Spazi Normati e di Banach

Mirko Torresani

6 luglio 2021

Sommario

In queste pagine vengono alcuni teoremi basilari riguardo agli spazi di Banach e alle norme. In particolare viene discusso quando uno spazio vettoriale può essere uno spazio di Banach.

1 Introduzione

Per iniziare ricordiamo velocemente la definizione la spazio metrico.

Definizione 1. Una coppia (X, d), con X insieme e $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ funzione si dice spazio metrico se d è una distanza, cioè se

1. $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Positività)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Simmetria)
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ \forall x, y, z \in X$ (Disuguaglianza Triangolare)

Dimostriamo innanzitutto un fatto utile, la 1-Liepschitzianità, e quindi continuità, della funzione distanza.

Teorema 1. *Dato uno spazio metrico (X, d) e un punto $z_0 \in X$, allora la funzione*

$$\begin{aligned} \phi\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(z_0, x) \end{aligned}$$

è 1-Liepschitziana.

Dimostrazione. Siano $x, y \in X$. Per l'arbitrarietà dei punti ci basta dimostrare che

$$\phi(y) \leq \phi(x) + d(x, y)$$

Ma infatti, grazie alla disuguaglianza triangolare

$$d(y, z_0) \leq d(y, x) + d(x, z_0)$$

□

Detto cosa è uno spazio metrico, andiamo a definire cosa è uno spazio normato.

Definizione 2. Una coppia $(X, \|\cdot\|)$, con X un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $\|\cdot\| \colon X \to \mathbb{R}$ funzione, si dice spazio normato se $\|\cdot\|$ è una norma, cioè se

1. $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in X$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Positività)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \ \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ (Omogeneità)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in X$ (Disuguaglianza Triangolare)

Anche qui vale un teorema interessante: la convessità, e quindi continuità della norma.

Teorema 2. *Le norme sono funzioni convesse.*

Dimostrazione. Presi due punti $x, y \in X$ e $\lambda \in [0, 1]$ allora si osserva che

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\| = \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\|$$

che rispetta appunto la definizione di convessità. □

Come Corollario otteniamo che le norme sono funzioni continue.

Fatte queste premesse, si nota subito che uno spazio normato è anche uno spazio metrico, nel senso che la norma $\|\cdot\|$ induce su X una distanza definita come $d(x, y) := \|x - y\|$. Ha quindi senso porsi la domanda quando la distanza indotta da una norma è Cauchy-completa. Gli spazi normati la cui distanza indotta è completa vengono detti spazi Banach. In questi appunti cercheremo di caratterizzare gli spazi di Banach, dividendo la discussione in base alla dimensione di X.

2 Spazio finito-dimensionale

In dimensione finita è utile definire il concetto di norma equivalente

Definizione 3. Dato uno spazio vettoriale X, due norme $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ si dicono equivalenti se esiste una costante $C > 0$ tale per cui

$$\frac{1}{C}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \ \forall x \in X.$$

Si possono definire in modo del tutto analogo due distante equivalenti d_1, d_2. Il concetto di equivalenza è molto utile grazie al seguente lemma

Lemma 1. *Date due distanze equivalenti d_1, d_2 su X, allora*

1. *Per ogni successione (x_n), essa è di Cauchy per d_1 se e solo se è di Cauchy per d_2*

2. *Per ogni successione (x_n), essa converge a $\overline{x}$ per d_1 se e solo se vi converge per d_2*

Dimostrazione. Iniziamo con la prima affermazione. Sia quindi una successione (x_n) di Cauchy per d_1. Cioè vuol dire che

$$\forall \varepsilon\ \exists N_\varepsilon : d_1(x_m, x_n) < \varepsilon\ \forall m, n > N_\varepsilon$$

ma ricordando che $d_2(x, y) \leq C d_1(x, y)$ per qualche $C > 0$, allora si ottiene che

$$\forall \varepsilon\ \exists N_{\varepsilon/C} : d_2(x_m, x_n) < \varepsilon\ \forall m, n > N_{\varepsilon/C}$$

cioè (x_n) è di Cauchy anche per d_2.

Dimostriamo il secondo punto: sia una (x_n) successione convergente secondo d_1. Ciò vuo dire che

$$\forall \varepsilon\ \exists N_\varepsilon : d_1(x_n, \overline{x}) < \varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon$$

ma ragionando come prima si ottiene

$$\forall \varepsilon\ \exists N_{\varepsilon/C} : d_2(x_n, \overline{x}) < \varepsilon\ \forall n > N_{\varepsilon/C}$$

cioè la successione converge a $\overline{x}$ anche per d_2. □

Con questo lemma possiamo affermare con certezza che date due norme $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ equivalenti, una è completa se e solo se l'altra è completa, cioè $(X, \|\cdot\|_1)$ è uno spazio di Banach se e solo se $(X, \|\cdot\|_2)$ lo è. Con questa scoperta possiamo affermare il seguente teorema

Teorema 3. *Ogni spazio vettoriale $X_\mathbb{R}$ finito-dimensionale è di Banach*

Dimostrazione. Per dimostrare ciò verifichiamo una affermazione più forte: ogni norma su $\mathbb{R}^n$ è equivalente a $|\cdot| = \|\cdot\|_2$, e quindi completa. Infatti per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha che

$$\|x\| = \left\| |x| \frac{x}{|x|} \right\| = |x| \left\| \frac{x}{|x|} \right\|$$

ma a questo punto noto che

$$\frac{x}{|x|} \in S^{n-1} = \{\, y \in \mathbb{R}^n \mid |y| = 1 \,\}$$

Ma S^{n-1} è un compatto e la norma $\|\cdot\|$ è una funzione continua. Allora per il teorema di Weiersteass ammette massimo e minimo. Possiamo allora affermare che

$$|x| \min_{S^{n-1}} \|\cdot\| \leq \|x\| \leq |x| \max_{S^{n-1}} \|\cdot\|.$$

Questo indica che $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$ sono equivalenti, e quindi $\|\cdot\|$ è completa.

Ora preso uno spazio vettoriale qualunque n-dimensionale $(X_\mathbb{R}, \|\cdot\|_X)$, si ha che esso è isometrico a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\mathbb{R})$, con $\|\cdot\|_\mathbb{R}$ una norma adatta. Ma il secondo spazio è per quello detto prima completo, quindi anche il primo. □

Forniamo un esempio di una norma in $\mathbb{R}^n$, detta norma *p-adica*, definita come

$$\|x\|_p = \left[\sum_i |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

per ogni $p \geq 1$. Per dimostrare che effettivamente è una norma dimostriamo la disuguaglianze di Young e di Hölder

Lemma 2 (Disuguaglianza di Young)**.** *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $p, q > 1$ tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si ha che*

$$|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione esponenziale convessa

$$|ab| = e^{\ln|ab|} = e^{\frac{1}{p}\ln|a|^p + \frac{1}{q}\ln|b|^q} \leq \frac{1}{p}e^{\ln|a|^p} + \frac{1}{q}e^{\ln|b|^q} = \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q$$

□

Teorema 4 (Disuguaglianza di Hölder)**.** *Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$, $p, q > 1$ tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e sia $\|\cdot\|_p$ la norma p-adica. Allora vale la disuguaglianza:*

$$\sum_i |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Young si ottiene

$$\sum_i \frac{|x_i|}{\|x\|_p}\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq \sum_i \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p\|x\|_p^p}\sum_i |x_i|^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q}\sum_i |y_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

da cui

$$\sum_i |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

□

Con questo strumento posso dimostrare che $\|\cdot\|_p$ è una norma; la omogeneità e positività sono banali, dimostriamo quindi solo la disuguaglianza triangolare che prende il nome di disuguaglianza di Minkowsky.

Teorema 5 (Disuguaglianza di Minkowsky)**.**

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_p^p = \sum_i |x_i + y_i|^p &= \sum_i |x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i| \\
&\leq \sum_i |x_i + y_i|^{p-1}(|x_i| + |y_i|) \\
&= \sum_i |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_i |x_i + y_i|^{p-1}|y_i|
\end{aligned}$$

Ma allora notiamo che $(p-1)/p + 1/p = 1$. Quindi ponendo $z_i = |x_i + y_i|^{p-1}$ e $w_i = x_i$ possiamo applicare la disuguaglianza di Hölder ai vettori z, w. Equivalentemente ponendo $s_i = y_i$ possiamo applicare la disuguaglianza ai vettori z, s. Allora se continuiamo la catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned}
&\leq \left[\sum_i \left(|x_i + y_i|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} (\|x\|_p + \|y\|_p) \\
&\leq \left[\sum_i |x_i + y_i|^p\right]^{\frac{p-1}{p}} (\|x\|_p + \|y\|_p) \\
&\leq \|x+y\|_p^{p-1} (\|x\|_p + \|y\|_p)
\end{aligned}$$

Cioè

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

□

Quindi $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ è uno spazio normato. Un'altra norma su $\mathbb{R}^n$ è la cosiddetta norma uniforme definita come

$$\|x\|_\infty := \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max_i |x_i|$$

Essa è una norma per facile verifica.

Andiamo a considerare il caso di dimensione superiore.

3 Spazio $\aleph_0$-dimensionale

In questo caso vale un risultato interessante: non esistono spazi di Banach di dimensione $\aleph_0$. Per dimostrare ciò servono un paio di teoremi, iniziando da questo:

Teorema 6. *Sia X uno spazio metrico completo non vuoto, con $\{A_n\}_{\mathbb{N}} \subseteq P(X)$ una famiglia numerabile di aperti. Se essi sono densi in X, allora l'intersezione non può essere vuota.*

Dimostrazione. Andiamo a costruire una successione $(x_k, r_k) \in X \times \mathbb{R}^+$, con le seguenti proprietà

$$\cdots \subseteq B_{r_k}(x_k) \subseteq B_{r_{k-1}}(x_{k-1}) \subseteq B_{r_{k-2}}(x_{k-2}) \subseteq \ldots$$

$$\overline{B_{r_k}(x_k)} \subseteq \bigcap_{n=0}^{k} A_n$$

Innanzitutto per ogni A_n, essendo denso in X non vuoto non può essere a sua volta vuoto. Partendo quindi con la costruzione della successione, so che esiste un $x_0 \in A_0$. Essendo gli insiemi aperti, esiste un raggio r_0 tale che

$$B_{r_0}(x_0) \subseteq A_0.$$

e a meno di prendere un r_0 sufficientemente piccolo si può porre

$$\overline{B_{r_0}(x_0)} \subseteq A_0.$$

Supponiamo quindi di aver costruito la successione fino a (x_k, r_k); allora so che essendo A_{k+1} denso in X, l'intersezione $T_k = B_{r_k}(x_k) \cap A_{k+1}$ ammette almeno un elemento x_{k+1}. T_k è un aperto, essendo intersezione finita di aperti, quindi esiste un r_{k+1} tale che

$$B_{r_{k+1}}(x_{k+1}) \subseteq B_{r_k}(x_k) \cap A_{k+1}$$

A meno di prendere un r_{k+1} sufficientemente piccolo si può supporre che

$$\overline{B_{r_{k+1}}(x_{k+1})} \subseteq T_k$$

Notiamo quindi che r_{k+1} è il valore cercato, infatti essendo che vale l'inclusione precedente si ottiene da una parte

$$\begin{cases} \overline{B_{r_{k+1}}(x_{k+1})} \subseteq T_k \subseteq A_{k+1} \\ \overline{B_{r_{k+1}}(x_{k+1})} \subseteq T_k \subseteq B_{r_k}(x_k) \subseteq \overline{B_{r_k}(x_k)} \subseteq \bigcap_{n=0}^{k} A_n \end{cases}$$

e dall'altra parte

$$B_{r_{k+1}}(x_{k+1}) \subseteq \overline{B_{r_{k+1}}(x_{k+1})} \subseteq T_k \subseteq B_{r_k}(r_k)$$

Cioè

$$B_{r_{k+1}}(x_{k+1}) \subseteq B_{r_k}(x_k) \subseteq B_{r_{k-1}}(r_{k-1}) \subseteq \dots$$
$$\overline{B_{r_{k+1}}(x_{k+1})} \subseteq \bigcap_{n=0}^{k+1} A_n$$

Quindi grazie all'assioma della scelta possiamo affermare che esiste la successione voluta. Inoltre essendo gli r_k piccoli a piacere, possiamo supporre che $r_k \leq 2^{-k}$, cioè che $r_k \to 0$.

Ora notiamo che (x_k) è una successione di Cauchy, infatti per ogni $k < m < n$ per costruzione si osserva che

$$B_{r_n}(x_n) \subseteq B_{r_m}(x_m) \subseteq B_{r_k}(x_k)$$

Questo implica che $d(x_n, x_m) < r_k \leq 2^{-k}$, che è minore di un ε fissato per un k sufficientemente grande. Ma allora $x_k \to \overline{x} \in X$, che vogliamo dimostrare appartenere ad ogni A_n.

Sia quindi un K fissato; per ogni $k > K$ vale che $d(x_K, x_k) < r_K$ per quello visto sopra. Allora per continuità della funzione distanza si osserva che

$$d(x_K, \overline{x}) = d(x_K, \lim_{k\to\infty} x_k) = \lim_{k\to\infty} d(x_K, x_k) \leq r_K$$

Questo implica che

$$\overline{x} \in \overline{B_{r_K}(x_K)} \subseteq \bigcap_{n=0}^{K} A_n \ \forall K \geq 0$$

E quindi $\overline{x}$ appartiene a tutti gli A_n, con $0 \leq n \leq K$. Tuttavia questo vale per ogni K, e quindi

$$\overline{x} \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \neq \emptyset$$

□

Ora possiamo accingerci a dimostrare il teorema di Baire, con l'ausilio di questo lemma:

Lemma 3. *Dato uno spazio metrico X, allora per ogni coppia di sottoinsiemi $A, B \subseteq X$ vale che*

$$\overline{A \ \cap \ B} \subseteq \overline{A} \ \cap \ \overline{B}$$

Dimostrazione. Dato un elemento $x \in \overline{A \ \cap \ B}$, allora vale che

$$\begin{aligned} \forall r > 0,\ & B_r(x) \ \cap \ (A \ \cap \ B) \neq \emptyset \\ & (B_r(x) \ \cap \ A) \cap (B_r(x) \ \cap \ B) \neq \emptyset \\ & \Rightarrow (B_r(x) \ \cap \ A) \neq \emptyset \ \wedge \ (B_r(x) \ \cap \ B) \neq \emptyset \end{aligned}$$

cioè $x \in \overline{A}$ e $x \in \overline{B}$. □

Andiamo quindi a dimostrare il Teorema

Teorema 7 (Teorema di Baire)**.** *Data uno spazio metrico completo X non vuoto i seguenti enunciati sono equivalenti e veri*

1. *Per ogni $\{C_n\}_{\mathbb{N}} \subseteq P(X)$ famiglia numerabile di chiusi vale la seguente implicazione*

$$\mathring{C_n} = \emptyset \ \forall n \Rightarrow \overbrace{\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n}^{\circ} = \emptyset$$

2. *Per $\{A_n\}_{\mathbb{N}} \subseteq P(X)$ famiglia numerabile di aperti vale la seguente implicazione*

$$\overline{A_n} = X \ \forall n \Rightarrow \overline{\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n} = X$$

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto l'equivalenza tra le due affermazioni. Per farlo ricordiamo che per ogni sottoinsieme $T \subseteq X$, vale la seguente relazione

$$X = \mathring{T} \ \dot{\cup} \ \partial T \ \dot{\cup} \ \mathcal{C}(\mathring{T})$$

con $\mathcal{C}(T)$ il complementare di T. Detto questo supponiamo che A sia un denso in X, allora $\mathcal{C}(A)$ ha parte interna vuota, infatti

$$\overset{\circ}{\mathcal{C}(A)} = X \setminus \overline{A} = X \setminus X = \emptyset$$

Viceversa sia C un insieme con parte interna vuota, allora $\mathcal{C}(C)$ è un denso in X, infatti

$$\overline{\mathcal{C}(C)} = X \setminus \overset{\circ}{C} = X \setminus \emptyset = X$$

Ma allora queste affermazioni, unite alle leggi di de Morgan:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \mathcal{C}\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}(A_n)\right]$$

dimostrano l'equivalenze delle due affermazioni.

Per dimostrarne la veridicità, dimostriamo la seconda. Sia quindi X uno spazio metrico completo non vuoto e $\{A_n\}_{\mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di densi in X. Se per assurdo $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ non fosse denso, allora l'insieme

$$F = X \setminus \overline{\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n}$$

sarebbe un aperto non vuoto. Allora esiste un $x \in F$, centro di una palla $B_r(x)$ contenuta in F. Poniamo quindi le seguenti definizioni:

$$X' = X \ \cap \overline{B_r(x)} = \overline{B_r(x)}$$
$$A'_n = A_n \ \cap \ B_r(x)$$

Detto questo osserviamo tre fatti:

1. X' è uno spazio metrico completo. Infatti sia (x_n) una successione di Cauchy in X'. Essendo X completo, la successione converge ad un certo $\widetilde{x} \in X$. Inoltre $\widetilde{x}$ è un punto di accumulazione per X', che è chiuso in X. Quindi $\widetilde{x}$ appartiene a X'. Abbiamo concluso che (x_n) è convergente in X', come volevamo.

2. A'_n è aperto perché intersezione numerabile di aperti.

3. A'_n è denso in X'. Infatti sia un $z_1 \in X' = \overline{B_r(x)}$. Allora preso un qualsiasi raggio s_1, so che esiste un $z_2 \in B_{s_1}(z_1) \ \cap \ B_r(x)$. A questo punto essendo $B_r(x) \cap B_{s_1}(z_1)$ un aperto, si ottiene che esiste un raggio s_2 tale che $B_{s_2}(z_2) \subseteq B_r(x) \ \cap \ B_{s_1}(z_1)$. Quindi essendo A_n denso, sappiamo che esiste un z_3 tale che

   $$z_3 \in B_{s_2}(z_2) \ \cap \ A_n \subseteq B_r(x) \ \cap \ A_n = A'_n$$

   ma d'altra parte

   $$z_3 \in B_{s_2}(z_2) \subseteq B_{s_1}(z_1)$$

Quindi riassumendo, per ogni $z_1 \in X'$ e per ogni raggio s_1 ho trovato un $z_3 \in A'_n \cap B_{s_1}(z_1)$, cioè per ogni $z_1 \in X'$, $z_1 \in \overline{A'_n}$. Cioè A'_n è denso in X'.

Quindi per il Teorema 6 a pagina 5

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A'_n \neq \emptyset$$

ma questo è un assurdo, infatti:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A'_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} (A_n \cap B_r(x)) = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \cap B_r(x) \subseteq \overline{\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n} \cap F = \emptyset$$

Quindi si ottiene che

$$\overline{\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n} = X$$

□

Enunciato il teorema di Baire, si può passare a enunciare il teorema che chiude la questione sugli spazi $\aleph_0$-dimensionali.

Teorema 8. *Sia $(X, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale normato di dimensione numerabile, allora X non può essere uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Per ipotesi X ammette una una base $(v_n)_{\mathbb{N}}$ numerabile. Andiamo quindi a considerare i sottospazi a bandiera

$$X_n = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n).$$

Dimostriamo quindi due loro proprietà, considerando X come spazio metrico rispetto alla distanza indotta.

1. L'insieme X_n è chiuso. Per dimostrare ciò torna utile osservare che dato un vettore $v \in X$, allora l'insieme

   $$E_{v,n} = \{d(v, w) | w \in X_n\}$$

   è inferiormente limitato da 0. Quindi essendo un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ammette un estremo inferiore $\inf E_{v,n} = m_{v,n}$. Vogliamo dimostrare che se $v \notin X_n$, allora $m_{v,n} > 0$. Sia quindi $v \notin X_n$, allora il vettore v lo possiamo scrivere come

   $$v = a_1 v_1 + \ldots a_r v_r$$

   con $r > n$ e almeno un coefficiente appartenente a $\{a_{n+1}, \ldots, a_r\}$ non nullo. Allora sappiamo che $v \in X_r$, di cui X_n è un sottoinsieme. Se consideriamo quindi l'isomorfismo canonico $f \colon X_r \to \mathbb{R}^r$, esso può essere esteso ad una isometria $f\colon (X_r, \|\cdot\|_X) \to (\mathbb{R}^r, \|\cdot\|_{\mathbb{R}})$, con $\|f(v)\|_{\mathbb{R}} := \|v\|_X$. Ma a questo punto possiamo dire che

$$E_{v,n} = \{d_X(v,w) | w \in X_n\} = \{d_{\mathbb{R}}(f(v),w) | w \in \mathbb{R}^r_n\}$$

con $\mathbb{R}^r_n = \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_n)$. Ma nella seconda formulazione trovare un minorante è facile, infatti sia $w \in \mathbb{R}^r_n$, della forma

$$w = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T.$$

Allora se consideriamo la norma standard $|\cdot| = \|\cdot\|_2$, si vede che

$$d_2(f(v),w) = |f(v) - w| = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} |f(v)_i - w_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i - \beta_i|^2 + \sum_{i=n+1}^{r} |a_i|^2}$$

che assume valore minimo in corrispondenza di $\beta_i = a_i$.Cioè la minima distanza tra $f(v)$ e un elemento del sottospazio corrisponde, come si sa dalla geometria, alla distanza tra $f(v)$ e la sua proiezione ortogonale sul sottospazio, a cui ci riferiremo con $\rho(f(v))$. Con questa affermazione ricordiamo ora che tutte le norme su $\mathbb{R}^r$, quindi anche $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$, sono equivalenti a $|\cdot|$. Quindi vale che per ogni $w \in \mathbb{R}^r_n$

$$\frac{1}{C} d_2(f(v), \rho(f(v))) \le \frac{1}{C} d_2(f(v), w) = \frac{1}{C} |f(v) - w| \le \|f(v) - w\|_{\mathbb{R}} = d_{\mathbb{R}}(f(v), w)$$

Ma allora l'insieme $E_{v,n}$ è minorato da

$$\frac{1}{C} d_2(f(v), \rho(f(v)))$$

che è positivo se $f(v) \notin \mathbb{R}^r_n$. Quindi se $v \notin X_n$, allora $m_{v,n} > 0$.

Dimostrato ciò risulta semplice dimostrare che $X \setminus X_n$ è aperto. Infatti preso un vettore $v \in X \setminus X_n$, consideriamo la palla

$$B(v) = \{\, w \in X \mid d_X(v,w) < m_{v,n} \,\}$$

Per quello detto sopra $B(v) \cap X_n = \emptyset$, cioè $B(v) \subseteq X \setminus X_n$, che è quindi un aperto.

Questo dimostra che X_n è un chiuso.

2. $\mathring{X}_n = \emptyset \ \forall n \ge 0$. Infatti sia un generico vettore $v \in X$ e consideriamo la sua palla $B_r(x)$, allora imponendo che

$$d(v, v + \lambda v_{n+1}) = \|v - (v + \lambda v_{n+1})\| = \lambda \|v_{n+1}\| < r \Rightarrow \lambda < \frac{r}{\|v_{n+1}\|}$$

Si ottiene che esiste un vettore della forma $v + \lambda v_{n+1} \in X \setminus X_n \cap B_r(v)$. Questo implica che X_n ha parte interna vuota.

Quindi $\{X_n\}_{\mathbb{N}}$ rappresenta una famiglia numerabile di chiusi con parte interna vuota. Allora se per assurdo X fosse uno spazio di Banach, esso sarebbe uno spazio metrico completo rispetto alla distanza indotta; quindi per il teorema di Baire $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ avrebbe parte interna vuota. Assurdo. $\square$

Quindi mentre tutti gli spazi finito-dimensionali sono di Banach, non ne esistono con base numerabile. Cosa succede per basi più che numerabili? Dipende dalla norma.

4 Più che numerabile-dimensionale

In questo caso dipende largamente dalla norma utilizzata. Esempi di norme sono le norma L_p

$$\|f\|_{L_p} = \left[\int_a^b |f|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

che si dimostra essere una norma in maniera del tutto analoga alla dimostrazione per la p-norma. Per farlo serve la disuguaglianza di Hölder integrale

$$\int_a^b |fg| \, dx \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q} \quad \text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Questa norma si dimostra non essere completa. D'altra parte una norma completa su $C[a, b]$ è la seguente

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \max_{[a,b]} |f|$$

Andiamo velocemente a dimostrare l'uguaglianza, servendosi del seguente lemma

Lemma 4. *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Definiamo per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme*

$$X_\alpha = \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) > \alpha \,\}$$

Esso è un aperto.

Dimostrazione. Preso un $x_0 \in X_\alpha$, si ha che $f(x_0) > \alpha$, cioè $f(x_0) \geq \alpha + \varepsilon$, con ε sufficientemente piccolo. Ma essendo f continua so che esiste un δ tale che $B_\delta(x_0) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$. Questo implica che $f(x) > f(x_0) - \varepsilon \geq \alpha$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$, cioè $B_\delta(x_0) \subseteq X_\alpha$, che quindi è aperto. $\square$

Con questo lemma possiamo dimostrare l'equivalenza dell'uguaglianza precedente:

Teorema 9. *Sia $C[a, b]$, allora per ogni $f \in C[a, b]$*

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \max_{[a,b]} |f|$$

Dimostrazione. Innanzitutto si nota che

$$
\begin{aligned}
\limsup_{p\to\infty}\|f\|_p &= \limsup_{p\to\infty}\left[\int_a^b |f|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \limsup_{p\to\infty}\left[\int_a^b \left(\max_{[a,b]}|f|\right)^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \limsup_{p\to\infty}\max_{[a,b]}|f|(b-a)^{\frac{1}{p}} \\
&= \max_{[a,b]}|f|
\end{aligned}
$$

Per verificare l'altra uguaglianza poniamo per semplicità $S = \max_{[a,b]}|f|$. Allora consideriamo la famiglia di insiemi

$$E_\varepsilon = \{\, x \in (a,b) \mid |f(x)| > S - \varepsilon \,\}$$

che sono non vuoti, aperti per il lemma precedente. Ma allora so che esiste un $(c,d) \subseteq E_\varepsilon$, e quindi

$$\left[\int_a^b |f|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \geq \left[\int_c^d |f|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \geq \left[\int_c^d |S-\varepsilon|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} = (S-\varepsilon)(d-c)^{\frac{1}{p}}$$

che implica che

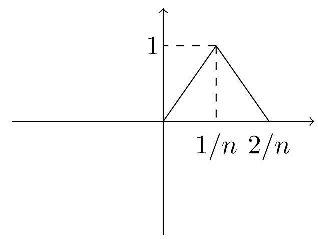
$$\liminf_{p\to\infty}\|f\|_p \geq \liminf_{p\to\infty}(S-\varepsilon)(d-c)^{\frac{1}{p}} = S - \varepsilon \quad \forall\varepsilon > 0$$

Ma valendo per ogni $\varepsilon > 0$ si ottiene che $\liminf_{p\to\infty}\|f\|_p \geq S$. Unendo la disuguaglianza di prima si ha che

$$S \leq \liminf_{p\to\infty}\|f\|_p \leq \limsup_{p\to\infty}\|f\|_p \leq S$$

cioè $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p$ esiste ed è uguale a $S = \max_{[a,b]}$. □

Quindi lo spazio $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$, come accennato prima, è uno spazio di Banach. In particolare la distanza indotta d_∞ costituisce un altra definizione di convergenza per spazi di funzioni. Infatti data una successione di funzioni $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dice che essa converge puntualmente ad una funzione limite f se $f_n(x)$ converge a $f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. D'altra parte si dice che f_n converge uniformemente a f se vi converge nello spazio metrico $(C[a,b], d_\infty)$, cioè se $\max|f - f_n| \to 0$. La convergenza uniforme implica evidentemente quella puntuale, ma non vale il viceversa. Per esempio la successione di funzioni continue seguente



converge puntualmente alla funzione $f = 0$, ma non coi converge uniformemente. Cioè la successione non è convergente in $(C[a,b], d_\infty)$.

Per concludere diciamo che l'integrale di Lebesgue risolve parzialmente la non-completezza della norma L_p. Infatti se poniamo

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \left\{ f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

Allora possiamo definire la seguente relazione di equivalenza su $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$f \sim g \Leftrightarrow \{ \, x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x) \text{ ha misura nulla} \, \}$$

Si dimostra quindi che

$$L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) / \sim,$$

munito della distanza L_p, è uno spazio di Banach.