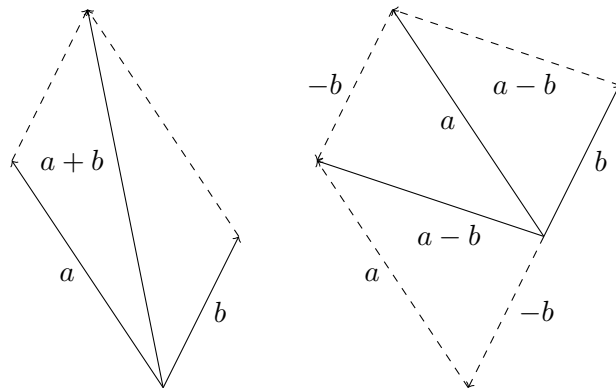


# Appunti di Fisica I - Teoria

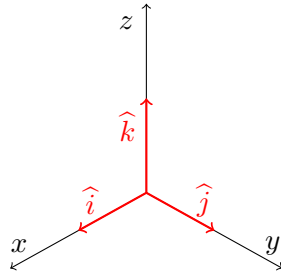
Mirko Torresani

8 marzo 2021

## 1 Operazioni tra vettori



Si definiscono  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{z}$  nel seguente modo



Posto  $v = (v_x, v_y, v_z)$  e  $w = (w_x, w_y, w_z)$  allora

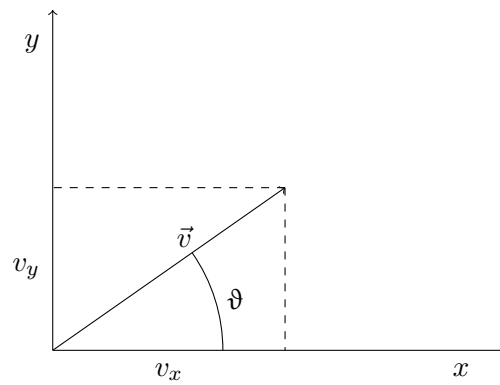
$$v + w = (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z) = (v_x + w_x)\hat{i} + (v_y + w_y)\hat{j} + (v_z + w_z)\hat{z}$$

$$v - w = (v_x - w_x, v_y - w_y, v_z - w_z) = (v_x - w_x)\hat{i} + (v_y - w_y)\hat{j} + (v_z - w_z)\hat{z}$$

$$m\vec{v} = (mv_x, mv_y, mv_z) = (mv_x)\hat{i} + (mv_y)\hat{j} + (mv_z)\hat{k}$$

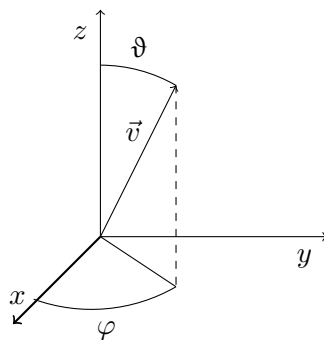
In coordinate polari si dimostra che dato  $v = (v_x, v_y)$  esistono unici  $\vartheta \in [0, 2\pi), |v| \in \mathbb{R}^+$  tale che

$$\begin{cases} v_x = |v| \cos \vartheta \\ v_y = |v| \sin \vartheta \\ |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ \tan \vartheta = \frac{v_y}{v_x} \end{cases}$$



Per quanto riguarda le coordinate sferiche si ha che esistono unici  $(|\vec{v}|, \vartheta, \varphi)$  tali che

$$\begin{cases} v_x = |\vec{v}| \sin \vartheta \cos \varphi \\ v_y = |\vec{v}| \sin \vartheta \sin \varphi \\ v_z = |\vec{v}| \cos \vartheta \end{cases}$$



Dati due vettori  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  si definisce prodotto scalare

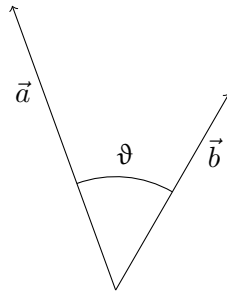
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^3 v_i w_i$$

Che gode delle seguenti proprietà

- $\vec{v}\vec{w} = \vec{w}\vec{v}$
- $\vec{v}(\vec{w} + \vec{z}) = \vec{v}\vec{w} + \vec{v}\vec{z}$
- $m(\vec{v}\vec{w}) = (m\vec{v})\vec{w} = \vec{v}(m\vec{w})$

In particolare tramite il Teorema di Carnot si dimostra che

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos \vartheta$$



e che

$$\begin{cases} v_x = \vec{v} \cdot \hat{i} \\ v_y = \vec{v} \cdot \hat{j} \\ v_z = \vec{v} \cdot \hat{k} \end{cases}$$

D'altra parte dati  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ,  $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$  si definisce prodotto vettoriale come il vettore  $\vec{z} = \vec{v} \times \vec{w}$  tale che

1.  $\vec{z}$  è perpendicolare al piano individuato da  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$
2. il verso segue la regola della mano destra
3.  $|\vec{z}| = |\vec{v}||\vec{w}| \sin \vartheta$

Inoltre si può dimostrare che vale la seguente uguaglianza

$$\vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} = (v_y w_z - v_z w_y) \hat{i} + (v_z w_x - v_x w_z) \hat{j} + (v_x w_y - v_y w_x) \hat{k}$$

e che valgono le seguenti proprietà

- $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$

- $\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{z}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{z}$
- $m(\vec{v} \times \vec{w}) = (m\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (m\vec{w})$
- $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

Infine abbiamo il triplo prodotto vettoriale

$$\begin{aligned}\vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{z}) &= (\vec{v} \cdot \vec{z})\vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{z} \\ (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{z} &= (\vec{v} \cdot \vec{z})\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{z})\vec{v}\end{aligned}$$

E il prodotto misto

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{z}) &= \vec{w} \cdot (\vec{z} \times \vec{v}) = \vec{z} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \\ &= \det \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \\ z_x & z_y & z_z \end{bmatrix}\end{aligned}$$

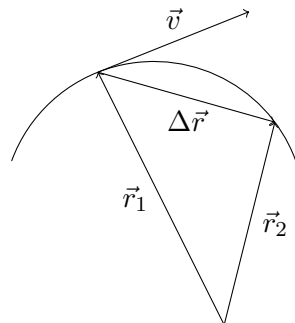
## 2 Cinematica

Dato un punto  $P = (x, y, z)$ , si definisce traiettoria  $\gamma$  di  $P$  come l'insieme delle posizioni assunte nel corso del tempo. In particolare  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  o equivalentemente

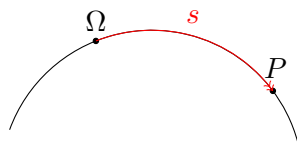
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

viene detta legge oraria del moto. Definendo  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$  come il vettore spostamento, la velocità media e istantanea sono definite come

$$\begin{aligned}\vec{v}_m &= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\end{aligned}$$



In particolare si possono definire le seguenti coordinate curvilinee: data una curva  $\gamma(\mu)$ , dove  $\mu$  è una parametrizzazione, e un punto  $\Omega$  preso come origine, come in figura



Allora si definisce ascissa curvilinea come

$$s_P = \int_{\mu(\Omega)}^{\mu(P)} |\gamma'(\mu)| d\mu$$

La quale ha una velocità scalare, legata a quella vettoriale ricordando che  $\vec{r}(t) = \vec{r}[s(t)]$

$$v_S(t) = \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{ds} \frac{ds}{dt} = v_S(t) \hat{\tau}(t)$$

Si dimostra che

1.  $|\hat{\tau}| = 1$
2.  $\vec{v}(t) \parallel \hat{\tau}$

Infine si definisce accelerazione come

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$$= \frac{d}{dt}[v_S(t)\hat{\tau}(t)]$$

$$= a_S(t)\hat{\tau}(t) + v_S(t)\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt}$$

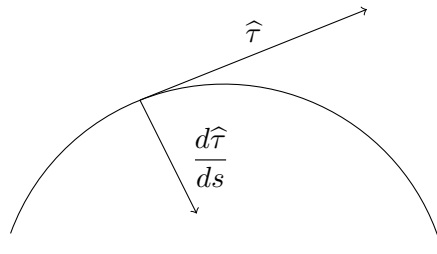
Si ha quindi che

$$\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt} = \frac{d\hat{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = v_S(t) \frac{d\hat{\tau}}{ds}$$

e che

$$0 = \frac{d}{ds}(\hat{\tau}\hat{\tau}) = 2\frac{d\hat{\tau}}{ds}\hat{\tau}$$

Ciò implica che  $\frac{d\hat{\tau}}{ds} \perp \hat{\tau}$ .



Quindi si ha che

$$\vec{a}(t) = a_S(t)\hat{\tau}(t) + v_S^2(t)\frac{d\hat{\tau}(t)}{ds}$$

Si definisce infine

$$\left| \frac{d\hat{\tau}(t)}{ds} \right| = \frac{1}{R_{\gamma,s}}$$

e allora ponendo

$$\frac{d\hat{\tau}(t)}{ds} = \frac{1}{R_{\gamma,s}}\hat{n}$$

si ha che

$$\vec{a}(t) = a_S(t)\hat{\tau}(t) + \frac{v_S^2(t)}{R_{\gamma,s}}\hat{n}$$

### 3 Moto rettilineo uniforme

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}k$$
$$\begin{cases} v_x = k_x \\ v_y = k_y \\ v_z = k_z \end{cases}$$

Integrando ora

$$\begin{cases} \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_x dt \\ \int_{y_0}^y dy = \int_0^t v_y dt \\ \int_{z_0}^z dz = \int_0^t v_z dz \end{cases}$$
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t \\ y(t) = y_0 + v_y t \\ z(t) = z_0 + v_z t \end{cases}$$
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}(t)$$

#### 4 Moto uniformemente accelerato

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} = k$$

Integrando ora

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt$$
$$v_x(t) = v_{x0} + a_x t \quad (1)$$

Integrando ulteriormente

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_{x0} + a_x t) dt$$
$$x(t) = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (2)$$

Prendendo l'equazione (1) posso ottenere accelerazione velocità media

$$a_x = \frac{v_x(t) - v_{x0}}{t}$$
$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2} [v_{x0} + v_x(t)] t = x_0 + v_m t \quad (3)$$

Dalla (1) si ottiene anche

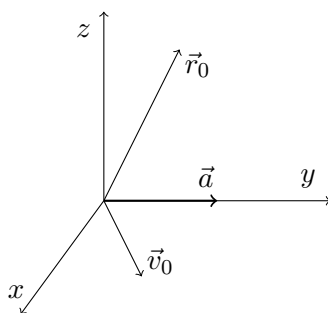
$$t = \frac{v_x - v_{x0}}{a_x}$$
$$x = x_0 + \frac{1}{2} (v_{x0} + v_x) \frac{(v_x - v_{x0})}{a_x}$$
$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad (4)$$

In maniera vettoriale si ha che

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \vec{a}t \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_0(t) + \frac{1}{2}(\vec{v}_0 + \vec{v}(t))t \\ \vec{v}^2(t) &= \vec{v}_0^2 + 2\vec{a}(\vec{r}(t) - \vec{r}_0(t))\end{aligned}$$

Si dimostra che il moto uniformemente accelerato nello spazio si svolge su un piano ed è parabolico. Infatti consideriamo i vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{v}_0$ , che individuano un piano, supponiamo il piano  $Oxy$ . Inoltre sia fissata la direzione di  $\vec{a} \parallel \widehat{j}$

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \\ \vec{v}_0 = (v_{x_0}, v_{y_0}, 0) \\ \vec{a} = (0, a_y, 0) \end{cases}$$



Quindi per le equazioni del moto

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x_0}t \\ y(t) = y_0 + v_{y_0}t + \frac{1}{2}a_yt^2 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

Cioè, effettuando le opportune sostituzioni, si ottiene che la traiettoria  $\Gamma$  è

$$\Gamma : \begin{cases} y(t) = y_0 + \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{a_y}{v_{x_0}^2}(x - x_0)^2 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

che è appunto una curva parabolica appartenente al piano  $z = z_0$

## 5 Moto di Caduta libera di un corpo

Si considera il caso in cui  $\vec{a} = (0, -g, 0)$  e  $\vec{v}_0 = (0, v_{y_0}, 0)$  si ottiene

- $v_y(t) = v_{y_0} - gt$



- $y = y_0 + v_{y_0}t - \frac{1}{2}gt^2$

Se consideriamo il caso in cui  $v_{y_0} = 0$ , ponendo  $y_0 = h$ , si può calcolare il tempo di caduta libera  $\tau_{FF}$  come

$$\begin{aligned} y(\tau_{FF}) &= 0 \\ h - \frac{1}{2}g\tau_{FF}^2 &= 0 \\ \tau_{FF} &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ v_y(\tau_{FF}) &= -g\tau_{FF} = -\sqrt{2gh} \end{aligned}$$

Se invece ho che  $v_{y_0} > 0$ , con  $y_0 = h_0$ , si ha che il tempo di salita  $\tau_S$  è

$$\begin{aligned} v_y(\tau_S) &= 0 \\ v_{y_0} - g\tau_S &= 0 \\ \tau_S &= \frac{v_{y_0}}{g} \end{aligned}$$

La quota massima  $h_{max}$  è

$$h_{max} = h_0 + v_{y_0}\tau_S - \frac{1}{2}g\tau_S^2 = h_0 + \frac{1}{2}\frac{v_{y_0}^2}{g}$$

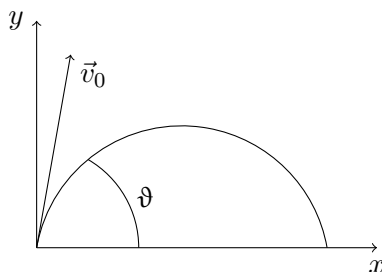
Se  $h_0 = 0$  si ha che  $\tau_S = \tau_{FF}$ , infatti

$$\tau_{FF} = \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}} = \sqrt{\frac{v_{y_0}^2}{g^2}} = \frac{v_{y_0}}{g} = \tau_S$$

## 6 Moto parabolico di caduta libera

Considerando la seguente situazione

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = (0, 0) \\ \vec{v}_0 = (v_{x_0}, v_{y_0}) = (|\vec{v}| \cos \vartheta, |\vec{v}| \sin \vartheta) \\ \vec{a} = (0, -g) \end{cases}$$



In questo caso la traiettoria è individuata dal seguente sistema

$$\begin{cases} x(t) = |\vec{v}_0| \cos \vartheta t \\ y(t) = |\vec{v}_0| \sin \vartheta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$y = \tan \vartheta x - \frac{1}{2} \frac{g}{(|\vec{v}_0| \cos \vartheta)^2} x^2$$

Per terminare  $h_{max} = y(\bar{x})$  pongo

$$\begin{aligned} \frac{dy(\bar{x})}{dx} &= 0 \\ D \left[ \tan \vartheta x - \frac{1}{2} \frac{g}{(|\vec{v}_0| \cos \vartheta)^2} x^2 \right]_{x=\bar{x}} &= 0 \\ \tan \vartheta - \frac{g}{(|\vec{v}_0| \cos \vartheta)^2} \bar{x} &= 0 \\ \bar{x} &= \frac{\tan \vartheta |\vec{v}_0|^2 \cos^2 \vartheta}{g} \\ &= \frac{|\vec{v}_0|^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{g} \\ &= \frac{1}{2} \frac{|\vec{v}_0|^2}{g} \sin(2\vartheta) \\ h_{max} = y(\bar{x}) &= \frac{1}{2} \frac{|\vec{v}_0|^2}{g} \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

Inoltre si ha che  $\tau_S = \tau_{FF}$  sono calcolati considerando soltanto la componente verticale. Per quanto riguarda la gittata  $x_f$ , essa si calcola come

$$\begin{aligned} y(x_f) &= 0 \quad x_f \neq 0 \\ \tan \vartheta x_f - \frac{1}{2} \frac{g}{(|\vec{v}_0| \cos \vartheta)^2} x_f^2 &= 0 \\ \tan \vartheta - \frac{1}{2} \frac{g}{(|\vec{v}_0| \cos \vartheta)^2} x_f &= 0 \\ x_f &= \frac{2 \sin \vartheta \cos \vartheta |\vec{v}_0|^2}{g} \\ &= \frac{|\vec{v}_0|^2 \sin(2\vartheta)}{g} = 2\bar{x} \end{aligned}$$

Si nota che la gittata massima, con  $\vec{v}_0$  fissata si ha con  $\vartheta = 45^\circ$ . Infine si notino le seguenti formule

$$\begin{aligned}x_f(\vartheta) &= x_f\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \\ \bar{x}(\vartheta) &= \bar{x}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \\ h_{max}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) &= h_{max}\left(\frac{\pi}{2}\right) - h_{max}(\vartheta) \\ \tau_V\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) &= \tau_V\left(\frac{\pi}{2}\right) - \tau_V(\vartheta)\end{aligned}$$

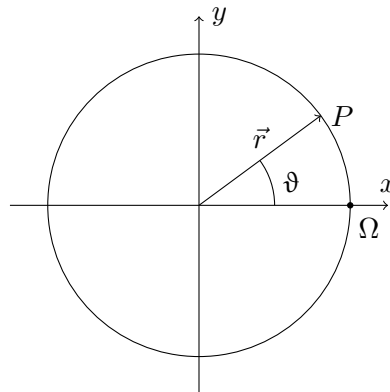
Infine utilizzando l'equazione (4), si ha che

$$|\vec{v}(t)|^2 = |\vec{v}_0|^2 - 2gh(t)$$

## 7 Moto Circolare

### 7.1 Moto Circolare Vario

Il moto circolare è il moto di un punto materiale su una circonferenza



Si ha quindi che considerando la posizione  $\vec{r}(t)$

$$\begin{cases} x(t) = R \cos \vartheta_t \\ y(t) = R \sin \vartheta_t \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = R \left[ \cos \vartheta_t \hat{i} + \sin \vartheta_t \hat{j} \right] = R \hat{r}_t$$

Fissando invece l'origine curvilinea  $\Omega$  e un verso dall'asse x a quello y, si ha che l'ascissa curvilinea è

$$s(t) = R\vartheta_t$$

Per quanto riguarda la velocità vettoriale e angolare, definendo

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta}$$

si ha che

$$v_S(t) = \omega R$$

$$\begin{cases} v_x(t) = -\omega R \sin(\vartheta_t) \\ v_y(t) = \omega R \cos(\vartheta_t) \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = \omega R \left[ -\sin \vartheta_t \hat{i} + \cos \vartheta_t \hat{j} \right] = v_S(t) \hat{\tau}$$

Quindi si scopre che

$$\hat{\tau} = -\sin \vartheta_t \hat{i} + \cos \vartheta_t \hat{j}$$

Per quanto riguarda la velocità Angolare si ha che si può definire un vettore  $\vec{\omega}$  tale che

1.  $|\vec{\omega}| = \omega$
2.  $\vec{\omega} \perp (\vec{x}, \vec{y})$
3. il verso di  $\vec{\omega}$  segue la regola della vite destrorsa rispetto alla rotazione

Detto in maniera vettoriale si ha che

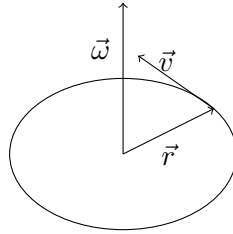
$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

Quindi ricordando che

$$|\vec{v}| = R|\vec{\omega}| = |\vec{r}||\vec{\omega}|$$

si ottiene che

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



Per quanto riguarda l'accelerazione si ha che iniziando con quella scalare

$$a_S(t) = \frac{dv_S(t)}{dt} = \dot{\omega} R = \alpha R$$

Quindi l'accelerazione  $\vec{a}(t)$  è data da

$$\vec{a}(t) = a_S(t) \hat{\tau} + \frac{v_S^2(t)}{R_{\gamma,s}} \hat{n}$$

Per capire chi è  $R_{\gamma,s}$  si afferma che

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}\end{aligned}$$

Essendo che

$$\alpha = \dot{\omega} = D[\omega \hat{k}] = \alpha \hat{k}$$

si ha che

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \alpha R(\hat{k} \times \hat{r}) - \omega^2 R \hat{r} \\ &= \alpha R \hat{\tau} + \frac{v_S^2}{R} \hat{n}\end{aligned}$$

Quindi, come si immagina, si ha che il raggio di curvatura è proprio  $R$ . Se vogliamo  $\vec{a}(t)$  in coordinate si ha che

$$\begin{cases} a_x(t) = -R [\alpha \sin \vartheta_t + \omega^2 \cos \vartheta_t] \\ a_y(t) = R [\alpha \sin \vartheta_t - \omega^2 \sin \vartheta_t] \end{cases}$$

## 7.2 Moto Circolare Uniforme

Se si ha che

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \text{cost}$$

Allora le equazioni dell'accelerazione si semplificano e diventano

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t) = \omega^2 R \hat{n}$$

## 8 Dinamica - Introduzione

La dinamica è lo studio delle cause del moto di un corpo, si individuano tre leggi della dinamica

1. Lo stato naturale di un corpo è in quiete o in moto rettilineo uniforme
2. L'accelerazione di un corpo è proporzionale alla forza impressa mediante l'inverso della massa

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}$$

3. Ad ogni forza impressa corrisponde una reazione uguale e contraria

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

Quindi si definisce forza come una grandezza fisica che esprime l'interazione tra un corpo e l'ambiente. L'unità di misura è il Newton, che vale

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$$

Inoltre in natura si riconoscono quattro interazioni fondamentali

- Gravitazionale
- Elettromagnetica
- Nucleare Forte
- Nucleare Debole

Per il quale vale il principio di sovrapposizione (che vale per ogni tipo di forza per principio):

**Teorema.** Dato un insieme di forze  $\{\vec{F}_i\}_{i \in I}$  che si applicano su un oggetto, allora la somma degli effetti delle forze è l'effetto della forza data dalla somma vettoriale  $\sum_{i \in I} \vec{F}_i$

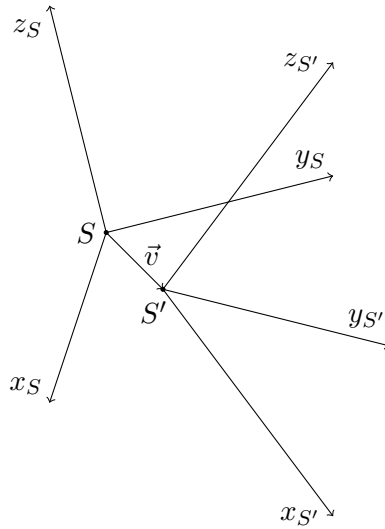
E anche la legge del reciproco quadrato, cioè che se ho un corpo isolato  $P$  soggetto ad una interazione fondamentale si ha che

$$\vec{F}_P(\vec{r}) = o(r^2) \quad r = |\vec{r}|$$

Per quanto riguarda la massa invece, si ha che nella meccanica Newtoniana essa è una proprietà intrinseca, costante in tutti i sistemi di riferimento. È additiva nella meccanica classica, non essendo considerata l'energia di legame, ed è uno scalare positiva.

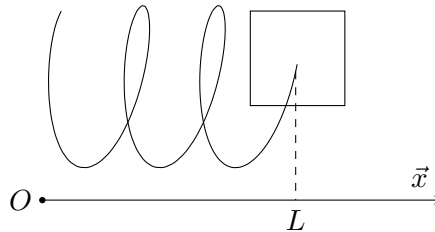
Parlando ora dei sistemi di riferimento inerziali, si ha che non in tutti i sistemi di riferimento vale il secondo principio della dinamica. Per questo serve un discriminante, cioè il principio di prima. Infatti se idealmente portiamo un oggetto a distanza infinita dagli altri corpi, la forza deve tendere a zero, e quindi in base al primo principio deve muoversi di moto rettilineo uniforme o in quiete. Se ciò è vero, siamo di fronte ad un sistema di riferimento inerziale. Per individuarli si usa ciò

**Teorema.** Dato un sistema di riferimento inerziale  $S$ , allora un sistema di riferimento  $S'$  è inerziale se e solo se ha velocità  $v'$  rispetto a  $S$  costante.



Infine nella fisica moderna un sistema di riferimento inerziale è definito come un sistema in cui lo spazio è isotropo e il tempo omogeneo

## 9 Oscillatore Armonico



Se la molla ha una lunghezza iniziale di coordinata  $L_0$ , e viene allungata di un fattore  $\Delta L \in \mathbb{R}$ , si ha che la legge che governa la forza (Legge di Hook) unidimensionale è

$$\vec{F} = -k\Delta L \hat{x} \quad [k] = \text{N m}^{-1}$$

Si definisce in particolare molla ideale una molla per cui

1. la massa della molla è trascurabile
2. parlando di coordinate  $L_0 = 0$

dove quindi la legge di Hook diventa

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

dove  $\vec{x}$  è la posizione della massa  $m$ .

Per scoprire il moto si impone una equazione differenziale, con  $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\begin{aligned} a(t)m &= -kx \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2x &= 0 \\ x(t) &= c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Imponendo che condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v_x(0) = v_0 \end{cases}$$

Si ottiene che

$$\begin{cases} c_1 = x_0 \\ c_2 = \frac{v_0}{\omega} \end{cases}$$

cioè che

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ &= A \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} A \cos(\varphi) &= x_0 \\ -A \sin(\varphi) &= \frac{v_0}{\omega} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda accelerazione e velocità

$$\begin{aligned} v(t) &= A\omega \sin(\omega t + \varphi) \\ a(t) &= -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t) \end{aligned}$$

## 10 Posizione di Equilibrio

Un punto di equilibrio è un punto  $\vec{r}_P$ , per cui imponendo  $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_P$  e  $\vec{v}(t_0) = 0$  si ha che  $\vec{r}(t) = \vec{r}_P \forall t$ . Quindi si ha che  $\vec{v}(t) = \vec{a}(t) = 0 \forall t$ . Quindi si ha che  $\vec{F}(\vec{r}_P, \vec{v} = 0) = 0$ . L'equilibrio si divide in due tipi

**Stabile** se uno spostamento  $d\vec{r}$  crea una forza di richiamo verso il punto  $\vec{r}_P$ .

**Instabile** se uno spostamento  $d\vec{r}$  crea una forza repulsiva che lo fa allontanare dal punto  $\vec{r}_P$ .



Esaminando il caso monodimensionale, se l'equilibrio è stabile, si ha che si ponendo delle ipotesi su  $F = F(x)$ , cioè che essa sia continua e derivabile con derivate continue fino ad un certo ordine  $n$ , si può sviluppare il polinomio di Taylor associato con centro  $x_0$ , il punto di equilibrio

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}}{k!} (x - x_0)^k + o(|x - x_0|^n)$$

Allora ponendo

$$K = -F'(x_0) = -\left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

si ha che essendo  $x_0$  un punto di equilibrio stabile, si ha che  $K > 0$ . Inoltre arrestando il polinomio di Taylor al primo ordine, e considerando che  $F(x_0) = 0$ , si ottiene

$$F(x) = -K(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

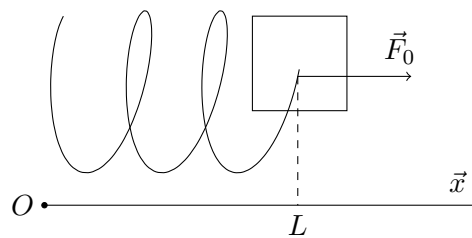
cioè, per  $x \sim x_0$

$$\ddot{x} = -\frac{K}{m}x + \frac{K}{m}x_0$$

Ma questo è un moto armonico con centro  $x_0$ , come si vede nella prossima sezione

## 11 Oscillatore Armonico con Forza Costante

Si nota che data una molla a cui è applicata una forza costante  $\vec{F}_0 = F_0 \hat{x}$  come in figura



Si ha che l'equazione differenziale associata è

$$\begin{aligned} \vec{F}_T &= (-kx + F_0) \hat{x} \\ m\ddot{x} &= -\frac{k}{m}x + \frac{F_0}{m} \\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= \frac{F_0}{m} \end{aligned}$$

Essendo che  $\bar{x}(t) = \frac{F_0}{k}$  è una soluzione particolare, ho che la soluzione generale è data da

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{k}$$

## 12 Vincoli e Reazioni Vincolari

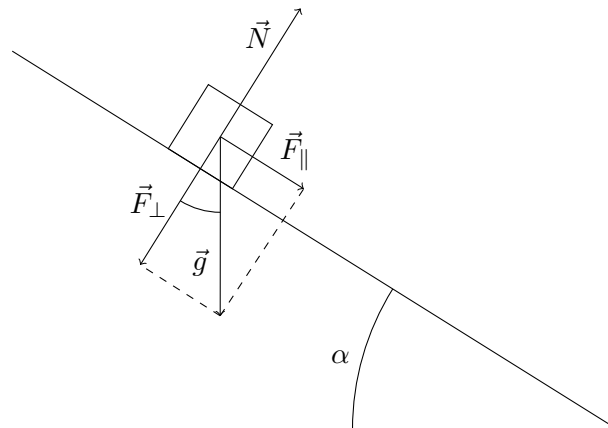
Un vincolo è un corpo che determina la libertà di movimento di un altro corpo, generando delle cosiddette reazioni vincolari. I vincoli sono di due tipi

**Liscio** Quando non è presente attrito tra il vincolo e il corpo, e in questo caso la reazione vincolare  $\vec{R}$  è perpendicolare al vincolo.

**Scabro** Quando sono presenti invece forze di attrito radente.

### 12.1 Piano Inclinato

Nel piano inclinato vale il seguente diagramma delle forze



Allora si ha che i le equazioni diventano

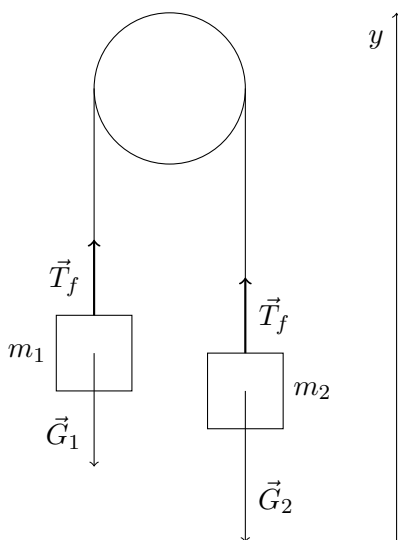
$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha \\ m\ddot{y} = R_y - mg \cos \alpha \end{cases}$$

Ma imponendo che  $y(t) = 0 \forall t$  si ottiene che

$$\begin{cases} R_y = mg \cos \alpha \\ x = g \sin \alpha \end{cases}$$

## 12.2 Filo Ideale

Per quanto riguarda un filo, esso si dice ideale se è indeformabile e di massa nulla. La forza trasmessa viene detta tensione  $\vec{T}_f$  e nel caso ideale è costante in ogni punto. Per esempio data una carrucola



Allora si ha che

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 = T_1 - m_1 g \\ m_2 \ddot{y}_2 = T_2 - m_2 g \end{cases}$$

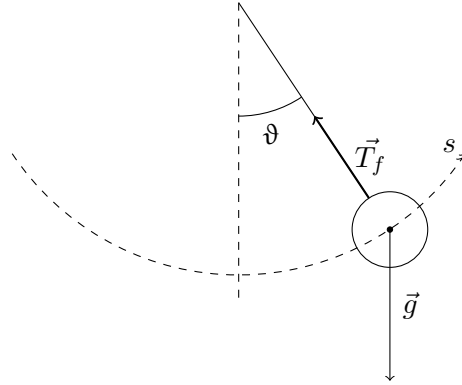
Ma  $T_1 = T_2$  essendo il filo ideale e  $\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$  per il vincolo. Allora

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + m_1 g = m_2 \ddot{y}_2 + m_2 g \\ T = m_1 \ddot{y}_1 + m_1 g \end{cases}$$

Cioé

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \\ \ddot{y}_2 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \\ T_f &= \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \end{aligned}$$

### 12.3 Pendolo Semplice



Per quanto riguarda un pendolo semplice si ha che, imponendo una ascissa curvilinea  $s(t)$  direzionata come in figura e ricordando che il vincolo impone un moto circolare,

$$\vec{a}(t) = l \ddot{\vartheta} \hat{\tau}(t) + \dot{\vartheta}^2 l \hat{n}(t)$$

ma allora esaminando il diagramma delle forze

$$\begin{cases} ml\ddot{\vartheta} = -mg \sin \vartheta \\ ml\dot{\vartheta}^2 = T_f - mg \cos \vartheta \end{cases}$$

Cioè si ottiene che

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta} = \frac{g}{l} \sin \vartheta \\ T_f = ml\dot{\vartheta}^2 + mg \cos \vartheta \end{cases}$$

Ora quindi da risolvere è la seguente equazione differenziale

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2 \sin \vartheta = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Ora considerando la seguente approssimazione di Taylor

$$\sin \vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} + \dots$$

Si ha che l'equazione si può approssimare come

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2 \vartheta = 0$$

che ha soluzione

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= \Theta \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \dot{\vartheta}(t) &= -\omega \Theta \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Come si vede nel caso di piccoli angoli il periodo  $T$  è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

che quindi è indipendente dall'angolo  $\vartheta$ , cioè vale il cosiddetto principio di isocronia. In generale invece si ha che il periodo  $T$  è dato da

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) + \left(\frac{1*3}{2*4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right) + \left(\frac{1*3*5}{2*4*6}\right)^2 \sin^6\left(\frac{\Theta}{2}\right) + \dots \right]$$

Nel caso in cui  $v_0 = 0$  si ha che  $\vartheta_0 = \Theta$  e nel caso in cui  $\Theta \neq 0$  deve essere che  $\varphi = 0$ , cioè l'equazione diventa

$$\begin{aligned}\vartheta(t) &= \Theta \cos(\omega t) \\ \dot{\vartheta}(t) &= -\omega\Theta \sin(\omega t)\end{aligned}$$

e quindi la tensione del filo diventa, grazie all'equazione precedente,

$$\begin{aligned}T_f &= mg \cos[\Theta \cos(\omega t)] + ml\omega^2\Theta^2 \sin^2(\omega t) \\ &= mg [\cos[\Theta \cos(\omega t)] + \Theta^2 \sin^2(\omega t)]\end{aligned}$$

Ora considerando che

$$\cos(\Theta \cos(\omega t)) = 1 - \frac{1}{2}\Theta^2 \cos^2(\omega t) + \dots$$

si ottiene che

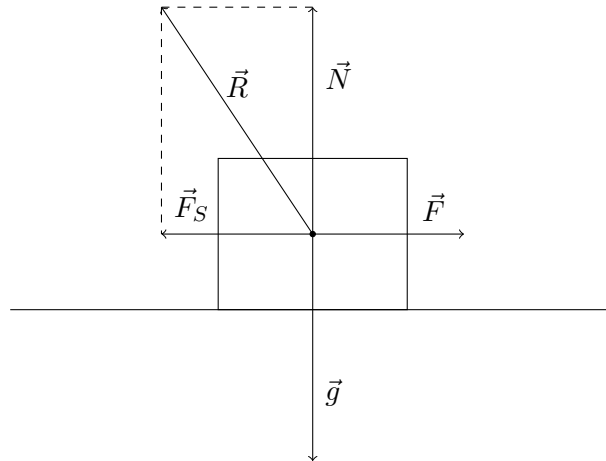
$$\begin{aligned}T_f &= mg \left[ 1 - \frac{1}{2}\Theta^2 \cos^2(\omega t) + \Theta^2 \sin^2(\omega t) \right] \\ &= mg \left[ 1 - \Theta^2 \left[ \frac{1}{2} \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) \right] \right] \\ &= mg \left[ 1 + \Theta^2 \left[ 1 - \frac{3}{2} \cos^2(\omega t) \right] \right]\end{aligned}$$

### 13 Vincolo Scabro e Forze d'Attrito

Se un vincolo è la scabro, la reazione vincolare  $\vec{R}$  è costituita anche da una forza di attrito.

### 13.1 Attrito Radente

Se siamo nel caso radente, ad esempio nel caso di un piano, si ha la seguente situazione



Il vincolo impone che fino ad un certo valore  $F \leq F_s^{max}$  l'oggetto non si muova, cioè esiste una forza di attrito statico della forma

$$\vec{F}_s = -\vec{F}$$

L'esperienza empirica mostra che  $F_s^{max}$  è della forma

$$F_s^{max} = \mu_s N$$

dove  $\mu_s$  è il coefficiente di attrito statico. Se  $F \geq F_s^{max}$  l'oggetto si muove, contrastato da una forza di attrito dinamico della forma

$$\vec{F}_d = -\mu_d N \hat{v}$$

dove  $\mu_d$  è il coefficiente di attrito dinamico.

### 13.2 Attrito Viscoso Libero

Per quanto riguarda l'attrito viscoso, esso si genera nel caso di un moto in un mezzo viscoso, e si vede empiricamente che

1.  $\vec{F}_{vis} = \vec{F}_{vis}(v)$  e  $\vec{F}_{vis}(0) = 0$
2. se il mezzo è omogeneo  $\vec{F}_{vis}$  non dipende dalla posizione  $\vec{r}$
3.  $\hat{F}_{vis} = -\hat{v}$
4. esiste una velocità critica  $v_c$ , tale che se  $v \ll v_c$  vale la legge di Stokes

$$\vec{F}_{vis} = -\beta \vec{v}$$

con  $\beta$  un coefficiente dipendente dalla forma e dalle dimensioni del corpo e dal coefficiente viscoso  $\rho$  del fluido.

Infine dato un corpo in un fluido viscoso, che si muove con velocità iniziale  $\vec{v}_0$ , il suo moto è del tipo esponenziale. Infatti supponendo che si svolga su un asse, diciamo l'asse  $x$ , si ha che

$$\begin{aligned} ma_x &= -\beta v_x \\ m\dot{v}_x &= -\beta v_x \\ \dot{v}_x &= -\frac{1}{\tau} v_x \quad \tau = \frac{m}{\beta} \end{aligned}$$

Ma allora integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{v_x} dv_x &= -\frac{1}{\tau} \int dt \\ \ln|v_x(t)| &= -\frac{1}{\tau} t + c \\ |v_x(t)| &= k e^{-\frac{t}{\tau}} \quad k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \\ v_x(t) &= k e^{-\frac{t}{\tau}} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Unendo ora la soluzione  $v(t) = 0$  e imponendo le condizioni iniziali si ottiene che

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{x0} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ x(t) &= x_0 + v_{x0} \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{aligned}$$

Infine si ha che lo spazio percorso all'infinito è

$$\begin{aligned} x_{lim} &= \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x_0 + v_{x0} \tau (1 - e^{-\frac{1}{\tau}}) \right] \\ &= x_0 + v_{x0} \tau \end{aligned}$$

### 13.3 Attrito Viscoso Forza Costante

Consideriamo la situazione in cui un corpo di massa  $m$  è soggetto ad una forza viscosa del tipo  $\vec{F}_V = -\beta \vec{v}$  e una forza costante  $\vec{F}_0 \parallel \vec{v}_0$ . Allora il moto è regolato dalla seguente equazione differenziale

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}_0 - \beta \vec{v}_0 \\ ma_x &= F_0 - \beta v_x \\ \frac{dv_x}{dt} &= \frac{F_0}{m} - \frac{\beta}{m} v_x \\ \frac{dv_x}{dt} + \frac{\beta}{m} v_x &= \frac{F_0}{m} \end{aligned}$$

La soluzione di questa equazione è

$$v_x = C e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{F_0}{m} \quad \tau = \frac{m}{\beta}$$

Ponendo ora  $\frac{F_0}{\beta} = v_{lim}$  e ponendo  $v_x(0) = v_{x_0}$  si ottiene che

$$v_x = (v_{x_0} - v_{lim})e^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim}$$

Per comprendere quando ciò è trascurabile si nota che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

e quindi che se  $\frac{t}{\tau} \ll 1$  allora

$$\begin{aligned} v_x(t) &\simeq (v_{x_0} - v_{lim})\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + v_{lim} \\ &= -v_{x_0}\frac{t}{\tau} + v_{x_0} + v_{lim}\frac{t}{\tau} \end{aligned}$$

Aggiungendo la condizione che  $v_{x_0} \ll v_{lim}$  si ottiene che

$$v_x(t) \simeq v_{x_0} + \frac{F_0}{m}t$$

cioè è un moto sotto la sola forza  $F_0$ .

Per stimare quanto questa approssimazione è valida, si considera che nel caso di una sfera di raggio  $R$ , vale che

$$\beta = 6\pi R\eta$$

con  $\eta$  il coefficiente di viscosità del mezzo. Si ricorda che

$$\begin{aligned} \eta_{aria} &= 0.018 \times 10^{-3} \text{ Pa s} \\ \eta_{acqua} &= 1.005 \times 10^{-3} \text{ Pa s} \end{aligned}$$

## 14 Lavoro

Sia un punto materiale  $P$ , sul quale agisce una forza  $\vec{F}$  vale che  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ . Esse quindi non dipendono dalla velocità. Allora supponendo che  $P$  conduca una traiettoria  $\gamma$ , con  $A, B \in \gamma$ , si definisce lavoro di  $\vec{F}_i$  da  $A$  a  $B$  lungo la curva  $\gamma$  il seguente integrale

$$L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} \vec{F} d\vec{r}$$



Che imponendo la parametrizzazione  $\gamma = \gamma(t)$  e  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  si risolve in coordinate cartesiane come

$$\begin{aligned}
 L_{\gamma(A,B)} &= \int_{\gamma(A,B)} [F_x(t)x'(t) + F_y(t)y'(t) + F_z(t)z'(t)] dt \\
 &= \int_{\gamma(A,B)} F_x x'(t) dt + \int_{\gamma(A,B)} F_y y'(t) dt + \int_{\gamma(A,B)} F_z z'(t) dt \\
 &= \int_{\gamma(A,B)} F_x(x, y(x), z(x)) dx + \int_{\gamma(A,B)} F_y(x(y), y, z(y)) dy + \\
 &+ \int_{\gamma(A,B)} F_z(x(z), y(z), z) dz
 \end{aligned}$$

Inoltre si osserva che la somma dei lavori è il lavoro della somma, infatti dato un insieme di forze  $\{\vec{F}_i\}$  agenti su un punto  $P$ , con  $\vec{F}$  la loro risultante

$$\begin{aligned}
 \sum_i L_{\gamma(A,B),i} &= \sum_i \left[ \int_{\gamma(A,B)} \vec{F}_i d\vec{r} \right] \\
 &= \int_{\gamma(A,B)} \sum_i \vec{F}_i d\vec{r} \\
 &= \int_{\gamma(A,B)} \vec{F} d\vec{r} \\
 &= L_{\gamma(A,B),T}
 \end{aligned}$$

Successivamente si definisce una nuova grandezza, cioè l'Energia Cinetica, definita come

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

e si osserva che vale il cosiddetto teorema delle forze vive

$$L_{\gamma(A,B)} = \Delta K_{A \rightarrow B}$$

Che si dimostra dicendo che

$$dL = \vec{F} d\vec{r} = m\vec{a} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

Osservando quindi che

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

si ottiene infine

$$dL = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} m dv^2 = d \left[ \frac{1}{2} m v^2 \right]$$

e quindi che

$$L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} d \left[ \frac{1}{2} m v^2 \right] = \Delta K_{A \rightarrow B}$$

## 15 Forze Conservative

Data una forza  $\vec{F}$ , essa si dice conservativa se dati due punti  $A, B$ , si ha che

$$L_{\gamma(A,B)} = L_{\gamma'(A,B)} \quad \forall \gamma, \gamma'$$

Inoltre vale il seguente teorema. Una forza è conservativa se e solo se  $dL$  è un differenziale esatto, cioè esiste una funzione scalare  $U(\vec{r}) = U(x, y, z)$ , detta potenziale, tale che

$$dL = -dU = - \left[ \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right]$$

La funzione  $U$ , detta energia potenziale viene definita, a meno di costante, come

$$\Delta U_{A,B} = -L_{(A,B)}(\vec{F})$$

Vale anche una terza caratterizzazione delle forza conservative. Infatti si ha che dato un percorso chiuso  $\gamma$ ,  $\vec{F}$  è conservativa se e solo se

$$L_{\gamma} = \oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = 0$$

Tornando a prima, si nota come

$$\begin{aligned} dL &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ &= - \left[ \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right] \end{aligned}$$

e quindi che un campo conservativo  $\vec{F}$  si scrive come

$$\vec{F} = \left( -\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

Quindi risulta utile introdurre il vettore  $\vec{\nabla}$ , definito come

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

e quindi le seguenti funzioni: il gradiente,

$$\vec{\nabla}F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

il rotore

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

e il laplaciano

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}F &= \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} F - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} F, \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} F - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} F, \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} F - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} F \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} F - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} F, \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} F - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} F, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F \right) \end{aligned}$$

Quindi si nota innanzitutto che data una forza conservativa  $\vec{F}$  si ha

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

e che quindi

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}U$$

In generale si ha che se  $\vec{E}$  ammette differenziale esatto, le derivate miste commutano, e quindi  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ . Ma allora se  $\vec{F}$  è una forza conservativa, allora ha rotore nullo. Viceversa vale che se  $\vec{F}$  è definita su un  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  semplicemente connesso, e ha rotore nullo, allora è conservativa.

Parlando ora dell'energia Meccanica, dato un insieme di forze  $\{\vec{F}_i\}$  conservative agenti su un corpo, si definisce energia potenziale totale come

$$U_T = \sum_i U_i$$

dove  $U_i$  sono le singole energie potenziale delle singole forze. Si nota che fissati due punti  $A, B$

$$\Delta U_{A,B}^T = \sum_i \Delta U_{A,B}^i = - \sum_i L_{A,B}(\vec{F}_i) = -L_{A,B}(\vec{F}) \quad \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

Detto questo si definisce energia meccanica di un corpo, soggetto ad un insieme di forze, come

$$\mathcal{E}_{mec} = K + U_T$$

con  $U_T$  la energia potenziale delle forze conservativa. Si dimostra che in un sistema dove svolgono lavoro solo le forze conservative, l'energia meccanica si conserva. Infatti sia  $\gamma = \gamma(A, B)$  la traiettoria compiuta da un corpo sotto la azione di forze  $\{\vec{F}_i\}$  come d'ipotesi, si ha allora che definendo  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

$$\Delta U_{A,B} = -L_{A,B}(\vec{F}) = -\Delta K_{A,B}$$

Ma allora

$$\Delta\mathcal{E}_{mec;A,B} = \Delta U_{A,B} + \Delta K_{A,B} = 0$$

Infine se si suppone che l'insieme  $\{\vec{F}_i\}$  sia costituito di forze di vario genere, si definisce innanzitutto la parte conservativa  $\vec{F}_C$  e non conservativa  $\vec{F}_{NC}$  di  $\vec{F}$ . Quindi

$$L_{\gamma,T} = L_{\gamma,C} + L_{\gamma,NC}$$

e allora

$$\Delta K_{A,B} = -\Delta U_{A,B} + L_{\gamma,NC}$$

cioè infine

$$\Delta\mathcal{E}_{mec;A,B} = L_{\gamma,NC}$$

### 15.1 Forza Peso $\vec{g}$

Essendo che il campo della forza peso  $\vec{F}_G = m\vec{g}$  è costante, ho che essa è conservativa. Più specificatamente il lavoro compiuto su un corpo lungo una traiettoria da un punto  $A$  a un punto  $B$  è dato da

$$L_{A,B} = \int_A^B \vec{F}_G d\vec{r} = \int_A^B m\vec{g} d\vec{r} = m\vec{g} \int_A^B d\vec{r} = m\vec{g} [\vec{r}_B - \vec{r}_A] = m\vec{g} \Delta\vec{r}_{A,B}$$

Quindi se si pone come energia potenziale di riferimento al suolo  $U_0 = 0$ , si ottiene che l'energia potenziale gravitazionale è:

$$U_G = mgh$$

con  $h$  l'altezza dal suolo.

### 15.2 Forza Elastica

Per quanto riguarda la forza elastica, imponendo un sistema di riferimento in cui l'origine è posizionata nella posizione di riposo della molla, si trova che anche essa è conservativa. Infatti il lavoro compiuto su un corpo lungo una traiettoria da un punto  $A$  a un punto  $B$  è dato da

$$\begin{aligned} L_{A,B} &= \int_A^B \vec{F}_E d\vec{r} \\ &= -k \int_A^B \vec{r} d\vec{r} \\ &= -k \left[ \int_{x_A}^{x_B} x dx + \int_{y_A}^{y_B} y dy + \int_{z_A}^{z_B} z dz \right] \\ &= -\frac{1}{2}k [(x_B^2 - x_A^2) + (y_B^2 - y_A^2) + (z_B^2 - z_A^2)] \\ &= -\frac{1}{2}k [r_B^2 - r_A^2] \end{aligned}$$

Quindi se si pone l'energia potenziale di riferimento al punto di equilibrio della molla  $U_0 = 0$  si ottiene che l'energia potenziale elastica è:

$$U_E = -\frac{1}{2}kx^2$$

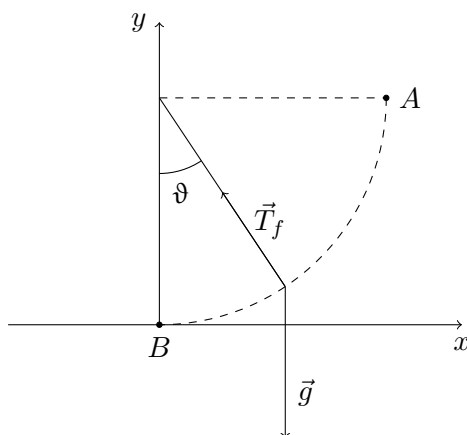
con  $x$  la distanza dal punto di equilibrio.

### 15.3 Forza d'Attrito Dinamico

La forza d'attrito dinamico è invece una forza non conservativa, infatti imponendo una traiettoria  $\gamma \in Oxy$ , si ottiene che il lavoro compiuto dalla forza d'attrito dinamico su un corpo lungo questa curva è data da (si pone per semplicità di notazione  $\gamma = \gamma(A, B)$ ):

$$\begin{aligned} L_{\gamma(A,B)} &= \int_{\gamma} \vec{F}_d d\vec{r} \\ &= -\mu_d N \int_{\gamma} \hat{v} d\vec{r} \\ &= -\mu_d N \int_{\gamma} \hat{v} \cdot \vec{v} dt \\ &= -\mu_d N \int_{\gamma} |\vec{v}| dt \\ &= -\mu_d N \int_{\gamma} |v_s| dt \\ &= -\mu_d N \int_{\gamma} |ds| \\ &= -\mu_d N \text{Lung}(\gamma, A, B) \end{aligned}$$

Quindi il lavoro dipende dalla traiettoria  $\gamma$  è quindi  $\vec{F}_d$  non è conservativa  
Tornando infine al pendolo, con una situazione come in figura



con  $v_A = v(0) = 0$ , si ha che innanzitutto

$$U_A = mgh$$

da cui

$$v_B = \sqrt{\frac{2K_B}{m}} = \sqrt{\frac{2U_A}{m}} = \sqrt{2gh}$$

E infine si ricava la tensione del filo  $T_B$  considerando che in  $B$

$$\begin{cases} T_f - mg = ma \\ a = a_C = \frac{v_B^2}{h} \end{cases}$$

da cui

$$T_B = ma + mg = m \left[ g + \frac{v_B^2}{h} \right] = 3mg$$

## 16 Quantità di moto e Impulso

Si definisce quantità di moto come

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

con cui la seconda legge di Newton può essere riscritta come

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

Data una forza  $\vec{F}$  che agisce su un corpo per un intervallo di tempo  $(t_1, t_2)$ , si definisce impulso della forza come

$$\vec{I}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

e si nota che esso è additivo, infatti se si ha un insieme di forze  $\{\vec{F}_i\}$  con  $\vec{F}$  la loro risultante, si osserva che

$$\vec{I}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \vec{F}_i dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt = \sum_i \vec{I}_i(t_1, t_2)$$

Infine vige il cosiddetto teorema dell'impulso, cioè che:

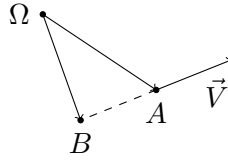
$$\vec{I}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$$

## 17 Momento

Dato un vettore  $\vec{V}$  applicato in  $A$  in un punto  $\Omega$  detto polo, si definisce momento di  $\vec{V}$  rispetto al polo  $\Omega$  come

$$\vec{M} = (\vec{r}_A - \vec{r}_\Omega) \times \vec{V}$$

Si può inoltre notare che dato un polo  $\Omega$ , il punto di applicazione  $A$  e un qualsiasi altro punto  $B$  giacente sulla direzione di  $\vec{V}$



$$\begin{aligned} \vec{M}_B &= (\vec{r}_B - \vec{r}_\Omega) \times \vec{V} \\ &= (\vec{r}_B - \vec{r}_A + \vec{r}_A - \vec{r}_\Omega) \times \vec{V} \\ &= (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{V} + (\vec{r}_A - \vec{r}_\Omega) \times \vec{V} \\ &= (\vec{r}_A - \vec{r}_\Omega) \times \vec{V} \\ &= \vec{M}_A \end{aligned}$$

Un momento molto importante è il cosiddetto momento angolare, cioè il momento della quantità di moto. Infatti fissando un sistema di riferimento si definisce

$$\vec{L}_\Omega = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p}$$

il quale ha una pseudo-seconda legge della dinamica fissando un sistema di riferimento inerziale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}_\Omega &= \frac{d}{dt} [(\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p}] \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p} + (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \frac{d}{dt} \vec{p} \\ &= (\vec{v} - \vec{v}_\Omega) \times m\vec{v} + (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F} \\ &= -\vec{v}_\Omega \times \vec{p} + \vec{M}_T^\Omega \end{aligned}$$

dove

$$\vec{M}_T^\Omega = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \sum_i \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{M}_i^\Omega$$

Infine si ha il teorema dell'impulso angolare se  $\vec{v}_\Omega = 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_T^\Omega dt = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{L}_\Omega = \vec{L}_\Omega(t_2) - \vec{L}_\Omega(t_1)$$

## 18 Dinamica di Sistemi di Punti Materiali

Dato un insieme di punti  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$  di massa  $m_1, \dots, m_n$  si definisce centro di massa del sistema quel punto per cui

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

e se ho due insiemi di punti materiali  $m_1, \dots, m_{N_1}, \dots, m_{N_2}$ , allora definendo

$$M_1 = \sum_{i=1}^{N_1} m_i$$

$$M_2 = \sum_{i=N_1+1}^{N_2} m_i$$

si ha che

$$\vec{R}_{CM} = \frac{M_1 \vec{R}_{CM,1} + M_2 \vec{R}_{CM,2}}{M_1 + M_2}$$

Quindi si va a definire la quantità di moto totale del sistema come

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$$

Nel caso la massa del sistema sia costante, si nota che

$$\frac{d}{dt} \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_i$$

e quindi si giunge alla prima teorema del centro di massa

$$\vec{P} = M \vec{V}_{CM}$$

Ora consideriamo l'insieme di tutte le forze che agiscono sulle particelle, indicando con  $\vec{F}_i$  la risultante di tutte le forze agenti sulla  $i$ -esima particella. Allora si definisce la risultante delle forze esterne e la risultante delle forze interne come

$$\vec{F}_i^{(int)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{i,j}$$

$$\vec{F}^{(int)} = \sum_i \vec{F}_i^{(int)} = \sum_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{i,j}$$

$$\vec{F}_i^{(est)} = \vec{F}_i - \vec{F}_i^{(int)}$$

$$\vec{F}^{(est)} = \sum_i \vec{F}_i^{(est)}$$



Ma allora applicando la terza legge di Newton si ottiene che

$$\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i} \quad \forall i \neq j$$

ma allora si vede facilmente che

$$\vec{F}^{(int)} = 0$$

e quindi si ottiene la cosiddetta prima equazione cardinale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{P} &= \sum_i \frac{dp_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F} = \vec{F}^{(int)} + \vec{F}^{(est)} \\ &= \vec{F}^{(est)} \end{aligned}$$

il relativo teorema dell'impulso

$$\vec{I}^{(est)}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{(est)} dt = \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1)$$

Con questo si ottiene il secondo teorema del centro di massa, cioè che se la massa è costante

$$\vec{F}^{(est)} = \frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{d}{dt} [M \vec{V}_{CM}] = M \vec{A}_{CM}$$

Parlando ora del momento angolare totale esso si definisce come

$$\vec{L}_{\Omega} = \sum_i \vec{L}_{\Omega,i}$$

la cui variazione può essere studiata ricordando che

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{\Omega,i} = -\vec{v}_{\Omega} \times \vec{p}_i + \vec{M}_{T,i}^{\Omega}$$

Ora, se la massa è costante,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}_{\Omega} &= \sum_i \frac{d}{dt} \vec{L}_{\Omega,i} = \sum_i -[\vec{v}_{\Omega} \times \vec{p}_i + M_{T,i}^{\Omega}] \\ &= -\vec{v}_{\Omega} \times \vec{P} + \sum_i M_{T,i}^{\Omega} \\ &= -\vec{v}_{\Omega} \times M \vec{V}_{CM} + \sum_i \vec{M}_{T,i}^{\Omega} \end{aligned}$$

Si definisce quindi

$$\begin{aligned} \vec{M}_{(est)}^{\Omega} &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{\Omega}) \times \vec{F}_i^{(est)} \\ \vec{M}_{(int)}^{\Omega} &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{\Omega}) \times \vec{F}_i^{(int)} \end{aligned}$$

da cui si evince che

$$\begin{aligned}\sum_i \vec{M}_{T,i}^\Omega &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_i \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_i^{(est)} + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_i^{(int)} \\ &= \vec{M}_{(est)}^\Omega + \vec{M}_{(int)}^\Omega\end{aligned}$$

e che quindi

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_\Omega = -\vec{v}_\Omega \times M\vec{V}_{CM} + \vec{M}_{(est)}^\Omega + \vec{M}_{(int)}^\Omega$$

Tuttavia se si analizza bene  $\vec{M}_{(int)}^\Omega$  si ha che innanzitutto

$$\vec{M}_{(int)}^\Omega = \sum_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_{i,j}$$

ma allora  $\forall i, j$ , ricordando che le coppie di forze stanno sulla congiungente dei due punti

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_{i,j} + (\vec{r}_j - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_{j,i} = (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_{i,j} - (\vec{r}_j - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_{i,j} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{i,j} = 0$$

ma allora si vede che

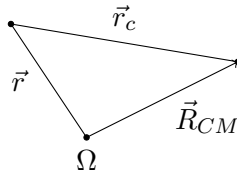
$$\vec{M}_{(int)}^\Omega = 0$$

Si giunge quindi alla seconda equazione cardinale

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_\Omega = -\vec{v}_\Omega \times M\vec{V}_{CM} + \vec{M}_{(est)}^\Omega$$

Infine dato un qualsiasi polo  $\Omega$  posto come origine del sistema di riferimento, si ricava il terzo teorema del centro di massa sempre nel caso di massa costante

$$\begin{aligned}\vec{L}_\Omega &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\ &= \sum_i (\vec{r}_{c,i} + \vec{R}_{CM}) \times \vec{p}_i \\ &= \sum_i \vec{r}_{c,i} \times \vec{p}_i + \sum_i \vec{R}_{CM} \times \vec{p}_i \\ &= \vec{L}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM}\end{aligned}$$



## 19 Corpi Macroscopici e Limite del Continuo

Dato un corpo esteso di massa  $M$ , esso si può dividere in volumetti  $\Delta m_i$ , con naturalmente  $M = \sum_i \Delta m_i$ . Allora si definisce la densità dell' $i$ -esimo volumetto come

$$\rho_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta V}$$

Tuttavia si può passare al continuo, pensando al corpo come ad una distribuzione continua di massa. Allora la densità diventa

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

e la massa totale

$$M = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

Il corpo viene in particolare detto

**isotropo** se esiste un punto  $O$  per il quale, ponendo lì l'origine del sistema del riferimento, si ha che  $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$

**omogeneo** se nella regione  $V$  del corpo  $\rho(\vec{r}) = \rho_0$

Si può infine equivalentemente definire la densità superficiale come

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}$$

e la densità lineare come

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l}$$

Tramite questi nuovi concetti si possono andare a ridefinire vecchie grandezze come il centro di massa

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} = \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

la quantità di moto totale

$$\vec{P} = \int_V \vec{v} \rho \vec{r} dV$$

il momento angolare totale

$$\vec{L}_\Omega = \int_V (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{v} \rho(\vec{r}) dV$$

l'energia cinetica totale

$$K = \frac{1}{2} \int_V v^2 \rho(\vec{r}) dV$$

Consideriamo ora un corpo esteso soggetto ad un insieme di forze parallele  $\{F_i \hat{u}\}$ , con  $F_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , e sia  $\vec{r}_i$  il vettore posizione del loro punto di applicazione. Allora si può affermare che l'effetto di queste forze è l'effetto della risultante agente sul punto

$$\vec{R}_F = \frac{\sum_i F_i \vec{r}_i}{\sum_i F_i}$$

Per quanto riguarda la somma dei momenti delle forze parallele si scopre che il momento totale è proprio il momento della risultante applicata su  $\vec{R}_F$ . Infatti ponendo  $\vec{r}_\Omega = 0$

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{M}_i^\Omega &= \sum_i \vec{r}_i \times F_i \hat{u} \\ &= \sum_i F_i \vec{r}_i \times \hat{u} \\ &= \left[ \sum_i F_i \vec{r}_i \right] \times \hat{u} \\ &= \left[ \sum_i F_i \right] \vec{R}_F \times \hat{u} \\ &= \vec{R}_F \times \sum_i F_i \hat{u} \\ &= \vec{R}_F \times \vec{F} \end{aligned}$$

Con questo si nota che dato per esempio per la forza gravitazionale  $\vec{g}$ ,

$$\vec{R}_F = \frac{\sum_i F_i \vec{r}_i}{\sum_i F_i} = \frac{\sum_i m_i g \vec{r}_i}{\sum_i m_i g} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \vec{R}_{CM}$$

Infine ponendosi in un sistema di riferimento  $S'(O', x', y', z')$ , con  $O'$  il centro di massa, si nota innanzitutto che

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = 0$$

e quindi che

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i = 0$$

Infine consideriamo il sistema di riferimento fisso  $S(O, x, y, z)$  e quello mobile del centro di massa  $S'(O', x', y', z')$ . Se esso trasla soltanto allora le equazioni di trasformazione sono

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{R}_{CM} \\ \vec{v}' &= \vec{v} - \vec{V}_{CM} \end{aligned}$$

se invece esso ruota la derivata risulta effettivamente sbagliata e va corretta con

$$\vec{v} = \vec{v}' + \left. \frac{d\vec{R}}{dt} \right|_S + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$$

con  $\vec{R} = OO'$

## 20 Teorema di König

Dato un sistema di riferimento inerziale  $S = (O, x, y, z)$  fisso e il sistema di riferimento rispetto al centro di massa  $S' = (O' = CM, x', y', z')$ , in cui  $S'$  si muove di moto traslatorio rispetto a  $S$ , allora si ha che

$$\vec{L}'_{CM} = \vec{L}_{CM}$$

infatti

$$\begin{aligned} \vec{L}'_{CM} &= \sum_i (\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i) \\ &= \sum_i [\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i] - \sum_i [\vec{r}'_i \times m_i \vec{V}_{CM}] \\ &= \sum_i [(\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times m_i \vec{v}_i] - \left[ \sum_i m_i \vec{r}'_i \right] \times \vec{V}_{CM} \\ &= \sum_i \vec{r} \times m_i \vec{v}_i - \vec{R}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}_i \\ &= \vec{L}_O - \vec{R}_{CM} \times M \vec{V}_{CM} \end{aligned}$$

ma ricordando ora il terzo teorema di centro di massa

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times M \vec{V}_{CM}$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} \vec{L}'_{CM} &= \left[ \vec{L}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times M \vec{V}_{CM} \right] - \vec{R}_{CM} \times M \vec{V}_{CM} \\ &= \vec{L}_{CM} \end{aligned}$$

Derivando si scopre inoltre che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}_{CM} &= \frac{d}{dt} \vec{L}'_{CM} \\ -\vec{v}_{CM} \times M \vec{V}_{CM} + \vec{M}_{(est)}^{CM} &= -\vec{v}'_{CM} \times M \vec{V}'_{CM} + \vec{M}_{(est)}^{CM'} \\ \vec{M}_{(est)}^{CM} &= \vec{M}_{(est)}^{CM'} \end{aligned}$$

## 21 Energia Cinetica rispetto al centro di massa

Sempre nella stessa configurazione con  $S = (O, x, y, z)$  e  $S' = (O' = CM, x', y', z')$ , si trova che

$$\begin{aligned} K_T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (|\vec{v}' + \vec{V}_{CM}|)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \right) V_{CM}^2 + \vec{V}_{CM} \left( \sum_i m_i \vec{v}'_i \right) \\ &= K'_T + \frac{1}{2} M \vec{V}_{CM}^2 \end{aligned}$$

## 22 Teorema delle N-Forze Vive

Dato un sistema di N punti materiali, si trova innanzitutto che definendo  $W$  come il lavoro, allora

$$\begin{aligned} dW_i &= \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = dK_i \\ dW &= \sum_i dW_i = \sum_i dK_i = dK \end{aligned}$$

ma allora si trova che il lavoro totale  $W$  è dato da

$$W = \sum_i \int_{\gamma_i} dW_i$$

E quindi definendo

$$\begin{aligned} \{A\} &= \{\vec{r}_1(t_A), \dots, \vec{r}_n(t_A)\} \\ \{B\} &= \{\vec{r}_1(t_B), \dots, \vec{r}_n(t_B)\} \end{aligned}$$

si trova che

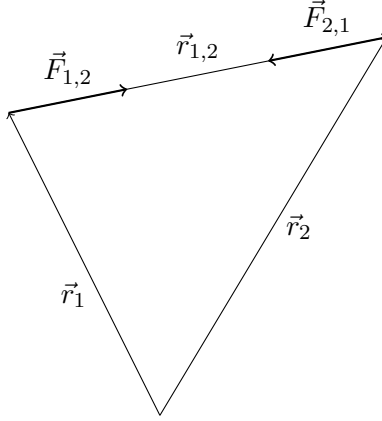
$$W_{\{A\} \rightarrow \{B\}} = K_{\{B\}} - K_{\{A\}}$$

## 23 Lavoro delle Forze Interne per un Sistema di N Punti Materiali

In generale si ha che

$$\vec{F}_{(int)} = 0 \Rightarrow W_{(int)} = 0$$

Prendendo quindi per esempio un sistema di due corpi



si trova che

$$\begin{aligned}
 dW_{(int)} &= \vec{F}_{1,2} d\vec{r}_1 + \vec{F}_{2,1} d\vec{r}_2 \\
 &= \vec{F}_{2,1} [d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1] \\
 &= \vec{F}_{2,1} d\vec{r}_{1,2} \\
 &= \vec{F}_{2,1} \left[ \frac{dr_{1,2}}{dt} \hat{r}_{1,2} + r_{1,2} \frac{d\hat{r}_{1,2}}{dt} \right] dt \\
 &= \vec{F}_{2,1} \left[ \frac{dr_{1,2}}{dt} \hat{r}_{1,2} + r_{1,2} \hat{v} \right] dt \quad \hat{v} \perp \hat{r}_{1,2} \parallel \vec{F}_{2,1} \\
 &= \vec{F}_{2,1} \frac{dr_{1,2}}{dt} \hat{r}_{1,2} dt \\
 &= -F_{1,2} dr_{1,2}
 \end{aligned}$$

Si ottiene quindi che

$$dW_{(int)} = -F_{2,1} d[|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|]$$

Si nota che quindi non è necessariamente 0, lo però, per esempio, se  $\vec{r}_{1,2} = \text{cost}$

## 24 Sistema di due corpi

Dato un sistema di due punti di massa  $m_1$  e  $m_2$ , ponendo innanzitutto la massa ridotta come

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

si ottiene che

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_1 &= \vec{R}_{CM} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{1,2} \\
 \vec{r}_2 &= \vec{R}_{CM} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{1,2}
 \end{aligned} \tag{5}$$

S  $S' = (O' = CM, x', y', x')$  si muove di moto traslatorio, allora

$$\begin{aligned}\vec{v}'_1 &= \vec{v}_1 - \vec{V}_{CM} \\ \vec{v}'_2 &= \vec{v}_2 - \vec{V}_{CM}\end{aligned}$$

e quindi si va a definire

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 \\ \vec{a} &= \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{a}'_2 - \vec{a}'_1\end{aligned}$$

Infine derivando le equazioni (5) si ottiene

$$\begin{aligned}\vec{v}'_1 &= -\frac{\mu}{m_1}\vec{v} \\ \vec{v}'_2 &= \frac{\mu}{m_2}\vec{v}\end{aligned}$$

Infine si nota che la quantità di moto è data da

$$\begin{aligned}\vec{p}'_1 &= m_1\vec{v}'_1 = -\mu\vec{v} \\ \vec{p}'_2 &= m_2\vec{v}'_2 = \mu\vec{v}\end{aligned}$$

Infine per l'Energia Cinetica

$$\begin{aligned}K'_T &= \frac{1}{2}m_1\vec{v}'_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}'_2{}^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\frac{\mu^2}{m_1^2}v^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{\mu^2}{m_2^2}v^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2v^2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mu^2v^2\frac{1}{\mu} \\ K'_T &= \frac{1}{2}\mu v^2\end{aligned}$$

Quindi si ottiene infine che

$$K_T = \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2$$

Per quanto riguarda il momento angolare totale, utilizzando il Teorema di König si scopre che

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \vec{L}'_{CM} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM} \\ &= \vec{r}'_1 \times \vec{p}'_1 + \vec{r}'_2 \times \vec{p}'_2 + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM} \\ &= \vec{r}_{1,2} \times \mu\vec{v} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM}\end{aligned}$$



## 25 Urti tra Due Corpi Puntiformi Isolati

Consideriamo la situazione isolata, in cui  $\vec{F}_1^{(est)} = \vec{F}_2^{(est)} = 0$ . Inoltre sappiamo che  $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$ . Questo porta, per la prima equazione cardinale al fatto che  $\vec{P}$  sia costante.

Considerando innanzitutto il caso monodimensionale, si pone

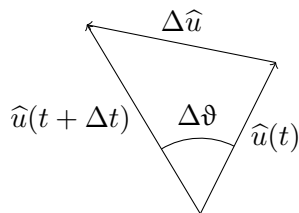
$$\begin{aligned} \vec{v}_{I,1} &= v_{I,1} \hat{i} & \vec{v}_{I,2} &= v_{I,2} \hat{i} \\ \vec{v}_{F,1} &= v_{F,1} \hat{i} & \vec{v}_{F,2} &= v_{F,2} \hat{i} \end{aligned}$$

Infine se siamo nel caso cosiddetto elastico, anche l'energia cinetica viene conservata, e quindi ciò porta alle equazioni risolventi per l'urto

$$\begin{cases} m_1 v_{I,1} + m_2 v_{I,2} = m_1 v_{F,1} + m_2 v_{F,2} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{I,1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{I,2}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{F,1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{F,2}^2 \end{cases}$$

## 26 Derivata di un Vettore

Considerando la situazione in figura dove  $\hat{u}$  è un versore



si trova che

$$\frac{\Delta\hat{u}}{\Delta t} = \frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta t} \frac{\Delta\hat{u}}{|\Delta\hat{u}|} = \frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta t} \Xi_{\Delta}$$

Inoltre utilizzando il teorema delle corde si vede che

$$\frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta t} = \frac{2 \sin \frac{\Delta\vartheta}{2}}{\Delta t} = \frac{\sin \frac{\Delta\vartheta}{2}}{\Delta \frac{\vartheta}{2}} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$$

ma allora se  $\Delta t \rightarrow 0$  si ha  $\Delta\vartheta \rightarrow 0$ . E quindi

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\vartheta}{2}}{\Delta \frac{\vartheta}{2}} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} \Xi_{\Delta} = \frac{d\vartheta}{dt} \hat{\tau}$$

con

$$\hat{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Xi_{\Delta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\hat{u}}{|\Delta\hat{u}|}$$

ma allora sapendo che la derivata di un versore è perpendicolare a esso, si definisce

$$\begin{aligned} \hat{\eta} &= \hat{u} \times \hat{\tau} \\ \vec{\omega}(t) &= \frac{d\vartheta}{dt} \hat{\eta} \end{aligned}$$

ma allora si ottiene infine che

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}(\hat{\eta} \times \hat{u}) = \vec{\omega}(t) \times \hat{u}(t)$$

Se abbiamo non un versore, ma un vettore  $\vec{v}$ , si dimostra che

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[v \cdot \hat{v}] = \frac{dv}{dt}\hat{v} + v\frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{v} + \vec{\omega}(t) \times \vec{v}(t)$$

## 27 Trasformazione di un Vettore

Sia  $S = (O, x, y, z)$  un sistema di riferimento fisso inerziale e sia  $S' = (O', x', y', z')$  un sistema di riferimento mobile. Allora si vede innanzitutto che dato un vettore  $\vec{u}$ , esso si può scrivere nei due sistemi di riferimento

$$\begin{aligned} S: u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k} \\ S': u'_x\hat{i}' + u'_y\hat{j}' + u'_z\hat{k}' \end{aligned}$$

ma allora si vede che

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} &= \frac{du'_x}{dt}\Big|_S \hat{i}' + u'_x \frac{d\hat{i}'}{dt}\Big|_S \\ &+ \frac{du'_y}{dt}\Big|_S \hat{j}' + u'_y \frac{d\hat{j}'}{dt}\Big|_S \\ &+ \frac{du'_z}{dt}\Big|_S \hat{k}' + u'_z \frac{d\hat{k}'}{dt}\Big|_S \end{aligned}$$

ma essendo il tempo assoluto

$$\frac{du'_i}{dt}\Big|_S = \frac{du'_i}{dt}\Big|_{S'}$$

Infine si può dimostrare che esiste un  $\vec{\omega}(t)$  tale che

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{i}'}{dt}\Big|_S &= \vec{\omega}(t) \times \hat{i}' \\ \frac{d\hat{j}'}{dt}\Big|_S &= \vec{\omega}(t) \times \hat{j}' \\ \frac{d\hat{k}'}{dt}\Big|_S &= \vec{\omega}(t) \times \hat{k}' \end{aligned}$$

e quindi si trova la cosiddetta relazione di Poisson

$$\frac{d\vec{u}}{dt}\Big|_S = \frac{d\vec{u}}{dt}\Big|_{S'} + \vec{\omega}(t) \times \vec{u}$$

## 28 Trasformazione Velocità e Accelerazione

Ora, usando le formule di prima possiamo considerare un sistema di riferimento fisso inerziale  $S = (O, x, y, z)$  e uno mobile  $S' = (O', x', y', z')$ . Allora si ha intanto che se  $\vec{r}$  è la posizione di un punto rispetto a  $S$ , e  $\vec{r}'$  è la sua posizione rispetto a  $S'$ , allora

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \quad \text{con } \vec{R} = OO'$$

Ma quindi utilizzando le relazioni viste prima si scopre che

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_S = \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_S + \left. \frac{d\vec{R}}{dt} \right|_S \\ &= \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \left. \frac{d\vec{R}}{dt} \right|_S \\ &= \vec{v}' + \left. \frac{d\vec{R}}{dt} \right|_S + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) \end{aligned}$$

dove la quantità  $\vec{v}_T = \vec{v} - \vec{v}'$  viene detta velocità di trascinamento.

Guardiamo ora l'accelerazione. Con le stesse regole di prima si scopre che

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_{C_o}$$

dove  $\vec{a}_T$  è l'accelerazione di trascinamento che si scrive come

$$\vec{a}_T = \vec{A} + \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})]$$

con

$$\vec{A} = \left. \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \right|_S \quad \vec{\alpha} = \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_S$$

e  $\vec{a}_{C_o}$  è l'accelerazione di Coriolis

$$\vec{a}_{C_o} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

## 29 Corpo Rigido

Un sistema di punti  $\{\vec{r}_i\}$  si dice rigido se

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const} \quad \forall i, j$$

Si nota che un corpo rigido a sei gradi di libertà,  $(x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}, \alpha, \beta, \gamma)$ . Allora si nota che bastano le equazioni cardinali. Inoltre si ha che se poniamo  $\vec{v}'_i = 0$  per ogni punto del sistema, allora

$$\vec{v} = \vec{v}_T = \vec{V} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$$

dove  $\vec{\omega}$  non dipende dal punto essendo il corpo rigido. Ma allora per ogni coppia di punti  $A, B$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

Ma allora fissando  $A = CM$  si ottiene

$$\vec{v} = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}_{CM})$$

Ora dividiamo il caso in due sottocasi: traslatorio puro o rotatorio puro:

### 29.1 Moto Traslatorio Puro

Imponendo come prima che  $\vec{v}_i = 0$  per ogni punto del sistema, e che  $\vec{\omega}(t) = 0$ , allora si ottiene che il

$$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM}$$

per ogni punto del sistema. Inoltre vale che

$$\vec{L}_{CM} = 0$$

Questo si può dimostrare considerando il sistema del centro di massa  $S'$ , che è in moto traslatorio rispetto al sistema  $S$ . Ma allora vale il Teorema di König deve essere che

$$\vec{L}_{CM} = \vec{L}'_{CM}$$

infine considerando che  $\vec{v}'_i = 0$  per ogni punto, si ha che  $\vec{L}'_{CM} = 0$ , cioè

$$\vec{L}_{CM} = 0$$

Ma ora se applichiamo il terzo teorema del centro di massa si ottiene che se  $\vec{r}'_{\Omega} = 0$ , allora

$$\vec{L}_{\Omega} = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM},$$

che giustifica la riduzione di corpi estesi al loro centro di massa.

### 29.2 Moto Rotatorio Puro con Asse Fisso

Consideriamo come sempre il sistema di riferimento  $S = (O, x, y, z)$  e  $S' = (O', x', y', z')$ , con  $z = z' = \hat{\omega}(t)$  e  $O = O'$ , e con sempre  $\vec{v}'_i = 0 \forall i$ . Ma allora si nota innanzitutto che

$$\vec{R} = 0 \quad \left. \frac{d\vec{R}}{dt} \right|_S = 0$$

e quindi che riprendendo la relazione di prima

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Considerando allora  $\vec{P}$  si vede che

$$\vec{P} = M(\vec{\omega} \times \vec{R}_{CM})$$

Se  $CM = O = O'$  si ha che  $\vec{R}_{CM} = \vec{V}_{CM} = 0$ . Se invece  $CM \notin z$ , si ottiene che  $\vec{P} \neq 0$  e  $\vec{F}^{(est)} \neq 0$ .

Vogliamo ora in questa situazione calcolare il **Momento Angolare Totale**. Iniziamo scomponendo ogni vettore  $\vec{r}_i$  come  $z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i$ , allora si ottiene che

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \\
 &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\
 &= \sum_i (z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i [\vec{\omega} \times (z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i)] \quad \vec{\omega} \parallel \hat{k} \\
 &= \sum_i (z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i [\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i] \\
 &= \sum_i m_i z_i \hat{k} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) + \sum_i m_i \vec{\rho}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) \\
 &= \vec{L}_1 + \vec{L}_2
 \end{aligned}$$

Esaminando ora le due porzioni separatamente si ottiene

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_1 &= \sum_i m_i z_i [\hat{k} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)] \\
 &= \sum_i m_i z_i [(\hat{k} \cdot \vec{\rho}_i) \vec{\omega} - (\hat{k} \cdot \vec{\omega}) \vec{\rho}_i] \\
 &= - \sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i \\
 \vec{L}_2 &= \sum_i m_i \vec{\rho}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) \\
 &= \sum_i m_i [\rho_i^2 \vec{\omega} - (\vec{\rho}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{\rho}_i] \\
 &= \sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega}
 \end{aligned}$$

Quindi in definitiva si ha che

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= \vec{L}_\perp + \vec{L}_\parallel \\
 &= - \sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i + \sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega}
 \end{aligned}$$

Quindi definiamo il momento d'inerzia come

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2$$

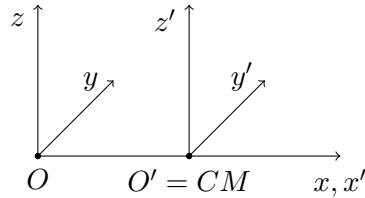
per cui

$$\vec{L}_{\parallel} = I\vec{\omega}$$

Notiamo inoltre che se  $\hat{k}$  è un asse di simmetria del sistema, allora  $\vec{L}_{\perp} = 0$ . Infatti se il sistema è simmetrico, per ogni punto  $i$ , esiste un punto  $j$  per cui

$$m_i = m_j, \vec{\rho}_i = -\vec{\rho}_j, z_i = z_j$$

Diciamo il cosiddetto Teorema di Huygens-Steiner: siamo nella stessa situazione e consideriamo un asse su cui calcolare il momento di inerzia  $I$ , parallelo ad un'altro asse passante per il centro di massa  $CM$  a distanza  $d$ . Imponiamo allora i seguenti sistemi di riferimento:



Allora si ha che

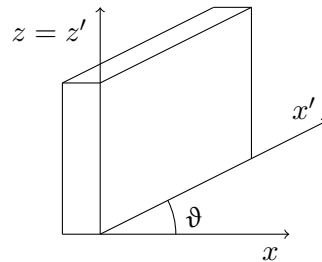
$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i [(x_i^2 + y_i^2)] \\ &= \sum_i m_i [(x'_i + d)^2 + y_i'^2] \\ &= \sum_i m_i [x_i'^2 + d^2 + 2x'_i d + y_i'^2] \\ &= \sum_i m_i [x_i'^2 + y_i'^2] + \sum_i m_i d^2 + 2d \sum_i m_i x'_i \\ &= I_{CM} + M d^2 + 2d M x'_{CM} \\ &= I_{CM} + M d^2 \end{aligned}$$

### 29.3 Momenti di Inerzia Più Comuni

Forma	Momento d'Inerzia
Disco	$I = \frac{1}{2}MR^2$
Lastra Quadrata con Asse Parallelo al Lato	$I = \frac{1}{12}ML^2$
Rettangolo con Asse Perpendicolare	$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$
Sbarra Sottile con Asse Passante per il Centro	$I = \frac{1}{12}ML^2$
Sbarra Sottile con Asse Passante per l'Estremo	$I = \frac{1}{3}ML^2$
Cilindro Cavo	$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
Sfera	$I = \frac{2}{5}MR^2$
Cilindro con Asse Passante per il Centro	$I = M \left[ \frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right]$
Parallelepipedo	$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

### 29.4 Dinamica dell'asse Fisso

Sia un corpo come in figura, con un suo sistema  $S' = (O', z', y', z')$  attaccato ad esso, che ruota con velocità angolare  $\vec{\omega}(t)$



Allora se poniamo  $\Omega = O = O'$ , per la seconda equazione cardinale

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{v}_\Omega \times M\vec{V}_{CM} + \vec{M}_{(est)}^\Omega = \vec{M}_{(est)}^\Omega$$

Allora andiamo intanto a porre

$$\vec{M}_z^{(est)} = \vec{M}_{(est)}^\Omega \cdot \hat{k}$$

Ma allora si ottiene che

$$\vec{M}_z^{(est)} = \vec{M}_{(est)}^\Omega \cdot \hat{k} = \frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \hat{k} = \frac{d}{dt} \vec{L}_z$$

Ma allora ricordando che

$$\vec{\alpha} = \frac{d}{dt}\vec{\omega}$$

si ottiene che

$$\vec{M}_z^{(est)} = \frac{d}{dt}\vec{L}_z = \frac{d}{dt}I\vec{\omega} = I\vec{\alpha}$$

Ora parlando invece della componente perpendicolare, abbiamo che

$$\vec{M}_{(est)}^\Omega = \vec{M}_z^{(est)} + \vec{M}_\perp^{(est)}$$

dove  $\vec{M}_\perp^{(est)}$  è responsabile di mantenere l'asse fisso. Allora si ha (si ricorda che  $\frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ )

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{M}_\perp^{(est)} &= \frac{d}{dt} \left[ -\omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i \right] \\ &= \frac{d\omega}{dt} \left[ -\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i \right] \frac{1}{\omega} + \left[ -\omega \sum_i m_i z_i \frac{d}{dt} \vec{\rho}_i \right] \\ &= \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} \vec{L}_\perp + \left[ -\omega \sum_i m_i z_i (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) \right] \\ &= \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} \vec{L}_\perp + \left[ \vec{\omega} \times \left( -\omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i \right) \right] \\ &= \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} \vec{L}_\perp + \vec{\omega} \times \vec{L}_\perp \end{aligned}$$

### 30 Pendolo Fisico

Sia dato un corpo rigido pendolante attorno ad un polo  $\Omega$ . Allora inseriamo un sistema di riferimento in cui  $O = \Omega$  e il moto avviene lungo il piano  $xy$ , con  $y$  l'asse verticale. Essendo che allora  $\vec{r}_\Omega = 0$  si ha che il momento meccanico totale è equivalente, parlando di forza peso, a quello esercitato sul centro di massa. Essendo inoltre rigido, si ha che  $\vec{\omega}$  è la stessa per ogni punti. Quindi riduciamo l'intero corpo al suo centro di massa  $CM = (x_{CM}, y_{CM}, 0)$ . Infine sia l'asse  $z$  proprio l'asse di rotazione. Allora per il teorema visto prima si ha che, ponendo  $|\vec{R}_{CM}| = d$

$$\begin{aligned} \vec{M}_z^{(est)} &= I\vec{\alpha} \\ I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= -Mgd \sin \vartheta \end{aligned}$$

ma allora definendo

$$\omega = \sqrt{\frac{Mdg}{I}}$$



e imponendo  $\sin \vartheta \approx \vartheta$  si ottiene l'equazione

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2 \vartheta = 0$$

che si risolve col classico

$$\vartheta(t) = \Theta \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Infine si vede subito che il periodo è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mdg}} = 2\pi \sqrt{\frac{l^*}{g}}$$

dove  $l^*$  è la lunghezza ridotta.

Se ora esprimiamo  $l^*$  tramite il teorema di Huygens-Steiner, si ottiene

$$l^* = \frac{I_{CM}}{Md} + d$$

Quindi per ogni punto di sospensione a distanza  $d$ , la lunghezza ridotta e il periodo sono uguali. Inoltre posto un certo punto di sospensione  $P$  tale per cui  $|\vec{R}_{CM}| = d$ , allora ho che se cerco un determinato punto  $P_1$  tale per cui

$$l^* = l^*(P) = l^*(P_1) = l_1^*$$

deve essere che

$$\frac{I_{CM}}{Md} + d = \frac{I_{CM}}{Md_1} + d_1$$

cioè

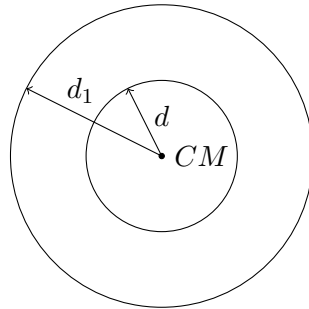
$$(d - d_1) = \frac{I_{CM}}{Md} - \frac{I_{CM}}{Md_1}$$

$$Mdd_1(d - d_1) = I_{CM}(d - d_1)$$

Questa equazione ha soluzione

$$d_1 = d \text{ oppure } d_1 = \frac{I_{CM}}{Md} = l^* - d$$

Cioè l'insieme dei punti che sono soluzione sono due circonferenze come in figura



chiamati cilindri coniugati. Ora vogliamo trovare il minimo periodo  $T_{min}$  in funzione della distanza  $d$  del centro di massa dai punti di sospensione. Allora si nota innanzitutto che

$$\frac{\partial l^*}{\partial d} = -\frac{I_{CM}}{M} \frac{1}{d^2} + 1$$

che si annulla in corrispondenza di

$$\begin{aligned} d_{min} &= \sqrt{\frac{I_{CM}}{M}} \\ l_{min}^* &= 2\sqrt{\frac{I_{CM}}{M}} \\ T_{min} &= 2\pi\sqrt{\frac{2}{g}\sqrt{\frac{I_{CM}}{M}}} \end{aligned}$$

### 31 Energia Cinetica di un Corpo Rigido

Consideriamo il solito sistema  $S$  fisso ed un sistema  $S' = (CM, x', y', \hat{\omega})$  solidale al corpo. Quindi  $\vec{v}'_i = 0$  per ogni punto. Infine nel sistema di riferimento  $S'$  scomponiamo  $\vec{r}'_i$  come  $\vec{\rho}'_i + z'_i \hat{k}'$ . Allora

$$\begin{aligned} K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[ \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \right]^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left\{ \vec{V}_{CM}^2 + \left[ \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \right]^2 + 2\vec{V}_{CM} \cdot \left[ \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \right] \right\} \\ &= K_1 + K_2 + K_3 \end{aligned}$$

Analizziamo ora  $K_2, K_3$  separatamente. Iniziamo con  $K_2$

$$\begin{aligned} K_2 &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[ \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \right]^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[ \vec{\omega} \times \vec{r}'_i \right]^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[ \vec{\omega} \times (\vec{\rho}'_i + z'_i \hat{k}') \right]^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[ \vec{\omega} \times \vec{\rho}'_i \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i'^2 \\
&= \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i \rho_i'^2 \\
&= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2
\end{aligned}$$

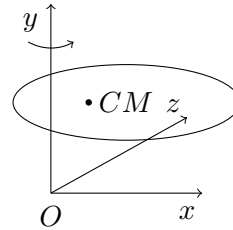
E poi con  $K_3$

$$\begin{aligned}
K_3 &= \sum_i m_i \vec{V}_{CM} \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})] \\
&= \vec{V}_{CM} \cdot \sum_i m_i \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \\
&= \vec{V}_{CM} \cdot \vec{\omega} \times \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \\
&= \vec{V}_{CM} \cdot \vec{\omega} \times (M \vec{R}_{CM} - M \vec{R}_{CM}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Quindi si ottiene che

$$\begin{aligned}
K &= K_1 + K_2 + K_3 \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \\
&= \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2
\end{aligned}$$

Consideriamo ora un'altra situazione, in cui vi è un unico sistema di riferimento  $S = (O, x, y, \hat{\omega})$ , con il centro di massa localizzato in un certo punto  $\vec{R}_{CM}$ .



Allora si ha che possiamo sfruttare il teorema di Huygens-Steiner e affermare

che

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \\
&= \frac{1}{2} I \omega^2 \\
&= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M d^2 \omega^2 \\
&= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M [\omega R_{CM} \sin \alpha]^2 \\
&= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M (\vec{\omega} \times \vec{R}_{CM})^2 \\
&= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2
\end{aligned}$$

## 32 Lavoro di un Corpo Rigido

Si ricorda che per ogni coppia di punti  $i, j$ ,

$$dW^{(int)} = F dr_{i,j} \quad \text{con } F = |\vec{F}_{i,j}| = |-\vec{F}_{j,i}|$$

ma allora se il corpo è rigido si nota subito che  $dW^{(int)} = 0$

Per quanto riguarda il lavoro delle forze esterne, si ottiene che consideriamo i due casi

### 32.1 Moto Rotazionale Attorno ad un Asse Fisso

In questo caso si ha che se poniamo il solito sistema di riferimento  $S = (O, x, y, \hat{\omega})$ , allora

$$\begin{aligned}
dW &= \sum_i \vec{F}_i^{(est)} \cdot d\vec{r}_i \\
&= \sum_i \vec{F}_i^{(est)} \cdot \vec{v}_i dt \\
&= \sum_i \vec{F}_i^{(est)} \cdot (\omega \hat{k} \times \vec{r}_i) dt \\
&= \sum_i \omega \hat{k} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(est)}) dt \\
&= \hat{k} \cdot \left[ \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(est)} \right] \omega dt \\
&= \hat{k} \vec{M}_{(est)}^\Omega \omega dt = \vec{M}_z^{(est)} d\vartheta
\end{aligned}$$

### 32.2 Moto Rototraslatorio

Siano il solito sistema di riferimento inerziale  $S = (O, x, y, z)$  e il solito sistema mobile  $S' = (CM, x', y', \hat{\omega})$  tale che  $\vec{v}'_i = 0$ . Allora ricordando che

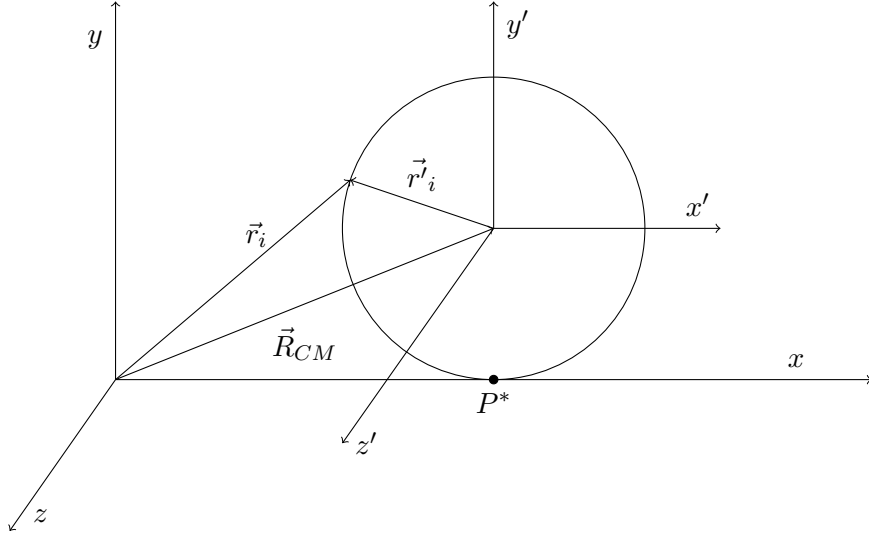
$$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})$$

allora

$$\begin{aligned} dW &= \sum_i \vec{F}_i^{(est)} \cdot [\vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})] dt \\ &= \left[ \sum_i \vec{F}_i^{(est)} \right] \cdot \vec{V}_{CM} dt + \sum_i \vec{F}_i^{(est)} \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})] dt \\ &= \vec{F}^{(est)} d\vec{R}_{CM} + [(\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{F}_i^{(est)}] \cdot \vec{\omega} dt \\ &= \vec{F}^{(est)} d\vec{R}_{CM} + \vec{M}_{(est)}^{CM} \cdot \vec{\omega} dt \end{aligned}$$

### 33 Rotolamento di una Ruota

Sia ora un sistema di riferimento fisso  $S = (O, x, y, z)$  e una ruota che rotola lungo l'asse  $x$ . Inoltre sia un sistema di riferimento  $S' = (O', x', y', z')$  non solidale che essa, che quindi trasla soltanto, tale che  $O' = CM$  il centro della ruota e  $z' \parallel z$ . Infine sia  $\hat{\omega} = \hat{k}'$ .



Allora rispetto al sistema  $S'$  il corpo sta effettuando un movimento circolare, quindi si ottiene che

$$\vec{v}'_i = \omega R \hat{\tau}_i = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Ma allora essendo che il sistema trasla soltanto si ottiene che

$$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})$$

### 33.1 Moto di Puro Rotolamento

Si definisce moto di puro rotolamento se

$$\vec{v}^* = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}^* - \vec{R}_{CM}) = 0$$

In questo caso poniamo  $\hat{i} = x', \hat{j} = y'$  e si scopre che

$$\vec{V}_{CM} = \vec{\omega} \times (\vec{R}_{CM} - \vec{r}^*) = \vec{\omega} R \hat{j} = \omega R (\hat{k} \times \hat{j}) = -\omega R \hat{i}$$

Ma allora si ottiene l'equazione di puro rotolamento

$$d\vec{R}_{CM} = -R d\vartheta \hat{i}$$

Prendendo ora un punto anche all'interno della circonferenza, sempre nel caso di rotolamento puro, si ottiene che

$$\vec{v}_i = \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{R}_{CM} - \vec{r}^*)}_{=\vec{V}_{CM}} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) = \omega \times (\vec{r}_i - \vec{r}^*)$$

Cioè, nel caso di rotolamento puro, si osserva che esiste un asse di istantanea rotazione che passa per il punto di contatto della ruota. Ma allora il momento angolare rispetto al punto di contatto è:

$$\vec{L} = \vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp} = I^* \vec{\omega} + \vec{L}_{\perp}$$

Dove  $I^*$  è il momento d'inerzia rispetto all'asse di istantanea rotazione. Tramite il teorema di Huygens-Steiner, la formula diventa

$$\vec{L} = I_{CM} \vec{\omega} + MR^2 \vec{\omega} + \vec{L}_{\perp}$$

Infine parlando dell'energia cinetica, si ottiene che, usando le formule dell'altra volta

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

Infine notiamo che se supponiamo che le sole forze esterne sono quelle d'attrito, nel caso di rotolamento puro e di un cerchio perfetto si ha che

$$W^{(est)} = \vec{F}_S \cdot d\vec{r}^* = \vec{F}_S \cdot \vec{v}^* dt = 0$$

Cioè l'energia meccanica totale si conserva

## 34 Gravitazione

### 34.1 Leggi di Keplero

Si ricordano le seguenti leggi

**I legge** Le orbite descritte dei pianeti attorno al sole sono delle ellissi in cui il sole ne occupa uno dei due fuochi

**II legge** Il raggio vettore che congiunge il sole con il pianeta spazza aree uguali in tempi uguali

**III legge** Il quadrato del periodo è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita

### 34.2 Legge di Gravitazione Universale

Newton conosceva la distanza Terra-Luna  $R_{TL}$  e il periodo di rivoluzione intorno alla terra  $T$

$$R_{TL} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$$
$$T = 2.36 \times 10^6 \text{ s}$$

ma allora si poteva ricavare l'accelerazione dell'orbita lunare supponendola circolare conoscendo la velocità media  $v$

$$v = \frac{2\pi R_{TL}}{T}$$
$$a_L = \frac{v^2}{R_{TL}} = \frac{4\pi^2 R_{TL}}{T^2}$$

ma allora arrivò a calcolare che

$$\frac{a_L}{g} = 3.603$$
$$\left(\frac{R_{TL}}{R_T}\right)^2 = 3.634$$

ma allora evinse che

$$F_{LT} \propto \frac{M_L}{R_{TL}^2}$$

e allo stesso modo

$$F_{TL} \propto \frac{M_T}{R_{TL}^2}$$

ma dalla terza legge di Newton scoprì quindi che

$$F_{LT} = F_{TL} \propto \frac{M_T M_L}{R_{LT}^2}$$

Allora la legge di gravitazione universale ha la forma

$$\vec{F}_{2,1} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2} \hat{r}_{1,2} \quad G = 6.674 28(67) \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

oppure per corpi estesi

$$\vec{F}_{2,1} = -G \sum_i \sum_j \frac{\Delta m_i \Delta m_j}{r_{i,j}^2} \hat{r}_{i,j}$$

$$\vec{F}_{2,1} = \int_{M_1} \int_{M_2} \frac{dm_1 dm_2}{r^3} d\vec{r} \quad dm_1 = \rho(\vec{r}_1) d^3 r$$

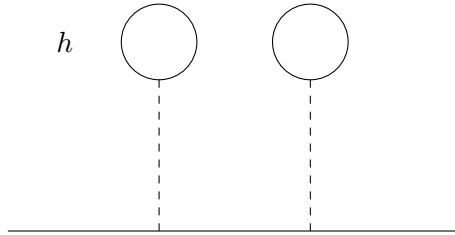
### 34.3 Massa Gravitazionale e Massa Inerziale

Osservando la seconda legge di Newton e la legge di Gravitazione Universale

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_G = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$$

si osserva che la prima massa, a cosiddetta massa inerziale  $m_I$ , e la seconda, la cosiddetta massa gravitazionale  $m_G$  possono in teoria essere diverse. Per risolvere il problema consideriamo la situazione di caduta libera:



Si misura sperimentalmente che i due corpi arrivano allo stesso istante di tempo a terra. Quindi deve essere che la forza applicata, per ipotesi facciamo solo quella gravitazionale, deve essere la stessa. Ma allora si ha che

$$g = a_1 = \frac{F_{G,1}}{m_{I,1}} = G \frac{m_{G,1} M_T}{m_{I,1} r^2}$$

$$= a_2 = \frac{F_{G,2}}{m_{I,2}} = G \frac{m_{G,2} M_T}{m_{I,2} r^2}$$

e quindi che

$$\left( \frac{m_G}{m_I} \right)_1 = \left( \frac{m_G}{m_I} \right)_2 = k$$

Ora sappiamo solo che sono proporzionali. Tuttavia con una opportuna scelta di  $G$  si può porre  $k = 1$ , il cosiddetto principio di uguaglianza.

In verità questo principio è stato scoperto in epoca moderna con misurazioni più precise. In particolare definendo

$$\Delta = \frac{\left( \frac{m_G}{m_I} \right)_1 - \left( \frac{m_G}{m_I} \right)_2}{\left( \frac{m_G}{m_I} \right)_1 + \left( \frac{m_G}{m_I} \right)_2}$$

si è trovato tramite bilancia a torsione che  $\Delta < 3 \times 10^{-9}$  (Eötvös 1909) e che  $\Delta < 3 \times 10^{-11}$  (Broginsky 1970)



### 34.4 Forze Centrali

Una forza  $F = F(\vec{r})$  si dice forza centrale se esiste un punto  $O$  tale che  $\vec{F} = F(\vec{r})\hat{r}$ . Si dice che è a simmetria centrale se  $\vec{F} = F(r)\hat{r}$ .

Inoltre si dimostra che una forza centrale a simmetria sferica è conservativa. Infatti si osserva innanzitutto che

$$dW = \vec{F} d\vec{r} = F(r)\hat{r} d\vec{r} = F(r)\hat{r} \left[ dr\hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} dt \right] = F(r) dr = -dU$$

Allora si vede che  $dW$  ammette un differenziale esatto e

$$W_{A,B} = \int_{r_A}^{r_B} F(r) dr$$

Per quanto riguarda la legge di gravitazione universale si ha che

$$W_{A,B} = \int_{r_A}^{r_B} F(r) dr = Gm_1m_2 \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

$$\Delta U_{A \rightarrow B} = - \int_{r_A}^{r_B} F(r) dr = -Gm_1m_2 \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

e quindi ponendo  $U_\infty = 0$

$$U_P = -G \frac{m_1 m_2}{r_P}$$

### 34.5 Dimostrazione Leggi di Keplero

Ricordiamo che  $M = M_\odot = 2 \times 10^{30}$  kg e  $m = M_T = 6 \times 10^{24}$  kg, quindi siamo sicuramente nel caso che  $m \ll M$ , cioè nel caso delle applicazioni delle leggi di Keplero. Inoltre  $CM \approx \odot$  e  $\mu \approx M_T$ . Ma allora poniamo un sistema di riferimento con l'origine nel centro di massa e si vede

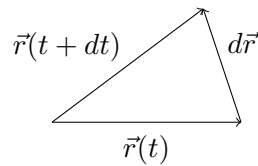
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times F(r)\hat{r} = 0$$

Quindi essendo che  $\vec{v}_\Omega = 0$ , si ha che

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{v} = 0$$

cioè  $\vec{L}$  è costante e quindi il moto è piano.

Per quanto riguarda la seconda legge di Keplero, se si considera la seguente figura



allora se chiamiamo  $dA$  la seguente area

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|$$

possiamo definire una velocità areolare

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v}) dt \\ \vec{\sigma} &= \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{\vec{L}}{2m} \end{aligned}$$

che è una costante. Abbiamo dimostrato la seconda legge di Keplero.

Per quanto riguarda la terza legge di Keplero, supponiamo che l'orbita sia circolare, con raggio  $d$ . Quindi si ha che

$$\frac{GM}{d^2} = \frac{F}{m} = a = \omega^2 d = \frac{4\pi^2}{T^2} d$$

e quindi che

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} d^3$$

Questa è esattamente la terza legge di Keplero per orbite circolari.

### 34.6 Leggi di Conservazione

Calcoliamo  $\vec{L}$ , si ottiene che

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = r\hat{\mu}_r \times m(\dot{r}\hat{\mu}_r + \dot{\vartheta}r\hat{\mu}_\vartheta) = mr^2\dot{\vartheta}(\hat{\mu}_r \times \hat{\mu}_\vartheta) = mr^2\dot{\vartheta}\hat{k}$$

che si conserva per quello detto prima. Se invece calcoliamo  $E_{mec}$ , si ha che

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2}mv^2 + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}\hat{\mu}_r + \dot{\vartheta}r\hat{\mu}_\vartheta)^2 + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\vartheta}^2r^2) + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2\dot{\vartheta}^2r^4}{mr^2} + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} \end{aligned}$$

e quindi definendo l'energia potenziale efficiente

$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}$$

si ottiene che

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

Questa quantità si conserva essendo la forza conservativa.

### 34.7 Variazione di g con l'altezza

Consideriamo l'accelerazione data dalla terra su un corpo ad altezza  $h$ .

$$g_h = G \frac{M}{(R_T + h)^2}$$

con  $R_T = 6.371 \times 10^6$  m. Ponendo allora

$$(R_T + h)^{-2} = R_T^{-2} \left[ 1 + \frac{h}{R_T} \right]^{-2} = R_T^{-2} \left[ 1 - 2 \frac{h}{R_T} + 3 \left( \frac{h}{R_T} \right)^2 + \dots \right]$$

si vede che

$$g_h = g_0 \left[ 1 - 2 \frac{h}{R_T} + 3 \left( \frac{h}{R_T} \right)^2 + \dots \right]$$

Ma allora per confronto sia  $h = 8.848$  km l'altezza del monte Everest. Allora ho che il termine correttivo al secondo termine vale circa 0.003, quindi pienamente trascurabile.

### 34.8 Velocità di Fuga

Dato un corpo di massa  $M$  si dice velocità di fuga  $v_f$  la velocità iniziale per poter arrivare all'infinito con velocità nulla. Dalla relazione

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM}{r}$$

e considerando che l'energia meccanica si conserva si ha che

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = G \frac{mM}{r}$$

cioè

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

per la terra si ottiene che  $v_{f,T} \approx 11.2$  km

### 34.9 Raggio di Schwarzschild

Consideriamo ora un corpo massivo come quello per la terra per la cui la velocità di fuga è quella della luce. In questo caso il raggio, chiamato di Schwarzschild, è

$$R_{Sch} = \frac{2GM_T}{c^2} = 8.869 \times 10^{-3} \text{ m}$$

per cui la densità sarebbe per la cronica  $\rho_{Sch} = 2.04 \times 10^{27}$  g/cm<sup>3</sup>

### 34.10 Possibili Traiettorie

Volendo ora guardare le possibili traiettorie che un corpo effetto l'azione della forza gravitazionale, consideriamo l'energia efficace in funzione del modulo del raggio vettore, mettendoci sempre nel riferimento del centro di forza:

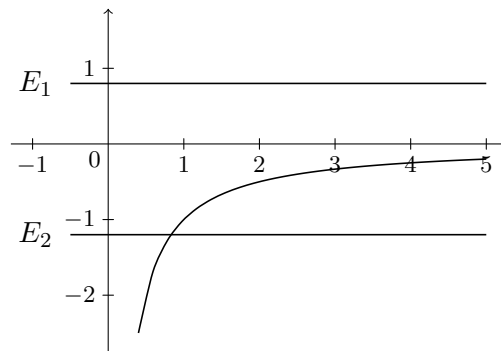
$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}$$

Si ricorda che  $E_{mec} \geq U_{eff}$

**Caso  $L = 0$**  In questo caso  $r = 0$  oppure  $\vartheta = cost$ , cioè o il corpo è fermo oppure si muove di moto rettilineo. Inoltre  $U_{eff}(r)$  diventa

$$U_{eff}(r) = -G\frac{Mm}{r} = U_G$$

che ha grafico

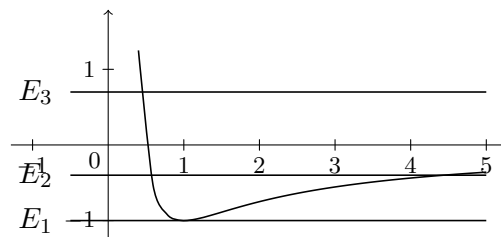


allora si ha che se  $E_{mec} = E_1 \geq 0$ , allora  $0 < r < +\infty$ , che equivale a un moto rettilineo verso l'infinito e oltre. Se invece  $E_{mec} = E_2 < 0$ , si ha che  $0 < r < r_{max}$ , cioè il corpo va avanti, si ferma a  $r_{max}$  e torna indietro.

**Caso  $L \neq 0$**  In questo caso  $U_{eff}$  diventa

$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}$$

e il grafico diventa



Allora abbiamo tre casi:

Se  $E = E_1 = U_{eff}$ , allora  $r'(t) = 0$ , cioè il moto è circolare.

Se invece  $U_{eff} < E = E_2 < 0$ , allora il moto è compreso tra  $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ . Dimosteremo che il moto è un'ellisse

Infine si ha che se  $E = E_3 \geq 0$ , allora  $r_{min} \leq r < +\infty$ , dimosteremo che il moto è un'iperbole se  $E = E_3 > 0$  e una parabola se  $E = E_3 = 0$ .

### 34.11 Moto Circolare

Ora riferendoci al moto circolare si nota che se  $\dot{r} = 0$ , allora  $\dot{\vartheta} = cost$  e

$$\vec{v} = \omega r$$

quindi sbologniamo un po' di formule. Intanto dal grafico si vede che

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0$$

quindi

$$\begin{aligned} r_c &= \frac{L^2}{GMm^2} \\ U(r_c) &= -G \frac{Mm}{r_c} \\ v_S &= G \frac{Mm}{L} \\ K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{L^2}{2mr_c^2} = \frac{1}{2}m \left( \frac{GMm}{L} \right)^2 \\ U(r_c) &= -\frac{L^2}{mr_c^2} = -2K \\ E_{mec} &= -K \end{aligned}$$

### 34.12 Calcolo delle Orbite

Vogliamo adesso ricavare quali sono le traiettorie di un corpo che si muove in un campo di forza centrale. In particolare nel caso di forza gravitazionale di Newton vogliamo classificare i vari tipi di orbite e nel caso dei pianeti ( $E < 0$ ) ricavare prima legge di Keplero. Allora  $\alpha = GMm$

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{u}_r = -\frac{\alpha}{r^2} \hat{u}_r$$

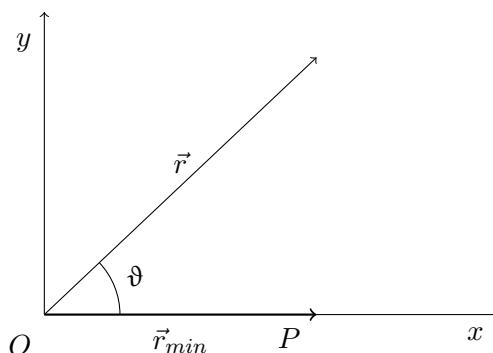
Abbiamo visto che in coordinate polare il momento angolare, l'energia meccanica e la velocità del corpo si possono scrivere

$$\begin{aligned} \vec{L} &= mr^2 \dot{\vartheta} \hat{k} \\ E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \\ \vec{v} &= \dot{r} \hat{u}_r + \dot{\vartheta} r \hat{u}_\vartheta \end{aligned}$$

Ma allora consideriamo il caso  $\vec{L} \neq 0$ , dove esiste un certo  $r_{min}$ , nel cui  $\dot{r}_{min} = 0$  essendo che  $E(r_{min}) = U_{eff}(r_{min})$ . Ma allora

$$\vec{v}_{min} = \dot{\vartheta}_{min} r_{min} \hat{u}_{\vartheta}$$

Quindi scegliamo un sistema di riferimento per cui  $O$  è il centro di massa tra  $M$  e  $m$ , inoltre essendo  $\vec{L} = cost$  il moto è sul piano, inoltre l'asse  $x$  è lungo  $r_{min}$



Considerando ora la seconda legge di Newton:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{u}_r = -\frac{\alpha}{r^2} \hat{u}_r$$

ma allora ricordando che

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}_r}{dt} &= \dot{\vartheta} \hat{u}_{\vartheta} \\ \frac{d\hat{u}_{\vartheta}}{dt} &= -\dot{\vartheta} \hat{u}_r \end{aligned}$$

si ottiene che

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\alpha}{\dot{\vartheta} r^2} \frac{d\hat{u}_{\vartheta}}{dt}$$

ma

$$\dot{\vartheta} = \frac{L}{mr^2}$$

quindi

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{\alpha}{r^2} \frac{mr^2}{L} \frac{d\hat{u}_{\vartheta}}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[ m\vec{v} - \frac{\alpha m}{L} \hat{u}_{\vartheta} \right] &= 0 \\ m\vec{v} - \frac{\alpha m}{L} \hat{u}_{\vartheta} &= \vec{c}ost \end{aligned}$$

Definiamo quindi il vettore costante  $\vec{e}$  come

$$\vec{e} = \frac{L}{\alpha} \vec{v} - \hat{u}_{\vartheta}$$

e utilizzando le formule di prima si ottiene

$$\vec{e} = \frac{L}{\alpha} \dot{r} \hat{u}_r + \left( \frac{L}{\alpha} \dot{\vartheta} r - 1 \right) \hat{u}_{\vartheta}$$

Essendo costante, possiamo calcolarla per  $r = r_{min}$ . Infatti in questo caso  $\dot{r} = 0$ ,  $\hat{u}_{\vartheta}(\vartheta = 0) = \hat{j}$  e quindi si scopre che  $\vec{e} = e\hat{j}$

$$e = \frac{L}{\alpha} \dot{\vartheta}_{min} r_{min} - 1 = \frac{L}{\alpha} \frac{L}{m r_{min}^2} r_{min} - 1 = \frac{L^2}{m \alpha r_{min}} - 1$$

Ora con questo otteniamo tramite il prodotto scalare

$$e \cos \vartheta = \vec{e} \hat{u}_{\vartheta} = e \hat{j} \hat{u}_{\vartheta} = \frac{L}{\alpha} \dot{r} \hat{u}_r \hat{u}_{\vartheta} + \left( \frac{L}{\alpha} \dot{\vartheta} r - 1 \right) \hat{u}_{\vartheta} \hat{u}_{\vartheta} = \left( \frac{L}{\alpha} \dot{\vartheta} r - 1 \right)$$

e infine sfruttando sempre  $L = m \dot{\vartheta} r^2$

$$r = \frac{L^2}{m \alpha} \frac{1}{1 + e \cos \vartheta}$$

Questa è l'equazione di una conica con eccentricità pari ad  $e$ . In particolare

$e = 0$  circonferenza

$0 < e < 1$  ellisse

$e = 1$  parabola

$e > 1$  iperbole

Notiamo che  $e$  non può essere negativa, infatti per ogni  $r$  si ha che  $r \leq r_{min}$ . Ma allora

$$e \cos \vartheta \leq e$$

che impedisce a  $e$  di essere negativa. Ora cerchiamo l'espressione per l'energia meccanica  $E$  sfruttando la nuova espressione per  $r_{min}$

$$E = \frac{L^2}{2m r_{min}^2} - \frac{\alpha}{r_{min}} = \frac{m \alpha^2}{2L^2} (e^2 - 1)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m \alpha^2}}$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$\mathbf{E} = \mathbf{U}_{\text{eff}}(\mathbf{r}_c)$  abbiamo una circonferenza

$\mathbf{U}_{\text{eff}}(\mathbf{r}_c) < \mathbf{E} < 0$  abbiamo una ellisse

$\mathbf{E} = 0$  abbiamo una parabola

$\mathbf{E} > 0$  abbiamo una iperbole

### 34.13 Orbite Ellittiche

Ci sono una VAGONATA di formule

$$\begin{aligned}
 r_{min} = r_p &= \frac{L^2}{m\alpha} \frac{1}{1+e} \\
 r_{max} = r_a &= \frac{L^2}{m\alpha} \frac{1}{1-e} \\
 a &= \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{L^2}{m\alpha} \frac{1}{1-e^2} \\
 r_p = a(1-e) \quad r_a = e(1+e) &\Rightarrow e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \\
 b &= \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1-e^2} = \frac{L^2}{m\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \\
 E &= \frac{m\alpha^2}{2L^2} (e^2 - 1)
 \end{aligned}$$

### 34.14 Dimostrazione III Legge di Keplero per Orbite Ellittiche

Sia

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m}$$

allora

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{A}{T} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T} = \frac{L}{2m} \\
 \frac{A^2}{T^2} &= \frac{\pi^2 a^4 (1-e^2)}{T^2} = \frac{L^2}{4m^2} = b \\
 \frac{a^3}{T^2} &= \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{1-e^2} \frac{1}{a} \frac{L^2}{4m^2}
 \end{aligned}$$

unendo questo con l'espressione di  $a$  ottenuta prima si ottiene

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{1-e^2} \frac{m\alpha(1-e^2)}{L^2} \frac{L^2}{4m^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

## 35 Appendice: Leggi di Conservazione implicano III legge di Newton

Consideriamo le leggi di conservazione del momento angolare e della quantità di moto. Allora preso un corpo isolato per la legge di conservazione la quantità di moto totale si conserva, cioè

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \implies F^{(est)} + F^{(int)} = 0 \implies F^{(int)} = 0$$



Ma allora se siamo per esempio nel caso di 2 corpi si ha che

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

Ora dobbiamo dimostrare che stanno sulla congiungente  $\vec{r}_{1,2}$ . Allora essendo sempre isolato il momento angolare si conserva, cioè

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = 0 \implies \vec{M}_\Omega^{(est)} + \vec{M}_\Omega^{(int)} = 0 \implies \vec{M}_\Omega^{(int)} = 0$$

sempre nel caso con due corpi si ottiene

$$\vec{M}_\Omega^{(int)} = \vec{r}_1^* \times \vec{F}_{1,2} + \vec{r}_2^* \times \vec{F}_{2,1} = (\vec{r}_2^* - \vec{r}_1^*) \times \vec{F}_{1,2} = \vec{r}_{1,2} \times \vec{F}_{1,2} = 0$$

cioè

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \parallel \vec{r}_{1,2}$$