Integrazione di Funzioni Razionali

Mirko Torresani

22 marzo 2023

Teorema. *Ogni funzione razionale si può integrare tramite funzioni elementari. In particolare la primitiva risulta sempre combinazione lineare di funzioni della forma*

$$\frac{L_1(x)}{L_2(x)} \quad \ln|M(x)| \quad \arctan(N(x)),$$

con $L_i(x), M(x), N(x)$ *polinomi,* $\deg(M(x)) \leq 2$ *e* $\deg(N(x)) \leq 1$.

Dimostrazione. Sia $f(x) = P(x)/Q(x)$ una funzione razionale, e procediamo ad integrarla in maniera algoritmica.

1. Tramite l'algoritmo di divisione si può ridurre la frazione come

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int S(x) + \frac{T(x)}{Q(x)}\,dx \quad \deg(T) < \deg(Q)$$

2. Studiamo quindi il caso

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \quad \deg(P) < \deg(Q)$$

e procediamo alla scomposizione del denominatore, grazie al teorema fondamentale dell'algebra (versione in $\mathbb{R}$):

$$Q(x) = a\prod_i (x - x_i)^{\alpha_i} \prod_i (x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i} = a \prod_i Q_i(x)^{\alpha_i}$$

3. Tramite il teorema per scomposizione in fratti semplici, si dimostra che esiste una scomposizione della forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_i \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{i,j}(x)}{Q_i(x)^j} \quad \deg(P_{i,j}) < \deg(Q_i)$$

che quindi porta agli integrali

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \sum_i \sum_{j=1}^{\alpha_i} \int \frac{P_{i,j}(x)}{Q_i(x)^j}\,dx \quad \deg(P_{i,j}) < \deg(Q_i)$$

4. Ci siamo quindi ricondotti ad integrali della forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \quad \deg(P) < \deg(Q),\ \deg(Q) \in \{1, 2\}$$

- Se $\deg(Q) = 1$, allora l'integrale è risolubile e risulta essere

$$\int \frac{a}{(x+b)^j}\, dx = \begin{cases} a \ln|x+b| + C & j = 1 \\ a\dfrac{(x+b)^{1-j}}{i-j} + C & j \neq 1 \end{cases}$$

- Se invece $\deg(Q) = 2$, allora procediamo innanzitutto a spaccare l'integrale:

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^j}\, dx = \frac{a}{2} \int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^j}\, dx + \\ + \left(d - \frac{ac}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2+cx+d)^j}\, dx$$

Il primo integrale è risolubile e risulta essere

$$\frac{a}{2} \int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^j}\, dx = \begin{cases} \dfrac{a}{2} \ln|x^2+cx+d| + C & j = 1 \\ \dfrac{a}{2} \dfrac{(x^2+cx+d)^{1-j}}{1-j} + C & j \neq 1 \end{cases}$$

Il secondo invece costituisce l'ultima parte dell'algoritmo. Completiamo innanzitutto il quadrato

$$x^2 + cx + d = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{c^2}{4}\right)$$

e imponiamo la sostituzione

$$y = \frac{x + \frac{c}{2}}{\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}} \tag{1}$$

Ciò trasforma l'integrale:

$$\int \frac{1}{(x^2+cx+d)^j}\, dx \Rightarrow \left(d - \frac{c^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-j} \int \frac{1}{(y^2+1)^j}\, dy$$

Quindi ci siamo ricondotti a studiare integrali della forma

$$I_j = \int \frac{1}{(y^2+1)^j}\, dy$$

Se $j = 1$ allora

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan(y) + C$$

Se invece $j \neq 1$ allora procediamo per induzione. Innanzitutto

$$\begin{aligned}
I_j &= \int \frac{1}{(y^2+1)^j}\,dy \\
&= \int \frac{1+y^2-y^2}{(y^2+1)^j}\,dy \\
&= \int \frac{1}{(y^2+1)^{j-1}} - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^j}\,dy \\
&= I_{j-1} - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^j}\,dy
\end{aligned}$$

Infine anche il secondo addendo si può ricondurre a I_{j-1}, questa volta via integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
\int \frac{y^2}{(y^2+1)^j}\,dy = \int \frac{y}{(y^2+1)^j} y\,dy \\
&= \frac{1}{2}\frac{(y^2+1)^{1-j}}{1-j} y - \int \frac{1}{2}\frac{(y^2+1)^{1-j}}{1-j}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\frac{(y^2+1)^{1-j}}{1-j} y - \frac{1}{2}\frac{1}{1-j} I_{j-1} \\
&= \frac{1}{2\,(i-j)}\left[(y^2+1)^{i-j} y - I_{j-1}\right]
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi integrato I_j. Andando a sostituire y tramite l'uguaglianza (1), otteniamo la primitiva dell'integrale originario

$$\int \frac{1}{(x^2+cx+d)^j}\,dx \qquad \square$$