TUTORATO ANALISI 1

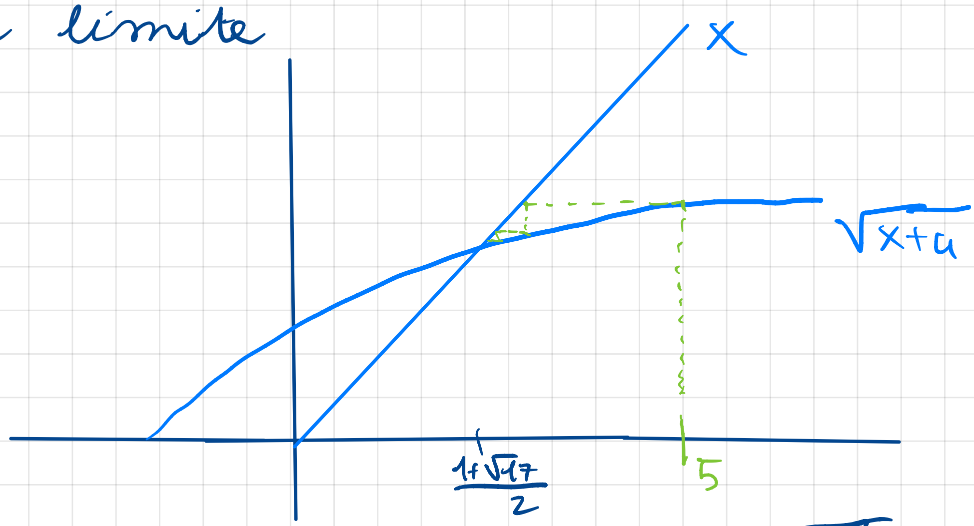
6/11/2020

1 h

Studiare la successione per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n + 4} \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

La strategia consiste nel disegnare il grafico di f dove f è tale che $a_{n+1} = f(a_n)$, in questo caso $f(x) = \sqrt{x+4}$, cercare le intersezioni di $f(x)$ con la retta $y = x$ e cercare (tramite il diagramma a ragnatele) di "indovinare" il limite



Per i punti fissi devo risolvere $\sqrt{x+4} = x \rightarrow x+4 = x^2$

$\rightarrow x = \frac{+1 \pm \sqrt{17}}{2}$ l'unico punto fisso è $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

($\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ non è soluzione perché x deve essere positivo)

Dal disegno intuiamo che a_n è monotona decrescente e converge a $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Dimostriamolo in 4 passi.

i) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1+\sqrt{17}}{2} \leq a_n \leq 5$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} \leq a_n$ (monotona decrescente)

iii) esiste $\lim_{n \to +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$

iv) $L = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

Dimostrazione

i) Per induzione, passo base $n=1$. Devo dimostrare che

$\frac{1+\sqrt{17}}{2} \leq a_1 \leq 5$ ma $a_1 = 5$ quindi è vero.

Passo induttivo. Supponendo $\frac{1+\sqrt{17}}{2} \leq a_n \leq 5$ per un certo n

dimostro $\frac{1+\sqrt{17}}{2} \leq a_{n+1} \leq 5$ per $n+1$

Vediamo $a_{n+1} \leq 5$. $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 4} \underset{\substack{\uparrow \\ a_n \leq 5}}{\leq} \sqrt{5+4} = 3 \leq 5$ OK

Vediamo $a_{n+1} \overset{?}{\geq} \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 4} \overset{?}{\geq} \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ mi chiedo se è vero

elevo al quadrato e ho $a_n + 4 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hp induttiva}}}{\geq} \frac{1+\sqrt{17}}{2} + 4 = \frac{9+\sqrt{17}}{2}$

quindi $(a_{n+1})^2 \geq \frac{9+\sqrt{17}}{2}$

è vero che $\frac{9+\sqrt{17}}{2} \geq \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2$ svolgo il quadrato

e viene $\frac{18+2\sqrt{17}}{2} = \frac{9\ \sqrt{17}}{2}$ quindi sono uguali

ho dimostrato che $(a_{n+1})^2 \geq \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 \Rightarrow a_{n+1} \geq \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

che è quello che volevo

ii) $a_{n+1} \leq a_n$ scrivo la ricorrenza

$\sqrt{4+a_n} \leq a_n$ è una disequazione, cerco di risolverla

$4 + a_n \leq a_n^2$. $a_n^2 - a_n - 4 \geq 0$ Chiamo $X = a_n$

e ho $x^2 - x - 4 \geq 0$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ quindi le soluzioni

sono (tenendo conto che deve essere $x \geq 0$)

$x \geq \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ cioè $a_n \geq \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ che è vera per il passo i).

iii) Per il passo ii) a_n è monotona decrescente

quindi $a_n \to L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ma per i) a_n è limitata

quindi $L \neq -\infty$.

iv) Per 3 sappiamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ quindi

$L = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{a_n + 4} = \sqrt{L+4}$ quindi $L = \sqrt{L+4}$ cioè

$L = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

ESEMPI SUI PUNTI DI ACCUMULAZIONE

DEF: $A \subseteq \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$, x si dice di accumulazione per A se $\forall U$ intorno di x vale $A \cap (U - \{x\}) \neq \emptyset$

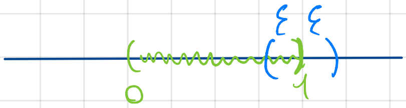
IMPORTANTE

Versione operativa

$A \subseteq \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$, x si dice di accumulazione per A se $\forall \varepsilon > 0$ vale $A \cap \left((x-\varepsilon, x+\varepsilon) - \{x\} \right) \neq \emptyset$

ESEMPIO $A = (0,1)$ è vero che $x = 1$ è di accumulazione

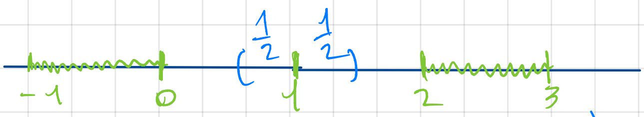
Sì appena mi muovo da 1 interseco A
(osserviamo che $1 \notin A$)



$\forall \varepsilon > 0$ $(0,1) \cap \left((1-\varepsilon, 1+\varepsilon) - \{1\} \right) \neq \emptyset$

ESEMPIO $A = [-1,0] \cup \{1\} \cup [2,3]$ $x = 1$ è di accumulazione?

NO, mi basta trovare un ε che falsifica la definizione, ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{2}$



$$A \cap \left(\left(1-\tfrac{1}{2}, 1+\tfrac{1}{2}\right) - \{1\} \right) = \emptyset$$

È fondamentale aver tolto 1 altrimenti veniva

$$A \cap \left(\left(1-\tfrac{1}{2}, 1+\tfrac{1}{2}\right) \right) \neq \emptyset$$ (viene proprio $\{1\}$)

Teorema di unicità del limite.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ $f: A \longmapsto \mathbb{R}$ x_0 di accumulazione per A, se esiste $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ allora è unico.

DIM: Per assurdo

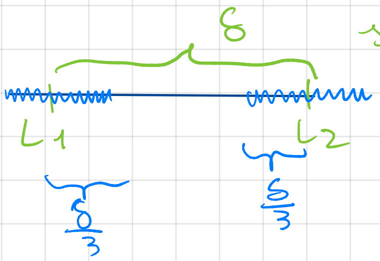
(Ossia nego la tesi e cerco una contraddizione, se non riesco a dimostrare che una cosa è vera dimostro che non può essere falsa).

Negare la tesi vuol dire che $\exists\, L_1 \neq L_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = L_1$ $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = L_2$. Ci sarebbero tanti casi, facciamone uno gli altri sono analoghi (supponiamo $x_0, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$)

$\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = L_1 \Rightarrow \forall V_1$ intorno di L_1 esiste U_1 intorno di x_0 tale che $f(U_1) \subseteq L_1$

$\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = L_2 \Rightarrow \forall V_2$ intorno di L_2 esiste U_2 intorno di x_0 tale che $f(U_2) \subseteq V_2$

U_1 e U_2 li posso scegliere come voglio ad esempio disgiunti



scelgo $V_1 = (L_1 - \frac{\delta}{3}, L_1 + \frac{\delta}{3})$ $V_2 = (L_2 - \frac{\delta}{3}, L_2 + \frac{\delta}{3})$

I corrispettivi U_1 e U_2 saranno della forma

$U_1 = (x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1)$ $U_2 = (x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2)$

Ci sono 3 casi

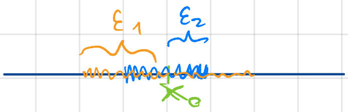
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow U_1 = U_2$ quindi $f(U_2) \subseteq V_2$ ma $f(U_2) = f(U_1) \subseteq V_1$

$\Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ perché contiene $f(U_2)$

assurdo

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ allora $U_1 \supseteq U_2$ quindi $f(U_2) \subseteq f(U_1) \subseteq V_1$

$f(U_2) \subseteq V_2$ $\Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ perché contiene $f(U_2)$



$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ allora $U_1 \subseteq U_2$ e nello stesso modo

$f(U_1) \subseteq f(U_2) \subseteq V_2$ $f(U_1) \subseteq V_1$ $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ perché contiene $f(U_1)$

RECAP SULL'INDUZIONE

$P(n)$ = predicato (frase che può essere vera o falsa) che dipende da $n \in \mathbb{N}$

PRINCIPIO INDUZIONE

Se $P(n_0)$ è vera per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$ (Passo base)

e se $\forall n \geq n_0$ vale che se $P(n)$ è vera allora $P(n+1)$ è vera (Passo induttivo)

allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$

Perché funziona? Supponiamo di aver dimostrato

che $P(0)$ è vera allora anche $P(1)$ è vera (Passo induttivo)

ma $P(1)$ vera $\Rightarrow P(2)$ vera $\Rightarrow P(3)$ vera .... sono tutte vere

ESEMPIO Dimostrare che vale $1+2+3+ \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \geq 1$

Il predicato è $P(n)$: $1+2+ \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Passo base: devo vedere che $P(1)$ è vera ma $P(1)$: $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ OK

Passo induttivo: Assumo $P(n)$ vera per un certo n

e la dimostro per $n+1$, devo vedere che $P(n+1)$ è vera

ossia $P(n+1) = 1+2+ \dots + n + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \overset{\text{conto}}{=} \frac{n^2+3n+2}{2}$

ma $1+2+3+ \dots + n+n+1 = (1+2+ \dots + n) + n+1 \underset{P(n) \text{ è vera}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n^2+3n+2}{2}$

quindi $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$