Teorema Fondamentale della Geometria Affine

Mirko Torresani

17 luglio 2021

In queste pagine si dimostra il Teorema Fondamentale della Geometria Affine.

Teorema. *Sia A spazio affine su V, con* $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ *e* $\dim A \geq 2$. *Poniamo inoltre* $\operatorname{Aff}(A) = \{ f\colon A \to A \mid f$ *applicazione affine biettiva* $\}$. *Allora presa una* $f\colon A \to A$ *bigettiva,*

1. *se f manda rette in rette, allora manda sottospazi in sottospazi mantenendo la dimensione (cioè è una omografia)*
2. *se f manda rette in rette ed esiste una retta r tale che $f|_r$ preserva il rapporto semplice, allora $f \in \operatorname{Aff}(A)$*
3. *posto $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $f \in \operatorname{Aff}(A)$ se e solo se manda rette in rette*

Prima di procedere con la dimostrazione del teorema, passiamo per questo lemma introduttivo:

Lemma. *Sia A spazio affine su V, con* $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ *e siano E_1, E_2 due sottospazi, tali che $m_1 = \dim(E_1), m_2 = \dim(E_2)$, con $0 < m_1 \leq m_2 < n = \dim(A)$. Se $\dim(E_1 \cap E_2) = m_1 - 1$, allora*

$$E_1 + E_2 = \bigcup_{\substack{P_1 \in E_1 \\ P_2 \in E_2 \\ P_1 \neq P_2}} r(P_1, P_2)$$

e $\dim(E_1 + E_2) = m_2 + 1$

Dimostrazione. Innanzitutto $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, da cui per la formula di Grassmann affine:

$$\dim(E_1+E_2) = \dim(E_1)+\dim(E_2)-\dim(E_1\cap E_2) = m_1+m_2-m_1+1 = m_2+1$$

Per quanto riguarda invece la questione più importante, sia il riferimento affine $\mathcal{R} = (O, P_1, \ldots, P_{m_1-1}, P_{m_1}, \ldots, P_{m_2}, Q)$ di E_1+E_2 ove $(O, P_1, \ldots, P_{m_1-1}, Q)$ è un riferimento per E_1, $(O, P_1, \ldots, P_{m_2})$ è un riferimento per E_2. Allora preso $P \in E_1 + E_2$, abbiamo tre casi.

Se $P = O$, allora preso un qualsiasi $P' \in E_2$, $P \in r(P, P')$.

Se $P \in E_1 \cup E_2 \setminus \{O\}$, allora $P \in r(O, P)$.

Se $P \notin E_1 \cup E_2$, allora poniamo la combinazione affine:

$$P = O + t_1\vec{OP_1} + \dots t_{m_2}\vec{OP}_{m_2} + t\vec{OQ}$$

con $t \neq 0$ e $t_j \neq 0$ per qualche $m_1 \leq j \leq m_2$. Allora posta la retta

$$s = \left\{ O + 2k(t_1\vec{OP_1} + \cdots + t_{m_2}\vec{OP}_{m_2}) + 2(1-k)t\vec{OQ} \;\middle|\; k \in \mathbb{K} \right\}$$

è evidente che $P \in s$ con parametro $k = \frac{1}{2}$, e che s interseca E_1 e E_2 con parametri $k = 0, k = 1$.

Quindi abbiamo dimostrato un inclusione. L'altra è banale essendo $E_1 + E_2$ un sottospazio. □

A questo punto possiamo dimostrare il nostro teorema:

Dimostrazione Teorema. Iniziamo col dimostrare il primo punto procedendo per induzione forte sulla dimensione m del sottospazio E.

Se $m = 1$, allora non c'è niente da dimostrare.

Se $m > 1$, sia il riferimento affine $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_m)$ di E. Indichiamo inoltre con S_j il sottospazio generato da $\{P_i\}, 0 \leq i \leq m, j \neq i$.

Per induzione sappiamo che $f(S_j) = S'_j$ è un sottospazio di dimensione $m - 1$ contenuto in $f(E)$. Inoltre $m > 1$, per cui possiamo considerare gli iperpiani (rispetto a E) S_1, S_2 distinti. $\dim(S_1 \cap S_2) = m - 2$, quindi per il lemma precedente

$$E = S_1 + S_2 = \bigcup_{\substack{P_1 \in S_1 \\ P_2 \in S_2 \\ P_1 \neq P_2}} r(P_1, P_2)$$

Ma f è una collineazione bigettiva, da cui, sempre per il lemma precedente,

$$\begin{aligned} f(E) &= f[\bigcup_{\substack{P_1 \in S_1 \\ P_2 \in S_2 \\ P_1 \neq P_2}} r(P_1, P_2)] \\ &= \bigcup_{\substack{P_1 \in S_1 \\ P_2 \in S_2 \\ P_1 \neq P_2}} f\left[r(P_1, P_2)\right] \\ &= \bigcup_{\substack{P'_1 \in S'_1 \\ P'_2 \in S'_2 \\ P'_1 \neq P'_2}} r(P'_1, P'_2) \\ &= S'_1 + S'_2 \end{aligned}$$

Quindi $f(E)$ è un sottospazio di dimensione m.

A questo vogliamo dimostrare il secondo punto.

Innanzitutto si osserva un fatto fondamentale: per ogni coppia di rette parallele r_1, r_2 in un piano E, allora $f(r_1), f(r_2)$ rimangono parallele nel piano $f(E)$.

Infatti se $r_1 = r_2$ il fatto è banale.

Supponiamo invece che per assurdo esistano due rette parallele distinte r_1, r_2, tale che r_1', r_2' non siano parallele. Allora quest'ultime sono rette non parallele in un piano, quindi $r_1' \cap r_2' \neq \emptyset$. Ma invece $r_1 \cap r_2 = \emptyset$. Assurdo essendo f bigettiva.

A questo punto possiamo procedere alla dimostrazione del nostro punto. L'obbiettivo è dimostrare che esistono due automorfismi

$$a\colon (V,+) \to (V,+)$$
$$\phi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

tale che

1. $a(\lambda v) = \phi(\lambda) a(v)$
2. $\forall O \in A \quad f(P) = f(O) + a(\vec{OP})$

Infatti se questo è vero si può spostare il problema, in quanto f è un affinità se e solo se $\phi = id$.

Procediamo. Fissato un $O \in A$, per ogni $P \in A \setminus \{O\}$ la retta $r(O,P)$ viene mandata nella retta $r(O',P')$. Quindi definiamo $\phi_{O,P}$, dipendente da O, P, nel seguente modo:

$$f\left[O + t\vec{OP}\right] = O' + \phi_{O,P}(t)\vec{O'P'}$$

Notiamo che $\phi_{O,P}(1) = 1$ $\phi_{O,P}(0) = 0$.

Ora dimostriamo che per ogni coppia di punti P, Q, tale che O, P, Q siano affinemente indipendenti, vale che $\phi_{O,P} = \phi_{O,Q}$. Per fare questo consideriamo una coppia $P, Q \in A \setminus \{O\}$, tale che O, P, Q siano affinemente indipendente.

Definiamo quindi $P_t = P + t\vec{OP}$ e $Q_t = Q + t\vec{OQ}$; notiamo subito che $r(P,Q)$ e $r(P_t, Q_t)$ sono parallele, quindi lo sono anche $r(P',Q')$ e $r(P_t', Q_t')$. Perciò deve esserre $\phi_{O,P}(t) = \phi_{O,Q}(t)$, ma questo vale per ogni t, quindi $\phi_{O,P} = \phi_{O,Q} = \phi_O$.

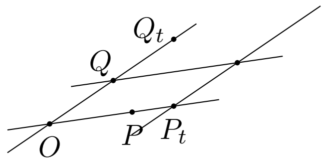
Se invece $\vec{OQ} = \lambda\vec{OP}$ l'uguaglianza verrà fuori più tardi.

Detto questo andiamo a dimostrare che $\phi_O = \phi$.

Innanzitutto presi due punti P, Q tali che O, P, Q siano affinemente indipendenti, allora

$$f(Q + t\vec{OP}) = Q' + \phi_O(t)\vec{OP}$$

Infatti $Q+t\vec{OP}$ è l'intersezione tra la retta passante per Q parallela a $r(O,P)$ e la retta passante per P_t parallela a $r(O,Q)$. Essendo che f manda rette in rette e parallele in parallele, allora $f(Q+t\vec{OP})$ è l'intersezione tra la retta passante per Q' parallela a $r(O',P')$ e la retta passante per P'_t parallela a $r(O',Q')$. Il calcolo dell'intersezione dà il risultato.



Con questo risultato possiamo quindi affermare che presi O, P, Q affinemente indipendenti, allora

$$f(O + r\vec{OP} + s\vec{OQ}) = O' + \phi_O(r)\vec{O'P'} + \phi_O(s)\vec{O'Q'}$$

A questo punto vogliamo mostrare che $\phi_O(-t) = -\phi_O(t)$ per ogni $O \in A, t \in \mathbb{K}$. Sia quindi $P \in A$. Allora

$$\begin{aligned} f(O + (-t)\vec{OP}) &= f(O + t\vec{PO}) \\ &= f(P + \vec{PO} + t\vec{PO}) \\ &= P' + \vec{P'O'} + \phi_O(t)\vec{P'O'} \\ &= O' + \phi_O(t)\vec{P'O'} \\ &= O' + (-\phi_O(t))\vec{O'P'} \end{aligned}$$

Otteniamo quindi $\phi_O(-t) = -\phi_O(t)$ per ogni $O \in A, t \in \mathbb{K}$.

A questo punto possiamo dimostrare che l'indipendenza di ϕ_O da O. Quindi presi due punti O_1, O_2 e un punto P tale che O_1, O_2, P siano indipendenti, definiamo $\phi_{O_1} = \phi_1$ e $\phi_{O_2} = \phi_2$. Quindi per ogni $t \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} O'_1 + \phi_1(t)\vec{O'_1P'} &= f(O_1 + t\vec{O_1P}) \\ &= f(O_2 + \vec{O_2O_1} - t\vec{O_2O_1} + t\vec{O_2P}) \\ &= O'_2 + \vec{O'_2O'_1} - \phi_2(t)\vec{O'_2O'_1} + \phi_2(t)\vec{O'_2P'} \\ &= O'_1 + \phi_2(t)\vec{O'_1P'} \end{aligned}$$

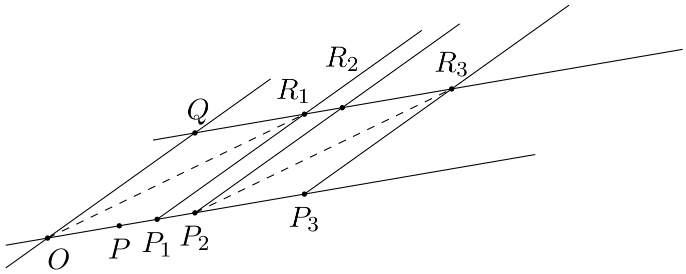
Da questo si evince che $\phi_1 = \phi_2 = \phi$. Con questo possiamo disdire completamente la discussione di prima nel caso $\vec{OP} = \lambda\vec{OQ}$.

In conclusione abbiamo dimostrato che esiste un automorfismo $a\colon (V,+) \to (V,+)$ e una funzione $\phi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, tali che

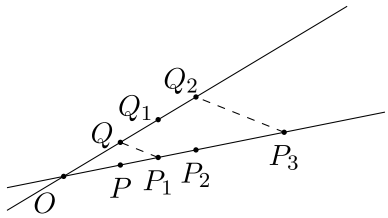
1. $a(\lambda v) = \phi(\lambda)a(v)$
2. $\forall O \in A \quad f(P) = f(O) + a(\vec{OP})$

Ora dobbiamo dimostrare che ϕ è un automorfismo.

Iniziamo prendendo $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$ e ponendo $t_1 + t_2 = t_3$. Consideriamo tre punti affinemente indipendenti O, P, Q, tre punti $P_i = P_{t_i}$ e siano R_1, R_2, R_3 le rispettive intersezioni della retta parallela a $r(O, Q)$ passante per P_j con la retta passante per Q parallela a $r(O, P)$. Le rette $r(O, R_1), r(P_2, R_3)$ sono parallele, quindi anche $r(O', R'_1), r(P'_2, R'_3)$. Ma allora $\phi(t_3) = \phi(t_1 + t_2) = \phi(t_1) + \phi(t_2)$.



Ora prendiamo $t_3 = t_1 t_2$ e come prima consideriamo P_1, P_2, P_3 e Q_1, Q_2, Q_3. Le rette $r(P_1, Q), r(P_3, Q_2)$ sono parallele per Talete, quindi anche $r(P'_1, Q'), r(P'_3, Q'_2)$. Ma allora anche qua si vede che $\phi(t_3) = \phi(t_1 t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2)$.



Quindi ricapitolando abbiamo dimostrato che esistono due automorfismi a, ϕ tale che

1. $a(\lambda v) = \phi(\lambda) a(v)$
2. $\forall O \in A \quad f(P) = f(O) + a(\vec{OP})$

Come abbiamo detto prima il passo successivo è dimostrare che $\phi = id$. Ma questo è immediato, infatti presa una retta r e tre punti $P_1, P_2, P_3 \in r$, per costruzione sappiamo che

$$[P'_1; P'_2; P'_3] = \phi\left([P_1; P_2; P_3]\right)$$

ma allora se f conserva il rapporto semplice su una retta r, fissiamo due punti $P_1, P_2 \in r$. Allora per ogni $t \in \mathbb{K}$

$$\phi(t) = \phi\left([P_1; P_2; P_t]\right) = [P'_1; P'_2; P'_t] = [P_1; P_2; P_t] = t$$

Quindi $\phi = id$ e $f \in \mathrm{Aff}(A)$.

Parlando del terzo punto, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ allora automaticamente $\phi = id$, infatti l'unico automorfismo su $\mathbb{R}$ è l'identità. Per dimostrare ciò osserviamo che ϕ è anche un automorfismo su $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}, \cdot)$. Quindi presi $m, n \in \mathbb{Z}$ allora

$$\begin{aligned}\phi(n) &= \phi(1 + \cdots + 1) = \phi(1) + \cdots + \phi(1) = 1 + \cdots + 1 = n \\ \phi\left(\frac{1}{n}\right) &= \phi(n^{-1}) = \phi(n)^{-1} = \frac{1}{\phi(n)} = \frac{1}{n} \\ \phi\left(\frac{m}{n}\right) &= \phi(m)\phi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\phi(m)}{\phi(n)} = \frac{m}{n}\end{aligned}$$

cioè ϕ è l'identità su $\mathbb{Q}$. Per dimostrare che lo è anche su $\mathbb{R}$, mostriamo innanzitutto che ϕ preserva l'ordinamento naturale. Siano allora $r, s \in \mathbb{R}$ tale che $r \leq s$. Si osserva che

$$\phi(r) - \phi(s) = \phi(r - s) = \phi(\sqrt{r - s}^2) = \phi(\sqrt{r - s})^2 \geq 0$$

Ma allora preso $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, siano $(a_n)_n, (b_n)_n$ due successioni di razionali che approssimano per eccesso e difetto r. Poiché $a_n < r < b_n$, per ogni n allora $\phi(a_n) = a_n < \phi(r) < b_n = \phi(b_n)$ per ogni n. Facendo tendere n a infinito si ottiene $\phi(r) = r$.

Abbiamo quindi dimostrato che $Aut(\mathbb{R}) = \{id\}$. Quindi se f manda rette in rette, essa è automaticamente un affinità, il viceversa è banale. $\square$