

# Appunti di Fisica I - Laboratorio

Mirko Torresani

18 maggio 2021

## 1 Introduzione

Si definisce grandezza fisica un proprietà di un sistema che si può misurare, associandone quindi un valore tramite una misura. Le misure sono di due tipi

**Diretta** Fatta direttamente tramite uno strumento di misura. Ci sono sempre errori associati, in virtù del fatto che un sistema non ha una misura intrinseca a causa del principio di esclusione di Pauli. Esiste però un valore più probabile, matematicamente e rigorosamente definibile.

**Indiretta** Tramite equazioni, soggette alla propagazione degli errori

In generale il valore di una grandezza fisica  $X$  è dato da

$$x \pm \Delta x$$

Dove  $x$  è il valore misurato e  $\Delta x$  l'incertezza o errore associato.

Inoltre dato uno strumento di misura si definiscono alcune proprietà tra cui

**Portata** Massimo valore misurabile con lo strumento

**Sensibilità** Minimo valore che lo strumento può distinguere

**Prontezza** Rapidità con cui lo strumento fornisce il risultato della misura

Per quanto riguarda i tipi di errore, vengono individuati tre tipi di errore

**Errori di sensibilità (o di lettura)** Legati al fatto che lo strumento di misura ha una sensibilità, che genera una incertezza riguardo all'esatto risultato, e al fatto che l'occhio umano ha dei limiti visivi.

**Errore Sistemico** Un errore che persiste in più misurazioni, legati per esempio ad un errore di costruzione o di taratura dello strumento stesso. Con taratura si intende la procedura con cui il fornitore dello strumento lo rende capace di fare misurazioni corrette

**Errore Casuale** Errore non ben definito, casuale appunto, per esempio derivato da un cambiamento nelle condizioni sperimentali

Per quanto riguarda gli errori di sensibilità, si associa al valore misurato  $x$  almeno una incertezza  $\Delta x$  pari alla metà della sensibilità dello strumento, o anche tutta spesso. Infine si ricorda che le cifre significative di  $x$  e  $\Delta x$  devono coincidere.

Data una misura ripetuta, da cui si ricavano valori  $x_1, \dots, x_n$ , si definiscono intanto i concetti di accuratezza e precisione:

1. Una misura è accurata se varie ripetizioni della stessa portano a risultati il cui valor medio si discosta poco dal valore più probabile. Una scarsa accuratezza è legata ad un errore sistematico.
2. Una misura è precisa se varie ripetizione della stessa portano a risultati la cui deviazione standard  $\sigma$  è piccola. Una scarsa precisione è legata ad un errore casuale.

Inoltre definendo

$$g_{min} = \min\{x_1, \dots, x_n\}$$

$$g_{max} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

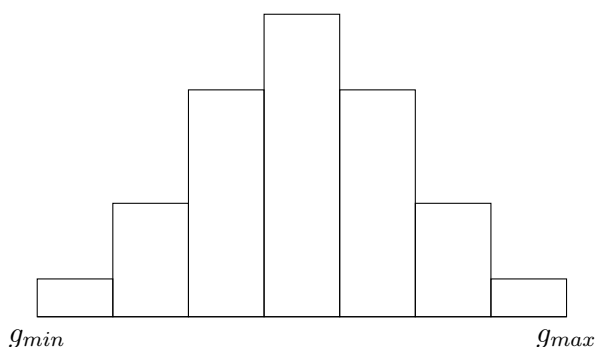
Divido l'intervallo  $[g_{min}, \dots, g_{max}]$  in  $m$  sotto intervalli  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$  tale che

$$\Delta_i = [\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i)$$

Allora definendo la funzione  $\text{freq}(x)$  come il numero di occorrenze di  $x$  in  $(x_1, \dots, x_n)$  si definisce la seguente funzione che definisce un istogramma

$$\lambda_j = \sum_i \text{freq}(x_i) \quad x_i \in \Delta_j$$

$$f(x) = \lambda_{k_x} \quad x \in \Delta_{k_x}$$



Si può dimostrare che se se

1. Errore sistematico è piccolo

2.  $x_1, \dots, x_n$  indipendenti

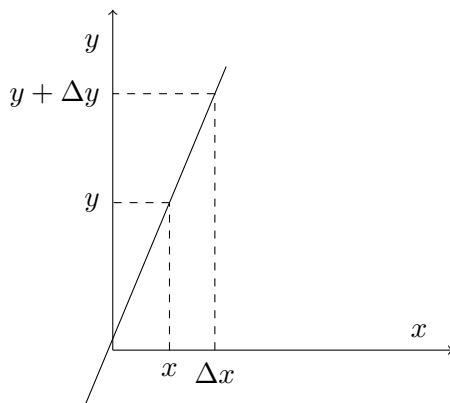
Allora  $\lim_{m \rightarrow \infty} f$  è la curva gaussiana, individuata dall'altezza  $H$  larghezza di metà altezza  $\delta$ . Infine dato lo stesso insieme di misure si può stimare la misura tramite il valore medio

$$x^* = \frac{1}{n} \sum_i x_i$$

invece per calcolare l'incertezza associata tramite la varianza  $\sigma^2$ , dove  $\sigma$  è la deviazione standard campionaria

$$\begin{aligned} \xi_i &= |x_i - x^*| \\ \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_i \xi_i^2 = \frac{1}{n} \sum_i |x_i - x^*|^2 = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 - x^{*2} \\ \Delta \bar{x} = \sigma &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i |x_i - x^*|^2} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la propagazione degli errori ho che data una funzione lineare  $y = mx + p$



$$y(x \pm \Delta x)m + p = mx + \pm \Delta x = y(x) \pm m\Delta x$$

In generale invece data  $y = f(x)$

$$\begin{aligned} y_0 - \Delta y' &= f(x_0 - \Delta x) \\ y_0 + \Delta y'' &= f(x_0 + \Delta x) \\ \Delta y' &= f(x_0) - f(x_0 - \Delta x) \\ \Delta y'' &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \end{aligned}$$

Allora si approssima  $f(x)$  nell'intervallo  $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$  come la tangente di  $f(x)$  in  $x_0$ . Allora

$$\Delta y'' \sim \Delta y' \sim |f'(x_0)|\Delta x$$

Cioè, se una misura deriva da una sola misura diretta

$$\Delta y = |f'(x_0)|\Delta x$$

Nel caso ci sia una misura indiretta che deriva da un insieme di misure dirette tra di esse indipendenti, quindi del tipo  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , con  $x_i \pm \Delta x_i$  si ha che

$$\Delta y = \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Le formule che abbiamo ricavato definiscono il cosiddetto errore massimo, usato, al posto di quello statistico, nel caso di misure grossolane e poco ripetibili.

## 2 Probabilità - Approccio Assiomatico

Sia  $E$  un evento elementare associato ad un certo esperimento. Chiamato allora  $S$  l'insieme di tutti gli eventi elementari  $E_i$ , definiamo  $\Phi$  l'insieme delle parti di  $S$ . Infine sia la funzione  $P$

$$P: \Phi \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Allora  $P$  è una probabilità se gode delle seguenti proprietà:

1.  $P(S) = 1$
2.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3.  $P(\emptyset) = 0$

e si osserva che le tre richieste implicano che  $P(E) \leq 1 \forall E \in S$

Inoltre considerando due eventi indipendenti  $A$  e  $B$ , allora la probabilità che  $A$  e  $B$  si verifichino è data da:  $P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B)$ . Infatti se  $\mu_A$  e  $\mu_B$  sono i casi favorevoli e  $N_A$  e  $N_B$  quelli possibili allora

$$P(A \text{ e } B) = \frac{\mu_A \mu_B}{N_A N_B} = \frac{\mu_A}{N_A} \frac{\mu_B}{N_B} = P(A)P(B)$$

Se invece gli eventi sono dipendenti, si deve introdurre il concetto di probabilità condizionata  $P(B|A)$ . Essa è la probabilità che si verifichi  $B$  sapendo che si è già verificato  $A$ ; allora la formula diventa

$$P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$$

### 3 Probabilità - Approccio Classico

La probabilità di un dato evento  $E$  si indica con

$$P(E) = \frac{\text{\#casi favorevoli}}{\text{\#casi possibili}}$$

e per il teorema dei grandi numeri è

$$P(E) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n}{N} \quad \text{con } n \text{ la frequenza}$$

Ora sia  $E$  il risultato di un esperimento, che naturalmente dipende da come si è realizzato l'esperimento, cioè è una variabile casuale. Allora siano  $E_1, \dots, E_n$   $n$  possibili esiti della misura indichiamo con  $P(E_i)$  la relativa probabilità di ottenerli.

Si definisce quindi *funzione di distribuzione* della variabile  $E$  l'insieme dei valori  $P(E_i)$

Nel caso di una variabile continua ci si deve chiedere quale è la probabilità di trovare  $x$  nell'intervallo  $(x - \Delta x, x + \Delta x)$  e chiamo questa probabilità  $P(x, \Delta x)$ . Per avere una grandezza indipendente da  $\Delta x$  definiamo

$$P_s(x, \Delta x) = \frac{P(x, \Delta x)}{\Delta x}$$

che è una sorta che è una sorta di probabilità specifica.

Se ora consideriamo  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P_s(x, \Delta x)$  ottengo una densità di probabilità che è per definizione la distribuzione di probabilità della variabile  $x$ . Quindi si ottiene che la probabilità che  $x$  assuma un valore compreso tra  $x$  e  $dx$  è  $P(x, dx) = P(x)dx$ . Analogamente la probabilità tra  $a$  e  $b$  è

$$\int_a^b P(x) dx$$

Una distribuzione è normalizzata

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n P(x_i) = 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 1 \end{cases}$$

Inoltre si definisce valore medio  $\mu$  come

$$\mu = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx \end{cases}$$

Esso NON è il valore di aspettazione o di previsione di una  $f(x)$  funzione della variabile casuale  $x$ . Infatti esso è il valor medio di  $f(x)$ , cioè

$$E[f(x)] = \begin{cases} \sum f(x_i)P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)P(x) dx \end{cases}$$

Naturalmente se  $f(x) = x$  ho che  $E[f(x)] = \mu$ . Valgono le seguenti proprietà

$$E[c_1f(x) + c_2g(x)] = c_1E[f(x)] + c_2E[g(x)]$$

Data una variabile casuale  $x$  voglio trovare una  $f(x)$  tale che  $E[f(x)]$  ci dica quanto in media la variabile casuale stessa tenda ad essere lontana dal valor medio  $\mu$ . Questo è strettamente legato all'errore statistico legato ad una serie di misure sperimentali di una variabile casuale. Se scegliessi:  $f(x) = x - \mu$  si avrebbe che  $E[x - \mu] = E[x] - E[\mu] = \mu - \mu = 0$ . Quindi è inutile e scelgo  $f(x) = (x - \mu)^2$ , per cui

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 P(x) dx \end{cases}$$

### 3.1 Distribuzione Uniforme

Il caso più semplice è naturalmente quello uniforme, in cui la funzione di distribuzione di probabilità di variabile casuale continua è una distribuzione uniforme

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il valore medio è

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x) dx = \frac{b+a}{2}$$

inoltre

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x) dx = \frac{(b^2 + ab + a^2)}{3}$$

quindi si ha che la varianza è

$$\sigma^2 = E[x^2] - \mu^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

### 3.2 Distribuzione di Gauss

Premessa: studiare la funzione  $f(x) = e^{-x^2}$

1.  $D \subseteq \mathbb{R}$
2. è pari
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
- 4.

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x < 0 \\ < 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5.  $x = 0$  è un punto di massimo in  $\mathbb{R}$
6.  $f(x)$  è crescente per  $x < 0$  e decrescente per  $x > 0$
7. la semilunghezza a metà altezza si calcola come

$$\begin{aligned} f(x_{\pm}) &= \frac{1}{2} f(0) = \frac{1}{2} \\ x_{\pm}^2 &= \pm \ln 2 \\ h &= \frac{x_+ - x_-}{2} = \sqrt{\ln 2} \sim 0.83 \end{aligned}$$

8.  $f(x)$  decresce molto rapidamente se  $x \rightarrow \pm\infty$  (ad esempio  $f(5) = e^{-9} \sim 1.23 \times 10^{-4}$ )
- 9.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Per dimostrare l'ultimo fatto si nota che chiamando  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ , grazie al Teorema di Fubini

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy$$

Quindi utilizzando coordinate polari viene che:  $dx dy = r dr d\theta$ , cioè

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \left[ -\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \pi$$

cioè

$$I = \sqrt{\pi}$$

Ma allora con queste informazioni definiamo distribuzione di Gauss

$$G(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Benché sembri diversa, si riconduce al caso di prima con un cambio di variabili

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Quindi la semilarghezza a metà altezza è

$$t_1 = \pm\sqrt{\ln 2} \Rightarrow x_1 = \mu + \sqrt{2}\sigma t = \mu \pm \sigma\sqrt{2\ln 2}$$

$$h = \frac{x_+ - x_-}{2} = \sigma\sqrt{2\ln 2} \sim 1.2\sigma$$

Inoltre si può verificare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \mu, \sigma) dx = 1$$

e che

$$E[x] = \mu$$

$$E[(x - \mu)^2] = \sigma^2$$

Infine la probabilità che  $x$  appartenga a  $(0, a)$  è

$$\int_0^a G(x, \mu, \sigma) dx$$

che però non ha una espressione analitica. Tuttavia i valori vengono intabulati per la funzione, che è raggiungibile tramite un opportuno cambio di variabili,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

cioè con  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 1$

## 4 Media a varianza Campione

L'insieme delle misure sperimentali è sempre una piccola parte delle misure effettuabili ed è quindi un campione di tutte le possibili misure che sono a loro volta distribuite secondo una distribuzione generale (parent distribution). Conoscere esattamente la PD richiede infinite misurazioni. Quale è la migliore stima che posso dare di  $\mu$  e  $\sigma$  della PD a partire da un numero finito di misure?

Faccio delle misure su una certa grandezza  $x$  ( $x_i$   $i = 1, \dots, n$ ); la migliore stima della media è naturalmente  $\sum_i \frac{x_i}{n} \rightarrow \mu$ , Sarebbe meglio dire che tende in probabilità a  $\mu$ , cioè che

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|m - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$



Invece come stima della varianza  $\sigma^2$  della distribuzione campione potremo essere tentati di prendere la media degli scarti al quadrato del tipo

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_i |x_i - m|^2$$

tuttavia le quantità non sono indipendenti, in quanto  $m$  dipende esplicitamente dagli  $x_i$ . Allora si usa

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i |x_i - m|^2}$$

questa è una stima di  $\sigma_x$  e si può mostra che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S^2 = \sigma_x^2$ , sempre come limite in probabilità. E quindi le varie  $S^2$  sono una stima della varianza della PD.

Ora, la media campione  $m$  è sempre una variabile casuale e spesso siamo interessato ad avere la varianza della media campione  $S_m^2$ . Questa è data da

$$S_m^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial m}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

Si osserva inoltre che ogni elemento della media campione appartiene alla stessa PD di variazione  $\sigma_x$  e stimata da  $S^2$ . In più dato che  $m = \frac{1}{n} \sum_i x_i$ , si ottiene

$$\frac{\partial m}{\partial x_i} = \frac{1}{n}$$

da cui

$$S_m^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

e quindi

$$S_m = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Questa è la stima della deviazione standard, talvolta chiamato scarto quadratico medio, della media stessa.

#### 4.1 Teorema del Limite Centrale

Siano date  $n$  variabili casuali indipendenti  $x_i$ , allora sotto condizioni molto deboli e indipendentemente dalle funzioni di distribuzioni delle singole  $x_i$ , la somma  $s = x_1 + \dots + x_n$  è asintoticamente normale per  $n \rightarrow +\infty$ .

Più precisamente, per  $n \rightarrow +\infty$ ,  $s$  tende a una distribuzione Gaussiana, con media e varianza date da:

$$\begin{cases} \mu_s = \mu_{x_1} + \dots + \mu_{x_n} \\ \sigma_s^2 = \sigma_{x_1}^2 + \dots + \sigma_{x_n}^2 \end{cases}$$

Nel caso particolare che le  $x_i$  appartengano alla stessa funzione di distribuzione con media  $\mu$  e varianza  $\sigma$ , allora  $s$  è asintoticamente normale con  $\mu_s = n\mu, \sigma_s^2 = n\sigma^2$ . Le conseguenze del teorema sono che la media aritmetica  $m$  di  $n$  variabili casuali indipendenti con la stessa Parent Distribution di media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$  è asintoticamente normale con media, varianza e deviazione standard:  $\mu_m = \mu, \sigma_m^2 = \sigma^2/n$ .

## 4.2 Propagazione degli errori (caso delle variabili casuali)

Problem: sotto quali ipotesi la media e la varianza di una funzione di variabili casuali sono legate alla media e alla varianza di tali variabili. Detto altrimenti quando in delle misure ripetute si presentano fluttuazioni casuali, l'incertezza è valutata tramite la stima della deviazione standard. Data una grandezza funzione delle altre come si possono cambiare le deviazioni standard per le grandezze individuali per stimare l'incertezza sul risultato.

Consideriamo quindi una funzione  $G(x)$  funzione di una sola variabile casuale  $x$  con valor medio  $\mu_x$  e varianza  $\sigma_x$ , anche essa variabile casuale con una sua funzione di distribuzione. Definisco quindi  $\mu_G = E[G]$  il valor medio e  $\sigma_G^2 = E[(G - \mu_G)^2]$ . Se sviluppo allora  $G(x)$  attorno a  $\mu_x$  si ottiene

$$G = f(\mu_x) + (x - \mu_x) \left. \frac{df}{dx} \right|_{\mu_x} + \frac{1}{2} (x - \mu_x)^2 \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{\mu_x} + \dots$$

$$E[G] = E[f(\mu_x)] + E \left[ (x - \mu_x) \left. \frac{df}{dx} \right|_{\mu_x} \right] + E \left[ \frac{1}{2} (x - \mu_x)^2 \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{\mu_x} \right] + \dots$$

Si osserva che  $f(\mu_x), f'(\mu_x)$  e  $f''(\mu_x)$  sono delle costanti, quindi

$$E[G] = f(\mu_x) + \frac{1}{2} E[(x - \mu_x)^2] f''(\mu_x) + \dots$$

Quindi in prima approssimazione  $\mu_G \simeq f(\mu_x)$ , che è esatto se  $f$  è lineare. Da questo si ottiene che trascurando i termini al secondo ordine di  $f$

$$\sigma_G^2 = E[(f(x) - f(\mu_x))^2] \simeq E[(x - \mu_x)^2 (f'(\mu_x))^2] = E[(x - \mu_x)^2] (f'(\mu_x))^2 = \sigma_x^2 (f'(\mu_x))^2$$

Per esempio consideriamo una variabile casuale  $x$  con distribuzione uniforme nell'intorno  $I = [9.9, 10.1]$ :

$$P(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \in I \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e la media e la deviazione standard sono

$$\begin{cases} \mu_x = \frac{10.1+9.9}{2} = 10 \\ \sigma_x = \frac{10.1-9.9}{\sqrt{12}} \simeq 0.0577 \end{cases}$$

Consideriamo adesso la funzione  $G(x) = x^2$ , per questo semplice caso possiamo valutare direttamente  $\mu_G, \sigma_G$ :

$$\begin{aligned}\mu_G &= E[G] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x) dx \simeq 100.003 \\ \sigma_G^2 &= E[G]^2 - \mu_G^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 P(x) dx - \mu_G^2 \simeq 1.333 \\ \sigma_G &= \sqrt{\sigma_G^2} \simeq 1.155\end{aligned}$$

Usando invece le equazioni di prima si ottiene che in forma approssimata

$$\begin{cases} \mu_G \approx \mu_x^2 = 100 \\ \sigma_G \approx 2\mu_x \sigma_x = 1.154 \end{cases}$$

Nel caso invece siamo di fronte a  $f(x, y) = G$  trascuriamo da subito i termini dal secondo:

$$\begin{aligned}G &\simeq f(\mu_x, \mu_y) + (x - \mu_x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\mu_x, \mu_y} + (y - \mu_y) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\mu_x, \mu_y} \\ E[G] &\simeq E[f(\mu_x, \mu_y)] + E[(x - \mu_x) \partial_x f |_{\mu_x, \mu_y}] + E[(y - \mu_y) \partial_y f |_{\mu_x, \mu_y}]\end{aligned}$$

Quindi  $E[G] \approx f(\mu_x, \mu_y)$  e per la varianza si ha che

$$\begin{aligned}\sigma_G^2 &= E[(f(x, y) - f(\mu_x, \mu_y))^2] \\ &\simeq E\left[\left((x - \mu_x) \partial_x f |_{\mu_x, \mu_y} + (y - \mu_y) \partial_y f |_{\mu_x, \mu_y}\right)^2\right] \\ &= E\left[(x - \mu_x)^2 (\partial_x f |_{\mu_x, \mu_y})^2 + (y - \mu_y)^2 (\partial_y f |_{\mu_x, \mu_y})^2 + 2(x - \mu_x)(y - \mu_y) (\partial_x f |_{\mu_x, \mu_y}) (\partial_y f |_{\mu_x, \mu_y})\right] \\ &= E\left[(x - \mu_x)^2 (\partial_x f |_{\mu_x, \mu_y})^2\right] + E\left[(y - \mu_y)^2 (\partial_y f |_{\mu_x, \mu_y})^2\right] + \\ &\quad + 2E\left[(x - \mu_x)(y - \mu_y) (\partial_x f |_{\mu_x, \mu_y}) (\partial_y f |_{\mu_x, \mu_y})\right] \\ &= (\partial_x f |_{\mu_x, \mu_y})^2 \sigma_x^2 + (\partial_y f |_{\mu_x, \mu_y})^2 \sigma_y^2 + 2(\partial_x f |_{\mu_x, \mu_y}) (\partial_y f |_{\mu_x, \mu_y}) \sigma_{xy}\end{aligned}$$

Quindi si ottiene che

$$\sigma_G \approx \sqrt{(\partial_x f |_{\mu_x, \mu_y})^2 \sigma_x^2 + (\partial_y f |_{\mu_x, \mu_y})^2 \sigma_y^2 + 2(\partial_x f |_{\mu_x, \mu_y}) (\partial_y f |_{\mu_x, \mu_y}) \sigma_{xy}}$$

La quantità  $\sigma_{xy} = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]$  viene chiamata covarianza; si dimostra che se  $x$  e  $y$  sono statisticamente indipendenti, allora  $\sigma_{xy} = 0$ , anche se non è vero il contrario. Inoltre  $|\sigma_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$ . Nel caso di una  $f$  di  $n$  variabili:  $G = f(x_1, \dots, x_n)$  con  $x_i$  variabile casuale, se si trascurano le covarianze:

$$\sigma_G = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \Big|_{\mu_{x_1}, \dots, \mu_{x_n}} \sigma_{x_i}^2}$$

Oss: Queste relazioni rimangono le stesse se al posto della media e della varianza della parent distribution abbiamo le loro stime.

## 5 Teorema di Tschebyscheff

Quando si hanno misure i cui risultati fluttuano, il risultato della misura è una variabile casuale funzione delle condizioni sperimentali. Come vedremo in dettaglio più avanti la media di questa variabile casuale è il valore più significativo del risultato. La deviazione standard misura l'incertezza da attribuire a questo risultato. Il fatto che si possa assumere come buono e come misura dell'incertezza la deviazione standard fondato su di un importante teorema di statistica dovuto a Tschebyscheff.

**Teorema di Tschebyscheff.** Sia  $x$  una variabile casuale tale che esistano finiti  $\mu$  e  $\sigma$ . Detto  $k$  un numero positivo, si ha

$$P(|x - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Cioè è poco probabile avere grandi deviazioni dalla media e tali deviazioni sono convenzionalmente misurate in unità di  $\sigma$ . Il teorema si ottiene notando che, se nella definizione  $\sigma^2$  (che per comodità scriviamo nel caso continuo):

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)(x - \mu)^2 dx$$

mettiamo al posto di  $(x - \mu)^2$  zero se esso è minore di  $k^2\sigma^2$  (dove  $k$  è una costante assegnata) e  $k^2\sigma^2$  negli altri casi, otteniamo:

$$\sigma^2 \geq k^2\sigma^2 \int_{|x-\mu| \geq k\sigma} p(x) dx = k^2\sigma^2 P(|x - \mu| \geq k\sigma)$$

che è esattamente la relazione che volevamo

**Esempio** Sia  $x$  una variabile casuale definita in  $[0, 2]$  con densità di probabilità

$$p(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x & \text{in } [0, 2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la media della distribuzione è data da:

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx = \int_0^2 x(1 - \frac{1}{2}x) dx = \int_0^2 x dx - \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^2 - \left[ \frac{x^3}{6} \right]_0^2 = 2 - \frac{4}{3} \approx 0.6666 \end{aligned}$$

Notiamo ora che  $x$  non può essere minore di  $\mu - 2\sigma$ , con  $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{3}$  essendo poiché questo valore è fuori dell'intervallo. Il valore cercato è perciò

$$\begin{aligned} P(|x - \mu| \geq 2\sigma) &= \int_{\mu+2\sigma}^{+\infty} p(x) dx = \int_{\frac{2}{3}+2\frac{\sqrt{2}}{3}} \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx = \\ &= \left[ x - \frac{1}{4}x^2 \right]_{\frac{2}{3}+2\frac{\sqrt{2}}{3}}^2 = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{9} \approx 0.038 \end{aligned}$$

Notiamo che il teorema di Tschebuscheff fornisce il limite superiore

$$P(|x - \mu| \geq 2\sigma) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25$$

pienamente soddisfatto.

## 6 Metodo di Fit

Dato un insieme di dati sperimentali, un problema di fit o best fit o fitting consiste nel cercare una curva semplice che si adatti nel migliore dei modi ai punti misurati. Più precisamente, date  $n$  misure di due generiche grandezze  $x, y$ , con le rispettive incertezze

$$(x_i \pm \Delta x_i, y_i \pm \Delta y_i)$$

ed una funzione (eventualmente dipendente da un certo numero  $m$  di parametri  $p_1, \dots, p_m$ ) che pensiamo possa rappresentare bene la dipendenza di  $y$  da  $x$

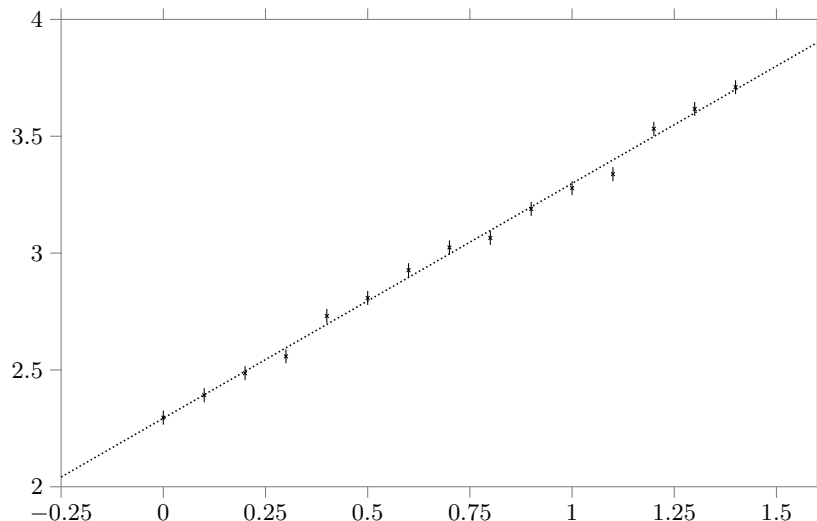
$$y = f(x, p_1, \dots, p_m)$$

si tratta di scegliere i parametri  $p_1, \dots, p_m$  da cui questa funzione dipende in modo che essa sia la migliore possibile.

**Esempio** Supponiamo di misurare, a intervalli di tempo fissati, la posizione di un oggetto vincolato a muoversi lungo una linea retta con velocità uniforme. Le coordinate  $y_i$  dell'oggetto, misurate in corrispondenza  $t_i$  sono riportate nella tabella seguente, insieme alle relative incertezze  $\Delta y_i$ . Per il momento supporremo che gli errori sul tempo siano trascurabili ai fini delle misurazioni che faremo

Tempo(s)	$y(m)$	$\Delta y(m)$
0.0	2.296	0.030
0.1	2.392	0.030
0.2	2.486	0.030
0.3	2.558	0.030
0.4	2.731	0.030
0.5	2.808	0.030
0.6	2.927	0.030
0.7	3.024	0.030
0.8	3.065	0.030
0.9	3.189	0.030
1.0	3.278	0.030
1.1	3.338	0.030
1.2	3.532	0.030
1.3	3.617	0.030
1.4	3.710	0.030

Se facciamo un grafico cartesiano con le posizioni  $x_i$  in ordinata e i corrispondenti istanti di tempo a cui sono misurate in ascissa,



il problema di misurare la velocità dell'oggetto si riduce al problema di determinare il coefficiente angolare della retta

$$y(t, y_0, v_0) = y_0 + v_0 t$$

che meglio si adatta ai nostri dati. Questo è un classico problema di fit in cui  $v_0$  ed  $y_0$  sono i due parametri da determinare. Notiamo, per inciso, che nel grafico sovrastante il fit è stato realizzato al computer mediante un programma di analisi dati comunemente usato nella comunità scientifica. I valori forniti dal programma sono

$$y_0 = 2.293 \pm 0.014$$

$$v_0 = 1.005 \pm 0.018$$

Esistono vari criteri per dire che una curva è la migliore possibile, e tutti si giustificano mediante il *principio di massima verosimiglianza*, fondato sull'ipotesi che ciascun punto misurato sia una variabile gaussiana centrata sul valore misurato e con semilarghezza a metà altezza data dalla incertezza sulla misura.

## 6.1 Metodo dei Minimi Quadrati

Il metodo di fit più semplice è quello cosiddetto *metodo dei minimi quadrati*. Per ogni punto sperimentale definiamo

$$D_i = y_i - f(x_i, p_1, \dots, p_m)$$

la differenza tra il valore misurato  $y_i$  ed il valore della funzione  $f(x, p_1, \dots, p_m)$  in corrispondenza del punto  $x_i$ , per una generica scelta dei parametri  $p_1, \dots, p_m$ .

Notiamo che i singoli  $D_i$  possono essere maggiori, minori o uguali a zero. Costruiamo la somma

$$S = \sum_{i=1}^n D_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, p_1, \dots, p_m)]^2 \quad (1)$$

$S$  costituisce, in un certo modo, la distanza dall'insieme dei punti sperimentali della funzione con cui eseguiamo il fit. Scegliamo dunque i parametri della funzione stessa in modo da minimizzare  $S$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1} \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, p_1, \dots, p_m)]^2 = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial p_2} = \frac{\partial}{\partial p_2} \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, p_1, \dots, p_m)]^2 = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial p_m} = \frac{\partial}{\partial p_m} \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, p_1, \dots, p_m)]^2 = 0 \end{cases}$$

Il principio che sta alla base del metodo dei minimi quadrati tratta tutte le misure sullo stesso piano, cosa accettabile solo se le misure hanno tutte lo stesso errore

$$\Delta y_i = \Delta y \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Inoltre poiché nella (1) il valore della funzione  $f(x, p_1, \dots, p_m)$  è calcolato esattamente in corrispondenza degli  $x_i$ , cioè senza  $\Delta x_i$ , l'errore associato agli  $x_i$  deve essere molto piccolo. Più precisamente dobbiamo richiedere che per ogni punto

$$\left| \left( \frac{df}{dx} \right)_{x_i} \Delta x_i \right| \ll \Delta y_i \quad (2)$$

o in altri termini **l'errore  $\Delta x_i$  propagato dalla funzione  $f(x)$  sulla variabile dipendente  $y$  deve essere molto minore dell'errore di misura  $\Delta y_i$**

**Esempio** Supponiamo di eseguire  $n$  misure di due grandezze  $x, y$  e di avere delle buone ragioni per ipotizzare che  $y$  sia indipendente da  $x$

$$y = f(x, a) = \text{cost} = a$$

Supponiamo ancora che gli errori sulla  $y$  siano tutti uguali, la condizione (2) è qui automaticamente soddisfatta in quanto  $\frac{df}{dx} = 0$ , per cui siamo nel caso dei minimi quadrati. Per trovare il miglior valore di  $a$  dobbiamo minimizzare la quantità

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a)^2$$

Dobbiamo quindi derivare rispetto all'unico parametro

$$\frac{dS}{da} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a) = 0$$

il che fornisce

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n a = na$$

e infine

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

Non dovrebbe sorprendere che, nel caso in cui le misure possano essere trattate alla pari, la media aritmetica rende minima la somma dei quadrati degli scarti. L'errore associato alla stima del parametro  $a$  si calcola, come di consueto

$$(\Delta a)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{da}{dy_i} \right)^2 \Delta y_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \Delta y_i^2 = \frac{1}{n^2} \Delta y^2 n = \frac{\Delta y^2}{n}$$

da cui

$$\Delta a = \frac{\Delta y}{\sqrt{n}}$$

**Esempio** Supponiamo di misurare due grandezze  $x, y$  e la funzione ipotizzata per il fit sia lineare

$$y = f(x, a, b) = a + bx$$

Se siamo nel caso in cui si può applicare il metodo dei minimi quadrati, i migliori valori per  $a, b$  si trovano costruendo la somma

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b)]^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - a - bx_i]^2$$

Bisogna cercare il minimo di  $S$  al variare di  $a, b$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) x_i = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} na + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$



ed infine

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\ b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \end{array} \right.$$

e gli errori si calcolano al solito come

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta a)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2 = \frac{\Delta y^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\ (\Delta b)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial b}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2 = \frac{n \Delta y^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \end{array} \right.$$

Come risulta chiaro da questi esempi, il metodo dei minimi quadrati dà risultati semplici in tutti i casi in cui la funzione  $f(x)$  dipende in modo lineare dai parametri: infatti in questi casi le condizioni di minimo conducono a sistemi di equazioni lineari nei parametri.

## 6.2 Metodo del minimo $\chi^2$

Supponiamo adesso che le incertezze  $\Delta y_i$  associate alle nostre misure siano, in generale, tutte diverse, mentre manteniamo, per il momento, l'ipotesi che l'errore sulle  $x_i$  sia molto piccolo, nel senso della (2). Il metodo dei minimi quadrati introdotto nel paragrafo precedente può essere generalizzato a questa situazione introducendo le quantità

$$D_i = \frac{y_i - f(x_i, p_1, \dots, p_m)}{\Delta y_i}$$

in cui ogni differenza viene pesata con l'errore delle misure  $y_i$ . Si cercherà poi il minimo della funzione:

$$S = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - f(x_i, p_1, \dots, p_m)}{\Delta y_i} \right]^2$$

imponendo le condizioni rispetto a tutti i parametri siano nulle+

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - f(x_i, p_1, \dots, p_m)}{\Delta y_i} \right]^2 = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial p_2} = \frac{\partial}{\partial p_2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - f(x_i, p_1, \dots, p_m)}{\Delta y_i} \right]^2 = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial p_m} = \frac{\partial}{\partial p_m} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - f(x_i, p_1, \dots, p_m)}{\Delta y_i} \right]^2 = 0 \end{cases}$$

si chiama metodo del  $\chi^2$ , perchè se si assume che le  $y_i$  abbiano una distribuzione gaussiana, le  $D_i$  sono variabili gaussiane con media zero e varianza uno e  $S$  è una distribuzione del  $\chi^2$ .

**Esempio** In analogia con l'esempio di prima consideriamo il caso lineare

$$y = f(x, a, b) = a + bx$$

e deriviamo rispetto ai parametri

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta y_i} \left( \frac{y_i - a - bx_i}{\Delta y_i} \right) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\Delta y_i} \left( \frac{y_i - a - bx_i}{\Delta y_i} \right) = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\Delta y_i)^2} + b \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(\Delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{(\Delta y_i)^2} \\ a \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(\Delta y_i)^2} + b \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(\Delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{(\Delta y_i)^2} \end{cases}$$

Si ha infine che

$$\begin{cases} a = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{(\Delta y_i)^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(\Delta y_i)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(\Delta y_i)^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{(\Delta y_i)^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\Delta y_i)^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(\Delta y_i)^2} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(\Delta y_i)^2} \right)^2} \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\Delta y_i)^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{(\Delta y_i)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{(\Delta y_i)^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(\Delta y_i)^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\Delta y_i)^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(\Delta y_i)^2} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(\Delta y_i)^2} \right)^2} \end{cases}$$

ed ancora

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta a)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 (\Delta y_i)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(\Delta y_i)^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\Delta y_i)^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(\Delta y_i)^2} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(\Delta y_i)^2} \right)^2} \\ (\Delta b)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial b}{\partial y_i} \right)^2 (\Delta y_i)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\Delta y_i)^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\Delta y_i)^2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(\Delta y_i)^2} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(\Delta y_i)^2} \right)^2} \end{array} \right.$$