Serie di Fourier

Mirko Torresani

23 giugno 2021

Sommario

In queste pagine si definiranno e discuteranno le serie di Fourier negli spazi delle funzioni continue, andando ad esaminare in particolare quando e in che senso queste convergono.

Andiamo subito a introdurre gli spazi su cui lavoreremo:

$$C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ continue} \}$$
$$C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f(x+T) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \}$$

Poniamo per l'intera discussione $T = 2\pi$. Questa scelta non è restrittiva a meno di riscalare l'argomento delle funzioni. Inoltre se non diversamente indicato gli indici di tutte le sommatorie saranno interi.

Sullo spazio $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ possiamo considerare innanzitutto la norma infinito $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}}|f|$ per cui vale il seguente teorema

Teorema 1. *La norma $\|\cdot\|_\infty$ è ben definita su $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach*

Dimostrazione. Innanzitutto la buona definizione della norma uniforme deriva dalla periodicità delle funzioni considerate

$$\sup_{\mathbb{R}}|f| = \sup_{[0,2\pi]}|f|$$

Inoltre sappiamo che $(C(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach. Dobbiamo solo dimostrare che limite puntuale (quindi anche uniforme) di funzioni periodiche è periodica.

Siano quindi f_n funzioni T-periodiche convergenti puntualmente a f. Allora

$$|f(x+T) - f(x)| \leq |f(x+T) - f_n(x+T)| + |f_n(x) - f(x)| \underset{n}{\to} 0$$

□

Un'altra norma possibile sullo spazio vettoriale $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ è quella indotta dal prodotto scalare hermitiano

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\overline{v(t)}\,dt$$

cioè la seguente norma $\|\cdot\|_2$.

$$\|u\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(t)|^2\,dt$$

Osserviamo che lo spazio $(C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ non è lontanamente uno spazio completo. Infatti le funzioni continue $\sqrt[2n+1]{\sin(t)}$ tendono in $\|\cdot\|_2$ alla funzione non continua

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \sin(x) \geq 0 \\ -1 & \sin(x) < 0 \end{cases}$$

Lo spazio naturale dove ambientare le serie di Fourier è infatti lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$. Esso è definito come segue

$$L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi) = \left\{ f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt < +\infty \right\}$$

dove vengono identificate tra di loro funzioni che differiscono su insiemi di misura al più nulla. Considereremo quindi d'ora in avanti l'immersione naturale

$$\begin{aligned} \Phi\colon C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) &\to L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi) \\ f &\mapsto f|_{[-\pi,\pi]} \end{aligned}$$

Il passo successivo è trovare un sistema di funzioni ortonormali per $\langle\cdot,\cdot\rangle$. La risposta viene da questo teorema

Proposizione 1. *L'insieme $\{e_k(t) = e^{ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è un sistema di funzioni ortonormali.*

Dimostrazione. Tramite verifica diretta

$$\langle e_k, e_h\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-iht}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-h)t}\,dt$$

Quindi se $k = h$ si ottiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-h)t}\,dt = \frac{1}{2\pi}2\pi = 1$$

D'altra parte se $k \neq h$ si ottiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-h)t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(k-h)}e^{i(k-h)t}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

□

Indichiamo quindi con $V_n = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_k | k \in \mathbb{Z}, |k| \leq n\}$ il sottospazio generato. I suoi elementi vengono detti polinomi trigonometrici.

Definizione 1. Presa una funzione $u \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$ definiamo i coefficienti di Fourier come $\hat{u}_k = \langle u, e_k \rangle$. Inoltre la serie troncata di Fourier di ordine n è

$$S_n(u) = \sum_{|k| \leq n} \hat{u}_k e_k$$

Notiamo innanzitutto che dato $u \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$, allora $\hat{u}_k e_k$ rappresenta la proiezione ortogonale di u lungo e_k. Infatti

$$\langle \hat{u}_k e_k, u - \hat{u}_k e_k \rangle = \langle \hat{u}_k e_k, u \rangle - \langle \hat{u}_k e_k, \hat{u}_k e_k \rangle = \hat{u}_k \overline{\hat{u}_k} - \hat{u}_k \overline{\hat{u}_k} = 0$$

A questo punto andiamo a dimostrare una importante disuguaglianza, la cosiddetta disuguaglianza di Bessel.

Proposizione 2 (Disuguaglianza di Bessel)**.** *Se u è una funzione di $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$, allora*

$$\|S_n(u)\|_2^2 = \sum_{|k| \leq n} |\hat{u}_k|^2 \leq \|u\|_2^2$$

Dimostrazione. Innanzitutto è evidente che, data la ortonormalità degli $\{e_k\}$ e la bilinearità del prodotto scalare

$$\|S_n(u)\|_2^2 = \langle S_n(u), S_n(u) \rangle = \sum_{|k|,|h| \leq n} \langle \hat{u}_k e_k, \hat{u}_h e_h \rangle = \sum_{|k| \leq n} |\hat{u}_k|^2$$

Inoltre i vettori $u - S_n(u)$ e $S_n(u)$ sono ortogonali, infatti

$$\begin{aligned}
\langle S_n(u), u - S_n(u) \rangle &= \sum_{|k| \leq n} \langle \hat{u}_k e_k, u - \sum_{|j| \leq n} \hat{u}_j e_j \rangle \\
&= \sum_{|k| \leq n} \left(\langle \hat{u}_k e_k, u \rangle - \sum_{|j| \leq n} \langle \hat{u}_k e_k, \hat{u}_j e_j \rangle \right) \\
&= \sum_{|k| \leq n} \langle \hat{u}_k e_k, u - \hat{u}_k e_k \rangle = 0
\end{aligned}$$

Ma allora è possibile applicare il "teorema di pitagora", e quindi affermare che

$$\|u\|_2^2 = \|S_n(u)\|_2^2 + \|u - S_n(u)\|_2^2$$

Cioè

$$0 \leq \|u - S_n(u)\|_2^2 = \|u\|_2^2 - \|S_n(u)\|_2^2$$

Da cui

$$\sum_{|k| \leq n} |\hat{u}_k|^2 = \|S_n(u)\|_2^2 \leq \|u\|_2^2$$

□

Dimostriamo adesso un'altra proprietà di $S_n(u)$, che ci sarà utile in seguito

Proposizione 3. *Dato $u \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$, l'insieme $K = \left\{ \|u - v\|_2^2 \;\middle|\; v \in V_n \right\}$ ha un minimo realizzato da $S_n(u)$.*

Dimostrazione. Sia $v \in K$ della forma $v = \sum_{|k| \leq n} \lambda_k e_k$. Allora tramite verifica diretta

$$\begin{aligned}
\|u - v\|_2^2 &= \langle u - \sum_{|k| \leq n} \lambda_k e_k, u - \sum_{|k| \leq n} \lambda_k e_k \rangle \\
&= \langle u, u \rangle + \sum_{|k| \leq n} \lambda_k \langle e_k, u \rangle - \sum_{|k| \leq n} \overline{\lambda_k} \langle u, e_k \rangle + \sum_{|k|, |h| \leq n} \lambda_k \overline{\lambda_h} \langle e_k, e_h \rangle \\
&= \langle u, u \rangle - \sum_{|k| \leq n} \lambda_k \overline{\hat{u}_k} - \sum_{|k| \leq n} \overline{\lambda_k} \hat{u}_k + \sum_{|k| \leq n} \lambda_k \overline{\lambda_k} \\
&= \langle u, u \rangle + \sum_{|k| \leq n} \left[\lambda_k \overline{\lambda_k} - \lambda_k \overline{\hat{u}_k} - \overline{\lambda_k} \hat{u}_k + \hat{u}_k \overline{\hat{u}_k} \right] - \sum_{|k| \leq n} \hat{u}_k \overline{\hat{u}_k} \\
&= \|u\|_2^2 + \sum_{|k| \leq n} (\lambda_k - \hat{u}_k)(\overline{\lambda_k} - \overline{\hat{u}_k}) - \sum_{|k| \leq n} |\hat{u}_k|^2 \\
&= \|u\|_2^2 + |\lambda_k - \hat{u}_k|^2 - \sum_{|k| \leq n} |\hat{u}_k|^2 \\
&\geq \|u\|_2^2 - \sum_{|k| \leq n} |\hat{u}_k|^2
\end{aligned}$$

e l'uguaglianza è raggiunta per $\lambda_k = \hat{u}_k$, cioè per $v = S_n(u)$. □

A questo punto iniziamo a chiederci sotto quali ipotesi e in quale senso $S_n(u)$ converge a u. Come scopriremo le ipotesi a riguardo sono estremamente generali. Prima di tutto però è da dimostrare un teorema di densità dei polinomi trigonometrici nello spazio delle funzioni continue.

Per farlo è molto utile definire i cosiddetti nuclei di Dirichlet e di Fejér. Iniziamo dai primi

Definizione 2 (Nuclei di Dirichlet)**.** Per ogni $n \in \mathbb{N}$ indichiamo definiamo l'ennesimo nucleo di Dirichlet come

$$D_n(x) = \sum_{|k| \leq n} e^{ikx}$$

Questa scrittura però è spesso non agevole. Ci viene in soccorso il seguente lemma

Lemma 1. *Per ogni $x \neq 2k\pi$ vale l'uguaglianza*

$$D_n(x) = \frac{\sin((n + 1/2)x)}{\sin(x/2)} \tag{1}$$

Dimostrazione. Tramite un semplice conto si ottiene l'uguaglianza:

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{|k|\le n} e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{j=0}^{2n} e^{ijx} = e^{-inx}\frac{e^{i(2n+1)x}-1}{e^{ix}-1} \\ &= \frac{e^{i(n+1)x}-e^{-inx}}{e^{ix}-1} = \frac{e^{i(n+1/2)x}-e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} \\ &= \frac{2i\sin((n+1/2)x)}{2i\sin(x/2)} = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} \end{aligned}$$

□

Questi nuclei hanno già una prima applicazione, infatti presa una $u \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$

$$\begin{aligned} S_n(u)(x) &= \sum_{|k|\le n} \langle u, e_k\rangle e_k(x) = \sum_{|k|\le n} \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} u(t)e^{-ikt}\,dt\right] e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\sum_{|k|\le n} e^{ik(x-t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)D_n(x-t)\,dt \end{aligned}$$

Cioè si ottiene questa utile uguaglianza

$$\boxed{S_n(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)D_n(x-t)\,dt} \tag{2}$$

Consideriamo adesso i cosiddetti nuclei di Fejér definiti come segue

Definizione 3 (Nuclei di Fejér)**.** Per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ indichiamo l'ennesimo nucleo di Fejér come

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(u)$$

Come per i nuclei di Dirihclet, anche per i nuclei di Fejér vale un lemma che ne semplifica la trattazione

Lemma 2. *Valgono i seguenti punti*

1. *Se* $x \neq 2k\pi$ *allora*
$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left[\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right]^2 \tag{3}$$

2. $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1 \tag{4}$$

3. *Per ogni* $0 < \delta \le \pi$ *vale il limite*
$$\sup_{0<\delta\le|x|\le 2\pi-\delta} F_n(x) \xrightarrow[n]{} 0 \tag{5}$$

Dimostrazione. (1.) Sia $x \neq 2k\pi$. Notiamo innanzitutto che per (1)

$$\begin{aligned}
(e^{ix}-1)^2 nF_n(x) &= (e^{ix}-1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) \\
&= (e^{ix}-1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i(k+1)x}-e^{-ikx}}{e^{ix}-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i(k+1)x}-e^{-ikx})(e^{ix}-1) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+2)x} - e^{-i(k-1)x} - e^{i(k+1)x} + e^{-ikx} \\
&= e^{i(n+1)x} - e^{ix} - e^{ix} + e^{-i(n-1)x} \\
&= e^{ix}(e^{inx} - 2 + e^{-inx}) \\
&= (e^{i\frac{x}{2}})^2 \left[e^{in\frac{x}{2}} - e^{-in\frac{x}{2}} \right]^2
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$(e^{ix}-1)^2 nF_n(x) = (e^{i\frac{x}{2}})^2 \left[e^{in\frac{x}{2}} - e^{-in\frac{x}{2}} \right]^2$$

Da cui

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \left[\frac{e^{in\frac{x}{2}} - e^{-in\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \right]^2 = \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right]^2$$

(2.) Dimostriamo la seguente uguaglianza

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\, dx = 1$$

tramite verifica diretta:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\, dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|k|\leq n} e^{ikx}\, dx = \sum_{|k|\leq n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\, dx \\
&= \sum_{|k|\leq n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-0)x}\, dx = \sum_{|k|\leq n} \langle e_k, e_0 \rangle \\
&= \langle e_0, e_0 \rangle = 1
\end{aligned}$$

Da cui

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\, dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\, dx = 1$$

(3.) Per l'ultimo punto sia come d'ipotesi $0 < \delta \leq \pi$. Allora per (3), preso un qualsiasi x tale che $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left[\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right]^2 \leq \frac{1}{n}\frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} = \frac{1}{n}\frac{2}{1-\cos(\delta)}$$

Da cui vista la presenza del quadrato

$$\sup_{0<\delta\leq|x|\leq 2\pi-\delta} F_n(x) \quad = \sup_{0<\delta\leq x\leq 2\pi-\delta} F_n(x) \leq \frac{1}{n}\frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} \underset{n}{\to} 0$$

$\square$

Con questi strumenti possiamo accingerci a dimostrare il citato teorema di densità. Esso si basa su questo lemma di approssimazione tramite polinomi trigonometrici:

Lemma 3 (Lemma di Fejér). *Presa $u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ allora la successione di polinomi trigonometrici*

$$\sigma_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(u)$$

converge uniformemente a u.

Dimostrazione. Innanzitutto andiamo a scrivere $\sigma_n(u)$ in un utile forma, servendoci di (2).

$$\begin{aligned}
\sigma_n(u)(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(u)(x) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)D_k(x-t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)F_n(x-t)\,dt
\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto quindi la utile scrittura

$$\boxed{\sigma_n(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)F_n(x-t)\,dt}$$

A questo punto se consideriamo $\Delta_n(x) = u(x) - \sigma_n(u)(x)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
|\Delta_n(x)| &= \left| u(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)F_n(x-t)\,dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)F_n(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)F_n(x-t)\,dt \right| \quad \text{per (4)} \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)F_n(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} u(t+x)F_n(-t)\,dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)F_n(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} u(t+x)F_n(t)\,dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)F_n(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t+x)F_n(t)\,dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [u(x) - u(t+x)]F_n(t)\,dt \right|
\end{aligned}$$

Ma la funzione $u(x) - u(x+t)$ è continua in $t = 0$. Ergo fissato $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $|u(x) - u(x+t)| < \varepsilon$ se $|t| < \delta$. Da cui

$$\begin{aligned}
|\Delta_n(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [u(x) - u(t+x)]F_n(t)\,dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\le\delta} [u(x) - u(t+x)]F_n(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\le\pi} [u(x) - u(t+x)]F_n(t) \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\le\delta} \varepsilon F_n(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\le\pi} 2\|u\|_\infty F_n(t)\,dt \\
&\le \varepsilon + 2\frac{\|u\|_\infty}{2\pi}\, 2\pi \sup_{0<\delta\le|x|\le\pi} F_n(x)
\end{aligned}$$

Ma allora avendo tolto la dipendenza dalla variabile possiamo affermare che

$$\|\Delta_n(x)\|_\infty \le \varepsilon + 2\frac{\|u\|_\infty}{2\pi}\, 2\pi \sup_{0<\delta\le|x|\le\pi} F_n(x)$$

Infine grazie a (5), fissato $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$\|\Delta_n(x)\|_\infty \le \varepsilon + 2\frac{\|u\|_\infty}{2\pi}\, 2\pi \sup_{0<\delta\le|x|\le\pi} F_n(x) \le 2\varepsilon$$

per $n \ge N$. Cioè $\|\Delta_n(x)\|_\infty \underset{n}{\to} 0$ e quindi $\sigma_n(u)$ converge a u uniformemente.

□

Possiamo quindi dimostrare il teorema di densità annunciato precedentemente

Teorema 2. *L'insieme* $V = \bigcup_n V_n$ *è denso in* $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *per la norma uniforme.*

Dimostrazione. Sia $u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e consideriamo la successione $\sigma_n(u)$. Per il lemma di Fejér, sappiamo che $\sigma_n(u)$ converge ad u uniformemente. Ergo per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N > 0$ tale che $\|\sigma_N(u) - u\|_\infty < \varepsilon$. Essendo che $\sigma_N(u) \in V_{N-1} \subseteq V$, si arriva alla tesi. $\square$

Dimostrato questo risultato, possiamo tornare al nostro quesito: preso $u \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$ come e quando la serie troncata di Fourier $S_n(u)$ converge a u stesso? In particolare quando è che avviene convergenza in L^2, puntuale, uniforme o totale?

Per la prima convergenza la risposta ce la dà questo teorema.

Teorema 3 (Convergenza in L^2)**.** *Sia $u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Allora la serie troncata di Fourier converge a u in L^2, cioè $\|S_n(u) - u\|_2 \underset{n}{\to} 0$*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Per il teorema di densità esiste un $v \in V_{n_0}$ tale che $\|u - v\|_\infty < \varepsilon$. Inoltre dato che se $\alpha \leq \beta$ allora $V_\alpha \subseteq V_\beta$, otteniamo che $v \in V_n$ per ogni $n \geq n_0$. Allora applicando la Proposizione 3 possiamo affermare che

$$\|u - S_n(u)\|_2^2 \leq \|u - v\|_2^2 \leq \|u - v\|_\infty^2 < \varepsilon^2 \quad \forall n \geq n_0$$

Ergo $\|u - S_n(u)\|_2 < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$. Quindi $\|u - S_n(u)\|_2 \underset{n}{\to} 0$, cioè $S_n(u)$ converge a u in L^2. $\square$

Vediamo subito due interessanti corollari:

Corollario 1 (Uguaglianza di Parsival)**.** *Data $u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vala la seguente uguaglianza*

$$\|u\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_k|^2$$

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Bessel abbiamo dimostrato che

$$\|u\|_2^2 = \|S_n(u)\|_2^2 + \|u - S_n(u)\|_2^2$$

Ma $u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, quindi per il teorema precedente

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_k|^2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{|k| \leq n} |\hat{u}_k|^2 = \lim_{n \to +\infty} \left[\|u\|_2^2 - \|u - S_n(u)\|_2^2\right] = \|u\|_2^2$$

$\square$

Corollario 2. *Presi $u, v \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ allora*

$$\langle u, v \rangle = \langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k e_k, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{v}_k e_k \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k \hat{v}_k$$

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}_k \hat{v}_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{|k|\le n} \hat{u}_k \hat{v}_k = \lim_{n\to+\infty} \langle S_n(u), S_n(v)\rangle$$

Quindi se applichiamo le disuguaglianze di Cauchy-Schwarz e di Bessel

$$\begin{aligned} |\langle u,v\rangle - \langle S_n(u), S_n(v)\rangle| &= |\langle u,v\rangle - \langle S_n(u), v\rangle + \langle S_n(u), v\rangle - \langle S_n(u), S_n(v)\rangle| \\ &\le |\langle u - S_n(u), v\rangle| + |\langle S_n(u), v - S_n(v)\rangle| \\ &\le \|u - S_n(u)\|_2 \|v\|_2 + \|S_n(u)\|_2 \|v - S_n(v)\|_2 \underset{n}{\to} 0 \\ &\le \|u - S_n(u)\|_2 \|v\|_2 + \|u\|_2 \|v - S_n(v)\|_2 \underset{n}{\to} 0 \end{aligned}$$

tramite il teorema precedente arriviamo alla tesi:

$$\left|\langle u,v\rangle - \lim_{n\to+\infty} \langle S_n(u), S_n(v)\rangle\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\langle u,v\rangle - \langle S_n(u), S_n(v)\rangle\right| = 0$$

□

Passiamo ora alla convergenza puntuale. Essa riguarda la seguente classe di funzioni:

Definizione 4. Una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ si dice regolare a tratti se esistono $a \le x_1 \le \cdots \le x_n \le b$ tale che

1. f è continua ovunque, tranne al più in $x_1, \ldots, x_n$.
2. Per ogni intervallo (x_i, x_{i+1}), $0 \le i \le n-1$: f è C^1 all'interno. Inoltre la funzione e la derivata ammettono limite finito agli estremi.

Inoltre $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice regolare a tratti se la restrizione ad ogni intervallo $[a,b]$ è regolare a tratti.

A questo punto per arrivare al teorema di convergenza puntuale ci serve il seguente lemma

Lemma 4 (Lemma di Riemann-Lebesgue)**.** *Sia $f \in C([a,b]) \cap C^1((a,b))$. Allora*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due casi:

($f \in C^1([a,b])$) In questo caso possiamo semplicemente integrare per parti:

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| &= \left| -f(t)\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t)\Big|_a^b + \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt \right| \\ &\le \frac{1}{\lambda}(2\|f\|_\infty + (b-a)\|f'\|_\infty) \underset{\lambda}{\to} 0 \end{aligned}$$

($f \in C^1((a,b))$) In questa situazione sia $\varepsilon > 0$ e sia $\delta < \varepsilon/(3\,\|f\|_\infty)$. Per il punto precedente esiste un $\Lambda > 0$ tale che

$$\left|\int_{a+\delta}^{b-\delta} f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\lambda > \Lambda$$

Ergo per ogni $\lambda > \Lambda$ vale la disuguaglianza

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| &= \left|\int_a^{a+\delta} f(t)\sin(\lambda t)\,dt + \int_{a+\delta}^{b-\delta} f(t)\sin(\lambda t)\,dt\, + \right.\\
&\quad \left. + \int_{b-\delta}^{b} f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|\\
&\le \left|\int_a^{a+\delta} f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| + \left|\int_{a+\delta}^{b-\delta} f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| + \\
&\quad + \left|\int_{b-\delta}^{b} f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|\\
&\le \delta\|f\|_\infty + \frac{\varepsilon}{3} + \delta\|f\|_\infty\\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

E quindi abbiamo dimostrato che

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0$$

□

Con questo lemma possiamo finalmente dimostrare il teorema di convergenza puntuale

Teorema 4 (Convergenza Puntuale)**.** *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funzione 2π-periodica e regolare a tratti. Allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ vale il seguente limite*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2}$$

dove

$$f(x_0^\pm) = \lim_{x\to x_0^\pm} f(x)$$

Dimostrazione. Iniziamo riscrivendo $S_n(f)$. Come già effettuato svariate volte

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x_0 - t)\,dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t)D_n(t)\,dt\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x_0+t)D_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)\,dt\right]
\end{aligned}$$

A questo punto dimostriamo che il primo addendo tende a $f(x_0^-)$. Si dimostra in modo analogo che il secondo tende a $f(x_0^+)$.

Quindi raccogliendo

$$\left|f(x_0^-) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x_0+t)D_n(t)\,dt\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(f(x_0^-) - f(x_0+t))D_n(t)\,dt\right|$$

si ottiene per (1)

$$= \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t}\frac{t}{\sin(t/2)}\sin((n+1/2)t)\,dt\right|$$

Ma adesso ricordiamo che f è regolare a tratti in $[-\pi, 0]$. Quindi esistono $x_1, \ldots, x_n$ che soddisfano la definizione. Allora per disuguaglianza triangolare possiamo considerare l'integrale su ogni singolo intervallo.

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{\pi}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t}\frac{t}{\sin(t/2)}\sin((n+1/2)t)\,dt\right|$$

La funzione

$$\frac{t}{\sin(t/2)}$$

è C^1 in (x_i, x_{i+1}) e continua in $[x_i, x_{i+1}]$, anche nel caso uno dei due estremi sia nullo. Per quanto riguarda invece la funzione

$$\frac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t}$$

essa è sicuramente continua e C^1 all'interno in quanto composizione di funzioni continue e C^1. Per quanto riguarda gli estremi posso estendere la funzione per continuità se $x_{i+1} \neq 0$. Se $x_{i+1} = 0$ applicando de Hopitàl

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t} = \lim_{t\to 0^-} f'(x_0+t)$$

che esiste essendo f regolare a tratti.

In definitiva continuando la catena di disuguaglianze

$$= \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi_i(t)\sin((n+1/2)t)\,dt\right|$$

Con $\psi_i \in C^1((x_i, x_{i+1})) \cap C([x_i, x_{i+1}])$. Quindi essendo che per il teorema precedente

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi_i(t)\sin((n+1/2)t)\,dt\right| = 0$$

si ottene

$$\lim_{n\to+\infty}\left|f(x_0^-) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x_0+t)D_n(t)\,dt\right| = 0$$

$\square$

Passiamo adesso alla convergenza totale. Essa riguarda questa classe di funzioni

Definizione 5. Una funzione $f\colon A \to \mathbb{C}$, con A un intervallo o tutto $\mathbb{R}$, si dice C^1 a tratti se è continua e regolare a tratti.

Iniziamo dimostrando una utile estensione dell'integrazione per parti:

Lemma 5. *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ con f funzione C^1 a tratti e g funzione continua. Allora prendendo ϕ primitiva di g*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(t)\phi(t)\Big|_a^b - \int_a^b f'(t)\phi(t)\,dt$$

Dimostrazione. Siano $a \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq b$ i punti che soddisfano la definizione di regolarità. Allora le funzioni f', f, g sono continue su ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ (eventualmente estendibili al bordo). Quindi su questi intervalli è possibile integrare per parti ed affermare

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)g(t)\,dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)g(t)\,dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(t)\phi(t)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(t)\phi(t)\,dt \right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} f(t)\phi(t)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(t)\phi(t)\,dt \\
&= f(t)\phi(t)\Big|_a^b - \int_a^b f'(t)\phi(t)\,dt
\end{aligned}$$

□

A questo punto dimostriamo questo lemma sulle serie di Fourier delle derivate:

Lemma 6. *Sia $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ una funzione C^1 a tratti. Allora $(\hat{f'})_k = ik\hat{f}_k$ per ogni $k \in \mathbb{Z}^*$.*

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che f' è continua a tratti, e quindi appartiene allo spazio L^2 ed è possibile calcolarne la serie di Fourier.

Sia allora $k \in \mathbb{Z}^*$. Integrando per parti, grazie al lemma precedente:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[f(t)\frac{e^{-ikt}}{-ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{e^{-ikt}}{ik}\,dt \right]
\end{aligned}$$

Ma grazie alla 2π-periodicità di f e e^{-ikt} otteniamo

$$\hat{f}_k = \frac{1}{ik}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{ik}(\hat{f'})_k$$

$\square$

A questo punto possiamo dimostrare il teorema di convergenza totale:

Teorema 5 (Convergenza Totale)**.** *Sia $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ una funzione C^1 a tratti. Allora la $S_n(f)$ converge totalmente a f.*

Dimostrazione. Il succo della dimostrazione consiste nel dimostrare che la serie $\sum_{|k|\leq n}|\hat{f}_k|$ converge. Per farlo sfruttiamo il lemma precedente conbinato alle disuguaglianze di Bessel e Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\sum_{|k|\leq n}|\hat{f}_k| &= |\hat{f}_0| + \sum_{0<|k|\leq n}|\hat{f}_k| \\
&= |\hat{f}_0| + \sum_{0<|k|\leq n}\frac{1}{|k|}|(\hat{f'})|_k \\
&\leq |\hat{f}_0| + \left(\sum_{0<|k|\leq n}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{0<|k|\leq n}|(f')|^2\right)^{1/2} \\
&\leq |\hat{f}_0| + \left(2\sum_{0<k\leq n}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\|f'\|_2
\end{aligned}$$

Ma l'ultima espressione è convergente in n, dato che lo è il quadrato della serie armonica. Quindi essendo $\sum_{|k|\leq n}|\hat{f}_k|$ una serie a termini positivi anche essa deve essere convergente.

Ma allora la serie $S_n(f)$ è totalmente convergente, infatti

1. $M_k = \|\hat{f}_k e_k\|_\infty = |\hat{f}_k|\|e_k\|_\infty = |\hat{f}_k|$
2. $\sum_{|k|\leq n} M_k = \sum_{|k|\leq n}|\hat{f}_k| < +\infty$

Quindi la serie $S_n(f)$ è totalmente convergente ad una certa funzione $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Quindi è anche convergente in L^2 a $\tilde{f}$. Ma essendo f continua, sappiamo che $S_n(f)$ converge in L^2 a f. Quindi per unicità del limite $\tilde{f} = f$. $\square$

Per completezza enunciamo senza dimostrarlo il seguente teorema di convergenza uniforme.

Teorema 6 (Convergenza Uniforme)**.** *Sia $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ funzione Liepschitziana. Allora $S_n(f)$ converge ad f uniformemente.*

Concludiamo con una scrittura più agevole delle serie di Fourier, che ci porterà a risolvere, in maniera sorprendente, il problema di Basilea.

Proposizione 4. *Sia $f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$. Allora la serie di Fourier ammette la seguente scrittura*

$$\boxed{S(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)}$$

con

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt \quad k \geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt \quad k > 0 \end{aligned}$$

Inoltre f è dispari se e solo se a_i sono tutti nulli ed è pari se e solo se b_i sono tutti nulli.

Dimostrazione. Scriviamo innanzitutto:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k = \hat{f}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} + \hat{f}_{-k} e^{-ikx}$$

Per quanto riguarda il primo termine, esso è uguale a

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{a_0}{2}$$

che è quello che volevamo dimostrare.

Per gli altri termini invece

$$\begin{aligned} \hat{f}_k e^{ikx} + \hat{f}_{-k} e^{-ikx} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[e^{-ikt} e^{ikx} + e^{ikt} e^{-ikx} \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[e^{ik(x-t)} + e^{-ik(x-t)} \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) 2 \cos(k(x-t))\, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kx) \cos(kt)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kx) \sin(kt)\, dt \\ &= a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \end{aligned}$$

abbiamo la tesi.

Per quanto riguarda il secondo punto dimostriamo solo la parità, la disparità è analoga.

Certamente se $b_k = 0$ per ogni $k > 0$, allora la funzione è pari.

D'altra parte se la funzione è pari, allora il termine b_k è dato da

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt$$

Essendo $f(t)\sin(kt)$ dispari, l'integrale è nullo. $\square$

Concludiamo con la dimostrazione tramite le serie di Fourier del problema di Basilea

Teorema 7 (Problema di Basilea)**.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sulla espansione in serie di Fourer dell'estensione periodica di $f(x) = |x|_{[-\pi,\pi]}$.

Essendo f pari, possiamo calcolare solo i termini a_k.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t|\, dt = \pi \\
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos(kt)\, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} t \cos(kt)\, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{t \sin(kt)}{k} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kt)}{k}\, dt \right] \\
&= \frac{2}{\pi k^2} \cos(kt) \Big|_0^{\pi} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ -4/(\pi k^2) & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi lo sviluppo di $f(x) = |x|_{[-\pi,\pi]}$ è

$$|x|_{[-\pi,\pi]} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k \text{ dispari}} \frac{4}{\pi k^2} \cos(kx)$$

Quindi se valutiamo in zero l'espressione ottenuta

$$0 = |0| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \text{ dispari}} \frac{1}{k^2}$$

cioè

$$\sum_{k \text{ dispari}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ma allora avendo convergenza assoluta della serie

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{k \text{ pari}} \frac{1}{k^2} + \sum_{k \text{ dispari}} \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(2h)^2} + \frac{\pi^2}{8} \\ &= \frac{1}{4} S + \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

Da cui la tesi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = S = \frac{\pi^2}{8} \frac{4}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\square$