Appunti di fisica

Classe di scienze della SNS

7 aprile 2014

Indice

1 Formulario

1.1 Coordinate polari

In coordinate polari si ha che per ogni versore $\hat{\imath}$ vale $\dot{\hat{\imath}} = \vec{\omega} \times \hat{\imath}$, dove

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{z} \tag{F.1}$$

Derivando l'equazione $\vec{r} = r\hat{r}$ rispetto al tempo, ottengo quindi

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{F.2}$$

Derivando una seconda volta ottengo invece:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} \tag{F.3}$$

1.2 Coordinate sferiche

Ponendosi in un sistema di coordinate sferiche, vale $\dot{\hat{\imath}} = \vec{\omega} \times \hat{\imath}$ per ogni versore $\hat{\imath}$, dove

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{\varphi} + \dot{\varphi}\hat{z} \tag{F.4}$$

Quindi derivando l'equazione $\vec{r} = \dot{r}\hat{r}$, ottengo

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi} \tag{F.5}$$

E derivando nuovamente rispetto al tempo ho che:

$$\begin{aligned}\vec{a} = \dot{\vec{v}} = &\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \\ &+ \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \\ &+ \left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta\right)\hat{\varphi}\end{aligned} \tag{F.6}$$

1.3 Moto in campo centrale

Consideriamo un campo di forze centrali descritto da $\vec{F} = f(r)\hat{r}$. Innanzitutto abbiamo che tale campo è un campo conservativo, in quanto ammette un potenziale della forma:

$$U(r) = -\int_r^\infty f(r)dr$$

Inoltre in un campo di forze centrali si conserva il momento angolare, poichè il momento delle forze è uguale a 0, e in particolare vale, grazie alle eq. (F.2):

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr^2\dot{\theta}\hat{z}$$

Il caso di un corpo in un campo di forze centrale si può sempre ricondurre ad un modo unidimensionale in r, secondo la formula:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \tag{F.7}$$

dove il potenziale efficace U_{eff} è definito come:

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{F.8}$$

Mi concentro in particolare sul campo gravitazionale generato da un corpo di massa M, che è proprio un campo centrale caratterizzato dalla forza:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

e che genera quindi il potenziale:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

Si dimostra che l'orbita che descrive un corpo in tale campo centrale è ellittica se l'energia di tale corpo è minore di 0, parabolica se la sua energia è uguale a 0 e iperbolica se invece ha energia maggiore di 0. In particolare se l'orbita è ellittica di semiasse maggiore a, il corpo ha energia:

$$E = -\frac{GMm}{2a} \tag{F.9}$$

e il periodo dell'orbita è:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{\frac{3}{2}} \tag{F.10}$$

Vale inoltre il teorema del viriale, che afferma che in un moto limitato si ha:

$$< K > = -\frac{1}{2} < U > \tag{F.11}$$

dove $< K >$ è l'energia cinetica media del corpo in moto e $< U >$ è la sua energia potenziale media.

Si trova che la velocità a cui si muove un corpo in orbita circolare, a distanza r dal centro, è:

$$v^2 = \frac{GM}{r} \tag{F.12}$$

mentre invece la velocità di fuga (ottenibile usando eqs. (F.11) e (F.12)) è (sempre a distanza r):

$$v^2 = \frac{2GM}{r} \tag{F.13}$$

1.4 Sistemi di riferimento non inerziali

Sia K un sistema di riferimento non inerziale di centro O', rispetto ad un sistema di riferimento inerziale K^I di centro O. Poichè sabbiamo che l'equazione di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ vale solo in sistemi di riferimento inerziali, vogliamo scoprire cosa si può dire del rapporto fra la forza che agisce su un corpo e la sua accelerazione rispetto al sistema K.

Calcoliamo innanzitutto la relazione fra le accelerazioni nei due sistemi di riferimento. Poichè vale la relazione $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$ per un qualsiasi punto P, derivando rispetto al tempo e chiamando $\overrightarrow{O'P} = \vec{r}$, ottengo:

$$\begin{aligned} \vec{v} = \dot{\overrightarrow{OP}} &= \dot{\overrightarrow{OO'}} + \dot{\vec{r}} \\ &= \overrightarrow{v_{tr}} + \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= \overrightarrow{v_{tr}} + \vec{v_r} + \vec{\omega} \times \vec{r} \end{aligned} \tag{F.14}$$

dove $\overrightarrow{v_{tr}}$ (velocità di trascinamento) è la velocità di O' rispetto ad O e $\vec{v_r}$ è la velocità relativa a K di P.

Derivando nuovamente ottengo invece:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \dot{\overrightarrow{v_{tr}}} + \dot{\vec{v_r}} + \left(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\right) \\ &= \overrightarrow{a_{tr}} + (\vec{a_r} + \vec{\omega} \times \vec{v_r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + [\vec{\omega} \times \vec{v_r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \\ &= \overrightarrow{a_{tr}} + \vec{a_r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v_r} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \tag{F.15}$$

dove analogamente a prima $\overrightarrow{a_{tr}}$ (accelerazione di trascinamento) è l'accelerazione di O' rispetto a O e $\vec{a_r}$ è l'accelerazione relativa a K di P.

Quindi dall'equazione di Newton ottengo:

$$\begin{aligned} \vec{F} = m\vec{a} &= m\left[\overrightarrow{a_{tr}} + \vec{a_r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v_r} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right] \\ &= m\vec{a_r} + \underline{m\overrightarrow{a_{tr}}} + \underline{2m\vec{\omega} \times \vec{v_r}} + \underline{m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}} + \underline{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})} \end{aligned}$$

I termini sottolineati sono forze apparenti; in particolare $2m\vec{\omega} \times \vec{v_r}$ è chiamata forza di Coriolis, mentre $m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ è la forza centrifuga.

In un sistema non inerziale si può quindi riscrivere l'equazione di Newton come:

$$m\vec{a_r} = \vec{F_r} = \vec{F} - m\overrightarrow{a_{tr}} - m\left[2\vec{\omega} \times \vec{v_r} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right] \tag{F.16}$$

1.5 Problema dei 2 corpi

Sono dati 2 corpi di masse m_1, m_2 che interagiscono attraverso una forza che dipende solo dalla distanza $\vec{F}(\vec{r})$. Detta $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ la massa ridotta, vale l'equazione:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \mu \ddot{\vec{r}} \tag{F.17}$$

Detta $\overrightarrow{r_Q}$ la posizione del centro di massa del sistema, vale la seguente espressione per l'energia cinetica:

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\overrightarrow{r_Q}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 \tag{F.18}$$

e questa è la formula per il momento angolare:

$$\vec{L} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{r_Q} \times \dot{\overrightarrow{r_Q}} + \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{F.19}$$

Quindi nel complesso un sistema con 2 corpi si può disaccoppiare completamente nel moto del centro di massa e nel moto relativo tra le 2 masse.

1.6 Urti

I problemi di urto in generale riguardano due particelle di massa m_1 e m_2 e velocità iniziali $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ e sono caratterizzati da:

- interazione di corto raggio
- terzo principio di Newton $\rightarrow$ la quantità di moto totale si conserva
- conservazione dell'energia meccanica (oppure supponiamo di conoscere la differenza ΔE di energia)

Vogliamo trovare $\overrightarrow{v_1}'$ e $\overrightarrow{v_2}'$, le velocità dopo l'urto. Scomponiamo il problema nel moto del centro di massa e nel moto relativo: poniamo $\vec{v} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$, $M = m_1 + m_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$, $\overrightarrow{V_Q} = \frac{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}}{M}$, $\vec{P} = M\overrightarrow{V_Q}$, $\vec{p} = \mu\vec{v}$ e abbiamo che

$$E = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} \tag{F.20}$$

Poichè $\Delta E = 0$ e $\vec{P}$ è costante, anche p è costante, e l'unica cosa che può cambiare dopo l'urto è la sua direzione. Dunque per risolvere completamente il problema è necessario anche conoscere l'angolo θ formato da $\vec{p}$ con $\vec{p}'$. Sia $\hat{v_f}$ il versore diretto lungo $\vec{p}'$. Le velocità della massa m_1 prima e dopo l'urto, calcolate rispetto al centro di massa, sono

$$\overrightarrow{v_{1Q}} = -\frac{m_2}{M}v\hat{v} \qquad \overrightarrow{v_{1Q}}' = -\frac{m_2}{M}v\hat{v_f} \tag{F.21}$$

Nel sistema di riferimento del laboratorio, dunque, le velocità delle particelle dopo l'urto saranno

$$\overrightarrow{v_1}' = -\frac{m_2}{M}v\hat{v_f} + \overrightarrow{V_Q} \qquad \overrightarrow{v_2}' = \frac{m_1}{M}v\hat{v_f} + \overrightarrow{V_Q} \tag{F.22}$$

Osservo infine che, se $|\overrightarrow{V_Q}| > |\overrightarrow{v_{1Q}}|$ ci sono dei limiti sull'angolo di deflessione della prima particella; in particolare il massimo angolo di deflessione è $\theta_{max} = \arctan\frac{v_{1Q}}{V_Q}$.

1.7 Problemi con massa variabile

Si tratta di problemi in cui la massa cambia nel tempo, ad esempio un razzo che espelle carburante oppure una goccia di pioggia che cade nel vapore e man mano aumenta la sua dimensione. Per risolverli, considero che al tempo t avrò: massa = m, velocità = $\vec{v}$ e al tempo $t + \mathrm{d}t$ avrò una massa $m + \mathrm{d}m$ che si muove a velocità $\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}$ e una massa $-\mathrm{d}m$ che si muove a velocità $\vec{v} + \vec{v}_{rel}$, dove $\vec{v}_{rel}$ è la velocità della massa espulsa/acquisita rispetto al corpo che sto considerando. Poichè so che $\mathrm{d}\vec{P} = \vec{F}_{est}\,\mathrm{d}t$, ho che

$$(m + \mathrm{d}m) \cdot (\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}) - \mathrm{d}m\,(\vec{v} + \vec{v}_{rel}) - m\vec{v} = \vec{F}_{est}\,\mathrm{d}t$$

da cui ottengo l'equazione generale per risolvere un problema con massa variabile:

$$m\,\mathrm{d}\vec{v} + \mathrm{d}m\vec{v} = \mathrm{d}m\,(\vec{v} + \vec{v}_{rel}) + \vec{F}_{est}\,\mathrm{d}t \tag{F.23}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\vec{v} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,(\vec{v} + \vec{v}_{rel}) + \vec{F}_{est} \tag{F.24}$$

1.8 Tensore d'inerzia

Userò la notazione di Einstein per le sommatorie contratte. Sia $\vec{O}$ un punto fisso rispetto al corpo rigido e $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ degli assi centrati in $\vec{O}$ fissi rispetto al corpo rigido. Inoltre α sarà un indice che si muoverà sui punti del corpo rigido e m_α, r_α sono massa e posizione rispetto al punto O del punto α. Invece gli indici i, j varieranno su x, y, z.

Il tensore d'inerzia di un corpo rigido è un tensore a due indici definito come segue:

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{ij} \vec{r}_\alpha^2 - r_{\alpha i} r_{\alpha j}) \tag{F.25}$$

Fissato ora un riferimento inerziale, sia $\vec{v}_O$ la velocità di $\vec{O}$ in tale sistema. Trovo la relazione fra il momento angolare calcolato rispetto ad $\vec{O}$ nel sistema di riferimento inerziale e il tensore d'inerzia di un corpo sotto l'ipotesi che valga

$$\vec{r}_Q \times \vec{v}_O = 0 \tag{F.26}$$

dove $\vec{r}_Q$ è il vettore che congiunge $\vec{O}, \vec{Q}$ dove $\vec{Q}$ è il baricentro del corpo.

Utilizzando la definizione di momento angolare e la eq. (F.26), ottengo:

$$\vec{L} = m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \left(\dot{\vec{r}}_\alpha + \vec{v}_O \right) = m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha + m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{v}_O = m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) + m \vec{r}_Q \times \vec{v}_O = m_\alpha \left(\vec{\omega} \vec{r}_\alpha^2 - \vec{r}_\alpha (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha) \right)$$

dove ho usato ho usato una nota identità coi prodotti vettoriali nell'ultima identità. Ora considero la componente i-esima dell'identità vettoriale trovata e ottengo:

$$L_i = m_\alpha \left(\delta_{ij} \omega_j \vec{r}_\alpha^2 - r_{\alpha i} \omega_j r_{\alpha j} \right) = \omega_j m_\alpha \left(\delta_{ij} \vec{r}_\alpha^2 - r_{\alpha i} r_{\alpha j} \right)$$

da cui, sfruttando la eq. (F.25), ottengo proprio la relazione cercata:

$$L_i = I_{ij} \omega_j \tag{F.27}$$

Ora pongo O nel centro di massa del corpo rigido. Ne ricavo che vale anche che l'energia cinetica rispetto al centro di massa si può calcolare come:

$$K = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \tag{F.28}$$

Infine è importante notare che, per il teorema spettrale, esistono 3 versori ortogonali, detti assi principali del corpo, tali che calcolando I rispetto a loro ottengo che $I_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

1.9 Oscillazioni a più gradi di libertà

Dato un sistema a più gradi di libertà considero il vettore di coordinate generalizzate:

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

e assumo di riuscire a scrivere l'energia come:

$$E = T \left(\dot{\vec{x}} \right) + U (\vec{x}) \tag{F.29}$$

dove T, U sono ovviamente rispettivamente energia cinetica e potenziale.

Sia $\vec{x}_0$ un punto di minimo del potenziale.

Per ipotesi di regolarità (tutte da decidere...) si riesce a ricavare che, considerando per comodità $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}_0$, sia T che U sono (in approssimazione al second'ordine centrato in $\vec{x}_0$) delle forme quadratiche. Allora, semplicemente scrivendo quanto appena detto in forma matriciale, esistono delle matrici, che chiamerò K, M per analogia col caso unidimensionale, tali che valgono:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^T M \dot{\vec{y}}$$
$$U = \frac{1}{2} \vec{y}^T K \vec{y}$$

dove inoltre scelgo K, M simmetriche (posso sceglierle simmetriche). Inoltre ancora per strani motivi K, M risultano rispettivamente semidefinita e definita positiva.

Sostituendo quest'ultime nella formula dell'energia eq. (F.29) ricavo:

$$E = \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^T M \dot{\vec{y}} + \frac{1}{2} \vec{y}^T K \vec{y} \tag{F.30}$$

Da questa, sempre con qualche passaggio pindarico misterioso, si arriva alla differenziale lineare omogenea:

$$M\ddot{\vec{y}} = -K\vec{y} \tag{F.31}$$

e ora, basta mostrare $2n$ soluzioni indipendenti e dai teoremi di esistenza ed unicità discenderà che lo spazio delle soluzioni è formato da combinazioni lineari di queste soluzioni.

Cerco soluzioni della forma $\vec{y} = \vec{A}e^{i\omega t}$, e sostituendo ottengo che deve valere:

$$(K - \omega^2 M)\vec{A} = 0 \iff M^{-1}K\vec{A} = \omega^2\vec{A}$$

quindi devo avere $\vec{A}$ autovettore relativo all'autovalore ω^2 di $M^{-1}K$, ma quest'ultima matrice risulta essere diagonalizzabile e con autovalori positivi poichè le altre due sono simmetriche e positive. Di conseguenza ho la certezza di trovare un numero di autovettori $\vec{A}$ sufficiente.

Per trovare gli autovalori ω^2 e gli autovettori mi basta imporre le seguenti due condizioni:

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \tag{F.32}$$

$$\vec{A} \in \ker(K - \omega^2 M) \tag{F.33}$$

e per ogni coppia $\omega^2, \vec{A}$ che si trova, è soluzione sia quella in cui $\omega > 0$ sia quella per cui $\omega < 0$.

Siano quindi $\omega_i, \vec{A}_i$ le n soluzioni con $\omega_i > 0$. La soluzione generale della differenziale risulterà essere (proiettando le soluzioni sull'asse reale):

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \vec{A}_i \left(\lambda_i^+ \cos\omega_i t + \lambda_i^- \sin\omega_i t\right) \tag{F.34}$$

1.10 Lagrangiana

Si consideri un sistema fisico, dipendente dalle coordinate generalizzate q, per cui sia possibile scrivere l'energia cinetica $K(q, \dot{q})$ e l'energia potenziale $V(q)$. Si chiama Lagrangiana del sistema la quantità:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q) \tag{F.35}$$

cioè si assume implicitamente che il potenziale non dipende dalla velocità (cioè l'energia si mantiene) e che nulla dipende dal tempo. Queste assunzioni sono credibili quando non ci sono forze esterne agenti in modo periodico e le forze sono conservative.

Consideriamo innanzitutto un sistema inerziale di coordinate cartesiane $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, nel quale la Lagrangiana è quindi della forma:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = K(x, \dot{x}) - V(x) = \frac{1}{2}m\sum_i \dot{x}_i^2 - V(x)$$

In questo caso posso applicare l'equazione di Newton e ho quindi che

$$m_i\ddot{x}_i + \frac{\delta V}{\delta x_i} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\dot{x}_i + \frac{\delta V}{\delta x_i} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta\frac{1}{2}m\dot{x}_i^2}{\delta\dot{x}_i} + \frac{\delta V}{\delta x_i} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{x}_i} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x_i} = 0$$

Voglio ora dimostrare che quest'ultima equazione trovata vale indipendentemente dal sistema di coordinate scelto. Cioè che, dette q_i le singole componenti di un qualunque sistema di coordinate generalizzate q, vale analogamente al caso inerziale:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{q}_i} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta q_i} \tag{F.36}$$

dove queste ultime si dicono equazioni di Eulero-Lagrange.

Supponiamo quindi di scrivere le componenti di x in funzione delle m componenti della coordinata generalizzata q, cioè $x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_m)$. Innanzitutto per le regole di derivazione di una composta ho che:

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\delta x_i}{\delta q_k}\dot{q}_k \tag{F.37}$$

da cui ottengo inoltre che

$$\frac{\delta\dot{x}_i}{\delta\dot{q}_k} = \frac{\delta x_i}{\delta q_k} \tag{F.38}$$

Utilizzando nuovamente l'equazione di Newton per il sistema inerziale x, ottengo che:

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\delta V}{\delta x_i} \Longrightarrow \sum_i m\ddot{x}_i \frac{\delta x_i}{\delta q_j} = -\sum_i \frac{\delta V}{\delta x_i}\frac{\delta x_i}{\delta q_j}$$

Calcolo ora separatamente i due termini dell'ultima equazione. A secondo membro, per la regola di derivazione di una funzione composta, ho:

$$\sum_i \frac{\delta V}{\delta x_i}\frac{\delta x_i}{\delta q_j} = \frac{\delta V}{\delta q_j} \tag{F.39}$$

dove, nel secondo termine dell'equazione, V è vista come una funzione dei q_j.

Al primo membro, invece, utilizzando eqs. (F.37) e (F.38) ho che:

$$\begin{aligned}\sum_i m\ddot{x}_i \frac{\delta x_i}{\delta q_j} &= \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(m\dot{x}_i\frac{\delta x_i}{\delta q_j}\right) - m\dot{x}_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\delta x_i}{\delta q_j}\right) = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(m\dot{x}_i\frac{\delta \dot{x}_i}{\delta \dot{q}_j}\right) - m\dot{x}_i \sum_k \frac{\delta x_i}{\delta q_k \delta q_j}\dot{q}_k \\ &= \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\delta \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2}{\delta \dot{q}_j}\right) - m\dot{x}_i\frac{\delta \dot{x}_i}{\delta q_j} = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\delta \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2}{\delta \dot{q}_j}\right) - \frac{\delta \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2}{\delta q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_j} - \frac{\delta T}{\delta q_j}\end{aligned} \tag{F.40}$$

Eguagliando infine eq. (F.39) e eq. (F.40), ottengo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_j} - \frac{\delta T}{\delta q_j} = -\frac{\delta V}{\delta q_j} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}_i} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_i} = 0$$

che è proprio quello che volevo ottenere.

È quindi importante notare che le Lagrangiane ci danno le equazioni del moto *indipendentemente* dalle coordinate usate (ammessa una certa regolarità di queste) e questo le rende più versatili di $\vec{F} = m\vec{a}$ che invece si poteva applicare solo nei casi di coordinate cartesiane.

Inoltre dalle equazioni di Eulero-Lagrange si possono sempre ricavare le leggi di conservazione del sistema. Ad esempio il solo fatto che la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo implica la conservazione dell'energia.

Se il potenziale non dipende dalla coordinata q_i è ovvio ricavare da eq. (F.36) che la quantità $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}_i}$ si conserva (tale quantità è chiamata quantità di moto generalizzata).

In generale vale il Teorema di Noether, che afferma che per ogni simmetria della Lagrangiana si ha una relativa quantità conservata. Per simmetria si intende che se le coordinate vengono cambiate di una quantità piccola, la Lagrangiana rimane costante al prim'ordine in questo cambiamento.

Appunto col formalismo Lagrangiano si riescono a dimostrare agevolmente i risultati enunciati nella sezione precedente section 1.9, poichè discendono quasi banalmente dalle equazioni di Eulero-Lagrange.

2 Nome del problema

2.1 Testo

Testo del problema

Lorem Ipsum e così via finchè la capra canta la capra suona anche.

Fine Testo del problema.

2.2 Soluzione

Soluzione del problema.

Un po' di boiate a parole, poi qualche formuletta:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} \tag{2.2.1}$$

Poi un'equazione senza numerino:

$$a = b \Rightarrow b = c \Rightarrow 1 = 0$$

E poi, tutto soddifatto, richiamo la eq. (2.2.1).

Fine Soluzione del problema.

2.3 Soluzione 2

Questa è la seconda soluzione del problema...

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2.3.2}$$

2.4 Soluzione 3

E per esagerare questa è la terza.

3 Palla che rotola

3.1 Testo

Un cilindro di massa m, raggio r si muove in puro rotolamento su un piano inclinato ad un angolo α sotto l'effetto della forza di gravità.

Assumendo che l'attrito statico sia sufficiente a mantenere il cilindro in rotolamento, e che il cilindro sia inizialmente fermo, determinare l'equazione del moto.

3.2 Soluzione

Siano v la velocità del centro di massa del cilindro, ω la sua velocità angolare, h la distanza verticale che ha percorso, I il suo momento di inerzia.

Vale la conservazione dell'energia poichè l'attrito non compie lavoro, perciò risulta:

$$0 = -mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{3.2.1}$$

Poichè inizialmente il cilindro è fermo.

Poichè il cilindro rotola di puro rotolamento risulta:

$$\omega r = v \tag{3.2.2}$$

Inoltre per i cilindri è nota la formula:

$$I = \frac{mr^2}{2} \tag{3.2.3}$$

Infine, chiamando x la distanza percorsa sul piano inclinato, per ovvie questioni di trigonometria, risulta:

$$x \sin\alpha = h \tag{3.2.4}$$

Sostituendo eqs. da (3.2.2) a (3.2.4) in eq. (3.2.1) ottengo (sostituendo $v = \dot{x}$):

$$0 = -mgx\sin\alpha + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\frac{v}{r}\right)^2 \Rightarrow x\left(g\sin\alpha\right) = v^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \dot{x} = x^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{4g\sin\alpha}{3}} \tag{3.2.5}$$

Quest'ultima equazione è una differenziale standard che si risolve portando tutto dalla stessa parte e poi integrando in dt:

$$\text{eq. (3.2.5)} \Rightarrow t_0\sqrt{\frac{4g\sin\alpha}{3}} = \int_0^{t_0}\sqrt{\frac{4g\sin\alpha}{3}}\mathrm{d}t = \int_0^{x_0}\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{x_0} \Rightarrow x_0 = \frac{g\sin\alpha}{3}t_0^2$$

Ho così ottenuto l'equazione del moto $x = \frac{g\sin\alpha}{3}t^2$, che mostra come il moto del cilindro su un piano inclinato sia, come prevedibile, un moto rettilineo accelerato.

3.3 Soluzione 2

Questa è la seconda soluzione, ma non mi va di scriverla.

$$50^2 + 10^2 = 30^2 \tag{3.3.6}$$

4 Asta Vincolata Rotante 17/10/2013

4.1 Testo

Un'asta vincolata in un punto si muove su un piano con velocità angolare ω costante.

1. Studiare il moto di un corpo di massa m che si muove liberamente lungo l'asta.
2. Studiare lo stesso sistema se l'asta è disposta in verticale e quindi interviene la forza di gravità.

4.2 Soluzione

1) Studiamo il problema in coordinate cartesiane prendendo come origine il vincolo dell'asta, e chiamando θ l'angolo tra l'asta e l'asse polare.

Per eq. (F.3), so che in coordinate polari l'accelerazione vale:

$$\overrightarrow{a} = \dot{\overrightarrow{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

In questo problema in particolare ho che poiché l'asta si muove di velocità angolare costante lungo $\hat{\theta}$ allora $\dot{\theta} = \omega$ e $\ddot{\theta} = 0$. Inoltre, poiché per ipotesi possiamo supporre che non siano presenti forze d'attrito e che la reazione vincolare sia perpendicolare all'asta (vincolo liscio) abbiamo che la forza lungo $\hat{r}$ deve essere nulla, quindi:

$$\ddot{r} = \omega^2 r$$

La soluzione di questa differenziale è un'esponenziale con due gradi di libertà, che risulta facilmente essere:

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \tag{4.2.1}$$

dove A e B sono univocamente determinate dalle condizioni iniziali ovvero da r_0 e v_0, intendendo con r_0 la distanza della mia massa dall'origine e con v_0 la sua velocità iniziale lungo $\hat{r}$.

È sufficiente infatti imporre in eq. (4.2.1) che al tempo $t = 0$ valga $r = r_0$ e $\dot{r} = v_0$, ovvero $A + B = r_0$ e $\omega(A - B) = v_0$, per ottenere $A = (\omega r_0 + v_0)/2\omega$ e $B = (\omega r_0 - v_0)/2\omega$.

Per concludere quindi l'equazione del moto della mia massa m sarà:

$$\overrightarrow{r} = \left(\frac{(\omega r_0 + v_0)}{2\omega} e^{\omega t} + \frac{(\omega r_0 - v_0)}{2\omega} e^{-\omega t} \right) \hat{r} \tag{4.2.2}$$

2) Come prima mi riduco a studiare la forza lungo $\hat{r}$ che però stavolta non sarà nulla, ma sarà invece la componente lungo $\hat{r}$ della forza di gravità, quindi:

$$\ddot{r} - \omega^2 r = -g \sin \omega t \tag{4.2.3}$$

Si tratta di un'equazione differenziale non omogenea, quindi le sue soluzioni saranno date da una sua soluzione particolare più tutte le soluzioni dell'omogenea associata, che sono già state trovate nel punto precedente. Quindi poiché una soluzione particolare è ad esempio quella con r costante ed uguale a $(g \sin \omega t)/2\omega^2$ allora la soluzione generale sarà data da:

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} + \frac{g \sin \omega t}{2\omega^2} \tag{4.2.4}$$

5 Date le orbite spiraliformi trovare la forza centrale 24/10/2013

5.1 Testo

In un piano, dato un sistema di riferimento polare di centro O con versori $\hat{r}, \hat{\theta}$, una particella di massa m si muove lungo una traiettoria descritta da

$$\theta = \frac{k}{r^\alpha}, \tag{5.1.1}$$

dove k, α sono costanti fissate. Sapendo che la particella è soggetta ad una forza centrale $\vec{F} = f(r)\hat{r}$, determinare $f(r)$.

5.2 Soluzione

Ricordiamo che, per eq. (F.3), l'accelerazione in coordinate polari è data da

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

che unita con la seconda legge della dinamica porta a

$$\begin{cases} f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ 0 = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Dalla seconda equazione ricavo che deve valere

$$0 = mr(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = \frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt} \Longrightarrow mr^2\dot{\theta} = L \tag{5.2.3}$$

con L costante. In effetti quest'ultima considerazione si poteva omettere osservando che quella descritta è proprio la conservazione del momento angolare, che ha modulo $L = mr^2\dot{\theta}$.

Ora, sfruttando eqs. (5.1.1) e (5.2.3), abbiamo

$$\frac{L}{mr^2} = \dot{\theta} = \frac{d\left(\frac{k}{r^\alpha}\right)}{dt} = \frac{-k\alpha}{r^{\alpha+1}}\dot{r}$$

da cui

$$\dot{r} = -\frac{L}{mk\alpha}r^{\alpha-1}$$

e

$$\ddot{r} = -\frac{L(\alpha-1)}{mk\alpha}r^{\alpha-2}\dot{r} = \frac{L^2(\alpha-1)}{m^2k^2\alpha^2}r^{2\alpha-3} \tag{5.2.4}$$

Infine, nella prima equazione di eq. (5.2.2) sostituiamo $\ddot{r}$ dato dalla eq. (5.2.4) e $\dot{\theta}$ dato dalla eq. (5.2.3), e otteniamo:

$$f(r) = m\left(\frac{L^2(\alpha-1)}{m^2k^2\alpha^2}r^{2\alpha-3} - \frac{L^2}{m^2r^3}\right) = \frac{L^2}{mr^3}\left(\frac{\alpha-1}{k^2\alpha^2}r^{2\alpha} - 1\right)$$

che era proprio quello che cercavamo.

6 Il pendolo sferico

24/10/2013

6.1 Testo

Vogliamo studiare il moto di un punto materiale vincolato sull'estremità di un asta di lunghezza l libera di muoversi nello spazio purché l'altra estremità resti incernierata ad un punto O. In particolare, dato un sistema di coordinate polari tridimensionali centrato nel punto O vogliamo determinare:

1. L'equazione del moto nella coordinata θ, rappresentante la distanza angolare dal punto di minimo.
2. Quali condizioni iniziali sono necessarie affinché il moto del pendolo sia conico, ossia la coordinata θ risulti costante nel tempo.
3. La frequenza con cui l'angolo θ oscilla intorno alla posizione d'equilibrio.

6.2 Soluzione

Le uniche forze agenti sul punto materiale sono il suo peso $m\vec{g}$ e la reazione vincolare dell'asta $-N\hat{r}$ (parallela alla direzione dell'asta perché questa è da considerarsi priva di massa). La somma F di queste forze, proiettata sui tre versori ortogonali $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$, sarà:

- $\vec{F} \cdot \hat{r} = m\vec{g} \cdot \hat{r} - N\hat{r} \cdot \hat{r} = mg\cos\theta - N$.
- $\vec{F} \cdot \hat{\theta} = m\vec{g} \cdot \hat{\theta} - N\hat{r} \cdot \hat{\theta} = -mg\sin\theta$.
- $\vec{F} \cdot \hat{\varphi} = m\vec{g} \cdot \hat{\varphi} - N\hat{r} \cdot \hat{\varphi} = 0$.

Per la eq. (F.6), il valore dell'accelerazione di un punto materiale in termini delle sue coordinate è:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\hat{\theta} + (2\dot{r}\sin\theta\dot{\varphi} + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta)\hat{\varphi}$$

Inoltre la coordinata r del nostro punto materiale é costantemente uguale a l, sicché le sue derivate temporali saranno nulle, dunque la relazione precedente si esprime

$$\vec{a} = (-l\dot{\theta}^2 - l\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (l\ddot{\theta} - l\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\hat{\theta} + (2l\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + l\ddot{\varphi}\sin\theta)\hat{\varphi}$$

Confrontando questo risultato con le tre componenti della forza F si ottengono le tre equazioni:

$$mg\cos\theta - N = -m(l\dot{\theta}^2 + l\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) \tag{6.2.1}$$

$$-mg\sin\theta = m(l\ddot{\theta} - l\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2) \tag{6.2.2}$$

$$0 = 2l\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + l\ddot{\varphi}\sin\theta \tag{6.2.3}$$

Si noti che la eq. (6.2.3) è equivalente alla conservazione del momento angolare lungo l'asse z parallelo alla direzione della gravità. Infatti

$$\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = ml\hat{r} \wedge (l\dot{\theta}\hat{\theta} + l\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi}) = ml^2\dot{\theta}\hat{r} \wedge \hat{\theta} + ml^2\dot{\varphi}\sin\theta\hat{r} \wedge \hat{\varphi}$$

ed ora, essendo $\hat{r} \wedge \hat{\theta} = -\hat{\varphi} \perp \hat{z}$ e $\hat{r} \wedge \hat{\varphi} = \hat{\theta}$, si ha che $\vec{L} \cdot \hat{z} = ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta$, pertanto

$$\frac{(d\vec{L} \cdot \hat{z})}{dt} = 2ml^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta + ml^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta$$

e uguagliando a 0 questa espressione si ottiene la eq. (6.2.3).

Dalla conservazione del momento angolare, infatti, otteniamo la relazione $\dot{\varphi} = \dfrac{L_z}{ml^2\sin^2\theta}$ che, una volta sostituita nella eq. (6.2.2) ci restituisce un'equazione differenziale nella variabile θ:

$$g\sin\theta + l\ddot{\theta} - \frac{L_z^2\cos\theta}{m^2l^3\sin^3\theta} = 0 \tag{6.2.4}$$

Affinchè il moto sia conico le derivate temporali dell'angolo θ saranno entrambe nulle e dunque il suo valore sarà una costante θ_0 che risolve l'equazione seguente (ottenuta dalla eq. (6.2.4)).

$$m^2l^3g\sin^4\theta_0 = L_z^2\cos\theta_0 \tag{6.2.5}$$

Studiamo ora le piccole oscillazioni.

Poniamo $\theta = \theta_0 + \alpha$ nella eq. (6.2.4), otteniamo, dunque

$$g \sin(\theta_0 + \alpha) + l\ddot{\alpha} - \frac{L_z^2 \cos(\theta_0 + \alpha)}{m^2 l^3 \sin^3(\theta_0 + \alpha)} = 0$$

che sviluppata secondo Taylor fino al primo ordine diviene

$$g \sin\theta_0 + \alpha g \cos\theta_0 + l\ddot{\alpha} - \frac{L_z^2 \cos(\theta_0)}{m^2 l^3 \sin^3(\theta_0)} - \alpha \frac{L_z^2 (1 - 2\cos^2\theta_0)}{m^2 l^3 \sin^4(\theta_0)} = 0 \tag{6.2.6}$$

Per eq. (6.2.5), eq. (6.2.6) viene semplificata come

$$\ddot{\alpha} = \alpha \left(\frac{L_z^2 (1 - 2\cos^2\theta_0)}{m^2 l^4 \sin^4(\theta_0)} - \frac{g\cos\theta_0}{l} \right) \tag{6.2.7}$$

da cui si ricava facilmente che il pendolo oscilla armonicamente con frequenza

$$\sqrt{\frac{L_z^2 (1 - 2\cos^2\theta_0)}{m^2 l^4 \sin^4(\theta_0)} - \frac{g\cos\theta_0}{l}}$$

attorno alla traiettoria conica.

6.3 Soluzione 2

Si giungerà alla eq. (6.2.4) attraverso la conservazione dell'energia e quella del momento angolare lungo l'asse z senza passare dalle considerazioni cinematiche svolte in precedenza.

La velocità del punto materiale è $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = l\dot{\theta}\hat{\theta} + l\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi}$, per cui la sua energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)$$

La sua energia potenziale è $U = -mgl(1 - \cos\theta)$, quindi l'energia meccanica del punto è

$$E = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - mgl(1 - \cos\theta)$$

ciò vuol dire che esiste una costante c per cui vale

$$c = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + mgl\cos\theta \tag{6.3.8}$$

Essendo $\dot{\varphi} = \dfrac{L_z}{ml^2 \sin^2\theta}$, si ottiene l'equazione desiderata direttamente derivando eq. (6.3.8).

7 Circonferenza con Molla

31/10/2013

7.1 Testo

Una pallina di massa m si può muovere senza attrito su una guida circolare di raggio R disposta verticalmente, ed è collegata a una molla (lunghezza a riposo l, costante elastica k) che ha l'altro estremo attaccato al punto più alto della circonferenza. Quali sono le condizioni di equilibrio (stabile o instabile)? Calcolare la pulsazione delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

7.2 Soluzione

Le forze che agiscono sulla pallina sono:

- Forza di gravità: è conservativa
- Reazione vincolare: è perpendicolare alla velocità perchè non c'è attrito, quindi non compie lavoro
- Forza di richiamo della molla: è conservativa

Di conseguenza, l'energia meccanica totale della pallina si conserva.

Sia θ l'angolo che il raggio compreso tra il diametro verticale e il raggio che collega il centro della circonferenza con la pallina (per chiarire, quando la pallina è nel punto più basso ho $\theta = 0$, quando sta sul diametro orizzontale ho $\theta = \frac{\pi}{2}$). L'energia cinetica della pallina è $T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$, mentre l'energia potenziale gravitazionale è data dalla somma dell'energia potenziale gravitazionale e dell'energia potenziale elastica: $U_{gr} = -mgR\cos\theta$ (considero $U_{gr} = 0$ quando la pallina sta sul diametro orizzontale della circonferenza) e $U_{el} = \frac{1}{2}k\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - l\right)^2$. Dunque

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - l\right)^2 \tag{7.2.1}$$

I punti di equilibrio si hanno quando l'energia potenziale è minima (equilibrio stabile) o massima (equilibrio instabile). Per trovarli studio la derivata dell'energia potenziale in funzione di θ. Ho che $U(\theta) = -mgR\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - l\right)^2$ dunque

$$\frac{dU}{d\theta} = gmR\sin\theta + k\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - l\right)\left(-R\sin\frac{\theta}{2}\right) = 2R\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(mg - Rk) + Rkl\sin\frac{\theta}{2}$$

Gli zeri della funzione (cioè i massimi/minimi dell'energia potenziale) sono dati da

$$\sin\frac{\theta_1}{2} = 0,\ \cos\frac{\theta_2}{2} = \frac{kl}{2\,(Rk - mg)}$$

Osservo in particolare che, poichè θ è compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, la seconda soluzione ha senso solo se $0 \leq \frac{kl}{2(Rk-mg)} \leq 1$ cioè solo quando $l \leq 2\left(R - \frac{gm}{k}\right)$. Per capire se l'equilibrio è stabile o no, e per trovare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio, derivo la eq. (7.2.1) (rispetto al tempo) e sviluppo in un intorno di θ_1 e poi θ_2. Poiché l'energia è costante, la sua derivata è nulla, quindi

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= 2\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgR\left(-\dot{\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}k\cdot 2\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - l\right)\left(-\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{\theta}{2}\right)\dot{\theta} = 0 \\ &\implies mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgR\dot{\theta}\sin\theta - 2kR^2\dot{\theta}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + klR\dot{\theta}\sin\frac{\theta}{2} = 0 \\ &\implies mR\ddot{\theta} = (kR - mg)\sin\theta - kl\sin\frac{\theta}{2}\end{aligned} \tag{7.2.2}$$

che, sviluppata al primo ordine in un intorno di θ_0, diventa:

$$mR\ddot{\theta} = (kR - mg)(\sin\theta_0 + \cos\theta_0(\theta - \theta_0)) - kl\left(\sin\frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}(\theta - \theta_0)\right) \tag{7.2.3}$$

Ponendo $C(\theta_0) = (kR - mg)(\sin\theta_0 - \theta_0\cos\theta_0) - kl\left(\sin\frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{2}\theta_0\cos\frac{\theta_0}{2}\right)$ l'equazione del moto può essere riscritta nella forma

$$mR\ddot{\theta} = \left(\cos\theta_0(kR - mg) - \frac{1}{2}kl\cos\frac{\theta_0}{2}\right)\theta + C(\theta_0) \tag{7.2.4}$$

Per $\theta_0 = \theta_1 = 0$ ottengo (sostituendo nella eq. (7.2.4))

$$mR\ddot{\theta} = \left(-mg + kR - \frac{1}{2}kl\right)\theta + C(0)$$

Dunque l'equilibrio è stabile se il coefficiente di θ è negativo, cioè se $l > 2\left(R - \frac{mg}{k}\right)$ e in questo caso la frequenza angolare ω_1 è

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2gm - 2kR + kl}{2mR}}$$

Per $\theta_0 = \theta_2$ la eq. (7.2.4) diventa:

$$mR\ddot{\theta} = \left((kR - mg)\left(2\cos^2\frac{\theta_2}{2} - 1\right) - \frac{kl}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\right)\theta + C(\theta_2) =$$
$$= \frac{k^2l^2 - 2\left(Rk - mg\right)^2 - \frac{1}{2}k^2l^2}{2\left(Rk - mg\right)}\theta + C(\theta_2) = \frac{k^2l^2 - 4\left(Rk - mg\right)^2}{4\left(Rk - mg\right)}\theta + C(\theta_2)$$

Se è verificata la condizione $l < 2\left(R - \frac{gm}{k}\right)$ (condizione necessaria per l'esistenza di θ_2), allora il coefficiente di θ è negativo, dunque si tratta di equilibrio stabile e la frequenza angolare ω_2 è

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4\left(Rk - mg\right)^2 - k^2l^2}{4mR\left(Rk - mg\right)}}$$

8 Vettore di Lenz 31/10/2013

8.1 Testo

Dimostrare che in un campo di forze centrale di tipo Coulombiano, quindi con $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{r}$, il vettore:

$$\vec{A} = -\alpha\hat{r} + \vec{v} \times \vec{L} \tag{8.1.1}$$

è una costante del moto e calcolare $|\vec{A}|$, $\vec{A} \cdot \vec{r}$.

8.2 Soluzione

Per mostrare che il vettore di Lenz è una costante del moto dimostro che la sua derivata rispetto al tempo è nulla.

Sfrutto il fatto che $\vec{L}$ è a sua volta una costante del moto:

$$0 = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(-\alpha\hat{r} + \vec{v} \times \vec{L}\right)}{\mathrm{d}t} \iff \alpha\dot{\hat{r}} = \vec{a} \times \vec{L} \tag{8.2.2}$$

Ma usando l'espressione della forza in un campo Coulombiano, la definizione del momento angolare, le proprietà del prodotto vettore e la formula della velocità in polari eq. (F.2) vale la seguente catene di identità:

$$\vec{a} \times \vec{L} = \left(\frac{\alpha}{mr^2}\hat{r}\right) \times (m\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{\alpha}{r}(\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{v})) = \frac{\alpha}{r}(\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\hat{r} \cdot \hat{r})) = \frac{\alpha}{r}(\hat{r}\dot{r} - \vec{v}) = \frac{\alpha}{r}\left(r\dot{\hat{r}}\right) = \alpha\dot{\hat{r}} \tag{8.2.3}$$

Sfruttando le eqs. (8.1.1) e (8.2.3) ottengo che il vettore $\vec{A}$ è una costante del moto.

Ora scrivo alcune identità vettoriali per poi usarle nel calcolo di $\vec{A} \cdot \vec{r}$.

Vale la seguente formula per il momento angolare:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr\left(\hat{r} \times (r\dot{\hat{r}}) + \hat{r} \times (\dot{r}\hat{r})\right) = mr^2\hat{r} \times \dot{\hat{r}}$$

e applicando questa, sfruttando le proprietà del prodotto vettore e scalare ottengo:

$$\vec{v} \times \vec{L} = (\dot{r}\hat{r} \times \vec{L}) + r\left(\dot{\hat{r}} \times \vec{L}\right) = (\dot{r}\hat{r} \times \vec{L}) + mr^3\left(\hat{r}(\dot{\hat{r}} \cdot \dot{\hat{r}}) - \dot{\hat{r}}(\dot{\hat{r}} \cdot \hat{r})\right) = (\dot{r}\hat{r} \times \vec{L}) + mr^3\hat{r}\dot{\hat{r}}^2 \tag{8.2.4}$$

Inoltre, sfruttando la formula per la derivata dei versori eq. (F.1) e la definizione di L come scalare ottengo:

$$\dot{\hat{r}}^2 = \dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{m^2r^4}$$

e sostituendo nella eq. (8.2.4) arrivo a:

$$\vec{v} \times \vec{L} = (\dot{r}\hat{r} \times \vec{L}) + \frac{L^2}{mr}\hat{r} \tag{8.2.5}$$

Finalmente calcolo $\vec{A} \cdot \vec{r}$ applicando eq. (8.2.4):

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = -\alpha\hat{r} \cdot \vec{r} + (\vec{v} \times L) \cdot \vec{r} = -\alpha + \left((\dot{r}\hat{r} \times \vec{L}) + \frac{L^2}{mr}\hat{r}\right) \cdot \vec{r} = -\alpha r + \frac{L^2}{m} \tag{8.2.6}$$

Alternativamente posso arrivare a questo risultato usando direttamente le proprietà del prodotto vettoriale:

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = -\alpha\hat{r} \cdot \vec{r} + (\vec{v} \times L) \cdot \vec{r} = -\alpha r + (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{L} = -\alpha r + \left(\frac{\vec{L}}{m}\right) \cdot \vec{L} = -\alpha r + \frac{L^2}{m}$$

Ora calcolo $|\vec{A}|$ sfruttando $\vec{v} \perp \vec{L}$:

$$\vec{A}^2 = \alpha^2 - 2\alpha\hat{r} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{L}\right) + (\vec{v} \times \vec{L})^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha L^2}{mr} + v^2L^2 = \alpha^2 + \frac{2L^2}{m}\left(-\frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2}mv^2\right) = \alpha^2 + \frac{2L^2E}{m} \tag{8.2.7}$$

Ed ora unendo i risultati eqs. (8.2.6) e (8.2.7) ottengo la formula polare delle orbite Kepleriane:

$$|\vec{A}|r\cos\theta = -\alpha r + \frac{L^2}{m} \Rightarrow r = \frac{\frac{L^2}{m}}{\alpha + |\vec{A}|\cos\theta} = \frac{\frac{L^2}{\alpha m}}{1 + \left(\sqrt{1 + \frac{2L^2E}{\alpha^2 m}}\right)\cos\theta} \tag{8.2.8}$$

9 Massa su spirale

11/11/2013

9.1 Testo

Determinare le equazioni del moto di una particella di massa m vincolata a muoversi su una spirale senza attrito di equazioni

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = \frac{h}{2\pi} \varphi \end{cases}$$

9.2 Soluzione

Le forze a cui è soggetta la particella sono la forza gravitazionale $\overrightarrow{F_{gr}}$ e la reazione vincolare $\overrightarrow{R}$. Dunque $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F_{gr}} + \overrightarrow{R}$.

Lavoro con le coordinate cilindriche (con asse z verso l'alto). La massa m ha un solo grado di libertà dunque dovrò riuscire a scrivere tutto in funzione del solo angolo φ. In particolare ho che

$$\overrightarrow{r} = \rho \hat{r} + \frac{h}{2\pi} \varphi \hat{z}$$

Calcolo velocità e accelerazione della particella (ricordandomi che $\hat{z}$ è fisso ma $\hat{r}$ e $\hat{\varphi}$ no):

$$\overrightarrow{v} = \dot{\overrightarrow{r}} = \rho \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \frac{h}{2\pi} \dot{\varphi} \hat{z}$$

$$\overrightarrow{a} = \ddot{\overrightarrow{r}} = -\rho \dot{\varphi}^2 \hat{r} + \rho \ddot{\varphi} \hat{\varphi} + \frac{h}{2\pi} \ddot{\varphi} \hat{z}$$

So che $\overrightarrow{F_{gr}} = -mg\hat{z}$ dunque l'equazione $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ diventa

$$-mg\hat{z} + \overrightarrow{R} = m \left(-\rho \dot{\varphi}^2 \hat{r} + \rho \ddot{\varphi} \hat{\varphi} + \frac{h}{2\pi} \ddot{\varphi} \hat{z} \right)$$

L'unica cosa che so di $\overrightarrow{R}$ è che, siccome la spirale è senza attrito, la reazione vincolare è perpendicolare alla guida, e quindi perpendicolare alla velocità. Ciò vuol dire che $\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. Allora per ricavare informazioni utili faccio il prodotto scalare di entrambi i membri di $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ con la velocità $\overrightarrow{v}$ (usando il fatto che i versori $\hat{z}, \hat{\varphi}, \hat{r}$ sono perpendicolari tra loro).

$$\left(-mg\hat{z} + \overrightarrow{R} \right) \cdot \left(\rho \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \frac{h}{2\pi} \dot{\varphi} \hat{z} \right) = m \left(-\rho \dot{\varphi}^2 \hat{r} + \rho \ddot{\varphi} \hat{\varphi} + \frac{h}{2\pi} \ddot{\varphi} \hat{z} \right) \cdot \left(\rho \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \frac{h}{2\pi} \dot{\varphi} \hat{z} \right)$$

$$-\frac{mgh}{2\pi} \dot{\varphi} = m \left(\rho^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \frac{h^2}{4\pi^2} \dot{\varphi} \ddot{\varphi} \right) \Leftrightarrow -\frac{gh}{2\pi} = \ddot{\varphi} \left(\rho^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \right)$$

Ponendo $K = \frac{gh}{2\pi\left(\rho^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right)}$ ho $\ddot{\varphi} = -K$, cioè

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2} K t^2 + At + B$$

dove A e B sono determinate in base alle condizioni iniziali e in particolare sono rispettivamente i valori di φ e $\dot{\varphi}$ all'istante iniziale.

10 Forze conservative e centrali

10.1 Testo

Data una forza nella forma:

$$\begin{cases} F_x &= ax + by \\ F_y &= cx + dy \end{cases}$$

Dire quando essa è conservativa e quando centrale.

10.2 Soluzione

Una forza è conservativa se $\nabla \times F = 0$ (vedere Morin pag. 150). In questo caso quindi pochè F_z è nullo:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \tag{10.2.1}$$

cioè $b = c$.

Affinchè F invece sia centrale è necessario che, oltre ad essere conservativa, essa dipenda solo da $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Che è equivalente a richiedere che il potenziale dipenda solo da r. Calcolo quindi il potenziale $U(x, y)$, sapendo che $F_x = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$ e che $F_y = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$ quindi:

$$-U(x, y) = \int F_x \,\mathrm{d}x = \int F_y \,\mathrm{d}y = \frac{a}{2}x^2 + bxy + g(y) = bxy + \frac{d}{2}y^2 + f(x) = \frac{a}{2}x^2 + bxy + \frac{d}{2}y^2 \tag{10.2.2}$$

Ora sostituisco $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$ ed ottengo: $-U = \frac{a}{2}(r^2 - y^2) \pm b\sqrt{r^2 - y^2}y + \frac{d}{2}y^2$ poichè voglio che la y sparisca devo avere che $b = 0$ e $a = d$ ottenendo così che $U(r) = \frac{a}{2}r^2$

11 Pallina su un filo che si arrotola su un perno 11/11/2013

11.1 Testo

Una massa è attaccata all'estremità di un filo di lunghezza l_0 che si avvolge intorno ad un perno di raggio R senza attrito, con velocità iniziale v. Determinare il moto della massa.

11.2 Soluzione

1. Sistema di riferimento: inerziale, origine nel punto di contatto, coordinate: lunghezza l del filo e spostamento angolare θ .
2. Forze: tensione del filo.
3. Condizioni iniziali: $R, \dot{\theta}$ oppure R, v.
4. Relazioni varie: si conserva l'energia cinetica perché non viene svolto lavoro sulla massa, dunque la velocità v è costante.

Se inizialmente v è perpendicolare al filo e questo è teso, queste condizioni saranno valide anche in seguito: il filo non può svolgere lavoro (perché non ci sono attriti e non c'è apporto di energia dall'esterno) e la tensione è esercitata lungo la direzione del filo. Se la velocità non fosse perpendicolare, ci sarebbe una componente della forza parallela alla velocità, che svolgerebbe lavoro; infine ci deve essere una tensione del filo, perché inizialmente era teso e quindi è necessaria una forza centripeta.

Sotto queste condizioni posso in ogni istante considerare il moto come un rotazione attorno al punto di contatto. Quindi pongo $\theta(0) = 0$ e ottengo

$$v = l\dot{\theta} \tag{11.2.1}$$

dove v è costante, e

$$l = l_0 - R\theta \tag{11.2.2}$$

che, se derivo entrambi i membri diventa:

$$\dot{l} = -R\dot{\theta} \tag{11.2.3}$$

Posso allora impostare un'equazione differenziale sostituendo nella eq. (11.2.3) $\dot{\theta}$ dalla eq. (11.2.1) :

$$\dot{l} = -R\frac{v}{l} \tag{11.2.4}$$

$$l\dot{l} = -Rv \tag{11.2.5}$$

Ora posso integrare i due membri, ottenendo

$$\frac{l^2}{2} = -Rvt + \frac{c}{2} \tag{11.2.6}$$

dove c è la costante di integrazione, che si ricava ponendo $l = l_0$ a $t = 0$.

$$l_0^2 = c \tag{11.2.7}$$

e quindi risolvendo in l la eq. (11.2.6)

$$l = \sqrt{l_0^2 - 2Rvt} \tag{11.2.8}$$

che in effetti soddisfa l'equazione differenziale; quindi per la eq. (11.2.2)

$$\theta = \frac{l_0 - l}{R} \tag{11.2.9}$$

Se vogliamo la posizione $\vec{r}$ rispetto al centro del perno, questa si ricava, in coordinate polari, da l, dato che $r^2 = R^2 + l^2$:

$$\vec{r} = \hat{r}\sqrt{R^2 + l_0^2 - 2Rvt} \tag{11.2.10}$$

12 Orbite che precedono
21/11/2013

12.1 Testo

Fissato un sistema di riferimento nel piano con centro O è data una forza centrale con potenziale

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\varepsilon}{r^2}, \tag{12.1.1}$$

con ε piccolo e positivo, ossia una piccola perturbazione ad un campo gravitazionale.

Dire come cambia l'orbita ellittica, ossia studiare $r(\theta)$ nel caso di un moto limitato.

12.2 Soluzione

Scriviamo l'equzione dell'energia

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\varepsilon}{r^2}; \tag{12.2.2}$$

ora la velocità in coordinate polari si scrive

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

che porta a

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2; \tag{12.2.3}$$

la conservazione del momento angolare dà

$$L = mr^2\dot{\theta}. \tag{12.2.4}$$

Inoltre vogliamo esprimere $r(\theta)$, quindi usiamo la regola della derivata di funzioni composte:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}. \tag{12.2.5}$$

Sostituiamo quindi nella conservazione dell'energia eq. (12.2.2) $\dot{\vec{r}}$ della eq. (12.2.3), $\dot{\theta}$ della eq. (12.2.4), $\dot{r}$ della eq. (12.2.5):

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\alpha}{r} + \frac{\varepsilon}{r^2} \\
&= \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\varepsilon}{r^2} \\
&= \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} + \frac{\varepsilon}{r^2} \\
\frac{2mE}{L^2} &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{2m\varepsilon}{L^2}\right) - \frac{2m\alpha}{L^2 r}
\end{aligned}$$

Sostituiamo ora $u = \frac{1}{r}$, si ha $\frac{du}{dr} = -\frac{1}{r^2}$ e

$$\frac{2mE}{L^2} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\left(1 + \frac{2m\varepsilon}{L^2}\right) - u\frac{2m\alpha}{L^2}$$

ora deriviamo rispetto a θ

$$\begin{aligned}
0 &= 2\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} + 2u\frac{du}{d\theta}\left(1 + \frac{2m\varepsilon}{L^2}\right) - \frac{du}{d\theta}\frac{2m\alpha}{L^2} \\
0 &= \frac{du}{d\theta}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\left(1 + \frac{2m\varepsilon}{L^2}\right) - \frac{m\alpha}{L^2}\right).
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo 2 possibilità:

$$\frac{du}{d\theta} = 0 \Rightarrow u = C \Rightarrow r = C^{-1}$$

cioè una circonferenza (raggio costante attorno a O), oppure

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\left(1 + \frac{2m\varepsilon}{L^2}\right) - \frac{m\alpha}{L^2} = 0 \tag{12.2.6}$$

la quale, posto $\omega^2 = \left(1 + \frac{2m\varepsilon}{L^2}\right)$, ha una soluzione della forma

$$u = A\cos(\omega\theta + \phi) + C$$

dove A e ϕ sono arbitrarie (che però dipendono da E e da L) e C è da determinare in modo che soddisfi la eq. (12.2.6):

$$-A\omega^2\cos(\omega\theta + \phi) + (A\cos(\omega\theta + \phi) + C)\omega^2 - \frac{m\alpha}{L^2} = 0 \tag{12.2.7}$$

$$C\omega^2 - \frac{m\alpha}{L^2} = 0 \tag{12.2.8}$$

$$C = \frac{m\alpha}{L^2\omega^2} \tag{12.2.9}$$

Risostituendo $r = \frac{1}{u}$, la traiettoria ottenuta risulta:

$$r = \frac{1}{A\cos(\omega\theta + \phi) + \frac{m\alpha}{L^2\omega^2}}$$

Sappiamo che in assenza di perturbazione ($\varepsilon = 0$, ossia $\omega = 1$), se la traiettoria è limitata allora è un ellisse. In questo caso, come si vede, la traiettoria rimane molto simile: l'unica rilevante differenza è la presenza di ω nell'argomento del coseno. Poiché $\omega > 1$ risulta che il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è più piccolo, cioè si osserva la precessione dell'orbita ellittica.

13 Palline legate da un filo

21/11/2013

13.1 Testo

Due palline sono legate da un filo lungo l (inestensibile e di massa trascurabile). La prima (massa m_1) è appoggiata su un tavolo (liscio) con un buco, la seconda (massa m_2) è sotto il buco (attacata al filo). Determinare cosa succede (posizione nel tempo delle due palline o equazioni del moto).

13.2 Soluzione

1. Sistema di riferimento: inerziale, origine nel buco, coordinate cilindriche, ossia polari (r, θ) per la pallina sul tavolo, l'asse z ($h = r - l$) per l'altra. La gravità è verso il basso in direzione z.

2. Forze esterne: gravità (entrambe le palline), reazione del piano (verticale, verso l'alto, solo la prima pallina, bilancia la gravità). Sono tutte conservative.

3. Forze interne: tensione del filo; verticale (verso l'alto) per la seconda pallina, radiale (verso il centro) per la prima.

4. Cosa si conserva:
   - somma delle energie meccaniche delle due palline;
   - momento angolare della prima pallina.

5. Condizioni iniziali: $r, \dot{\theta}$.

6. Relazioni varie: la velocità della seconda pallina ($\dot{h} = v_2$) e la velocità radiale della prima ($\dot{r} = v_{1,r}$) sono uguali:
$$\dot{r} = v_{1,r} = v_2 \tag{13.2.1}$$

Pongo $\frac{m_2}{m_1+m_2} = \mu$. Quindi elimino la tensione (grazie a $F = ma$):

$$\begin{cases} m_1\ddot{r} = -T \\ m_2\ddot{r} = T - m_2 g \end{cases} \tag{13.2.2}$$

che mi da
$$m_2\ddot{r} = -m_1\ddot{r} - m_2 g \tag{13.2.3}$$

ossia
$$\ddot{r} = -g\frac{m_2}{m_1+m_2} = -\mu g \tag{13.2.4}$$

Conservazione del momento angolare: $L = m_1\dot{\theta}r^2$ è costante. Esplicito $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m_1 r^2} \tag{13.2.5}$$

Conservazione dell'energia:

$$E = m_2 gh + \frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2 = \tag{13.2.6}$$
$$= m_2 g(r-l) + \frac{m_2+m_1}{2}\dot{r}^2 + \frac{m_1}{2}(r\dot{\theta})^2 \tag{13.2.7}$$

e, usando la eq. (13.2.5)
$$E = m_2 g(r-l) + \frac{m_2+m_1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m_1 r^2} \tag{13.2.8}$$

o, poiché l'energia potenziale è definita a meno di una costante

$$E = m_2 gr + \frac{m_2+m_1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m_1 r^2} \tag{13.2.9}$$

Quindi

$$\frac{dE}{dt} = m_2 g\dot{r} + (m_1+m_2)\dot{r}\ddot{r} - \dot{r}\frac{L^2}{m_1 r^3} = 0 \tag{13.2.10}$$

Esamino a parte il caso $\dot{r} = 0$ (moto circolare). In generale si ha

$$\ddot{\vec{r}} = \hat{r}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \hat{\theta}(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \tag{13.2.11}$$

Semplificando $\dot{r} = 0$ (e $\ddot{r} = 0$), e usando ancora $F = ma$ si ottiene

$$\ddot{\vec{r}} = -r\dot{\theta}^2\hat{r} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} = \mu g\hat{r} \tag{13.2.12}$$

perché la forza sulla massa 1 è radiale; quindi, eguagliando le componenti $\ddot{\theta} = 0$ e

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mu g}{r}} \tag{13.2.13}$$

Quest'ultima equazione esprime la relazione tra le condizioni iniziali affinché il moto sia circolare. Quindi, poiché r è costante, posso integrare nel tempo, ottenendo

$$\theta(t) = \sqrt{\frac{\mu g}{r}}t \tag{13.2.14}$$

Caso $\dot{r} \neq 0$: Dalla eq. (13.2.10) si ottiene

$$\dot{r}\ddot{r} = \dot{r}\frac{L^2}{m_1(m_1 + m_2)r^3} - \mu g\dot{r} \tag{13.2.15}$$

e, integrando nel tempo

$$2\dot{r}^2 = -\frac{L^2}{2m_1(m_1 + m_2)r^2} - \mu gr + 2c \tag{13.2.16}$$

che è un'equazione differenziale a variabili separabili:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{-\frac{L^2}{4m_1(m_1+m_2)r^2} - \frac{\mu gr}{2} + c}} \tag{13.2.17}$$

Questa equzione fornisce la posizione r della particella in funzione del tempo. c è una costante che si determina (dopo aver risolto l'equazione) a partire dalle condizioni iniziali.

14 Caduta di un grave sulla terra

Lezione 9/12/2013

14.1 Testo

Trascurando l'attrito dell'aria, trovare lo spostamento orizzontale (nel sistema non inerziale della terra che gira) che subisce un grave in caduta libera da un'altezza h.

14.2 Soluzione

Pongo i 3 assi cartesiani $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ in modo che $\hat{x}$ sia sul meridiano del luogo, $\hat{y}$ sul parallelo del luogo e $\hat{z}$ rivolto verso il centro della terra.

Siano inoltre θ l'angolo che si forma tra piano equatoriale e congiungente del centro della terra con il luogo, $\vec{\omega}$ l'asse di rotazione terrestre ed R il raggio della terra.

Inizialmente il grave si trova in $(0, 0, 0)$ con velocità $(0, 0, 0)$.

Calcolo le forze agenti sul corpo, sfruttando implicitamente eq. (F.15).

L'accelerazione di gravità vale $g\hat{z}$ e l'accelerazione di trascinamento (che equivale alla forza centrifuga agente nel luogo) risulta essere $w^2 R \cos\theta\,(\cos\theta\hat{z} + \sin\theta\hat{x})$. (dove ho assunto trascurabile lo spostamento relativo del corpo rispetto al raggio terrestre: $h \ll R$)

L'effetto complessivo di queste due accelerazioni (costanti) porta a definire la $\vec{g_e}$ cioè l'accelerazione di gravità del luogo:

$$\vec{g}_e = g\hat{z} - w^2 R \cos\theta\,(\cos\theta\hat{z} + \sin\theta\hat{x}) \tag{14.2.1}$$

e porta anche a considerare l'angolo θ_0 cioè l'angolo che forma g_e con il piano equatoriale.

Ora calcolo la forza centrifuga, assumendo di poter trascurare, per calcolare lo spostamento relativo del grave, la forza centrifuga e di Coriolis. Risulta allora che la norma della forza centrifuga vale

$$|\vec{a}_c| = |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| \approx \omega^2 \frac{1}{2} |g_e| t^2 \cos\theta_0 \tag{14.2.2}$$

Ho calcolato solo la norma, perchè mostrerò che è del tutto trascurabile rispetto alle altre forze.

E infine per calcolare l'accelerazione di Coriolis assumo, con ottima approssimazione, che la velocità del grave sia esattamente come se non fossero presenti le forze di Coriolis e Centrifuga. Di conseguenza ottengo $\vec{v} = \vec{g_e} t$ e ciò implica che l'accelerazione di Coriolis risulta:

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{g_e} t \tag{14.2.3}$$

Da quest'ultima ricavo anche subito una buona approssimazione per la forza di Coriolis:

$$|\vec{a}_{cor}| = 2\omega |g_e| t \cos\theta_0 \tag{14.2.4}$$

Ora sfruttando eqs. (14.2.2) e (14.2.4) ottengo che l'accelerazione centrifuga è trascurabile rispetto a quella di Coriolis:

$$|a_c| \ll |a_{cor}| \iff \omega^2 \frac{1}{2} |g_e| t^2 \cos\theta_0 \ll 2\omega |g_e| t \cos\theta_0 \iff \omega t \ll 4$$

Ma l'ultima disuguaglianza è verissima, poichè $\omega = \frac{2\pi}{3600 \cdot 24} \approx 10^{-4}$

Ora sfrutto eq. (14.2.3) per ottenere che l'accelerazione di Coriolis rispetta la:

$$\vec{a}_{cor} = -2\omega |\vec{g}_e| t \cos\theta_0 \hat{y}$$

Quindi l'accelerazione complessiva a cui è soggetto il grave è:

$$\vec{a} = \vec{g}_e + 2\omega |\vec{g}_e| t \cos\theta_0 \hat{y}$$

Ed integrando due volte ne ottengo:

$$\vec{r} = \frac{1}{2} \vec{g}_e t^2 + \frac{1}{3} \omega |\vec{g}_e| t^3 \cos\theta_0 \hat{y}$$

Il primo addendo del secondo membro è quello che ci si aspetterebbe se il grave seguisse la traiettoria indicata da un filo a piombo, mentre il secondo addendo è lo spostamento dovuto alla forza di Coriolis.

In particolare ora impongo che il primo addendo valga h (cioè l'altezza da cui cade l'oggetto), da cui $h = \frac{1}{2} |\vec{g}_e| t^2$ e perciò $t = \sqrt{\frac{2h}{|\vec{g}_e|}}$.

Sostituisco questo valore nello spostamento dovuto a Coriolis ottenendo che lo spostamento vale:

$$\Delta r = \frac{2}{3} \omega h \sqrt{\frac{2h}{|\vec{g}_e|}} \cos\theta_0 \approx \left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{g}} \omega \cos\theta \right) h^{\frac{3}{2}} \tag{14.2.5}$$

In particolare se il corpo cade dalla cima del Pirellone ($\theta \approx 45°$ e $h \approx 130m$) si ha uno spostamento $\Delta r \approx 2cm$.

15 Anello che ruota

12/12/2013

15.1 Testo

Un anello ruota attorno ad un suo diametro (parallelo alla direzione della forza di gravità) ad una velocità angolare ω costante nel tempo. Su di esso vi è un punto materiale di massa m, vincolato a muoversi lungo l'anello e su cui agisce la forza di gravità.

Determinare le posizioni di equilibrio stabile ed instabile in funzione di ω del punto materiale e studiare la frequenza delle piccoli oscillazioni attorno ai punti di equilibrio stabile.

15.2 Soluzione

Mi pongo nel sistema di riferimento non inerziale che si muove solidalmente all'anello. Grazie all'equazione eq. (F.15) ho che:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_{O'}} + \overrightarrow{a_r} + 2\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v_r} + \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r} + \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r})$$

In questo caso particolare però, O' (il centro del sistema di riferimento non inerziale) coincide con il centro dell'anello, quindi $\overrightarrow{a_{O'}} = 0$; inoltre $\overrightarrow{\omega} = \omega\hat{z}$, perciò $\dot{\overrightarrow{\omega}} = 0$. Mi riconduco quindi a:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_r} + 2\omega\hat{z} \times \overrightarrow{v_r} + \omega\hat{z} \times (\omega\hat{z} \times \overrightarrow{r})$$

Voglio trovare ora la componente di $\overrightarrow{a}$ diretta lungo $\hat{\theta}$, considero quindi ogni singolo addendo:

- $\overrightarrow{a_r} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$ per l'equazione eq. (F.3), quindi la sua componente diretta lungo θ è uguale a $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = r\ddot{\theta}$, in quanto r è costante.

- $\hat{z}$ e v_r giacciono sul piano contenente l'anello, quindi $\omega\hat{z} \times v_r$ ne è perpendicolare e perciò non ha componente lungo $\hat{\theta}$.

- Infine $\omega\hat{z} \times (\omega\hat{z} \times \overrightarrow{r}) = (-r\omega^2 \sin\theta, 0, 0) = -r\omega^2 \sin\theta^2 \hat{r} - r\omega^2 \sin\theta\cos\theta\hat{\theta}$, quindi il valore della componente diretta lungo $\hat{\theta}$ è $-r\omega^2 \sin\theta\cos\theta$.

Ottengo quindi che $a_\theta = r\ddot{\theta} - r\omega^2 \sin\theta\cos\theta$. Inoltre so che $F_\theta = ma_\theta$ e che $F_\theta = -g\sin\theta$, da cui:

$$r\ddot{\theta} = r\omega^2 \sin\theta\cos\theta - g\sin\theta \tag{15.2.1}$$

Le posizioni di equilibrio si hanno quando $\ddot{\theta} = 0$ in eq. (15.2.1), cioè $\sin\theta = 0$ (cioè $\theta = 0$ o $\theta = \pi$) o $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 r}$.

Consideriamo quindi ora un angolo θ molto vicino ad un angolo θ_0 di equilibrio e sviluppiamo il seno ed il coseno rispetto a quel punto:

$$\sin\theta = \sin\theta_0 + \cos\theta_0(\theta - \theta_0) + \mathcal{O}((\theta - \theta_0)^2) \tag{15.2.2}$$

$$\cos\theta = \cos\theta_0 - \sin\theta_0(\theta - \theta_0) + \mathcal{O}((\theta - \theta_0)^2) \tag{15.2.3}$$

Sostituendo nella eq. (15.2.1) e utilizzando che $r\omega^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 - g\sin\theta_0$, otteniamo:

$$\begin{aligned} r\ddot{\theta} =& r\omega^2 \left[\sin\theta_0\cos\theta_0 + \left(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0\right)(\theta - \theta_0) + \mathcal{O}((\theta - \theta_0)^2)\right] \\ &- g\left(\sin\theta_0 + \cos\theta_0(\theta - \theta_0) + \mathcal{O}((\theta - \theta_0)^2)\right) \\ =& \left[r\omega^2\left(2\cos^2\theta_0 - 1\right) - g\cos\theta_0\right](\theta - \theta_0) + \mathcal{O}((\theta - \theta_0)^2) \end{aligned}$$

Quindi θ_0 è un punto di equilibrio stabile se e solo se :

$$r\omega^2\left(2\cos^2\theta_0 - 1\right) - g\cos\theta_0 < 0 \tag{15.2.4}$$

cioè se vicino a θ_0 il moto si può approssimare ad un moto armonico.

Distinguiamo ora tre casi:

- Se $\theta_0 = 0$, allora $r\omega^2\left(2\cos^2\theta_0 - 1\right) - g\cos\theta_0 = r\omega^2 - g$, che è minore di 0 se e solo se $r\omega^2 < g$. In particolare in tal caso il periodo delle piccole oscillazioni attorno a $\theta_0 = 0$ è:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g - r\omega^2}}$$

- Se invece $\theta_0 = \pi$, vale che $r\omega^2\left(2\cos^2\theta_0 - 1\right) - g\cos\theta_0 = r\omega^2 + g$ e quindi π non è mai un punto di equilibrio stabile.

- Infine se $\cos\theta_0 = \frac{g}{r\omega^2}$, si ha che $r\omega^2\left(2\cos^2\theta_0 - 1\right) - g\cos\theta_0 = \frac{g^2}{r\omega^2} - r\omega^2$, che è minore di 0 se è solo se $g < r\omega^2$ e in quel quaso il periodo delle piccole oscillazioni attorno a θ_0 è:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{r\omega^2 - g^2/(r\omega^2)}}$$

Nella soluzione non sono stati trattati i casi in cui $g = r\omega^2$ (sia con $\theta_0 = 0$ che con $\cos\theta_0 = \frac{g}{r\omega^2}$) che richiedono semplicemente sviluppi del seno e del coseno ad ordini via via successivi.

16 Il pendolo di Foucault

16/12/2013

16.1 Testo

Vogliamo studiare il moto di un pendolo matematico di lunghezza l posto sulla Terra ad una latitudine λ. In particolare ci interessa l'approssimazione al prim'ordine in $\theta \ll 1$ dove θ è l'angolo forma il pendolo con la verticale rispetto il filo a piombo [1].

16.2 Soluzione

Scegliamo come sistema di riferimento cartesiano (O, x, y, z) dove O è il punto di equilibrio del pendolo, z è uscente dalla Terra diretto come il filo a piombo, y che punta a nord.

Avendo scelto di approssimare il moto al prim'ordine, la coordinata z del pendolo è costante. La soluzione userà, pertanto, solo le coordinate x, y.

Richiamando la eq. (F.16) relativa ai sistemi di riferimento non inerziali abbiamo che

$$m\vec{a_r} = \vec{F} - m\vec{a_{tr}} - m\left[2\vec{\omega} \times \vec{v_r} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right]$$

Il termine $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ è nullo perché $\dot{\vec{\omega}} = 0$. Trovandoci nel sistema in cui z è diretto lungo il filo a piombo, i termini $m\vec{g} - m\overrightarrow{a_{tr}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ li possiamo scrivere come $m\tilde{g}\hat{g} = m\tilde{g}\hat{z}$ dove $\tilde{g}$ tiene conto degli effetti dovuti alle forze apparenti del sistema non inerziale. Tuttavia, è un facile esercizio vedere che $g - \tilde{g} \ll g$, è dunque possibile approssimare $\tilde{g}$ a g. In questa soluzione cercheremo di tenere comunque $\tilde{g}$. Otteniamo dunque

$$\vec{a_r} = \tilde{g}\hat{z} + \vec{T} - 2\vec{\omega} \times \vec{v_r} \tag{16.2.1}$$

Cerchiamo ora di ridurre eq. (16.2.1) ad un sistema nelle variabili x, y, ovvero le coordinate del pendolo nel nostro sistema di riferimento. Al prim'ordine in θ consideriamo la tensione $\vec{T}$ del pendolo costante. La proiezione dei primi 2 termini in $\hat{x}$ e $\hat{y}$ vale pertanto rispettivamente $-x\omega_0^2$ e $-y\omega_0^2$, dove $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.

Quanto all'altro termine, abbiamo che $\vec{\omega} = \omega(\sin\lambda\hat{y} + \cos\lambda\hat{z})$; quindi $\vec{\omega} \times \vec{v_r} = \omega(-\cos\lambda\dot{y}\hat{x} + \cos\lambda\dot{x}\hat{y} - \sin\lambda\dot{x}\hat{z})$.

Dopo aver trascurato il termine lungo $\hat{z}$ essendo trascurabile rispetto $\tilde{g}$, il sistema che ne risulta è

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -x\omega_0^2 + 2\omega\cos\lambda\dot{y} \\ \ddot{y} &= -y\omega_0^2 - 2\omega\cos\lambda\dot{x}.\end{aligned}$$

Detto $\xi = x + iy$, dalla somma dell'equazione di $\ddot{x}$ con i quella di $\ddot{y}$ si ottiene una sola equazione in ξ. Presa la soluzione, la parte reale darà la funzione di x, la parte immaginaria la funzione di y. L'equazione in ξ è

$$\ddot{\xi} = -\xi\omega_0^2 - i2\omega\cos\lambda\dot{\xi}. \tag{16.2.2}$$

Il polinomio associato è $x^2 + 2i\omega\cos\lambda x + \omega_0^2$, le sue radici sono $x_\pm = i\left(\omega\cos\lambda \pm \sqrt{\omega^2\cos^2\lambda + \omega_0^2}\right) = \Omega_\pm$, quindi la soluzione generica, per opportuni A, B complessi, sarà del tipo

$$\xi = Ae^{i\Omega_+ t} + Be^{i\Omega_- t}.$$

e la soluzione in x, y, per opportune costanti a, b, α, β associate ad A, B,

$$\begin{aligned}x &= a\cos(\Omega_+ t + \alpha) + b\cos(\Omega_- t + \beta) \\ y &= a\sin(\Omega_+ t + \alpha) + b\sin(\Omega_- t + \beta).\end{aligned}$$

Ora che abbiamo la soluzione generale, consideriamo quella particolare in cui il pendolo parte da $(0,0)$ con una velocità iniziale diretta lungo y. Si vede facilmente che le costanti arbitrarie che soddisfano sono $\alpha = \beta = 0$, $a = d$, $b = d$ per un certo d in funzione della velocità iniziale. Ora, sfruttando una piccola identità trigonometrica possiamo riscrivere le soluzioni in x, y come

$$\begin{aligned}x &= 2d\cos(t\omega\cos\lambda)\cos\left(\sqrt{\omega^2\cos^2\lambda + \omega_0^2}t\right) \\ y &= 2d\sin(t\omega\cos\lambda)\cos\left(\sqrt{\omega^2\cos^2\lambda + \omega_0^2}t\right).\end{aligned}$$

[1] consideriamo implicitamente che l'asse z non sia diretto ortogonalmente al terreno, ma lungo la direzione del filo a piombo. La differenza è legata agli effetti centrifughi della rotazione terrestre

Effettivamente il moto si capisce meglio se lo si descrive in coordinate polari:

$$
\begin{aligned}
&r = 2d\cos\left(\sqrt{\omega^2\cos^2\lambda + \omega_0^2}t\right)\\
&\theta = t\omega\cos\lambda,
\end{aligned}
$$

cioè un pendolo che oscilla con pulsazione $\sqrt{\omega^2\cos^2\lambda + \frac{g}{l}}$ su un piano verticale il quale ruota su se stesso con velocità angolare $\omega\cos\lambda$.

17 Orbita della cometa di Halley

Compitino 13/01/2014

17.1 Testo

L'orbita della cometa di Halley ha un periodo di $T = 76$ anni e un perielio $r_p = 9 \cdot 10^{10}$m. Calcolare l'eccetricità ϵ dell'orbita, potendo dare per buona la formula (in coordinate polari centrate nel sole):

$$r = \frac{l}{1 - \epsilon \cos\theta}$$

17.2 Soluzione

Sia r_a l'afelio e a il semiasse maggiore. Vale ovviamente $2a = r_a + r_p$.

Inoltre, poichè r_a, r_p sono i valori massimi e minimi di distanza dal sole, devono corrispondere ai θ che rendono minima e massima l'espressione $1 - \epsilon \cos\theta$ e quindi corrispondono a $\cos\theta = \pm 1$. In formule ricavo:

$$r_p = \frac{l}{1+\epsilon}$$
$$r_a = \frac{l}{1-\epsilon}$$

e facendo il rapporto tra le due arrivo a:

$$\frac{r_p}{r_a} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \Rightarrow \epsilon \left(1 + \frac{r_p}{r_a}\right) = 1 - \frac{r_p}{r_a} \Rightarrow \epsilon = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{2a - r_p - r_p}{2a} = 1 - \frac{r_p}{a} \tag{17.2.1}$$

Ora per ricavare a sfrutto la terza legge di Keplero eq. (F.10):

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_s}} a^{\frac{3}{2}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_s}{4\pi^2}} \tag{17.2.2}$$

e sostituisco eq. (17.2.1) ottenendo:

$$\epsilon = 1 - \frac{r_p}{\sqrt[3]{\frac{T^2 GM_s}{4\pi^2}}} \approx 0.967$$

dove per ottenere il valore numerico ho semplicemente sostituito i valori.

18 Massa sull'asse di una circonferenza
Compitino 13/01/2014

18.1 Testo

Si consideri una massa M distribuita uniformemente su una circonferenza di raggio R ed una massa puntiforme m che si muove lungo l'asse della circonferenza.

a) Calcolare in funzione della distanza x dal centro della circonferenza la massima velocità che tiene la massa m legata alla circonferenza.

b) Calcolare la frequenza delle oscillazioni di m intorno al centro della circonferenza per spostamenti piccoli rispetto a R.

18.2 Soluzione

Incomincio a trovare, in funzione di x, la forza che agisce sulla particella m. Per simmetria (la massa è distribuita uniformemente sulla circonferenza), mi interessa soltanto la proiezione sull'asse x della forza esercitata da ciascun pezzo $\mathrm{d}M$ di circonferenza. Ho che $\mathrm{d}F = -\frac{Gm}{d^2}\cos\theta\,\mathrm{d}M$ dove d è la distanza tra m e $\mathrm{d}M$, e θ è l'angolo compreso tra l'asse x e la congiungente di m con $\mathrm{d}M$. Ho che $d^2 = x^2 + R^2$ e $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$ da cui ricavo

$$\mathrm{d}F = -\frac{xGm}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}M$$

Poichè la forza è la stessa per ogni pezzettino $\mathrm{d}M$ di circonferenza, la forza totale che agisce sulla massa m, in funzione di x, è

$$F = -\frac{xGmM}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Scrivo ora il potenziale della forza (ponendo come di consueto il potenziale nullo quando le due masse sono infinitamente lontane):

$$U(x) = -\int_{\infty}^{x} F\,\mathrm{d}x = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

a) Scrivo l'espressione dell'energia meccanica totale della massa m:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

Guardando il grafico del potenziale (che è sempre negativo, ha un minimo assoluto in $x = 0$ ed è asintotico a 0 per $x \to \pm\infty$) trovo che il moto è limitato se $E \leq 0$ cioè la massima velocità che la massa può avere, in funzione di x, è (in modulo)

$$v_{max} = \sqrt{\frac{GM}{\sqrt{x^2+R^2}}}$$

b) L'equazione del moto $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ è:

$$\ddot{x} = -\frac{GMx}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}} = -\frac{GM}{R^2}\frac{\frac{x}{R}}{\left(\frac{x^2}{R^2}+1\right)^{3/2}}$$

Nell'approssimazione in cui gli spostamenti siano piccoli rispetto a R, posso approssimare al primo ordine in $\frac{x}{R}$, ottenendo così

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{R^3}x$$

Dunque la frequenza angolare delle pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio è

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

19 Campo di forze con resistenza

Compitino 13/01/2014

19.1 Testo

Un punto materiale di massa m si muove lungo una retta soggetto ad una forza costante F e ad una resistenza $F_r = -kv^2$, dove v è la velocità del punto materiale. Calcolare la distanza $x(t)$ a partire da un istante in cui sia x che v sono nulli (può essere utile il seguente cambio di variabile $z = e^{\frac{2\sqrt{Fk}}{m}t}$). Come si può calcolare la distanza $x(v)$ percorsa in funzione di v senza mai passare attraverso il tempo?

19.2 Soluzione

La massa m si muove lungo una retta, quindi nel corso di tutta la soluzione considererò solo le intensità dei vettori, poichè saranno tutti diretti lungo la retta del moto.

Innanzitutto ho che la massa m è soggetta alla forza $F + F_r = F - kv^2$, da cui:

$$\begin{aligned} ma &= F - kv^2 \\ \iff m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= F - kv^2 \\ \iff \frac{m}{F - kv^2}\,\mathrm{d}v &= \mathrm{d}t \\ \implies \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{m}{F - kv^2}\,\mathrm{d}v &= t \end{aligned}$$

da cui, sostituendo $V = \sqrt{\frac{F}{k}}$ e utilizzando che $v(0) = 0$, ottengo

$$\begin{aligned} t &= \frac{m}{k}\int_0^{v(t)} \frac{1}{V^2 - v^2}\,\mathrm{d}v \\ \iff t &= \frac{m}{2Vk}\int_0^{v(t)} \left(\frac{1}{V - v} + \frac{1}{V + v}\right)\mathrm{d}v \\ \implies t &= \frac{m}{2Vk}\ln\left(\frac{V - v(t)}{V + v(t)}\right) \end{aligned}$$

dove non devo aggiungere nessun modulo all'argomento del logaritmo perchè ho sempre che $v(t) \leq \sqrt{\frac{F}{k}} = V$. Quindi dall'ultima equazione, chiamando $\tau = \frac{m}{2\sqrt{Fk}}$, ottengo:

$$\begin{aligned} v(t) &= V \cdot \frac{1 - e^{\frac{t}{\tau}}}{1 + e^{\frac{t}{\tau}}} \\ \implies x(t) &= \int_0^t V \cdot \frac{1 - e^{\frac{u}{\tau}}}{1 + e^{\frac{u}{\tau}}}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

da cui, sostituendo $z = e^{\frac{u}{\tau}}$ e utilizzando che $\mathrm{d}u = \frac{\tau}{z}\,\mathrm{d}z$, ho:

$$\begin{aligned} x(t) &= V\tau\int_1^{e^{\frac{t}{\tau}}} \frac{1 - z}{z(z+1)}\,\mathrm{d}z \\ \iff x(t) &= \frac{m}{2k}\int_1^{e^{\frac{t}{\tau}}} \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{z+1}\right)\mathrm{d}z \\ \implies x(t) &= \frac{m}{2k}\left(\ln(e^{\frac{t}{\tau}}) - 2\ln(e^{\frac{t}{\tau}} + 1) + 2\ln 2\right) \\ \iff x(t) &= Vt - \frac{m}{k}\ln\left(\frac{e^{\frac{t}{\tau}} + 1}{2}\right) \end{aligned}$$

Voglio calcolare ora $x(v)$ senza mai passare attraverso il tempo. Ho che:

$$\begin{aligned}
ma &= F - kv^2 \\
\iff m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= F - kv^2 \\
\iff m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v &= F - kv^2 \\
\implies x(v) &= \int_0^v \frac{mu}{F - ku^2}\,\mathrm{d}u \\
\iff x(v) &= -\frac{m}{2k}\int_0^v \frac{-2u}{V^2 - u^2}\,\mathrm{d}u \\
\implies x(v) &= -\frac{m}{2k}\left(\ln(V^2 - v^2) - \ln V^2\right) \\
\iff x(v) &= -\frac{m}{2k}\ln\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right)
\end{aligned}$$

che è proprio quello che cercavo.

20 Molla con pendolo

16/01/2014

20.1 Testo

Una massa m_1 è appesa al soffitto tramite una molla di costante elastica k ed è vincolata a muoversi solo sulla verticale. A sua volta un pendolo di lunghezza l, alla cui estremità si trova una massa m_2, è appeso alla massa m_1. Su tutto il sistema agisce la forza di gravità. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni della molla e del pendolo.

20.2 Soluzione

Mi pongo nel sistema di riferimento cartesiano che ha asse y coincidente con la verticale della molla e diretto verso l'alto e asse x parallelo al soffitto e passante per il "punto di equilibrio" della molla, cioè il punto più basso che raggiungerebbe se non ci fosse appesa la massa m_1.

Le posizioni delle due masse in questo sistema di riferimento sono rispettivamente:

$$\vec{r_1} = (0, y)$$
$$\vec{r_2} = (l\sin\theta, y - l\cos\theta)$$

dove θ è l'angolo che il pendolo forma con la verticale.

Derivando due volte queste due espressioni ottengo le componenti delle accelerazioni delle due masse:

$$\vec{a_1} = (0, \ddot{y})$$
$$\vec{a_2} = (l\cos\theta\ddot{\theta} - l\sin\theta\dot{\theta}^2, \ddot{y} + l\sin\theta\ddot{\theta} + l\cos\theta\dot{\theta}^2)$$

Sulla massa m_1, nella direzione dell'asse y (l'unica in cui si può muovere), agisce la forza peso $m_2\vec{g}$, la forza della molla $-ky$ e la componente verticale della tensione del filo del pendolo. Sulla massa m_2 invece, agiscono solo la forza di gravità $m_1\vec{g}$ e la tensione del filo. Posso scrivere quindi $\vec{F} = m\vec{a}$ per le due masse.

Per la massa m_1 lungo la verticale ho:

$$m_1\ddot{y} = -ky - T\cos\theta - m_1 g$$

Per la massa m_2, rispettivamente lungo x e lungo y, ho invece:

$$m_2(l\cos\theta\ddot{\theta} - l\sin\theta\dot{\theta}^2) = -T\sin\theta$$
$$m_2(\ddot{y} + l\sin\theta\ddot{\theta} + l\cos\theta\dot{\theta}^2) = T\cos\theta - m_2 g$$

Quindi mi sono ricondotta a risolvere il sistema

$$m_1\ddot{y} = -ky - T\cos\theta - m_1 g \tag{20.2.1}$$
$$m_2(l\cos\theta\ddot{\theta} - l\sin\theta\dot{\theta}^2) = -T\sin\theta \tag{20.2.2}$$
$$m_2(\ddot{y} + l\sin\theta\ddot{\theta} + l\cos\theta\dot{\theta}^2) = T\cos\theta - m_2 g \tag{20.2.3}$$

Innanzitutto osservo che, in regime di piccole oscillazioni, nella eq. (20.2.2) $l\sin\theta\dot{\theta}^2$, che è al terz'ordine, è trascurabile rispetto a $l\cos\theta\ddot{\theta}$, che invece è al prim'ordine. Nella eq. (20.2.3), invece, $l\sin\theta\ddot{\theta} + l\cos\theta\dot{\theta}^2$ è trascurabile rispetto a $\ddot{y}$ in quanto ha un ordine maggiore (sto implicitamente assumendo che avvengano dei moti armonici).

Riassumendo le semplificazioni e approssimando al prim'ordine $\sin\theta \approx \theta$ e $\cos\theta \approx 1$ ottengo:

$$m_1\ddot{y} = -ky - T - m_1 g \tag{20.2.4}$$
$$m_2 l\ddot{\theta} = -T\theta \tag{20.2.5}$$
$$m_2\ddot{y} = T - m_2 g \tag{20.2.6}$$

Ora noto che nelle eqs. (20.2.4) e (20.2.6) non compare θ, quindi risolvo in y ottenendo:

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m_1 + m_2}\left(y - \frac{m_1 + m_2}{k}g\right)$$

che è proprio lo stesso moto che assumerebbe la molla se il pendolo fosse fermo. Quindi la molla oscilla di moto armonico intorno alla posizione di equilibrio $\frac{m_1+m_2}{k}g$ con frequenza $\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$.

Per quanto riguarda θ, al prim'ordine ricavo da eq. (20.2.6) che $T \approx m_2 g$ e sostituendo questo in eq. (20.2.5) ottengo:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$$

che è l'equazione classica del pendolo.

Quindi in conclusione il moto del pendolo e della molla avvengono in maniera disaccoppiata, con frequenze diverse e entrambi avvengono come se l'altro non ci fosse.

21 Due stelle che ruotano l'una attorno all'altra

Lezione 20/01/2014

21.1 Testo

Si osserva una stella di massa m_1 orbitare su un orbita circolare di raggio r_1 con pulsazione ω. Ciò si può spiegare ammettendo la presenza di un altro corpo che forma un sistema con la stella.

Trovare la massa e la distanza dell'altro corpo.

21.2 Soluzione

Mi pongo nel sistema del centro di massa, sia m_2 la massa e r_2 la distanza del secondo corpo dal centro di massa, e sia $\vec{r}$ la posizione relativa dei due corpi.

Il primo corpo ruota ovviamente intorno al centro di massa e così anche il secondo corpo. Di conseguenza $\vec{r}$ stesso compie un moto circolare, anch'esso di frequenza ω e perciò risulta come noto:

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 r\hat{r} \tag{21.2.1}$$

Sfruttando la eq. (F.17) ottengo:

$$-G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} = \mu\ddot{\vec{r}} \tag{21.2.2}$$

Ora unisco le eqs. (21.2.1) e (21.2.2) ottenendo:

$$-G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(-\omega^2 r\hat{r}\right) \Rightarrow \frac{G}{r^2} = \frac{\omega^2 r}{m_1 + m_2} \Rightarrow \frac{Gm_1\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}{\omega^2} = (r_1 + r_2)^3$$

Ma per definizione di baricentro vale che $\frac{m_2}{m_1} = \frac{r_1}{r_2}$ e sostituendo nell'ultima arrivo a:

$$\frac{Gm_1\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)}{\omega^2} = (r_1 + r_2)^3 \Rightarrow \frac{Gm_1}{\omega^2} = r_2(r_1 + r_2)^2 \tag{21.2.3}$$

Ma quest'ultima è una cubica in r_2 e perciò risolvendola ne posso trovare il valore, per poi ottenere m_2 basta sfruttare $m_2 = m_1\frac{r_1}{r_2}$.

In particolare sotto l'assunzione $m_1 \gg m_2$, ho che risulta $r_2 \gg r_1$ e quindi ne ricavo che la eq. (21.2.3) diviene:

$$\frac{Gm_1}{\omega^2} \approx r_2^3 \Rightarrow r_2 \approx \sqrt[3]{\frac{Gm_1}{\omega^2}}$$

e questa è proprio l'approssimazione corretta nel caso in cui il corpo che non si riesce ad individuare è un pianeta, che ha quindi massa molto minore a quella della stella che si osserva.

22 Urti con materia oscura

30/01/2014

22.1 Testo

Si consideri una galassia sferica. Si supponga che la grande maggioranza delle stelle (massa totale M) sia contenuta entro un raggio R, con simmetria sferica.

a) Calcolare, in questa approssimazione, la velocità di una stella che ruota su una circonferenza attorno alla galassia, posta a una distanza $r > R$ dal centro della galassia.

b) Ciò che in realtà si verifica è che la velocità dipende da r secondo la formula

$$v(r) = \sqrt{\frac{k}{1+\frac{r}{r_0}}}$$

Ci sono allora due possibilità: o la gravità a grandi distanze non si comporta secondo la legge che conosciamo, oppure non era corretto supporre che la massa al di fuori della sfera di raggio R fosse trascurabile. Assumendo che si verifichi questa seconda ipotesi, calcolare il potenziale della forza e la distribuzione di massa in funzione del raggio r.

c) Si pensa che questa massa invisibile (materia oscura) sia costituita da particelle, dette neutralini, di massa circa 100 volte maggiore di quella del protone: $m_1 = 100m_p$. Inoltre i neutralini hanno, rispetto alla Terra, una velocità $\overrightarrow{v_1}$ di circa 130 km/s. Si vuole studiare, sulla Terra, l'urto tra un neutralino e un atomo campione di massa m_2. Determinare m_2 affinchè dopo l'urto l'energia dell'atomo usato sia massima (si suppone che l'urto sia elastico).

22.2 Soluzione

a) Devo semplicemente usare la formula $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$, sapendo che sia la forza sia l'accelerazione (centripeta) sono in direzione radiale. Dunque

$$m\frac{v(r)^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow v(r) = \sqrt{\frac{MG}{r}} \tag{22.2.1}$$

b) So che $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$. Sostituendo il valore di v trovo che

$$\frac{mk}{r\left(1+\frac{r}{r_0}\right)} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} \Rightarrow \frac{mkr_0}{r(r+r_0)} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} \Rightarrow mk\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+r_0}\right)\mathrm{d}r = -\,\mathrm{d}U \tag{22.2.2}$$

Calcolo dunque il potenziale, ponendolo nullo quando r è infinito:

$$\int_{\infty}^{r} mk\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r+r_0}\right)\mathrm{d}r = \int_{\infty}^{U(r)} \mathrm{d}U \Rightarrow U(r) = mk\ln\left(1+\frac{r_0}{r}\right) \tag{22.2.3}$$

Calcolo infine la massa in funzione di r:

$$\frac{GM(r)m}{r^2} = F(r) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = \frac{mkr_0}{r(r+r_0)} \Rightarrow M(r) = \frac{krr_0}{G(r+r_0)} \tag{22.2.4}$$

c) Per l'equazione degli urti elastici eq. (F.22), ho che la velocità dell'atomo di prova dopo l'urto sarà:

$$\overrightarrow{v_2}' = \frac{m_1}{M}v\hat{v_f} + \overrightarrow{V_Q}$$

A parità di massa m_2, vorrei che v_2' sia il più grande possibile, e ciò avviene se i vettori $\hat{v_f}$ e $\overrightarrow{V_Q}$ sono nella stessa direzione, cioè se l'angolo di deviazione è nullo. Trovo le velocità $\overrightarrow{V_Q} = \frac{m_1\overrightarrow{v_1}}{m_1+m_2}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1} = -\overrightarrow{v_1}$. Calcolo dunque l'energia cinetica dell'atomo di prova dopo l'urto:

$$E = \frac{1}{2}m_2\left(v_2'\right)^2 = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_2+m_1}v_1 + \frac{m_1v_1}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{2{m_1}^2m_2{v_1}^2}{\left(m_1+m_2\right)^2}$$

Se pongo $\frac{m_2}{m_1} = x$ l'equazione precedente si riscrive come:

$$E = 2m_1{v_1}^2\frac{x}{\left(x+1\right)^2}$$

e questa ha il suo massimo quando $x = 1$ (si vede facilmente derivando), dunque affinchè l'energia cinetica dell'atomo usato sia massima dopo l'urto, la sua massa deve essere uguale a quella di un neutralino.

23 Masse ruotano legate da una molla e urtano un'altra massa 30/01/2014

23.1 Testo

Due sfere di masse $m_1 = m, m_2 = 2m$ sono collegate da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla che inizialmente è lunga r_0. Inizialmente ruotano entrambe di moto circolare, poi la sfera di massa m_1 urta in modo del tutto anelastico un'altra sfera di massa m anch'essa che le resta appiccicata.

Trovare la minima distanza a cui si troveranno le 2 sferette dopo l'urto.

23.2 Soluzione

Intanto il centro di massa del sistema delle due sferette che ruotano deve essere fermo, altrimenti è impossibile che le sferette compiano un movimento periodico. Quindi mettendomi nel centro di massa del sistema ricavo che entrambe le sfere ruotano intorno al centro di massa con raggi inversamente proporzionali alle loro masse e con lo stesso periodo affinche la molla sia tesa. Le uniche forze agenti sulle sferette sono quelle esercitate dalla molla, quindi questa deve controbilanciare esattamente la forza apparente centrifuga. In formule, chiamando v_1, v_2 le velocità delle sferette, questo implica:

$$m_1 \frac{v_1^2}{\frac{2r_0}{3}} = kr_0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} r_0 \tag{23.2.1}$$

$$m_2 \frac{v_2^2}{\frac{r_0}{3}} = kr_0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{k}{6m}} r_0 \tag{23.2.2}$$

Essendo l'urto anelastico e dovendosi la quantità di moto conservare durante l'urto ottengo che dopo l'urto, dove prima si trovava la sferetta di massa m_1 a velocità v_1 è come se ci fosse una sferetta di massa $2m_1 = 2m$ con velocità $\frac{v_1}{2} = v_2$ ancora perpendicolare alla molla. Perciò conosco tutte le condizioni iniziali e mi sono ricondotto ad un moto di due corpi.

La massa ridotta è $\mu = \frac{2m \cdot 2m}{2m+2m} = m$. Chiamando $\vec{r}$ la distanza relativa tra le sferette, e sfruttando la eq. (F.17) ricavo:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}$$

Che è un classico esempio di forza centrale, e quindi applico eq. (F.7) e ottengo:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \left(\frac{1}{2} kr^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \right) \tag{23.2.3}$$

Nel momento in cui r è minimo, la sua derivata sarà nulla $\dot{r} = 0$ e di conseguenza il valore di r che mi richiede il problema è la minima soluzione positiva della seguente equazione

$$E = \frac{1}{2} kr^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{23.2.4}$$

e in particolare, questa avrà 2 soluzioni positive, una sarà il minimo valore di r, l'altra il massimo. E perciò, risolvendo eq. (23.2.4) ottengo che il valore richiesto dal problema è:

$$r_{min}^2 = \frac{E - \sqrt{E^2 - \frac{L^2 k}{2m}}}{k} \tag{23.2.5}$$

Ora calcolo energia e momento iniziali sfruttando le eqs. (23.2.1) e (23.2.2).

Valgono le seguenti formule per l'energia iniziale e per il momento angolare (sfruttando il fatto che il centro di massa è fermo):

$$E_0 = \frac{1}{2}(m_1 + m) \left(\frac{v_1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} kr_0^2 = 2mv_2^2 + \frac{1}{2} kr_0^2 = 2m \frac{k}{6m} r_0^2 + \frac{1}{2} kr_0^2 = \frac{5k}{6} r_0^2 \tag{23.2.6}$$

$$L_0 = (m_1 + m) \frac{r_0}{2} \frac{v_1}{2} + m_2 \frac{r_0}{2} v_2 = 2mr_0 v_2 = 2mr_0^2 \sqrt{\frac{k}{6m}} = \sqrt{\frac{2mk}{3}} r_0^2 \tag{23.2.7}$$

Sostituendo eqs. (23.2.6) e (23.2.7) in eq. (23.2.5) e svolgendo i conti si ottiene:

$$r_{min} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{13}}{6}} r_0$$

24 Urto fra corpi con attrazione lineare nella distanza 30/01/2014

24.1 Testo

Due masse m_1 ed m_2 interagiscono fra loro con una forza $\vec{F}$, che dipende dalla distanza $\vec{r}$ fra le due masse e che è definita come segue:

$$\begin{cases} \vec{F} = -k\vec{r}, & \text{se } |\vec{r}| < r_* \\ \vec{F} = 0, & \text{se } |\vec{r}| \geq r_* \end{cases}$$

Inizialmente la massa m_1 si muove con velocità v_0 e parametro d'impatto b rispetto alla massa m_2. Trovare la minima distanza di avvicinamento nei casi:

1. $m_2 \gg m_1$
2. $m_1 = m_2$

Si consideri ora solo il caso in cui $m_1 = m_2 = m$. Dato θ_1 l'angolo di deflessione della massa m_1 rispetto alla direzione inziale, calcolare v'_1, v'_2, le velocità delle due masse dopo l'interazione, e θ_2, l'angolo di deflessione della massa m_2.

24.2 Soluzione

Innanzitutto ho che se $b \geq r_*$ la minima distanza di avvicinamento è banalmente b, poichè non c'è interazione fra le due masse.

Considero quindi ora solo il caso in cui $b < r_*$. Per la eq. (F.17) ho che vale:

$$\vec{F} = \mu\ddot{\vec{r}}$$

da cui, per la eq. (F.18), ottengo:

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{r}_Q}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + U(r) \tag{24.2.1}$$

dove $U(r) = -\int_0^r F(x)dx$, cioè:

$$\begin{cases} U(r) = \frac{1}{2}kr^2 & \text{per } r < r_* \\ U(r) = \frac{1}{2}kr_*^2 & \text{per } r \geq r_* \end{cases}$$

Sul sistema non agiscono forze esterne, quindi la velocità del centro di massa è costante. Si ha quindi che $E' = E - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{r}_Q}^2$ è una costante del moto e in particolare, utilizzando la eq. (24.2.1), vale:

$$E' = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + U(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2 + U(r) \tag{24.2.2}$$

So però che il momento angolare rispetto al centro di massa è una costante del moto e vale

$$\vec{L} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu r^2\dot{\theta}\hat{z}$$

Quindi la eq. (24.2.2) diventa:

$$E' = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

Alla minima distanza di avvicinamento, cioè quando r è minimo, $\dot{r}$ sarà zero; di conseguenza il valore di r è una soluzione positiva dell'equazione:

$$E' = \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

In particolare sicuramente nel punto in cui r è minimo il potenziale $U(r)$ sarà uguale a $\frac{1}{2}kr^2$, poichè ho già escluso il caso in cui la massa m_1 si trova sempre a distanza maggiore di r_* dalla massa m_2. Mi sono ricondotta quindi a studiare le soluzioni positive dell'equazione:

$$E' = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

La funzione $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \frac{L^2}{2\mu x^2} + \frac{1}{2}kx^2 - E'$, è convessa e tende a $+\infty$ per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$. Quindi $f(x)$ ha due radici, di cui ci interessa quella di modulo minore, poichè l'altra ha derivata positiva.

La minima distanza di avvicinamento vale perciò:

$$r_{min} = \sqrt{\frac{E' - \sqrt{E'^2 - \frac{kL^2}{\mu}}}{k}} \tag{24.2.3}$$

Calcolo ora i valori di E' e di L nel punto in cui la distanza fra m_1 ed m_2 è per la prima volta r_* (suppongo che la massa m_1 arrivi da "lontano"). In tale punto la velocità di m_1 è v_0, quella di m_2 è nulla e il potenziale vale $U(r_*) = \frac{1}{2}kr_*^2$. L'energia E' vale quindi:

$$E' = E - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{r_Q}}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 + \frac{1}{2}kr_*^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1 + m_2}v_0^2 = \frac{1}{2}\mu v_0^2 + \frac{1}{2}kr_*^2 \tag{24.2.4}$$

Il momento angolare rispetto al centro di massa risulta essere invece:

$$L = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} b v_0 = \mu b v_0 \tag{24.2.5}$$

Sostituendo le eqs. (24.2.4) e (24.2.5) nella eq. (24.2.3), ottengo infine:

$$r_{min} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\mu v_0^2 + \frac{1}{2}kr_*^2 - \sqrt{(\frac{1}{2}\mu v_0^2 + \frac{1}{2}kr_*^2)^2 - k\mu b^2 v_0^2}}{k}} \tag{24.2.6}$$

Studio ora i casi in cui $m_2 \gg m_1$ e $m_1 = m_2$.

1. Se $m_2 \gg m_1$, ho che $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ si può approssimare a m_1, quindi sostituendo nella eq. (24.2.6) ottengo il risultato.

2. Se invece $m_1 = m_2 = m$, ho che $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}$, da cui analogamente ottengo il risultato sostituendo nella eq. (24.2.6).

Mi pongo ora nel caso $m_1 = m_2 = m$, che studierò mettendomi nel sistema del centro di massa.
La velocità del centro di massa è

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{v}_1}{2} \tag{24.2.7}$$

dove v_1 e v_2 sono le velocità iniziale rispettivamente delle masse m_1 e m_2.
Inotre chiamando $\vec{v}_{1cm}, \vec{v}_{2cm}, \vec{v}'_{1cm}, \vec{v}'_{2cm}$ le velocità rispettivamente iniziale e finali delle due masse ho banalmente che $\vec{v}_{1cm} = \vec{v}_{2cm}$ e $\vec{v}'_{1cm} = \vec{v}'_{2cm}$ (perchè sono calcolate rispetto al centro di massa), e inoltre ho anche che $\vec{v}_{1cm} = \vec{v}'_{1cm}$ per la conservazione dell'energia.
Sia ora θ_{cm} l'angolo di deflessione (visto nel sistema del centro di massa) delle due masse rispetto alla direzione iniziale. Utilizzando la eq. (24.2.7) e che $v'_{1cm} = \frac{v_1}{2}$, ho che;

$$\begin{aligned}
v'_1(\cos\theta_1, \sin\theta_1) = \vec{v}'_1 &= \vec{v}_{cm} + \vec{v}'_{1cm} = \frac{\vec{v}_1}{2} + v'_{1cm}(\cos\theta_{cm}, \sin\theta_{cm}) \\
&= \frac{\vec{v}_1}{2} + \frac{v_1}{2}(\cos\theta_{cm}, \sin\theta_{cm}) = \frac{v_1}{2}(1 + \cos\theta_{cm}, \sin\theta_{cm}) \\
\Longrightarrow \tan\theta_1 = \frac{\sin\theta_{cm}}{\cos\theta_{cm} + 1} &= \frac{2\sin\frac{\theta_{cm}}{2}\cos\frac{\theta_{cm}}{2}}{2\cos^2\frac{\theta_{cm}}{2}} = \tan\frac{\theta_{cm}}{2}
\end{aligned}$$

Ora sapendo che

$$\begin{cases} \vec{v}'_1 = \frac{v_1}{2}(1 + \cos\theta_{cm}, \sin\theta_{cm}) \\ \vec{v}'_2 = \frac{v_1}{2}(1 - \cos\theta_{cm}, -\sin\theta_{cm}) \end{cases}$$

e che

$$v'_2(\cos\theta_2, \sin\theta_2) = \vec{v}'_2 = \frac{v_1}{2}(1 - \cos\theta_{cm}, -\sin\theta_{cm}) \Longrightarrow \tan\theta_2 = \frac{-\sin\theta_{cm}}{1 - \cos\theta_{cm}}$$

ottengo facilmente i dati richiesti dal problema, cioè v'_1, v'_2 e θ_2.

25 Carrello che spara acqua

06/02/2014

25.1 Testo

Un carrello di massa m contiene inizialmente una quantità m di acqua. Su un lato del carrello c'è un foro da cui viene fatta uscire acqua inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale, con una velocità $\vec{v_0}$ rispetto al carrello fissata, con $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \gamma$. Si chiede di calcolare il moto del carrello.

25.2 Soluzione

Determino la massa del carrello + acqua contenuta in funzione del tempo:

$$m(t) = 2m - \gamma t$$

Chiaramente ciò che mi interessa è la proiezione delle forze lungo l'asse x (l'asse orizzontale lungo quale viene sparata l'acqua). Riscrivo e risolvo l'equazione eq. (F.23), considerando che in questo caso ho $\overrightarrow{F_{est}} = 0$, $v_{rel} = -v_0 \cos\alpha$ e posso considerare solo quantità scalari (con segno) perchè sono in una dimensione. L'equazione diventa allora:

$$m \cdot \mathrm{d}v + \mathrm{d}m \cdot v = \mathrm{d}m\,(v - v_{rel})$$

Dividendo entrambi i membri per $\mathrm{d}t$ ho che

$$\dot{m}v + m\dot{v} = \dot{m}v - \dot{m}v_{rel} \Rightarrow \dot{v} = -\frac{\dot{m}}{m}v_{rel} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma}{2m - \gamma t} \Rightarrow \int_{v_{iniz}}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t \frac{\gamma}{2m-\gamma t} v_{rel}\,\mathrm{d}t$$

da cui ottengo la velocità in funzione del tempo

$$v = v_{iniz} - v_{rel} \ln\left(1 - \frac{\gamma t}{2m}\right)$$

25.3 Soluzione 2

Sapendo che la massa espulsa per unità di tempo è γ e ponendoci nella convenzione in cui $\mathrm{d}m$ è negativo, ricaviamo facilmente che:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\gamma \Longrightarrow m(t) = 2m - \gamma t$$

per ogni $0 \le t \le \frac{m}{\gamma}$. Dopo tempo $t = \frac{m}{\gamma}$ il carrello ha espulso tutta l'acqua che aveva al suo interno e si muoverà quindi di moto rettilineo uniforme.

L'unica componente del moto che mi interessa (l'unica che ha il carrello) è quella lungo il piano orizzontale. Mi pongo quindi nel sistema di riferimento che ha asse x coincidente con l'asse orizzontale, origine nel punto da cui parte il carrello e verso uguale al verso del moto del carrello. In particolare lungo tale asse la risultante delle forze esterne è 0, quindi per l'equazione eq. (F.23), vale:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v} + \vec{v}_{rel})$$

che corrisponde alla conservazione della quantità di moto lungo l'asse orizzontale.

Ottengo quindi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v} + \vec{v_{rel}}) \Longrightarrow m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}_{rel} \Longrightarrow m\,\mathrm{d}\vec{v} = \vec{v}_{rel}\,\mathrm{d}m$$

Poichè i vettori considerati sono tutti lungo l'asse x posso considerarne solo l'intensità. Ho quindi $\vec{v} = v\hat{x}$, mentre $\vec{v}_{rel} = -(v_0 \cos\alpha)\hat{x} = -v_r\hat{x}$, da cui:

$$\begin{aligned}
m\,\mathrm{d}v = -v_r\,\mathrm{d}m &\Longrightarrow \int_0^{v(t)} \mathrm{d}v = -v_r \int_{m(0)}^{m(t)} \frac{\mathrm{d}m}{m} \\
&\Longrightarrow v(t) = -v_r \ln\left(\frac{m(t)}{m(0)}\right) = -v_r \ln\left(1 - \frac{\gamma t}{2m}\right) \\
&\Longrightarrow x(t) = \int_0^t v(u)\,\mathrm{d}u = -v_r \int_0^t \ln\left(1 - \frac{\gamma u}{2m}\right)\mathrm{d}u \\
&= c_r \frac{2m}{\gamma}\left[u(\ln u - 1)\right]_1^{1-\frac{\gamma t}{2m}}
\end{aligned}$$

E sostituendo $w = 1 - \frac{\gamma u}{2m}$ ottengo infine:

$$x(t) = \frac{2mv_r}{\gamma} \int_0^{1-\frac{\gamma t}{2m}} \ln w \, \mathrm{d}w = \frac{2mv_r}{\gamma} \left[w(\ln w - 1) \right]_1^{1-\frac{\gamma t}{2m}}$$

26 Goccia che Cade

6/02/2014

26.1 Testo

Trovare le equazioni del moto di uno goccia d'acqua che precipita attraverso una nuvola, data λ la densità di vapor acqueo della nuvola e ρ la densità della goccia.

26.2 Soluzione

La goccia cadendo aumenta la propria massa, si tratta quindi di un problema di masse variabili, la cui equazione generale è eq. (F.23). Chiaramente in questo caso $v - v_R = 0$ in quanto posso supporre le particelle d'acqua ferme rispetto al sistema del laboratorio e l'unica forza esterna che interviene è la gravità che posso supporre positiva orientando l'asse delle y verso il basso. L'equazione che devo risolvere è quindi:

$$\mathrm{d}mv + m\,\mathrm{d}v = mg\,\mathrm{d}t$$

Ovvero dividendo tutto per $\mathrm{d}t$:

$$\dot{m}\dot{y} + m\ddot{y} = mg \tag{26.2.1}$$

Bisogna ora trovare la relazione tra la velocità e la massa per far questo noto che l'aumento di massa in funzione del tempo può essere espresso in due modi distinti, nel primo caso considero l'aumento di volume in funzione del raggio, cioè $\dot{m} = \rho 4\pi r^2 \dot{r}$, oppure l'aumento di massa posso anche vederlo come il numero di particelle incontrate, ovvero il volume spazzato nell'unità di tempo moltiplicato per la densità delle nuvole, quindi: $\dot{m} = \lambda \pi r^2 \dot{y}$.

Sostituendo $\dot{m}$ ottengo che $\dot{y} = 4\rho\dot{r}/\lambda$ e derivando rispetto al tempo $\ddot{y} = 4\rho\ddot{r}/\lambda$. La eq. (26.2.1) diventa quindi

$$4\rho\pi r^2 \dot{r}\left(\frac{4\rho\dot{r}}{\lambda}\right) + \frac{4m\rho\ddot{r}}{\lambda} = mg$$

Dividendo per la massa e ricordando che essa è data dal rapporto tra volume e densità si ottiene:

$$\frac{12\rho}{\lambda}\frac{\dot{r}^2}{r} + \frac{4\rho}{\lambda}\ddot{r} = g$$

La cui soluzione è chiaramente nella forma $r = At^2$ dove svolgendo i conti si scopre che $A = \frac{g\lambda}{56\rho}$.

Infine supponendo che all'istante iniziale la velocità sia nulla e ponendo $y(0) = 0$ si ottiene $a = g/7$ e derivando $y = \frac{9}{14}t^2$.

27 Rotazione del tensore d'inerzia 13/02/2014

27.1 Testo

Come si trasforma il tensore d'inerzia dopo una rotazione del sistema di riferimento?

27.2 Soluzione

Mi pongo in un sistema di riferimento A rispetto al quale posso applicare la eq. (F.27), cioè un sistema che si muove solidalmente rispetto al corpo rigido considerato e il cui centro rispetta la eq. (F.26). Chiamo A' il suo ruotato, che rispetta ancora tutte le ipotesi per applicare la eq. (F.27). Vale quindi:

$$L_i = I_{ij}\omega_j \tag{27.2.1}$$

dove L_i è il momento d'inerzia, ω_j è la velocità angola del corpo e I_{ij} è il tensore d'inerzia definito dall'equazione eq. (F.25), tutti calcolati nel sistema di riferimento A. Quindi definiti L'_i, ω'_j e I'_{ij} rispettivamente il momento angolare, la velocità angolare e il tensore d'inerzia rispetto ad A', vale analogamente che:

$$L'_i = I'_{ij}\omega'_j \tag{27.2.2}$$

Inoltre chiamata R la matrice ortogonale che rappresenta la rotazione considerata, abbiamo che un qualsiasi vettore v_i rispetto ad A, dopo la rotazione vale $v'_i = R_{ij}v_j$.

L_i e ω_j sono vettori, quindi per quanto appena detto nel sistema di riferimento A' valgono

$$L'_i = R_{ij}L_j, \quad \omega'_j = R_{jk}\omega_k \tag{27.2.3}$$

Sostituendo ora la eq. (27.2.3) e la eq. (27.2.1) nella eq. (27.2.2), ottengo:

$$\begin{gathered} L'_i = I'_{ij}\omega'_j \Longrightarrow R_{ij}L_j = I'_{ij}R_{jk}\omega_k \Longrightarrow R_{ij}I_{jk}\omega_k = I'_{ij}R_{jk}\omega_k \\ \Longrightarrow RI\omega = I'R\omega \end{gathered}$$

Poichè quest'ultima equazione deve valere per ogni velocità angolare ω (il tensore d'inerzia dipende solo dal corpo e dal sistema di riferimento), ottengo:

$$RI = I'R \Longrightarrow I' = RIR^T$$

che è proprio quello che volevo ottenere.

28 Tensore di inerzia invariante per rotazione

13/02/2014

28.1 Testo

Il tensore di inerzia di un corpo è invariante per rotazione. Dimostrare che il tensore è un multiplo dell'identità.

28.2 Soluzione

Nel corso della soluzione userò I per indicare la matrice identica, e Q per indicare il tensore di inerzia del corpo considerato.

Per l'esercizio section 27, il tensore d'inerzia ruota secondo la formula:

$$Q' = RQR^T \tag{28.2.1}$$

Per ipotesi Q è invariante per rotazione, dunque vale:

$$Q = RQR^T \tag{28.2.2}$$

Per dimostrare la tesi, mi basta dimostrare che se R rappresenta una rotazione infinitesima, allora Q deve essere della forma $Q = kI$ con k costante. Sia allora R la matrice di una qualsiasi rotazione infinitesima. So che un vettore generico $\overrightarrow{v}$ viene trasformato in $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v}$ o alternativamente $v_i' = R_{ik}v_k$. Da ciò ricavo che

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 1 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 1 \end{pmatrix}$$

In particolare avrò che $\Delta\overrightarrow{v} = M_{ik}v_k$ per una certa matrice M tale che $M + I = R$. Affinchè R sia una matrice di rotazione, deve essere ortogonale. Dunque devo avere che $RR^T = I$. Quindi, poichè MM^T al prim'ordine è trascurabile, vale:

$$(I + M)(I + M)^T = I \Leftrightarrow (I + M)(I + M^T) = I \Leftrightarrow M + M^T = 0 \tag{28.2.3}$$

cioè la matrice M deve essere antisimmetrica. In particolare ho che

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Impongo la condizione eq. (28.2.2) e ottengo (ricordando che M è "piccola") che:

$$Q = (I + M)Q(I + M^T) \Leftrightarrow Q = (Q + MQ)(I + M^T) = Q + QM^T + MQ \Leftrightarrow QM^T = -MQ \tag{28.2.4}$$

Poichè M è antisimmetrica ho che $M^T = -M$. Di conseguenza l'equazione che Q deve rispettare è

$$MQ = QM \tag{28.2.5}$$

per ogni possibile scelta di $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Nello svolgimento dei calcoli tengo presente che Q è simmetrico, quindi ho sempre $Q_{ij} = Q_{ji}$.

Impongo che $[MQ]_{11} = [QM]_{11}$ e ottengo che $M_{11}Q_{11} + M_{12}Q_{21} + M_{13}Q_{31} = M_{11}Q_{11} + M_{21}Q_{12} + M_{31}Q_{13}$ dunque devo avere che $-\omega_3Q_{21} + \omega_2Q_{31} = \omega_3Q_{21} - \omega_2Q_{31}$ da cui segue che $Q_{12} = Q_{13} = 0$. Analogamente si dimostra che deve essere $Q_{23} = 0$.

Impongo ora che $[MQ]_{12} = [QM]_{12}$: devo avere $M_{11}Q_{12} + M_{12}Q_{22} + M_{13}Q_{32} = M_{12}Q_{11} + M_{22}Q_{12} + M_{32}Q_{13}$, cioè $-Q_{22}\omega_3 = -Q_{11}\omega_3 \Rightarrow Q_{11} = Q_{22}$. Analogamente si dimostra che $Q_{11} = Q_{33}$.

Quindi abbiamo dimostrato che i numeri sulla diagonale devono essere tutti uguali, e dalle altre parti ci deve essere 0. Ciò significa che il tensore Q è un multiplo dell'identità.

29 Asta che ruota su una semicirconferenza 13/02/2014

29.1 Testo

Un'asta di lunghezza l e massa m distribuita omogeneamente ruota senza strisciare, sotto l'effetto della gravità, su una semicirconferenza fissa di raggio r.

Trovare l'equazione differenziale che regola il moto dell'asta e trovare le piccole oscillazioni intorno al punto di equilibrio.

29.2 Soluzione

Sia $\vec{T}$ il punto di contatto tra l'asta e la semicirconferenza, sia $\vec{Q}$ la posizione del centro di massa della barra, sia $\vec{O}$ il centro fisso della semicirconferenza. Sia inoltre x lo scalare che rappresenta la distanza tra $\vec{T}$ e $\vec{Q}$.

Lavorerò in coordinate polari centrate in $\vec{O}$ e riferite a $\vec{T}$. Dove $\theta = 0$ corrisponde alla posizione orizzontale dell'asta (quindi il punto di contatto coincide col punto più alto della semicirconferenza).

La condizione di rotazione senza strisciamento è equivalente ad affermare:

$$\dot{x} + r\dot{\theta} = 0 \tag{29.2.1}$$

Inoltre discendono banalmente dalle definizioni del sistema di coordinate le tre seguenti identità:

$$\vec{T} = r\hat{r} \tag{29.2.2}$$

$$\vec{Q} = r\hat{r} + x\hat{\theta} \tag{29.2.3}$$

$$\vec{g} = g\left(-\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right) \tag{29.2.4}$$

Ora l'idea è applicare la seconda equazione cardinale della meccanica rispetto al punto di contatto, così da poter trascurare le forze vincolari della semicirconferenza visto che tutte agiscono proprio su $\vec{T}$. Seguendo questa idea, ottengo la formula:

$$\dot{\overrightarrow{M_T}} = \vec{N}_T - \vec{v}_T \times \vec{P} \tag{29.2.5}$$

dove $\vec{v}_T$ è la velocità di $\vec{T}$ nel sistema di $\vec{O}$ e $\vec{P}$ è la quantità di moto del centro di massa della sbarretta nel sistema di $\vec{O}$.

Ora semplicemente calcolo tutti i termini di questa equazione in funzione di θ, x.

Per quanto riguarda $\vec{N}_T$ il conto è molto facile, visto che l'unica forza agente sulla barra che conta per il calcolo del momento delle forze rispetto a $\vec{T}$ è la forza di gravità, che agisce, dal punto di vista del momento, come se tutta la massa fosse concentrata nel centro di massa $\vec{Q}$, e perciò il momento risulta essere:

$$\vec{N}_T = (\vec{Q} - \vec{T}) \times \vec{g} = x\hat{\theta} \times g\left(-\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right) = -xg\cos\theta\hat{z} \tag{29.2.6}$$

dove nei passaggi ho usato eqs. da (29.2.2) a (29.2.4).

Per quanto riguarda il termine di $\vec{v}_T \times \vec{P}$ si tratta solo di derivare eqs. (29.2.2) e (29.2.3), usando le regole di derivazione delle coordinate polari eq. (F.1) ottenendo:

$$\vec{v}_T \times \vec{P} = \dot{\vec{T}} \times m\dot{\vec{Q}} = r\dot{\theta}\hat{\theta} \times m\left(r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{x}\hat{\theta} - x\dot{\theta}\hat{r}\right) = -mxr\dot{\theta}^2\hat{z} \tag{29.2.7}$$

Ora resta da calcolare il momento angolare della sbarretta rispetto a $\vec{T}$. Per farlo noto che l'unico movimento della sbarretta che conta per il calcolo del momento angolare è quello rotazionale, e ovviamente la sbarretta sta ruotando con velocità $\dot{\theta}$ intorno a $\vec{T}$. Allora posso calcolare il momento angolare se ricavo il momento d'inerzia della sbarretta rispetto a $\vec{T}$, ma ora viene in aiuto il teorema degli assi paralleli che mi assicura che tale momento di inerzia è $I + mx^2$ dove $I = \frac{ml^2}{24}$ è il momento d'inerzia della sbarretta rispetto al suo centro. Ora considerando i segni e unendo le considerazioni fatte ricavo:

$$\overrightarrow{M_T} = -\hat{z}\dot{\theta}\left(I + mx^2\right)$$

Quindi derivando quest'ultima ricavo:

$$\dot{\overrightarrow{M_T}} = -\hat{z}\left(\ddot{\theta}\left(I + mx^2\right) + 2m\dot{\theta}x\dot{x}\right) \tag{29.2.8}$$

Ora sostituisco eqs. da (29.2.6) a (29.2.8) nella eq. (29.2.5) ottenendo l'equazione fondamentale:

$$-\hat{z}\left(\ddot{\theta}\left(I + mx^2\right) + 2m\dot{\theta}x\dot{x}\right) = -xg\cos\theta\hat{z} + mxr\dot{\theta}^2\hat{z} \iff \ddot{\theta}\left(\frac{I}{m} + x^2\right) = xg\cos\theta - x\dot{\theta}(r\dot{\theta} + 2\dot{x})$$

E ora sostituendo eq. (29.2.1) nell'ultimo addendo arrivo a:

$$\ddot{\theta}\left(\frac{I}{m}+x^2\right)=xg\cos\theta+xr\dot{\theta}^2 \tag{29.2.9}$$

e quest'ultima può facilmente diventare un'equazione del moto, visto che sempre dalla eq. (29.2.1) si ricava $x = x_0 - \theta r$ e sostituendolo diviene un'equazione nel solo θ.

È chiaro che la condizione d'equilibrio accade quando $x = 0$, cioè quando punto di contatto e centro di massa coincidono (se non risulta ovvio, basta porre $x = 0$ in eq. (29.2.9) scoprendo che $\ddot{\theta}$ risulta nullo). Sia θ_0 l'angolo per cui $x = 0$.

Se $\theta = \theta_0 + \mathrm{d}\theta$, applicando la eq. (29.2.1) ottengo $x = -r\,\mathrm{d}\theta$ e sostituendo nella eq. (29.2.9) ottengo:

$$\ddot{\theta}\left(\frac{I}{m}+r^2\,\mathrm{d}\theta^2\right)=-r\,\mathrm{d}\theta g\cos\theta+r^2\,\mathrm{d}\theta^2\dot{\theta}^2$$

e approssimandola al prim'ordine arrivo a:

$$\ddot{\theta}\left(\frac{I}{m}\right)=-rg\cos\theta_0\,\mathrm{d}\theta\Rightarrow\ddot{\theta}=-\frac{24gr\cos\theta_0}{l^2}\,\mathrm{d}\theta$$

che è l'equazione di un moto armonico in θ con pulsazione $\frac{\sqrt{24gr\cos\theta_0}}{l}$ (ricordo che $|\theta_0| < \pi/2$ visto che è una *semi*circonferenza) intorno al punto di equilibrio stabile θ_0.

30 Moto libero di una trottola simmetrica

30.1 Testo

Una trottola simmetrica è un corpo rigido per cui valga $I_x = I_y = I_0$ dove $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ sono gli assi principali del corpo.

Studiare il moto libero (cioè in assenza di forze esterne) di una trottola simmetrica.

30.2 Soluzione

Lavoro nel centro di massa del corpo (è chiaro che il moto traslatorio di questo non è interessante ai fini del problema ed è a velocità costante visto che non agiscono forze esterne).

Chiamo $\vec{L}$ il momento angolare del corpo e $\vec{\omega}$ l'asse di rotazione istantaneo. Inoltre sfrutterò la notazione di Einstein per le sommatorie, e tutti gli indici varieranno su x, y, z.

Per la seconda equazione cardinale della dinamica, poichè sul corpo non agiscono forze esterne, ho che vale:

$$0 = \dot{\vec{L}} \tag{30.2.1}$$

Per la definizione di tensore di inerzia eq. (F.27), rispetto agli assi principali, ho anche che vale:

$$\vec{L} = I_i \omega_i \hat{\imath} \tag{30.2.2}$$

e derivando quest'ultima rispetto al tempo, sfruttando eq. (F.4) arrivo a:

$$\dot{\vec{L}} = I_i \left(\dot{\omega}_i \hat{\imath} + \omega_i \vec{\omega} \times \hat{\imath} \right)$$

ora applico eq. (30.2.1) e arrivo a

$$0 = I_i \left(\dot{\omega}_i \hat{\imath} + \omega_i \vec{\omega} \times \hat{\imath} \right) = \sum_{cyc} \left(I_x \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) \right) \hat{x} \tag{30.2.3}$$

dove nell'ultima uguaglianza ho semplicemente fatto i conti e raccolto per coordinata.

Guardando la eq. (30.2.3) rispetto alla coordinata $\hat{z}$ ottengo:

$$0 = I_z \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) = I_z \dot{\omega}_z \Rightarrow \dot{\omega}_z = 0$$

quindi ottengo ω_z costante.

Chiamo $\alpha = \frac{I_z}{I_0}$ e $k = \omega_z(\alpha - 1)$. Per quanto appena detto k è una costante.

Guardo la eq. (30.2.3) rispetto alla coordinata $\hat{x}$ e ottengo:

$$0 = I_x \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_z - I_x) \Rightarrow 0 = \dot{\omega}_x + k \omega_y \tag{30.2.4}$$

e analogamente, solo guardando la coordinata $\hat{y}$ ottengo:

$$0 = I_y \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (I_x - I_z) \Rightarrow 0 = \dot{\omega}_y - k \omega_x \tag{30.2.5}$$

Ora sommo la eq. (30.2.4) alla eq. (30.2.5) moltiplicata per i ottenendo:

$$0 = \dot{\omega}_x + k\omega_y + i(\dot{\omega}_y - k\omega_x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega_x + i\omega_y) - ik(\omega_x + i\omega_y)$$

e chiamando $z = \omega_x + i\omega_y$ arrivo ad una differenziale di variabile complessa facile da risolvere:

$$\dot{z} = ikz \Rightarrow z = A \cdot e^{ikt + \varphi}$$

dove A, φ sono costanti che dipendono dai dati iniziali. E questo, tornando in coordinate $\hat{x}, \hat{y}$ implica che:

$$(\omega_x, \omega_y) = A(\cos(kt + \varphi), \sin(kt + \varphi)) \tag{30.2.6}$$

da cui ottengo che $\vec{\omega}$ compie una rotazione di pulsazione k intorno all'asse $\hat{z}$.

Inoltre, sfruttando eq. (30.2.2), riesco anche ad ottenere la seguente identità:

$$\vec{L} = L_i \hat{\imath} = I_i \omega_i \hat{\imath} = I_0 \left(\omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z} \right) + (I_z - I_0)\omega_z \hat{z} = I_0 \vec{\omega} + (I_z - I_0)\omega_z \hat{z} \tag{30.2.7}$$

che dimostra che $\vec{L}, \vec{\omega}, \hat{z}$ sono complanari. Poichè $\vec{L}$ ha modulo costante per eq. (30.2.1) e anche $\hat{z}$ ha ovviamente modulo costante ed inoltre i coefficienti della composizione sono costanti (ω_z è una costante del moto) ottengo anche che visti nel piano che li contiene i tre vettori $\vec{L}, \vec{\omega}, \hat{z}$ sono fissi.

Unendo quanto appena detto e che $\vec{\omega}$ ruota intorno a $\hat{z}$ con pulsazione k ottengo che sia ω che $\hat{z}$ ruotano in modo fisso intorno a $\vec{L}$ che è costante per *eq.* (30.2.1) con pulsazione $k = \omega_z \frac{I_z - I_0}{I_0}$ *rispetto al sistema rotante* degli assi principali della trottola.

Questo moto è detto *nutazioni di Eulero* e si applica anche alla Terra se la si considera un ellissoide schiacciato ai poli.

31 Corpo rigido in orbita circolare intorno alla Terra

Lezione 17/02/2014

31.1 Testo

Un satellita ruota intorno alla Terra su un'orbita circolare di raggio r_Q. Calcolare il momento delle forze rispetto al baricentro, noto I il tensore d'inerzia del satellite.

Inizialmente il satellite ha i tre assi principali rivolti uno radialmente, uno tangenzialmente e l'ultimo uscente dal piano dell'orbita. Dimostrare che l'orientamento degli assi rimane fisso nel sistema che ruota solidalmente al satellite. Calcolare inoltre il periodo delle piccole oscillazioni sul piano dell'orbita.

31.2 Soluzione

Nel corso della soluzione utilizzerò la notazione di Einstein come definita in section 1.8.

Calcolo innanzitutto il momento delle forze rispetto al baricentro, dove considero come sistema fisso il sistema centrato nel centro della Terra.

$$\begin{aligned}\vec{N}_Q &= \sum_\alpha \vec{r}_{Q\alpha} \times \vec{F}_\alpha = -\sum_\alpha \vec{r}_{Q\alpha} \times \frac{G_N M m_\alpha}{r_\alpha^3}\vec{r}_\alpha \\ &= -G_N M \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{r_\alpha^3}\vec{r}_{Q\alpha} \times (\vec{r}_Q + \vec{r}_{Q\alpha}) = -G_N M \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{r_\alpha^3}(\vec{r}_{Q\alpha} \times \vec{r}_Q)\end{aligned} \tag{31.2.1}$$

Sapendo che $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_Q + \vec{r}_{Q\alpha}$, ricavo per il teorema di Carnot e utilizzando che $r_{Q\alpha} \ll r_Q$:

$$r_\alpha^2 = r_Q^2 + r_{Q\alpha}^2 + 2\vec{r}_Q \cdot \vec{r}_{Q\alpha} \simeq r_Q^2\left(1 + 2\frac{\vec{r}_Q \cdot \vec{r}_{Q\alpha}}{r_Q^2}\right) \Longrightarrow r_\alpha \simeq r_Q\left(1 + \frac{\vec{r}_Q \cdot \vec{r}_{Q\alpha}}{r_Q^2}\right) \Longrightarrow \frac{1}{r_\alpha^3} \simeq \frac{1}{r_Q^3}\left(1 - 3\frac{\vec{r}_Q \cdot \vec{r}_{Q\alpha}}{r_Q^2}\right)$$

Sostituendo ora quest'ultima relazione nella eq. (31.2.1) e utilizzando che $\sum_\alpha m_\alpha(\vec{r}_{Q\alpha} \times \vec{r}_Q) = 0$, ottengo:

$$\begin{aligned}\vec{N}_Q &= -\frac{G_N M}{r_Q^3}\sum_\alpha m_\alpha\left(1 - 3\frac{\vec{r}_Q \cdot \vec{r}_{Q\alpha}}{r_Q^2}\right)(\vec{r}_{Q\alpha} \times \vec{r}_Q) = \frac{3G_N M}{r_Q^5}\sum_\alpha m_\alpha(\vec{r}_Q \cdot \vec{r}_{Q\alpha})(\vec{r}_{Q\alpha} \times \vec{r}_Q) \\ \Longrightarrow N_Q^i &= \frac{3G_N M}{r_Q^5}\sum_\alpha m_\alpha \varepsilon_{ijk} r_{Q\alpha}^j r_Q^k r_Q^l r_{Q\alpha}^l = \frac{3G_N M}{r_Q^5}\varepsilon_{ijk} r_Q^k r_Q^l \sum_\alpha m_\alpha (r_{Q\alpha}^j r_{Q\alpha}^l - \delta_{jl} r_{Q\alpha}^2)\end{aligned}$$

dove i, j, k, l all'apice indicano le componenti dei vettori su cui sono applicati, relative al sistema di assi fissi rispetto al corpo, e l'ultimo passaggio è vero perchè $\varepsilon_{ijk} r_Q^k r_Q^l \delta_{jl} = \varepsilon_{ijk} r_Q^k r_Q^j = \vec{r}_Q \times \vec{r}_Q = 0$.

Quindi ricordando la definizione di tensore d'inerzia data dalla eq. (F.25), ottengo:

$$N_Q^i = \frac{3G_N M}{r_Q^5}\varepsilon_{ijk} I_{jl} r_Q^k r_Q^l \tag{31.2.2}$$

che ponendosi nel sistema degli assi principali diventa:

$$N_Q^i = \frac{3G_N M}{r_Q^5}\varepsilon_{ijk} I_j r_Q^k r_Q^j \tag{31.2.3}$$

Mi pongo ora nel caso in cui inizialmente gli assi principali $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ siano rivolti rispettivamente tangenzialmente, radialmente e in direzione uscente dal piano dell'orbita (come nel testo). In questo caso ho che $\vec{r}_Q = (0, r_Q, 0)$ e sostituendo tale valore di $\vec{r}_Q$ nella eq. (31.2.3), ho facilmente che $\vec{N} = 0$. Ciò dimostra quindi che l'orientamento degli assi rimane fisso rispetto al sistema di riferimento che si muove solidalmente al satellite.

Voglio calcolare ora il periodo delle piccole oscillazioni che si compiono sul piano dell'orbita (l'asse $\hat{z}$ rimane quindi sempre fisso rispetto al sistema che si muove con il satellite).

Sia θ l'angolo che l'asse $\hat{y}$ forma con la direzione radiale. In questo caso, considerando θ "piccolo", la direzione del baricentro rispetto agli assi principali è espressa da $\vec{r}_Q = r_Q(\sin\theta, \cos\theta, 0) \simeq r_Q(\theta, 1, 0)$.

Sostituendo quindi nella eq. (31.2.3), ho che vale:

$$\begin{cases} N_Q^x = N_Q^y = 0 \\ N_Q^z = \frac{3G_N M}{r_Q^5}(\varepsilon_{zxy} I_x \theta + \varepsilon_{zyx} I_y \theta) = \frac{3G_N M}{r_Q^5}(I_x - I_y)\theta \end{cases} \tag{31.2.4}$$

Poichè il centro del sistema di riferimento è il baricentro, è rispettata la condizione eq. (F.26), e quindi per la eq. (F.27) vale:

$$L_Q^z = I_z \omega_z = I_z \dot{\theta} \tag{31.2.5}$$

Per la seconda equazione cardinale dei sistemi (sempre perchè il centro del sistema è il baricentro) vale:

$$\vec{N}_Q = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_Q}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow N_Q^z = \frac{\mathrm{d}L_Q^z}{\mathrm{d}t} + (\vec{\omega} \times \vec{L}_Q)_z$$

ma $\vec{\omega}$ è diretto lungo l'asse $\hat{z}$, quindi la componente z di $\vec{\omega} \times \vec{L}_Q$ è sicuramente 0. Perciò sostituendo ad L_Q^z la eq. (31.2.5) ottengo:

$$N_Q^z = \frac{\mathrm{d}L_Q^z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}I_z\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = I_z\ddot{\theta}$$

Ponendo infine in quest'ultima equazione la eq. (31.2.4) per N_Q^z, ho che:

$$I_z\ddot{\theta} = \frac{3G_N M}{r_Q^5}(I_x - I_y)\theta \Longrightarrow \ddot{\theta} = \frac{3G_N M}{r_Q^5} \cdot \frac{I_x - I_y}{I_z}\theta$$

Da quest'ultima equazione ricaviamo che l'equilibrio è stabile se $I_x - I_y < 0$ e in tal caso la pulsazione delle piccole oscillazioni è

$$\omega = \sqrt{\frac{3G_N M}{r_Q^5} \cdot \frac{I_y - I_x}{I_z}}$$

32 Corona che ruota intorno ad un punto fisso

27/02/2014

32.1 Testo

Una corona circolare omogenea di massa M e raggio R, è fissata al pavimento da un perno attorno al quale ruota senza attrito. Sulla corona si trova un punto materiale di massa m. All'inizio il sistema è a riposo. Il punto materiale inizia poi a muoversi sulla corona percorrendo un angolo $\Delta\theta$ rispetto al centro della corona. Che angolo $\Delta\varphi$ ha compiuto la corona attorno al perno? Si risolva il problema al prim'ordine in $\frac{m}{M}$.

32.2 Soluzione

Rispetto al punto (che chiamerò P) in cui la corona è fissata dal perno, il momento delle forze esterne è nullo, quindi per la seconda equazione cardinale vale $\dot{\vec{L}} = 0$. Ho quindi che $\vec{L}$ è costante e in particolare è uguale a 0, poichè all'inizio il sistema è a riposo.

Voglio quindi calcolarmi ora il momento angolare rispetto a P, che in particolare è uguale a $\vec{L} = \vec{L}_Q + \vec{L}_C$, dove $\vec{L}_Q$ è il momento angolare del punto materiale rispetto a P e $\vec{L}_C$ è invece il momento angolare della corona, sempre rispetto a P.

Il punto materiale Q sta ruotando attorno a P con una velocità angolare $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(90 - \frac{\theta}{2} + \varphi)$, perciò

$$\vec{L}_Q = m|PQ|^2 \left(\dot{\varphi} - \frac{\dot{\theta}}{2}\right)\hat{z} = 4mR^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\left(\dot{\varphi} - \frac{\dot{\theta}}{2}\right)\hat{z} \tag{32.2.1}$$

La corona ruota invece attorno a P con una velocità angolare $\dot{\varphi}$, quindi utilizzando il teorema degli assi paralleli e il fatto che il momento d'inerzia rispetto al centro è $I = MR^2$, vale:

$$\vec{L}_C = (I + MR^2)\dot{\varphi}\hat{z} = 2MR^2\dot{\varphi}\hat{z} \tag{32.2.2}$$

Unendo la eq. (32.2.1) e la eq. (32.2.2), ottengo quindi che

$$\begin{aligned} \vec{L} = 0 &\Longrightarrow \vec{L}_Q + \vec{L}_C = 0 \Longrightarrow 4mR^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\left(\dot{\varphi} - \frac{\dot{\theta}}{2}\right)\hat{z} + 2MR^2\dot{\varphi}\hat{z} = 0 \\ &\Longrightarrow m\sin^2\frac{\theta}{2}\left(2\dot{\varphi} - \dot{\theta}\right) + M\dot{\varphi} = 0 \Longrightarrow \left(\frac{M}{m} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\dot{\varphi} = \sin^2\frac{\theta}{2}\dot{\theta} \end{aligned}$$

da cui, chiamando $\mu = \frac{M}{m}$ e integrando, ottengo

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\mu}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta} \sin^2\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\mu}\left[\frac{t - \sin t\cos t}{2}\right]_{\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0+\Delta\theta}{2}} = \frac{1}{2\mu}\left(\Delta\theta - \frac{\sin(\theta_0+\Delta\theta) - \sin\theta_0}{2}\right)$$

che è proprio quello che stavo cercando.

33 Pendolo a cui sono appesi due pendoli

6/03/2014

33.1 Testo

Ad un pendolo matematico di massa $10m$ e lunghezza $2a$ sono appesi altri due pendoli matematici di massa $3m$ e lunghezza a (che si muovono senza scontrarsi fra loro). Trovare le equazione del moto di tale sistema intorno alla posizione di equilibrio.

33.2 Soluzione

Mi pongo nel sistema cartesiano con asse $\hat{x}$ orizzontale e asse $\hat{y}$ rivolto verso l'alto. Chiamo θ, θ_1 e θ_2 rispettivamente gli angoli che i tre pendoli formano con la verticale.

L'idea della soluzione sarà trovare le due matrici $M, K \in M(3, \mathbb{R})$ tali che

$$\frac{1}{2}\dot{z}^T M \dot{z} + \frac{1}{2} z^T K z = E$$

dove $z = (\theta, \theta_1, \theta_2)$ ed E è l'energia del sistema, che si conserva. Tale equazione infatti è equivalente a

$$M\ddot{z} = -Kz$$

che è in realtà un sistema di equazioni lineari omogenee, che so quindi risolvere.

Calcolo perciò l'energia del sistema in funzione dei dati del problema e di θ, θ_1 e θ_2. Innanzitutto calcolo le posizioni $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ dei tre pendoli:

$$\begin{cases} (x, y) = 2a(\sin\theta, -\cos\theta) \\ (x_1, y_1) = (x, y) + a(\sin\theta_1, -\cos\theta_1) \\ (x_2, y_2) = (x, y) + a(\sin\theta_2, -\cos\theta_2) \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} (\dot{x}, \dot{y}) = 2a\dot{\theta}(\cos\theta, \sin\theta) \\ (\dot{x}_1, \dot{y}_1) = (\dot{x}, \dot{y}) + a\dot{\theta}_1(\cos\theta_1, \sin\theta_1) \\ (\dot{x}_2, \dot{y}_2) = (\dot{x}, \dot{y}) + a\dot{\theta}_2(\cos\theta_2, \sin\theta_2) \end{cases}$$

Da queste ultime equazioni ottengo facilmente che l'energia cinetica del sistema è

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{1}{2}10m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}3m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}3m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= 32ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}ma^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + 6ma^2\dot{\theta}[\dot{\theta}_1(\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1) + \dot{\theta}_2(\cos\theta\cos\theta_2 + \sin\theta\sin\theta_2)] \end{aligned}$$

e sviluppando al second'ordine intorno al punto di minimo $(\theta, \theta_1, \theta_2) = (0, 0, 0)$, ottengo quindi

$$E_{cin} = 32ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}ma^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + 6ma^2\dot{\theta}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \tag{33.2.1}$$

L'energia potenziale, sempre sviluppando al second'ordine e poi non considerando le costanti (poichè l'energia è definita a meno di costanti), vale invece

$$E_{pot} = -32mga\cos\theta - 3mga(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \Longrightarrow E_{pot} = 16mga\theta^2 + \frac{3}{2}mga(\theta_1^2 + \theta_2^2) \tag{33.2.2}$$

Dall'equazione eq. (33.2.1) ottengo quindi facilmente

$$M = ma^2 \begin{pmatrix} 64 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e analogamente dall'equazione eq. (33.2.2) ottengo invece

$$K = mga \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Mi sono quindi ricondotta a risolvere l'equazione

$$M\ddot{z} = -Kz$$

Cerco innanzitutto le soluzioni della forma $z_\alpha(t) = A_\alpha e^{-i\omega_\alpha t}$. In particolare deve valere

$$\omega_\alpha^2 M A_\alpha = K A_\alpha \iff (K - \omega_\alpha^2 M) A_\alpha = 0$$

Perchè esista una soluzione $A_\alpha \neq 0$ devo avere, chiamando $\omega_0^2 = \frac{g}{a}$, che

$$\det(K - \omega_\alpha^2 M) = 0 \iff \omega_\alpha^2 = \omega_0^2,\ 2\omega_0^2,\ \frac{2}{5}\omega_0^2$$

Per ognuna delle soluzioni $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_1 = \sqrt{2}\omega_0$ e $\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}\omega_0$ ottengo i rispettivi valori di $A_\alpha \in \ker(K - \omega_\alpha^2 M)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni $Q_\alpha(t) = \mathrm{Re}(c_\alpha z_\alpha(t)) = \mathrm{Re}(c_\alpha A_\alpha e^{-i\omega_\alpha t})$ con $c_\alpha \in \mathbb{C}$ sono le soluzioni in cui tutte le componenti del sistema oscillano con la stessa frequenza e sono perciò detti modi normali.

La soluzione generale del sistema è data infine da

$$z = \sum_{\alpha=1}^{3} \mathrm{Re}(c_\alpha A_\alpha e^{-i\omega_\alpha t}) = \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha \,\mathrm{Re}(c_\alpha e^{-i\omega_\alpha t})$$

che ha come previsto sei parametri liberi, cioè la parte reale e immaginaria di ognuno dei c_α.

34 Due cilindri ruotano l'uno nell'altro
10/03/2014

34.1 Testo

È fissato un cilindro cavo di massa m e raggio $2a$ con un perno sulla sua circonferenza, intorno al quale può ruotare. All'interno di questo cilindro ne è presente un altro, anch'esso cavo, di massa m e raggio a, che si muove di puro rotolamento sul bordo del cilindro grande.

Studiare le piccole oscillazioni del sistema intorno alla posizione d'equilibrio sotto l'effetto della gravità.

34.2 Soluzione

Sia $\vec{P}$ il punto fisso corrispondente al perno che fissa il cilindro grande, sia $\vec{Q}$ il centro del primo cilindro e $\vec{R}$ il centro del secondo. Chiamo φ l'angolo tra $\overrightarrow{PQ}$ e la verticale, e θ l'angolo tra $\overrightarrow{QR}$ e la verticale.

Pongo un sistema di assi cartesiani in modo che l'origine sia $\vec{P}$ e l'asse $\hat{y}$ punti verso il basso.

Nel sistema di coordinate descritto risultano valere:

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= 2a(\sin\varphi, \cos\varphi) \\ \vec{R} &= \vec{Q} + a(\sin\theta, \cos\theta) \end{aligned} \tag{34.2.1}$$

e derivando ottengo anche:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{Q}} &= 2a\dot{\varphi}(\cos\varphi, -\sin\varphi) \\ \dot{\vec{R}} &= \dot{\vec{Q}} + a\dot{\theta}(\cos\theta, -\sin\theta) \end{aligned} \tag{34.2.2}$$

Voglio calcolare l'energia cinetica e potenziale del sistema.

Per quanto riguarda l'energia potenziale (che pongo nulla nella posizione d'equilibrio) è molto facile ricavarla sfruttando eq. (34.2.1):

$$U = mg(2a) + mg(3a) - mgQ_y - mgR_y = mga\left(4(1-\cos\varphi) + (1-\cos\theta)\right) \approx \frac{mga}{2}\left(4\varphi^2 + \theta^2\right) \tag{34.2.3}$$

dove nell'ultima identità ho approssimato al second'ordine.

Per quanto riguarda l'energia cinetica del cilindro grande, è facile decomporla in cinetica di $\vec{Q}$ più rotazionale e poi calcolarla usando eq. (34.2.2):

$$T_1 = \frac{1}{2}m\dot{\vec{Q}}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = 4ma^2\dot{\varphi}^2 \tag{34.2.4}$$

Anche per calcolare l'energia cinetica del cilindro piccolo la decompongo in cinetica più rotazionale, ma risulta più difficile capire la velocità angolare del cilindro.

È arduo spiegare a parole come trovare l'angolo di cui ruota il cilindro piccolo in funzione di φ, θ ma provo ora a descrivere il metodo. È chiaro che il termine φ è solo addittivo (sia sulla rotazione del cilindro piccolo, sia sull'angolo θ, quindi lo tengo costante, mentre noto che se l'angolo θ passa da 0 a θ_0 il cilindro risulta essere ruotato di $-\theta_0$ (questo va fatto guardando un po' gli angoli della figura). Riaggiungendo la variazione di φ ottengo che l'angolo di rotazione del cilindro (partendo a contare da quando è tutto nella posizione di equilibrio) risulta essere $2\varphi - \theta$.

Perciò ora ho gli strumenti per calcolare l'energia cinetica del cilindro piccolo (sfrutto ancora eq. (34.2.2)):

$$\begin{aligned} T_2 = \frac{1}{2}m\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}I(2\varphi \dot{-} \theta)^2 &= \frac{1}{2}m\left(4a^2\dot{\varphi}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 4a^2\dot{\theta}\dot{\varphi}(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta)\right) + \frac{1}{2}ma^2\left(2\dot{\varphi} - \dot{\theta}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}ma^2\left(8\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}^2 + 4\dot{\varphi}\dot{\theta}(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta - 1)\right) \\ &\approx \frac{1}{2}ma^2\left(8\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}^2\right) \end{aligned} \tag{34.2.5}$$

dove nell'ultimo passaggio ho approssimato al second'ordine.

Unendo eqs. da (34.2.3) a (34.2.5) ottengo che al second'ordine risulta:

$$E = \frac{1}{2}ma^2\left(16\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}^2\right) + \frac{mga}{2}\left(4\varphi^2 + \theta^2\right) \Rightarrow \frac{E}{ma} = \frac{1}{2}a\left(16\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}g\left(4\varphi^2 + \theta^2\right) \tag{34.2.6}$$

Ora applicando la teoria delle oscillazioni a più gradi di libertà section 1.9 posso trovare le piccole oscillazioni del sistema (nelle coordinate $\left(\begin{smallmatrix}\varphi\\ \theta\end{smallmatrix}\right)$). Noto che in questo caso le matrici da studiare K, M sono già diagonali:

$$M = a\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \qquad K = g\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

e perciò ottengo che, detta ω la frequenza dei moti normali, vale:

$$0 = \det\left(K - \omega^2 M\right) = (4g - 16a\omega^2)(g - 2a\omega^2) \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{4a}, \frac{g}{2a}$$

e l'autovalore relativo a $\omega^2 = \frac{g}{4a}$ è $\binom{1}{0}$ mentre quello relativo a $\omega^2 = \frac{g}{2a}$ è $\binom{0}{1}$. Perciò i moti armonici sono completamente disaccoppiati tra φ e θ.

In conclusione ottengo che φ varia di moto armonico con $\omega_\varphi = \sqrt{\frac{g}{4a}}$ e con ampiezza dipendente dai dati iniziali, analogamente θ varia di moto armonico con $\omega_\theta = \sqrt{\frac{g}{2a}}$ e con ampiezza dipendente dai dati iniziali.

35 Stella con tensore d'inerzia variante
20/03/2014

35.1 Testo

Una stella ha i momenti d'inerzia lungo gli assi principali che variano nel tempo seconda le leggi

$$I_x = I_y = I\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\cos\Omega t\right)$$
$$I_z = I\left(1 + \varepsilon\cos\Omega t\right)$$

Si determini la velocità angolare $\vec{\omega}$ della stella al prim'ordine in $\varepsilon \ll 1$, conoscendo il valore iniziale $\vec{\omega}_0$.

35.2 Soluzione

Non sono presenti forze esterne che agiscono sul sistema, quindi per la seconda equazione cardinale ottengo

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{35.2.1}$$

So inoltre che per eq. (F.27), vale

$$\vec{L} = (I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z)$$
$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta L}{\delta t} + \vec{\omega}\times\vec{L} = (I_x\dot{\omega}_x + \dot{I}_x\omega_x, I_y\dot{\omega}_y + \dot{I}_y\omega_y, I_z\dot{\omega}_z + \dot{I}_z\omega_z) + (\omega_x,\omega_y,\omega_z)\times(I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z)$$

Svolgendo i conti, la eq. (35.2.1) diventa quindi:

$$\begin{cases} I_x\dot{\omega}_x + \dot{I}_x\omega_x + \omega_y\omega_z(I_z - I_y) = 0 \\ I_y\dot{\omega}_y + \dot{I}_y\omega_y + \omega_x\omega_z(I_x - I_z) = 0 \\ I_z\dot{\omega}_z + \dot{I}_z\omega_z + \omega_x\omega_y(I_y - I_x) = 0 \end{cases}$$

da cui, chiamando $I_x = I_y = \bar{I}$, ottengo:

$$\begin{cases} \bar{I}\dot{\omega}_x + \dot{\bar{I}}\omega_x + \omega_y\omega_z(I_z - \bar{I}) = 0 \\ \bar{I}\dot{\omega}_y + \dot{\bar{I}}\omega_y + \omega_x\omega_z(\bar{I} - I_z) = 0 \\ I_z\dot{\omega}_z + \dot{I}_z\omega_z = 0 \end{cases} \tag{35.2.2}$$

Risolvo innanzitutto la terza di queste equazioni. Deve valere:

$$I_z\dot{\omega}_z + \dot{I}_z\omega_z = 0 \iff I(1+\varepsilon\cos\Omega t)\dot{\omega}_z = I\Omega\varepsilon\sin\Omega t\omega_z \iff \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\omega_z} = \frac{\Omega\varepsilon\sin\Omega t}{1+\varepsilon\cos\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

che nell'approssimazione al prim'ordine per $\varepsilon \ll 1$, diventa:

$$\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\omega_z} = \Omega\varepsilon\sin\Omega t\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \int_{\omega_z(0)}^{\omega_z(t)}\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\omega_z} = \int_0^t \Omega\varepsilon\sin\Omega s\,\mathrm{d}s$$
$$\Longrightarrow \omega_z(t) = \omega_z(0)e^{\varepsilon(1-\cos\Omega t)} \simeq \omega_z(0)[1+\varepsilon(1-\cos\Omega t)]$$

Sostituendo quindi nella prima equazione (la seconda è analoga) di eq. (35.2.2) i valori di $\bar{I}$ e I_z e il valore di ω_z appena trovato e approssimando al prim'ordine in ε, ottengo:

$$\bar{I}\dot{\omega}_x + \dot{\bar{I}}\omega_x + \omega_y\omega_z(I_z - \bar{I}) = 0$$
$$\Longrightarrow (1 - \frac{\varepsilon}{2}\cos\Omega t)\dot{\omega}_x + \frac{\varepsilon}{2}\Omega\sin\Omega t\omega_x + \frac{3}{2}\varepsilon\cos\Omega t\omega_z(0)[1+\varepsilon(1-\cos\Omega t)]\omega_y = 0$$
$$\Longrightarrow \dot{\omega}_x + \frac{\varepsilon}{2}\Omega\sin\Omega t\omega_x + \frac{3}{2}\varepsilon\cos\Omega t\omega_z(0)\omega_y = 0$$

Quindi mi sono ricondotta al sistema di due equazioni

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x + \frac{\varepsilon}{2}\Omega\sin\Omega t\omega_x + \frac{3}{2}\varepsilon\cos\Omega t\omega_z(0)\omega_y = 0 \\ \dot{\omega}_y + \frac{\varepsilon}{2}\Omega\sin\Omega t\omega_y - \frac{3}{2}\varepsilon\cos\Omega t\omega_z(0)\omega_x = 0 \end{cases}$$

Chiamo ora $z = \omega_x + i\omega_y$, sommando alla prima equazione del sistema i volte la seconda ottengo:

$$\begin{aligned}
\dot{z} + \frac{\varepsilon}{2}\Omega \sin\Omega t z - \frac{3}{2}\varepsilon \cos\Omega t \omega_z(0) z = 0 \\
\Longrightarrow z = (\omega_x(0) + i\omega_y(0)) \exp\left[\frac{\varepsilon}{2}\left(3i\omega_z(0)\frac{\sin\Omega t}{\Omega} + \cos\Omega t - 1\right)\right] \\
= (\omega_x(0) + i\omega_y(0))\left[1 + \frac{\varepsilon}{2}\left(3i\omega_z(0)\frac{\sin\Omega t}{\Omega} + \cos\Omega t - 1\right)\right] \\
\Longrightarrow \begin{cases} \omega_x(t) = \omega_x(0)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\cos\Omega t - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{3}{2}\varepsilon\omega_y(0)\omega_z(0)\frac{\sin\Omega t}{\Omega} \\ \omega_y(t) = \omega_y(0)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\cos\Omega t - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{3}{2}\varepsilon\omega_x(0)\omega_z(0)\frac{\sin\Omega t}{\Omega} \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi, poichè avevo già ricavato $\omega_z(t)$, ho trovato quindi il valore di $\vec{\omega}$ rispetto al tempo, che è quello che volevo.

35.3 Soluzione 2

Si vuole adesso spostare l'attenzione sulle componenti $(L_x,\ L_y,\ L_z)$ del vettore momento angolare, mettendo in luce cosa accade alla stella per tempi molto lunghi (che le approssimazioni della precedente soluzione, esatte solo per tempi brevi, non consentono di osservare).
Imponendo come prima che la derivata del momento angolare sia nulla, si ha:

$$\begin{cases} \dot{L}_x + (\bar{I}^{-1} - I_z^{-1})L_y L_z = 0 \\ \dot{L}_y + (\bar{I}^{-1} - I_z^{-1})L_x L_z = 0 \\ \dot{L}_z = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione deduciamo che L_z è costante.
Sia $\Gamma = L_x + iL_y$.
Manipolando le prime due equazioni del sistema si trova:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\Gamma}}{\Gamma} = i(\bar{I}^{-1} - I_z^{-1})L_z = \frac{3}{2}\varepsilon i\frac{L_z}{I}\cos\Omega t\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\cos\Omega t\right)^{-1}(1 + \varepsilon\cos\Omega t)^{-1} \approx \\
\approx \frac{3}{2}\varepsilon i\frac{L_z}{I}\cos\Omega t\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\cos\Omega t\right) \\
\Longrightarrow \ln\left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0}\right) = \frac{3}{2}\varepsilon i\frac{L_z}{I}\left(\frac{\sin\Omega t}{\Omega} - \frac{\varepsilon}{8}\frac{\sin 2\Omega t}{\Omega} - \frac{\varepsilon t}{4}\right)
\end{aligned}$$

Siamo liberi di supporre che nell'istante iniziale $L_y(0) = 0$. Quindi:

$$\begin{cases} L_x(t) = \Gamma_0 \cos\left[\frac{3\varepsilon}{2}\frac{L_z}{I}\left(\frac{\sin\Omega t}{\Omega} - \frac{\varepsilon}{8}\frac{\sin 2\Omega t}{\Omega} - \frac{\varepsilon t}{4}\right)\right] \\ L_y(t) = \Gamma_0 \sin\left[\frac{3\varepsilon}{2}\frac{L_z}{I}\left(\frac{\sin\Omega t}{\Omega} - \frac{\varepsilon}{8}\frac{\sin 2\Omega t}{\Omega} - \frac{\varepsilon t}{4}\right)\right] \end{cases}$$

Per tempi dell'ordine di Ω^{-1} si ha:

$$\begin{cases} L_x(t) \approx \Gamma_0 \\ L_y(t) \approx \Gamma_0\left(\frac{3\varepsilon}{2}\frac{L_z}{I\Omega}\sin\Omega t\right) \end{cases}$$

che equivale esattamente alla prima soluzione, passando alle velocità angolari e approssimando al prim'ordine.
Invece, per $t \gg (\varepsilon\Omega)^{-1}$, si trova:

$$\begin{cases} L_x(t) \approx \Gamma_0 \cos\left(\frac{3\varepsilon^2}{8}\frac{L_z}{I}\ t\right) \\ L_y(t) \approx -\Gamma_0 \sin\left(\frac{3\varepsilon^2}{8}\frac{L_z}{I}\ t\right) \end{cases}$$

Si nota in particolare che, per tempi molto lunghi, il sistema acquista simmetria.