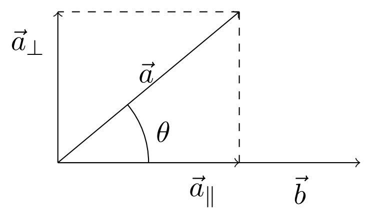
Appunti di Fisica I - Esercitatore

Mirko Torresani

28 febbraio 2021

1 Vettore Parallelo e Perpendicolare

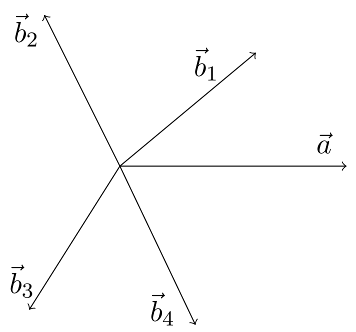
Si considerino $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



Allora si ha che

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= ab\cos\theta = a_\parallel b \\
a_\parallel &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b} = \vec{a} \cdot \widehat{b} \\
\vec{a}_\parallel &= a_\parallel \cdot \widehat{b} = (\vec{a} \cdot \widehat{b})\,\widehat{b} \\
\vec{a}_\perp &= \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \widehat{b})\,\widehat{b} = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}}\,\vec{b}
\end{aligned}$$

Se invece siamo in presenza di una famiglia di vettori $\{\vec{b}_i\}$, con $\vec{b}_i = (x_{b_i}, y_{b_i}, z_{b_i})$, e $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$



Si ha che definendo
$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{b}_i$$
allora
$$\vec{B}_\parallel = \left(\vec{B} \cdot \widehat{a}\right) \widehat{a} = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{b}_i \cdot \widehat{a}\right) \widehat{a}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{b}_i \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\, \vec{a}$$
e dall'altra parte
$$\vec{B}_\perp = \vec{B} - \vec{B}_\parallel = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{b}_i - \frac{\vec{b}_i \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\, \vec{a}\right]$$
Se si sceglie un sistema di riferimento in cui $\vec{a} = (a, 0, 0) = a\widehat{x}$ e $\vec{b}_i = (x_i, y_i, z_i)$ si ha che
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a x_i$$
Quindi che
$$\vec{B}_\parallel = \sum_{i=1}^{n} \frac{a x_i}{a^2}\, a\widehat{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \widehat{x}$$
D'altra parte si può vedere che $\vec{B}_\perp \perp \widehat{x}$. Infatti
$$\vec{B}_\perp \cdot \widehat{x} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{b}_i - \frac{\vec{b}_i \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\, \vec{a}\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\vec{b}_i \cdot \vec{a}}{a} - \frac{\vec{b}_i \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\, \vec{a} \cdot \frac{\vec{a}}{a}\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - \frac{a x_i}{a^2}\, \frac{a^2}{a}\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - x_i\right]$$
$$= 0$$

2 Notazione di Einstein

Quando un indice si ripete, nella notazione di Einstein si somma per quell'indice. Alcune formule diventano
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_j \delta_{i,j}$$

Introducendo un tensore a tre indici

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1 & \text{permutazioni pari di } (1,2,3) \\ -1 & \text{per scambio di indici di } (1,2,3) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha che

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$