Teorema Cesaro

$\{a_n\}_n \geq 0$ se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ allora $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

se $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \underset{\in\mathbb{R}}{l} \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R}$

NO

Devo trovare una successione a_n tale che

$\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ ma $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ o non esiste o non è l

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 3 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{2}{3} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$\nexists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$

$$\underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{2}} \leq \underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{a_n}} \leq \underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{3}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to 1$$

RIPASSO SU o PICCOLO

f è $o(g)$ per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

- $o(x^\alpha + o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$ se f è $o(x^\alpha + o(x^\alpha))$ allora

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} = 0$ Voglio dimostrare che $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0$

ma $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x^\alpha \left(1 + \underbrace{\frac{o(x^\alpha)}{x^\alpha}}_{\downarrow 0}\right)} = 0$

$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x^\alpha} \cdot \frac{1}{\underbrace{1 + \frac{o(x^\alpha)}{x^\alpha}}_{\downarrow 1}} = 0$

quindi

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0 \Rightarrow f$ è $o(x^\alpha)$

Interpertazione grafica o Piccolo

Sappiamo che $\sin x = x + o(x)$
"o" mi dice quanto errore faccio se approssimo una funzione vicino a un punto con un polinomio di primo grado

Numeri complessi: come passare da frazione a forma algebrica

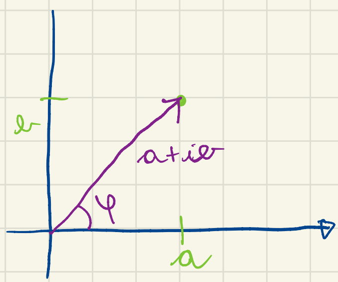
$$\frac{3}{i+1} = a+ib \qquad \frac{3(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i}{1-(i)^2} = \frac{3-3i}{1-(-1)} = \frac{3-3i}{2}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

Numeri complessi recap generale

$z = a+ib$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$ $\quad i$ tale che $i^2=-1$

Parte reale (a), Parte immaginaria (b)



$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \rho$

φ = fase

$a = \cos\varphi$

$b = \sin\varphi$

$\frac{b}{a} = \tan\varphi$

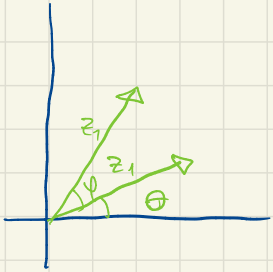
$\varphi = \arctan\frac{b}{a}$ se $a, b \geq 0$ altrimenti dovete sommare opportunamente multipli di π

$$z = a+ib = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\rho$$

Definiamo $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\boxed{z = \rho e^{i\theta}}$$

$z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ $\quad z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ $\quad z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$



$z_1 = \rho e^{i\theta}$

$z_2 = e^{i\varphi}$

$z_1 z_2 = \rho e^{i(\theta+\varphi)}$

Moltiplicare per un numero complesso di modulo 1 e fase φ equivale a ruotare di φ

$$\left.\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

Sommo

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\underbrace{\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2}}_{\cos(3\theta)} + \frac{3}{4}\underbrace{\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}_{\cos(\theta)} = \frac{\cos(3\theta)}{4} + \frac{3}{4}\cos(\theta)$$

$\boxed{\text{Teorema fondamentale Algebra}}$ Se $P(z)$ è un polinomio a coefficienti complessi non costante di grado n allora P ha esattamente n radici complesse (contate con molteplicità)

$(z-1)^2 = 0 \quad z = 1$ con molteplicità 2

Che è la molteplicità? z_0 è una radice di $P(z)$ di molteplicità $m \in \mathbb{Z}$ se $(z-z_0)^m \mid P(z)$ ma $(z-z_0)^{m+1} \nmid P(z)$

$\downarrow$ Divide $\qquad \downarrow$ Non divide

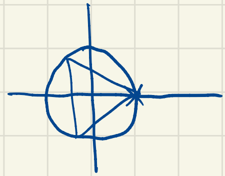
Operativamente: la molteplicità è il numero di volte in cui $(z-z_0)$ compare nella fattorizzazione di $P(z)$.

$\boxed{\text{Calcolo radici}}$ $z^n = z_0$ Formula di De Moivre

$$z_k = \left(\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0+2k\pi}{n}\right)\right)|z_0|^{\frac{1}{n}} \qquad k = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$$

$$z_k = \left(e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}}\right)|z_0|^{\frac{1}{n}}$$

ESEMPIO



$z^3 = 1$

$$z_k = e^{i\left(\frac{2k\pi}{3}\right)} \qquad k = 0,1,2$$

$$z_0 = e^{i(0)} = 1$$

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = e^{i\frac{4}{3}\pi} = \cos\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ESERCIZIO

$z^4 - 2z^2 + 1 = P(z)$

Calcolare le radici, fattorizzarlo in $\mathbb{C}$ e fattorizzarlo in $\mathbb{R}$

$z^2 = t \qquad t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 = 0 \iff t = 1 \iff z^2 = 1 \iff z = \pm 1$

$(z-1)^2(z+1)^2 \longrightarrow$ fattorizzazione in $\mathbb{C}$ (Ma anche in $\mathbb{R}$

1 e -1 sono radici di molteplicità 2.

FATTO UTILE

Se P polinomio reale allora P si scrive come prodotto di polinomi di grado 2 inoltre se $P(z_0)=0 \Rightarrow P(\overline{z_0})=0$

$\Downarrow$ Radice eventualmente complessa

$$P(z) = \underbrace{(z-z_0)(z-\overline{z_0})}_{z^2 + z_0\overline{z_0} - z(z_0+\overline{z_0})} Q(z)$$

$z_0\overline{z_0} \Rightarrow |z_0|$

$z_0 = a + ib \qquad z_0 + \overline{z_0} = 2a$

$\overline{z_0} = a - ib$

$x^3 - 1 = P(x) \qquad x^3 = 1 \qquad x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ $\longleftarrow$ Fattorizzazione reale

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i}{2}$$

$$(x-1)\left(x - \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

Fattorizzazione complessa

ESERCIZIO

Risolvere il seguente sistema di numeri complessi

$$\begin{cases} z^2\bar{z} - \bar{z}z = -\bar{z} \\ (z^3+\bar{z})^3 = 1 \end{cases}$$

$\bar{z} + z^2\bar{z} - \bar{z}z = \bar{z}(1+z^2-z) = 0$

1° caso $\bar{z}=0$ $\quad a - ib = 0 \Rightarrow a=0 \; b=0$

$\Rightarrow z_1 = 0$

2° caso $z^2 - z + 1 = 0$

$$z_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Calcolo $(z_i^3 + \bar{z}_i)^3$ per $i = 1,2,3$

- $0 = 1$ NO z_1 non è soluzione

$$z_2^3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1 - \cancel{i3\sqrt{3}} + \cancel{3i\sqrt{3}} - 9}{8} = -1$$

$z_2^3 + \bar{z}_2 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ no alla terza fa 1

$$z_3^3 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1 - 9 - 3i\sqrt{3} + 3i\sqrt{3}}{8} = -1$$

$z_3^3 - \bar{z}_3 = -1 - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ne alla terza fa 1

Soluzioni z_2 e z_3

ESERCIZIO

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\underbrace{\frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!}}_{a_{n+1}} \underbrace{\frac{(2n)!}{n!\,n!}}_{a_n^{-1}} = \frac{(n+1)\cancel{n!}(n+1)\cancel{n!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}} \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{n!}\cancel{n!}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}(1+\overset{\to 0}{\frac{2}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}})}{4\cancel{n^2}(1+\underset{\to 0}{\frac{6}{4n^2}}+\underset{\to 0}{\frac{2}{4n^2}})}$$

$= \frac{1}{4} < 1$

$\Rightarrow$ il limite fa 0

ESERCIZIO

$$\lim_{n\to+\infty} (5n)! - (3n)!\,(2n)! = (5n)!\left(1 - \underbrace{\frac{(3n)!\,(2n)!}{(5n)!}}_{\to 0}\right) \to +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(3n)!\,(2n)!}{(5n)!} \quad *$$

$$\frac{(3n+3)!\,(2n+2)!}{(5n+5)!} \cdot \frac{(5n)!}{(3n)!\,(2n)!} =$$

$$\frac{\overbrace{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}^{108}\cancel{(3n)!}\,(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)\cancel{(5n)!}} \cdot \frac{\cancel{(5n)!}}{\cancel{(3n)!}\cancel{(2n)!}} \to \text{qualcosa} < 1$$

5^5

quindi $* \to 0$

ESERCIZIO DIFFICILE

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{2^n}}{(2^n)!}$$

SUGGERIMENTO, usare il criterio del rapporto

vi ritrovate a calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!^{2^{n+1}}}{(2^{n+1})!} \cdot \frac{(2^n)!}{(n!)^{2^n}}$

Osservare (o meglio dimostrare per induzione) che espandendo il fattoriale come sotto

$$(2^{n+1})! = \underbrace{(2^{n+1})(2^{n+1}-1)(2^{n+1}-2)\ldots\ldots(2^n+1)}(2^n)!$$

i termini nella parentesi viola sono 2^n

La soluzione completa nella prossima pagina, prima provateci da soli.

Dal suggerimento

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^{2^{n+1}}}{(2^{n+1})!} \cdot \frac{(2^n)!}{(n!)^{2^n}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^{2^{n+1}}}{(2^{n+1})(2^{n+1}-1)\cdots(2^n+1)\cancel{(2^n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2^n)!}}{(n!)^{2^n}}$$

ora $\underbrace{(2^{n+1})}_{\leq 2^{n+1}}\underbrace{(2^{n+1}-1)}_{\leq 2^{n+1}}\cdots\underbrace{(2^n+1)}_{\leq 2^{n+1}} \leq 2^{n+1}\cdot 2^n = 2^{2n+1}$

2^{n+1}: tutti minori di 2^{n+1}

2^n: Numero termini

Quindi $\frac{1}{2^{2n+1}} \leq \frac{1}{(2^{n+1})(2^{n+1}-1)\cdots(2^n+1)}$

inoltre

$$\frac{((n+1)!)^{2^{n+1}}}{(n!)^{2^n}} \geq \frac{(n!)^{2^{n+1}}}{(n!)^{2^n}} \underset{2^{n+1}\geq 2^n+1}{\geq} \frac{(n!)^{2^n+1}}{(n!)^{2^n}} = n!$$

Mettendo tutto insieme il limite è maggiore o uguale

di $\frac{n!}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\frac{n!}{4^n}$ e questo va a $+\infty$ quindi tutto il limite vale $+\infty$

Criterio rapporto $\frac{(n+1)!}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n!} = \frac{n}{4} \to +\infty$

* Se qualcuno trova un modo più facile sono contento di ascoltarlo