Z è almeno 2. Allora segue che il luogo di indeterminazione di ϕ è un insieme finito di punti isolati. $\square$

Questo risultato ha delle immediate applicazioni:

a) Data una curva irriducibile C su S possiamo definire la sua immagine tramite la mappa razionale $\phi : S \dashrightarrow Y$ come $\phi(C) = \overline{\phi(C \setminus F)}$. Allo stesso modo definiamo $\phi(S) = \overline{\phi(S \setminus F)}$. Diciamo inoltre che ϕ è *dominante* se $\phi(S) = Y$.

b) La restrizione di S a $S \setminus F$ induce un isomorfismo tra $\mathrm{Pic}(S)$ e $\mathrm{Pic}(S \setminus F)$ e, pertanto, possiamo parlare di pull-back di un divisore D (o di un line bundle L o di un sistema lineare P) su Y tramite ϕ, denotati da $\phi^* D$ (rispettivamente $\phi^* L$ e $\phi^* P$).

Vediamo ora come alcune mappe razionali definite su una superficie S si relazionano ai sistemi lineari di divisori si S.

Proposizione 2.7. *Data S superficie esiste una corrispondenza biunivoca tra i seguenti insiemi:*

(i) {Mappe razionali $\phi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ tali che $\phi(S)$ non è contenuta in nessun iperpiano};

(ii) {Sistemi lineari di divisori di S di dimensione n senza parti fisse}.

Dimostrazione. La corrispondenza è così costruita: data una mappa ϕ della forma sopra descritta le associamo il sistema $\phi^* H$ dove H è il sistema degli iperpiani di $\mathbb{P}^n$. Questo è un sistema lineare di dimensione n ed è chiaramente privo di parte fissa.
Viceversa sia $P = \mathbb{P}(E)$, $(E \subseteq H^0(S, \mathcal{O}(L)))$ sistema lineare di dimensione n senza parte fissa e sia $\mathrm{BL}(P)$ il luogo dei punti base di P. A P associamo la mappa $\phi : S \dashrightarrow \mathbb{P}(E^*)$ che manda $x \in S \setminus \mathrm{BL}(P)$ nell'iperpiano di P contente i divisori di S passanti per x. Nei punti base (che sono in numero finito se P non ha parte fissa) la mappa non è definita e chiaramente, poiché S ha dimensione 2, $\phi(S)$ non può essere contenuta in un iperpiano di $\mathbb{P}(E^*) \cong \mathbb{P}^n$. $\square$

Grazie a questo teorema vediamo come eliminare i punti di indeterminazione di un mappa razionale tramite scoppiamento.

Teorema 2.8 (eliminazione dei punti di indeterminazione)**.** *Sia $\phi : S \dashrightarrow X$ mappa razionale da una superficie a una varietà proiettiva. Allora esiste una superficie S', un morfismo $\eta : S' \to S$ tale che η è una composizione di un numero finito di scoppiamenti e un morfismo $f : S' \to X$ tali che il diagramma*

$$\begin{tikzcd} & S' \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "f"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & X \end{tikzcd}$$

commuta.

Dimostrazione. Come prima, poiché X è immersa in uno spazio proiettivo, possiamo considerare $X = \mathbb{P}^m$. In più possiamo assumere, a meno di restringere il codominio a $\mathbb{P}^{m-1}$, che $\phi(S)$ non sia contenuta in nessun iperpiano di $\mathbb{P}^m$. Allora, per quanto detto nella proposizione precedente, ϕ corrisponde ad un sistema lineare di divisori su S di dimesione m senza parte fissa: sia $P \subset H^0(S, \mathcal{O}([D])) = |D|$ il suddetto sistema. Naturalmente se P non ha punti base allora ϕ è un morfismo e la tesi è verificata.
In caso contrario poniamo $P_0 = P$, $D_0 = D$ $\phi_0 = \phi$ e sia $x \in \mathrm{BL}(P_0)$ e sia $\pi_1 : S_1 \to S$ lo scoppiamento di S in x. Consideriamo il sistema lineare $\pi_1^* P_0 \subset |\pi_1^* D_0|$ e osserviamo che la parte fissa di questo sistema lineare non è altro che un multiplo della curva eccezionale dello scoppiamento E_1. Allora il sistema

$$P_1 \subset |\pi_1^* D - k_1 E_1| = |D_1|$$

è un sistema senza parte fissa (di dimensione m) e corrisponde alla mappa razionale (la cui immagine non è contenuta in nessun iperpiano di $\mathbb{P}^m$)

$$\phi_1 : S_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^m.$$

Per costruzione si ha che $\phi_1 = \phi_0 \circ \pi_1$. Se ϕ_1 è un morfismo, ovvero P_1 non ha punti fissi, abbiamo finito; in caso contrario iteriamo il processo fino ad avere una successione di scoppiamenti e di sistemi lineari senza parte fissa su S_n

$$\pi_n : S_n \to S_{n-1} \qquad P_n \subset |D_n|$$

dove $D_n = \pi_n^* D_{n-1} - k_n E_n$. Per il Teorema 2.3 (i),(ii) abbiamo che

$$D_n^2 = D_{n-1}^2 - k_n^2 < D_{n-1}^2$$

e, poiché P_n non ha parte fissa, $D_n^2 \geq 0$ per ogni n. Il processo deve pertanto terminare il un numero finito di passi che è al più D_0^2.
Ponendo quindi $S' = S_n$, $\eta = \pi_1 \circ \ldots \circ \pi_n$ e $f = \phi_n$ otteniamo la tesi. □

Enunciamo ora uno dei teoremi centrali della dissertazione: la proprietà universale dello scoppiamento. Per farlo avremo bisogno di due lemmi preliminari.

Lemma 2.9. *Sia S superficie irriducibile, anche singolare, e S' superficie liscia insieme ad un morfismo birazionale $f : S \to S'$. Se l'inversa di f non è definita in $p \in S'$ allora $f^{-1}(p)$ è una curva su S.*

Dimostrazione. Riduciamo il problema ad un intorno affine $U \subset S$ che intersechi $f^{-1}(p)$. Allora esiste un embedding

$$j : U \hookrightarrow \mathbb{A}^n$$

con coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ e una mappa razionale

$$g = j \circ f^{-1} : S' \dashrightarrow \mathbb{A}^n$$

definita da funzioni razionali $(g_1, \dots, g_n)$. Poiché l'inversa di f non è definita in p, una delle funzioni (per semplicità g_1) non è definita, ossia $g_1 \notin \mathcal{O}_{S',p}$. Scriviamo allora $g_1 = \frac{u}{v}$ con $u, v \in \mathcal{O}_{S',p}$ coprimi tali che $v(p) = 0$ (per avere ciò è sufficiente restringere l'intorno). Restringiamo ulteriormente U per avere p come unica soluzione di $v(p) = u(p) = 0$.
Sia ora la curva D su U definita da $f^*v = 0$. Su U abbiamo che $f^*u = x_1 f^*v$, segue che $f^*u = f^*v = 0$ in U e quindi $D = f^{-1}(p)$. $\square$

Lemma 2.10. *Sia $\phi : S \to S'$ una mappa birazionale tra superfici tale che la sua inversa non è definita in $p \in S'$. Allora esiste una curva C su S tale che $\phi(C) = \{p\}$.*

Dimostrazione. La mappa ϕ corrisponde ad un morfismo $f : U \to S'$ con U denso in S. Sia $\Gamma = \{(x, f(x) | x \in U)\}$ il grafico di f in $S \times S'$ e sia $S_1 = \overline{\Gamma}$ la sua chiusura. Questa è una superficie (eventualmente con singolarità). Le proiezioni su S e S' sono chiaramente morfismi birazionali e il diagramma

$$\begin{tikzcd} & S_1 \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "q'"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & S' \end{tikzcd}$$

commuta.
Dato che l'inversa di ϕ non è definita in $p \in S'$ lo stesso vale per l'inversa di q'. Per il Lemma 2.9 $(q')^{-1}(p) = C_1 \subset S_1$ è una curva irriducibile. Allora $q(C_1) = C$ è una curva[1] su S tale che $\phi(C) = \{p\}$. $\square$

Teorema 2.11 (Proprietà universale dello scoppiamento)**.** *Sia $f : X \to S$ morfismo birazionale tra superfici. Supponiamo che la mappa razionale f^{-1} non sia definita in $p \in S$. Allora f si fattorizza come*

$$f : X \xrightarrow{g} \tilde{S} \xrightarrow{\pi} S$$

Dove g è un morfismo birazionale, $\tilde{S} = \mathrm{Bl}_p(S)$ e π è la mappa di scoppiamento.

Dimostrazione. Suddividiamo la dimostrazione in 4 passaggi:

[1] $C_1 \subset S \times S'$ e la sua immagine in S' è zero-dimensionale.

Passo 1 Per prima cosa fissiamo alcune notazioni. Consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} & \tilde{S} \arrow[dl, dashed, shift left, "h"] \arrow[dr, "\pi"] & \\ X \arrow[ur, dashed, shift left, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & S \end{tikzcd}$$

e osserviamo che supporre falso l'enunciato equivale a dire che la mappa razionale g non è un morfismo, ovvero che esiste $q \in X$ in cui g non è definita. Osserviamo che g è necessariamente definita ovunque fuori da $f^{-1}(p)$: lo scoppiamento infatti è un morfismo fuori dalla curva eccezionale; pertanto si ha che $f(q) = p$ Abbiamo comunque che h è una mappa birazionale.

Passo 2 Applicando il Lemma 2.10 ad h otteniamo una curva $C \subset \tilde{S}$ tale che $h(C) = q$. Ora

$$\pi(C) = f(h(C)) = f(q) = p$$

e pertanto C è contenuta nel divisore eccezionale E; segue che $C = E$. Il diagramma quindi diventa

$$\begin{tikzcd} & \tilde{S} \supset \arrow[dl, dashed, shift left, "h"] \arrow[d, "\pi"] & E \arrow[d] \\ X \arrow[ur, dashed, shift left, "g"] \arrow[r, "f"'] & S & \supset \{p\} \end{tikzcd}$$

Passo 3 Consideriamo ora gli anelli locali $\mathcal{O}_{X,q}$ e $\mathcal{O}_{S,p}$ insieme ai rispettivi ideali massimali $\mathfrak{m}_{X,q}$ e $\mathfrak{m}_{S,p}$. Sia y coordinata locale in p, ovvero nel linguaggio degli anelli tale che $y \in \mathfrak{m}_{S,p}$ ma $y \notin \mathfrak{m}^2_{S,p}$. Si osservi che $\pi^* y$ è una coordinata locale per tutti i punti di E eccetto uno (per costruzione dello scoppiamento). Ciò che vorremmo mostrare è che $f^* y$ è una coordinata locale per q, ossia che

$$f^* y \in \mathfrak{m}_{X,q} \qquad \text{ma} \qquad f^* y \notin \mathfrak{m}^2_{X,q}.$$

La prima appartenenza è banale: se infatti la funzione y ha uno zero in p allora il suo pull-back $f^* y$ si annulla in q. Se fosse $f^* y \in \mathfrak{m}_{X,q}$ avremmo che, su tutti i punti $e \in E$ dove h è definita (tutti eccetto un numero finito), $\pi^* y = h^* f^* y \in \mathfrak{m}_{\tilde{S},e}$[2]. Ciò è assurdo dato che $\pi^* y$ è una coordinata locale per tutti i punti di E eccetto uno. Allora $f^* y$ è una coordinata locale per q.

Passo 4 Sia, come prima, $e \in E$ punto in cui è definita h. Scegliamo delle coordinate x, y in p tale che un piccolo intorno di e sia descritto dalle coordinate $((x_0, y_0), [1, t])$ con la relazione $y_0 = x_0 \cdot t$, dove x_0 e t sono coordinate locali di e in $\tilde{S}$, $x_0 = \pi^* x$ e $y_0 = \pi^* y$.

Per il Lemma 2.9 esiste in X una curva D per q tale che $f(D) = p$. Supponiamo che localmente D sia data dall'equazione $z = 0$. Poiché z si annulla in q deve essere che $z \in \mathfrak{m}_{X,q}$. Consideriamo poi

$$f^* x = \alpha \cdot z \qquad \text{e} \qquad f^* y = \beta \cdot z$$

[2]Questo perché $h^* f^* y$ si annulla in e con molteplicità 2

coordinate locali in q (per il Passo 3) con $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_{X,q}$. Essendo coordinate locali in q si ha che $f^*x, f^*y \notin \mathfrak{m}_{X,q}^2$ e quindi $\alpha, \beta \notin \mathfrak{m}_{X,q}$. Allora la funzione locale $f^*\left(\frac{y}{x}\right) \notin \mathfrak{m}_{X,q}$ e pertanto

$$t = h^* f^* \left(\frac{y}{x}\right) \notin \mathfrak{m}_{\tilde{S},e}$$

il che è assurdo dato che t era coordinata locale per $e \in E$. $\square$

Questo Teorema ha delle immediate e importanti conseguenze:

Teorema 2.12. *Sia $f : S \to S_0$ morfismo birazionale di superfici. Allora esiste una sequenza finita di scoppiamenti $\pi_k : S_k \to S_{k-1}$ $(k = 1, \ldots, n)$ e un'isomorfismo $\varphi : S \xrightarrow{\sim} S_n$ tali che $f = \pi_1 \circ \ldots \circ \pi_n \circ \varphi$.*

Dimostrazione. Se f fosse un isomorfismo la tesi sarebbe banale. In caso contrario sia $p_1 \in S_0$ punto di indeterminazione di f^{-1}. Per il Teorema 2.11 Abbiamo una fattorizzazione $f = \pi_1 \circ f_1$ dove $\pi_1 : \mathrm{Bl}(S_0)_{p_1} \to S_0$ è lo scoppiamento di S_0 in p_1. Se f_1 è un isomorfismo abbiamo concluso; in caso contrario possiamo iterare il processo fattorizzando f al passo k-esimo con

$$\pi_k : \mathrm{Bl}(S_{k-1})_{p_k} \to S_{k-1} \qquad \text{tale che} \qquad \pi_k \circ f_k = f_{k-1}.$$

Poiché i punti di indeterminazione di f^{-1} sono finiti e le f_k ne riducono progressivamente il numero il processo deve terminare in un numero finito di passi. $\square$

Corollario 2.13. *Sia $\phi : S \dashrightarrow S'$ mappa birazionale tra superfici. Allora esiste un diagramma commutativo*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{S} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & S' \end{tikzcd}$$

dove f e g sono morfismi che si fattorizzano con scoppiamenti e isomorfismi.

Dimostrazione. Segue direttamente dai Teoremi 2.8 e 2.12. $\square$

Osservazione 2.14. Dato un morfismo birazionale $\phi : S \dashrightarrow S'$ che sia la composizione di n scoppiamenti e un isormorfismo. Guardando ai gruppi di Néron-Severi di S e S' abbiamo che

$$\mathrm{NS}(S) \cong \mathrm{NS}(S') \oplus \mathbb{Z}^n.$$

Poiché i gruppi in questione sono finitamente generati, n non dipende dalla fattorizzazione. Segue inoltre che ogni morfismo birazionale di una superficie in sé è un isomorfismo.

Siamo finalmente pronti per confrontare il problema di classificazione birazionale delle superfici con la classificazione a meno di isomorfismo.

Definizione 2.15. Data S superficie definiamo

$$\mathrm{B}(S) = \{ \text{ classi di isomorfismo di superfici birazionali a S } \}.$$

Date due (classi di isomorfismo di) superfici $S_1, S_2 \in \mathrm{B}(S)$ diciamo che S_1 *domina* S_2 se esiste un morfismo birazionale $f : S_1 \to S_2$.

Vogliamo ora costruire un ordine parziale di $\mathrm{B}(S)$ grazie all'Osservazione 2.14.

Definizione 2.16. Una classe di isomorfismo $S \in \mathrm{B}(S)$ si dice *minimale* se ogni morfismo birazionale $f : S \to S'$ è un isomorfismo. Una superficie S si dice *minimale* se lo è la sua classe in $\mathrm{B}(S)$.

In altre parole una superficie è minimale se domina solo le superfici nella sua classe di isomorfismo. Vale anche una sorta di viceversa:

Proposizione 2.17. *Ogni superficie domina una superficie minimale.*

Dimostrazione. Sia S una superficie. Se non è minimale esiste S_1 e $S \to S_1$ morfismo birazionale che non è un isomorfismo (contiene almeno uno scoppiamento nella sua fattorizzazione). Se S_1 non è minimale possiamo considerare un morfismo birazionale $S_1 \to S_2$ e così via. Per l'Osservazione 2.14 abbiamo che

$$\mathrm{rk}(\mathrm{NS}(S)) > \mathrm{rk}(\mathrm{NS}(S_1)) > \mathrm{rk}(\mathrm{NS}(S_2)) > ...$$

e pertanto si arriverà in un numero finito di passi ($\mathrm{rk}(\mathrm{NS}(S)) \in \mathbb{N}$) ad una superficie S_n dominata da S mediante la composizione dei morfismi. $\square$

Definizione 2.18. Data una curva $E \subset S$ diciamo che E è una *curva eccezionale* se è la curva eccezionale di uno scoppiamento.

Segue dalla definizione che se E è una curva eccezionale di S allora $E \cong \mathbb{P}^1$ e $E^2 = -1$. Inoltre, per il Teorema 2.12 una superficie è minimale se e solo se non contiene curve eccezionali. Il seguente Teorema fornisce una sorta di viceversa alla definizione e restituisce una caratterizzazione numerica delle curve eccezionali. La dimostrazione è estremamente tecnica, perciò ne verrà omessa una parte.

Teorema 2.19 (Criterio di contrattilità di Castelnuovo)**.** *Data S una superficie e $E \subset S$ curva tale che $E \cong \mathbb{P}^1$ e $E^2 = -1$. Allora E è una curva eccezionale in S.*

Dimostrazione. L'idea di fondo è modificare il line bundle che immerge S in $\mathbb{P}^N$ in modo che rimanga un embedding fuori da E e che contragga E ad un punto p. La parte più tecnica e delicata è verificare che l'immagine sia liscia in p (e verrà omessa).

Consideriamo un line bundle positivo[3] L su S tale che, a meno di moltiplicare L per un opportuno multiplo positivo, $H^1(S, \mathcal{O}_S(L)) = 0$ (Kodaira, Teorema B); sia i_L l'embedding dato dal line bundle L. Sia $k = L.E$ e sia $L' = L + kE$ e si osservi che $(L + kE).E = 0$. Vogliamo mostrare che il sistema lineare dato da L', ovvero $\mathbb{P}(H^0(S, \mathcal{O}_S(L')))$, è senza punti fissi, pertanto induce un isormorfismo con la sua immagine dentro a $\mathbb{P}^N$, dove $N = \dim(H^0(S, \mathcal{O}_S(L'))) - 1$. Cominciamo a mostrare che $H^1(S, \mathcal{O}_S(L')) = 0$. Sia t sezione di $\mathcal{O}_S(E)$ nulla su E. Consideriamo la successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{O}_S(-E) \xrightarrow{t} \mathcal{O}_S \xrightarrow{r} \mathcal{O}_E \to 0,$$

[3]Possiamo considerare L sia come line bundle positivo che come divisore molto ampio (a meno di equivalenza lineare)

dove la mappa t indica la moltiplicazione per t. Allora per $0 \leq i \leq k$ abbiamo una successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{O}_S(L + (i-1))E) \xrightarrow{t} \mathcal{O}_S(L + iE) \xrightarrow{r} \mathcal{O}_E(k-i) \to 0.$$

Essendo E di dimensione 1 abbiamo che $H^1(E, \mathcal{O}_E(d)) = H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) = 0$ per $d \geq 0$. Allora otteniamo una successione esatta lunga in coomologia

$$0 \to H^0(S, \mathcal{O}_S(L + (i-1)E)) \xrightarrow{t^*} H^0(S, \mathcal{O}_S(L + iE)) \xrightarrow{r_i} H^0(E, \mathcal{O}_E(k-i)) \to$$
$$\to H^1(S, \mathcal{O}_S(L + (i-1)(E)) \to H^1(S, \mathcal{O}_S(L + iE)) \to 0.$$

Per induzione su i possiamo vedere che $H^1(S, \mathcal{O}_S(L + iE)) = 0$ per ogni i e che la mappa di restrizione r_i è suriettiva. Allora segue che $H^1(S, \mathcal{O}_S(L')) = 0$.

Vediamo ora che $H^0(S, \mathcal{O}_S(L')$ ha una base di sezioni globali sufficienti a dare l'embedding desiderato. Scegliamo una base $s_0, \ldots, s_n$ per $H^0(S, \mathcal{O}_S(L))$ e, per $0 \leq i \leq k$, degli elementi $a_{i,0}, \ldots, a_{i,k-i} \in H^0(S, \mathcal{O}_S(L+iE))$ le cui immagini tramite r_i formano una base di $H^0(E, \mathcal{O}_E(k-i))$. Costruiamo allora induttivamente una base

$$\{t^k s_0, \ldots, t^k s_n, t^{k-1} a_{1,0}, \ldots, t^{k-1} a_{1,k-1}, \ldots, t a_{k-1,0}, t a_{k-1,1}, a_{k,0}\} \subset H^0(S, \mathcal{O}_S(L')).$$

Consideriamo ora la mappa razionale $\phi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ indotta dal sistema lineare corrispondente a $H^0(S, \mathcal{O}_S(L'))$. Poiché $s_0, \ldots, s_n$ definiscono i_L (che è embedding) e le t^k sono nulle su E allora ϕ è un embedding ristretta a $S \setminus E$. Inoltre $a_{k,0}$ è una funzione costante non nulla su E, pertanto ϕ è definita su tutta S e manda E, grazie ai fattori t^i presenti in tutte gli elementi della base tranne l'ultimo, nel punto $p = [0, \ldots, 0, 1] \in \mathbb{P}^N$.

Sia ora $S' = \phi(S)$. Abbiamo un morfismo $\pi : S \to S'$ che è un isomorfismo fuori da E e contrae E ad un punto. Per il Teorema 2.12 basta mostrare che S' è liscia in p e la mappa π diventa automaticamente (a meno di isomorfismi) lo scoppiamento di S' in p con divisore eccezionale E. $\square$

3 Superfici Rigate

Entriamo ora nel cuore della trattazione e analizziamo nello specifico le proprietà delle superfici rigate.

Definizione 3.1. Una superficie S si dice *rigata* se è birazionalmente equivalente a $C \times \mathbb{P}^1$, dove C è una curva liscia.

Esempio 3.2. a) Se C è una curva liscia, $C \times \mathbb{P}^1$ è banalmente una superficie rigata;

b) Sia C una curva liscia e sia E un fibrato vettoriale di rango 2 su C. Consideriamo il fibrato proiettivo $\mathbb{P}_C(E)$ su E. Questa è una superficie rigata su C: poiché E è localmente banale $\mathbb{P}_C(E)$ è localmente isomorfo a $C \times \mathbb{P}^1$.

Per trovare il modelo minimale delle superfici rigate abbiamo bisogno di una nozione aggiuntiva.

Definizione 3.3. Sia C una curva liscia. Una superficie geometricamente rigata su C è una superficie S insieme ad un morfismo liscio $\pi : S \to C$ le cui fibre sono isomorfe a $\mathbb{P}^1$.

Osserviamo che gli esempi di prima sono anche superfici geometricamente rigate. Tuttavia non è ovvio che una superficie geometricamente rigata è rigata: per ottenere questo risultato avremo bisogno del seguente Teorema.

Teorema 3.4 (Noether-Enriques)**.** *Sia S una superficie e $\pi : S \to C$ morfismo. Supponiamo esiste un $x \in C$ tale che π è liscio su x e la fibra sopra x è isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Allora che esista un aperto (di Zariski) U di C che contiene x e un isomorfismo tra $\pi^{-1}(U)$ e $U \times \mathbb{P}^1$ tale che il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{P}^1 \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

commuta. In particolare S è rigata.

Prima di dimostrare il Teorema enunciamo un Lemma utile alla dimostrazione.

Lemma 3.5. *Sia D un divisore effettivo su S e C curva irriducibile tale che $C^2 \geq 0$. Allora $D.C \geq 0$.*

Dimostrazione. Scriviamo $D = D' + nC$ dove D' non contiene C e $n \geq 0$; Allora

$$D.C = D'.C + nC^2 \geq 0.$$

□

Dimostrazione (del Teorema di Noether-Enriques). La dimostrazione è suddivisa in tre passi.

Passo 1 Mostriamo che $H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$.
Poniamo $F = \pi^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^1$, allora $F^2 = 0$ (Proposizione 1.7) e $K.F = -2$ (Formula del Genere). Supponiamo per assurdo che $H^2(S, \mathcal{O}_S) \neq 0$. Allora per la dualità di Serre $|K|$ contiene un divisore effettivo D. Abbiamo che $D.F = -2$, ma questo contraddice il Lemma 3.5.

Passo 2 Verifichiamo che esiste un divisore H di S tale che $H.F = 1$.
Sia $f = c_1(F)$ la prima classe di Chern di F in $H^2(S, \mathbb{Z})$. Abbiamo la successione esatta (indotta dalla successione esponenziale)

$$\mathrm{Pic}(S) \xrightarrow{c_1} H^2(S, \mathbb{Z}) \to H^2(S, \mathcal{O}_S).$$

Per il passo precedente, essa si può scrivere come

$$\mathrm{Pic}(S) \xrightarrow{c_1} H^2(S, \mathbb{Z}) \to 0,$$

pertanto c_1 è suriettiva. Dato che c_1 è un omomorfismo di gruppi, basta mostrare che esiste $h \in H^2(S, \mathbb{Z})$ tale che $f \cdot h = 1$. Consideriamo il morfismo di $\mathbb{Z}$-moduli

$$\begin{aligned} H^2(S, \mathbb{Z}) &\to \mathbb{Z} \\ a &\mapsto a \cdot f, \end{aligned}$$

la sua immagine è un ideale in $\mathbb{Z}$ della forma $d\mathbb{Z}$ con $d > 0$[4]. La mappa

$$a \mapsto \frac{a \cdot f}{d}$$

è quindi una forma lineare su $H^2(S,\mathbb{Z})$. Inoltre, per la dualità di Poincaré abbiamo che l'accoppiamento

$$H^2(S,\mathbb{Z}) \otimes H^2(S,\mathbb{Z}) \to H^4(S,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

è non degenere, pertanto la mappa associata

$$H^2(S,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(H^2(S,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}).$$

è suriettiva con nucleo il sottogruppo di torsione. Allora esiste un elemento $f' \in H^2(S,\mathbb{Z})$ tale che

$$a \cdot f' = \frac{a \cdot f}{d} \qquad \text{per ogni } a \in H^2(S,\mathbb{Z}).$$

Sia ora $k = c_1(K_S)$, osserviamo che per ogni $a \in H^2(S,\mathbb{Z})$ l'intero $a^2 + a \cdot k$ è pari: lo è infatti per tutte le curve irriducibili in virtù della formula del genere, inoltre è additivo modulo 2. Sostituendo f' nell'espressione abbiamo che il numero

$$f'^2 + f' \cdot k = \frac{f^2}{d^2} + \frac{f \cdot k}{d} = \frac{f \cdot k}{d} = \frac{-2}{d}$$

è un intero pari, da cui $d = 1$. Allora esiste $h \in H^2(S,\mathbb{Z})$ tale che $f \cdot h = 1$.

Passo 3 Consideriamo, per $r \in \mathbb{Z}$ la successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{O}_S(-F) \to \mathcal{O}_S \xrightarrow{r} \mathcal{O}_F \to 0$$

e, per $i \in \mathbb{Z}$, la corrispondente

$$0 \to \mathcal{O}_S(H + (i-1)F) \to \mathcal{O}_S(H + iF) \xrightarrow{r_i} \mathcal{O}_F(1) \to 0$$

Consideriamo ora la successione esatta lunga in coomologia

$$H^0(S,\mathcal{O}_S(H+iF)) \xrightarrow{r_i^*} H^0(F,\mathcal{O}_F(1)) \to H^1(S,\mathcal{O}_S(H+(i-1)F)) \xrightarrow{\beta_i} H^1(S,\mathcal{O}_S(H+iF)) \to 0$$

Dato che le β_i sono tutte suriettive, la successione di naturali $\{h^1(H + rFx)\}_i$ è non crescente, pertanto per i sufficientemente grande $H^1(S,\mathcal{O}_S(H+iF))$ si stabilizza. Perciò, da un certo i in avanti, β_i è biettiva e r_i^* è suriettiva. Consideriamo allora il sottospazio vettoriale $V \subset H^0(S,\mathcal{O}_S(H + iF))$ di dimensione 2 tale che $r_i^*(V) = H^0(F,\mathcal{O}_F(1))$. Sia $P = \mathbb{P}(V)$ il sistema lineare (pencil) corrispondente. Poiché avevamo scelto H tale che $H.F = 1$, P non ha componenti fisse in F e, in più, non ha punti base in F. Siano $x_1,\ldots,x_k \in C$ tali che le fibre sopra questi punti sono componenti fisse di P e sia $U = C \setminus \{x_1,\ldots,x_k\}$. Sia $P' = P_{|U}$ senza punti fissi; allora induce un morfismo razionale

$$\phi : C \setminus \{x_1,\ldots,x_k\} \to \mathbb{P}^1$$

[4]La mappa non è nulla poiché F non è equivalente al fibrato banale, visto come line bundle.

che, a sua volta, indice un isomorfismo

$$\theta : S \setminus \pi^{-1}(\{x_1, \ldots, x_k\}) \to U \times \mathbb{P}^1$$

□

Siamo finalmente giunti al Teorema principale della trattazione: avremo infatti una caratterizzazione completa dei modelli minimali delle superfici rigate sopra ad una curva irrazionale (non isomorfa a $\mathbb{P}^1$). Introduciamo, prima di dare l'enunciato preciso, un paio di lemmi utili alla dimostrazione.

Lemma 3.6. *Supponiamo che $\pi : S \to C$ sia un morfismo suriettivo da una superficie ad una curva con fibre connesse e sia $F = \sum_i n_i F_i$ una fibra riducibile di π. Allora $F_i^2 < 0$ per ogni i.*

Dimostrazione. Abbiamo che, potendo rimpiazzare F con un'altra fibra, $F.F_i = 0$. Inoltre abbiamo che $F_i.F_j \geq 0$ per $i \neq j$ e, per almeno un j, $F_i.F_j > 0$, essendo le fibre connesse. Allora si ha che

$$n_i F_i^2 = F_i \left(F - \sum_{i \neq j} n_j c_j \right) < 0.$$

□

Lemma 3.7. *Sia S una superficie minimale, C curva liscia su S e $\pi : S \to C$ morfismo con fibra generica isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Allora S è geometricamente rigata da π e tutte le fibre sono isomorfe a $\mathbb{P}^1$.*

Dimostrazione. Sia F fibra di π. Per quanto detto precedentemente F deve essere connessa e inoltre $F^2 = 0$ e $F.K = -2$. Se F fosse irriducibile allora sarebbe una curva liscia razionale di genere 0 e quindi isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Supponiamo per assurdo che

$$F = \sum_i n_i F_i.$$

La formula del genere e il lemma precedente mostrano che $K.C_i \geq -1$ e vale l'uguagialnza se e solo se $C_i^2 = -1$ e $g(C_i) = 0$. Allora per il Criterio di Castelnuovo le curve C_i sarebbero curve eccezionali di S, contraddicendo l'ipotesi di minimalità. Allora necessariamente deve essere $K.C_i \geq 0$ e quindi $K.F \geq 0$, che contraddice $K.F = -2$. □

Teorema 3.8. *Sia C una curva irrazionale. Allora i modelli minimali di $C \times \mathbb{P}^1$ sono le superfici geometricamente rigate su C.*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che una superficie geometricamente rigata $\pi : S \to C$ è minimale. Se così non fosse dovrebbe avere una curva eccezionale E. Tuttavia E non può essere una fibra di π essendo che $E^2 = -1$. Allora dovrebbe essere $\pi(E) = C$ ma ciò implicherebbe che $C \cong \mathbb{P}^1$ e quindi C razionale.

Sia quindi S superficie minimale e $C \times \mathbb{P}^1$ superficie rigata che domina S. Sia $\phi : S \dashrightarrow C \times \mathbb{P}^1$ la relativa mappa razionale e $q : C \times \mathbb{P}^1 \to C$ la proiezione sul primo fattore. Abbiamo quindi un diagramma commutativo del tipo

$$\begin{tikzcd} & S' \arrow[dl, "\epsilon"'] \arrow[dr, "f"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "q\circ\phi"'] & & C \end{tikzcd}$$

dove f è un morfismo e ϵ è una composizione di n scoppiamenti ϵ_i. Supponiamo che n sia il numero minimo di scoppiamenti. Allora se $n > 0$ si avrebbe una curva eccezionale E dello scoppiamento ϵ_n. Inoltre E viene contratta ad un punto da f (poiché C è irrazionale) e quindi f si fattorizza come $f' \circ \epsilon_n$, contraddicendo la minimalità di n.
Si ha quindi che ϵ è un morfismo e quindi lo è anche $\pi = q \circ \phi$. Ma π è un morfismo suriettivo con fibra generica $\mathbb{P}^1$, pertanto S è geometricamente rigata su C tramite π. □

Bibliografia

Beauville, Arnaud; Complex Algebraic Surfaces; Cambridge University Press