Dispense di Matematica: Logaritmi

1 Definizione e prime proprietà

Fino ad adesso abbiamo incontrato equazioni esponenziali che si riducevano alla stessa base da entrambe le parti dell'uguale. Ma nessuno ci vieta di trovarci di fronte a un'equazione dei questa forma

$$a^x = b$$

dove $b > 0$ perchè essendo il risultato di un esponenziale non può essere altrimenti,$a > 0$ poichè è il campo di esistenza della funzione esponenziale e inoltre consideriamo anche il caso $a \neq 1$, perchè in quel caso avrebbe soluzione solo se anche b fosse uguale a 1. Poste queste condizioni definiamo la soluzione dell'equazione come:

$$x = \log_a b$$

1.1 Costruzione grafico logaritmo

Con le considerazioni appena fatte otteniamo quindi che la funzione logaritmica è la funzione inversa della funzione esponenziale: quindi per ottenere il graficodi $y = \log_a x$ devo fare il simmetrico di $y = a^x$ rispetto alla retta $y = x$.

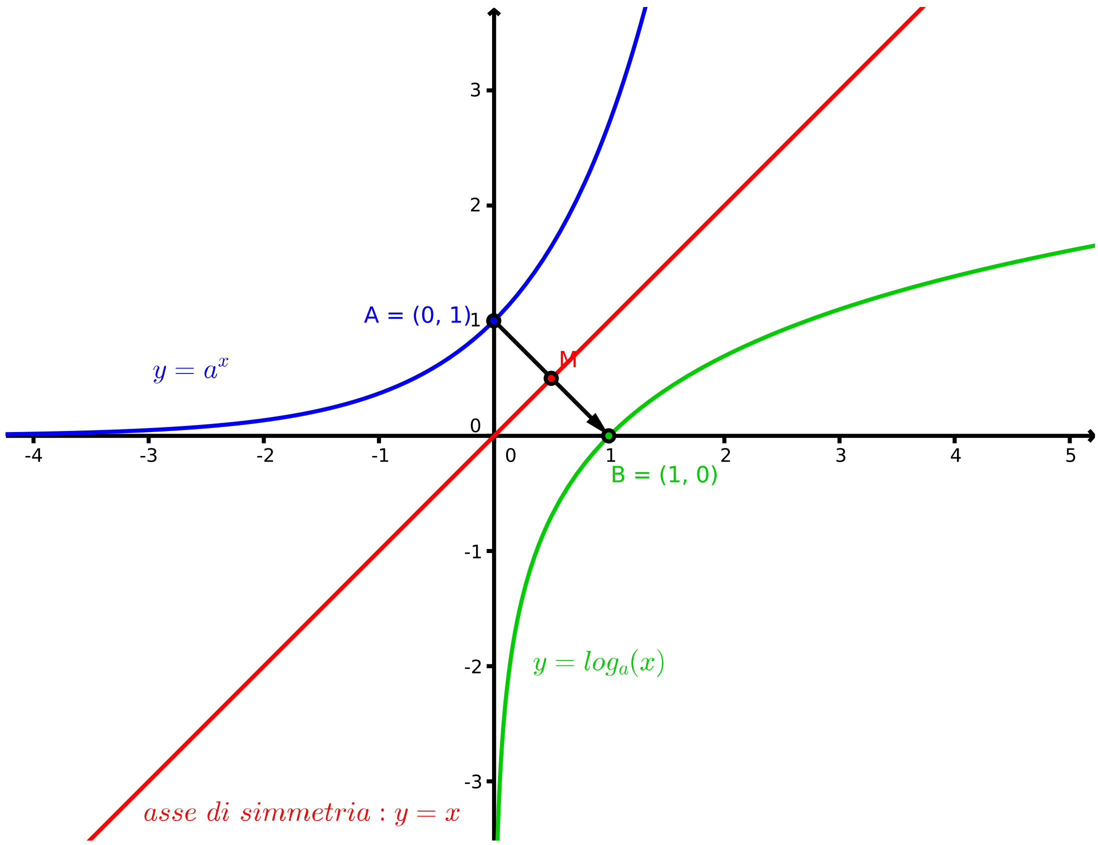

Figure 1: Grafico costruzione del Logaritmo $a > 1$

Abbiamo quindi dalla definizioni, e dal fatto che la nostra funzione è ottenuta come simmetria assiale rispetto alla retta $y = x$:

- $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$

Inoltre la funzione $y = \log_a x$, in quanto funzione inversa della funzione esponenziale, conserva alcune proprietà che vedremo ci risulteranno molto utili:

- è iniettiva
- è crescente se $a > 1$
- è descrescente se $0 < a < 1$

2 Proprietà Fondamentali

In questa sezione andremo ad analizzare le principali proprietà dei logaritmi, che andremo ad utilizzare successivamente per la risoluzione di espressioni, equazioni e disequazioni. Iniziamo, intanto, con andare ad enunciarle:

1. $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$ $\qquad a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$
2. $\log_a b - \log_a c = \log_a(b/c)$ $\qquad a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$
3. $\log_a(b^n) = n \cdot \log_a b$ $\qquad a > 0, a \neq 1, b > 0$
4. $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$ $\qquad a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$

Voglio porre attenzione alla proprietà 3 che molto spesso è causa di errori come questo:

$$\log_a(x^2) = 2 \cdot \log_a x$$

è facile notare l'errore, infatti basti osservare che il dominio delle due funzioni non coincide: la prima è definita per $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$; mentre la seconda è definita per $x > 0$. Infatti la vera ugulianza è:

$$\log_a(x^2) = 2 \cdot \log_a(|x|)$$

Notiamo inoltre che la numero 4 è nota come *Formula di cambiamento di base* e più comunemente si presenta nella seguente forma:

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$$

3 Equazioni Logaritmiche 1

Adesso andremo ad analizzare la risoluzione delle equazioni Logaritmiche. Vediamo che la ricerca della soluzione si può ridurre a tre passaggi:

1. Discutere *le Condizioni di Esistenza* di tutti i logaritmi presenti, ed eventuali altre funzioni.
2. Usare le proprietà dei logaritmi per ridurre l'equazione nella forma $\log_a(A(x)) = \log_a(B(x))$
3. Risolvere infine l'equazione $A(x) = B(x)$ prendendo solo le soluzioni accettate al punto 1

Voglio sottolineare come molto spesso gli studenti dimentichino il punto 1, vanificando così tutto il lavoro svolto. Si noti inoltre, che il punto 2, chiede di ricondursi da entrambi i lati dell'uguale alla stessa base del logaritmo che, come regola indicativa, potremmo dire sia più conveniente scegliere sempre la base più bassa. Inoltre per comprendere meglio questo punto andremo a svolgere un intero esercizio, dove utilizzeremo le varie proprietà. Per quanto riguarda il punto 3, l'equazione ottenuta può presentarsi di qualsiasi forma a seconda degli alrgomenti dei logaritmi.
Andiamo adesso a svolgere la seguente equazione

$$\log_2(2x-1) - 2\log_4(x+1) = 2 + \log_2(x-2) - \log_2(2x+2)$$

Andando ad applicare lo schema iniziando a impostare le condizioni d'esistenza della nostra equazione. Ricordiamo quindi che ogni argomento del logaritmo deve essere positivo e notiamo che non ci sono altre funzioni a creare problemi. Otteniamo quindi le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ x+1>0 \\ x-2>0 \\ 2x+2>0 \end{cases} \tag{1}$$

Questo sistema ha come soluzione $x > 2$ quindi significa che non possiamo accettare soluzioni che non rispettano questa condizione. Inoltre in questa condizione tutti i logariti hanno argomento positivo quindi mi permette di applicare in tutta libertà tutte le proprietà. La prima cosa da fare è portare tutti i logaritmi nella stessa base.

- Usando la formula di cambiamento di base $\log_4(x+1) = \frac{\log_2(x+1)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(x+1)}{2}$
- mentre ricordando che $\log_a a = 1$ e la proprietà 3 si ha che $2 = 2\cdot 1 = 2\cdot\log_2 2 = \log_2(2^2) = \log_2 4$

Con queste operazioni iniziali giungiamo quindi a questo punto:

$$\log_2(2x-1) - \log_2(x+1) = \log_2 4 + \log_2(x-2) - \log_2(2x+2)$$

Adesso potremmo essere tentati di applicare contemporaneamente le proprietà 1 e 2, ma se, usando le proprietà delle equazioni "trasportiamo" i logaritmi che hanno di fronte un segno $-$ dalla parte opposta dell'uguale, quando andremo a usare le proprietà dei logaritmi eviteremo che si formino delle frazioni algebriche. In definitiva abbiamo:

$$\log_2(2x-1) + \log_2(2x+2) = \log_2 4 + \log_2(x-2) + \log_2(x+1)$$

Quindi andando adesso ad utilizzare la proprietà 1 otteniamo:

$$\log_2[(2x-1)(2x+2)] = \log_2[4(x-2)(x+1)]$$

Dove:

- $A(x) = (2x-1)(2x+2)$
- $B(x) = 4(x-2)(x+1)$

Utilizzando l'iniettività del logaritmo dobbiamo quindi risolvere l'equazione di secondo grado:

$$\begin{aligned} &(2x-1)(2x+2) = 4(x-2)(x+1) \\ &4x^2+2x-2 = 4x^2-4x-8 \\ &6x+6=0 \\ &x=-1 \end{aligned} \tag{2}$$

Quindi ricordandosi che le condizioni di esistenza erano $x > 2$ non possiamo accettare la nostra soluzione, dobbiamo quindi concludere che l'equazione non ammette soluzione. Questo esercizio mostra quindi l'importanza del primo passaggio, senza il quale saremmo giunti ad una conclusione sbagliata.

4 Equazioni Logaritmiche 2

In questa sezione andremo ad analizzare un altro tipo di equazioni, mettendo in luce il fatto che la nostra variabile non sempre è la x ma ad esempio può essere $\log(x)$. Ma prima di fare ciò vorrei sottolineare che, con le tecniche sviluppate nella sezione precedente, una volta che conosciamo il valore di $\log_a(x)$, sappiamo anche ricavare il valore dell'incognita x. Prendiamo quindi in cosiderazione l'equazione:

$$\log_a x = c$$

E con il seguente procedimeto $c = c \cdot 1 = c \cdot \log_a a = \log_a(a^c)$, si ricava che:

$$\begin{aligned} &\log_a x = \log_a(a^c) \\ &x = a^c \end{aligned} \tag{3}$$

Quindi avendo visto questa cosa, possiamo adesso andare ad affrontare equazoni ben più complesse tipo la seguente:

$$\log^2 x - \log x - 2 = 0$$

Dove con le solite considerazioni ricaviamo che le condizioni di esistenza sono $x > 0$. Adesso ci accorgiamo che questo tipo di equazioni non le abbiamo mai incontate, ma se chiamiamo $t = \log x$, la nostra equazione diventa di secondo grado nella variabile t:

$$t^2 - t - 2 = 0$$

e con la formula nota si ricavano le soluzioni $t_1 = 2$,$t_2 = -1$. Quindi adesso ricordando che $t = \log x$ possiamo andare a ricavare la variabile x.

$$\begin{array}{ll} \log x = 2 & \log x = -1 \\ \log x = \log(10^2) & \log x = \log(10^{-1}) \\ x = 100 & x = \frac{1}{10} \end{array} \tag{4}$$

Notiamo che entrambe le soluzioni rispettano le condizioni di esistenza e quindi sono accettate.

5 Disequazioni Logaritmiche

Adesso andremo ad analizzare la soluzione delle disequazioni logaritmiche. Come abbiamo fatto in precedenza cercheremo di schematizzare la risoluzione, dando delle regole che possono aiutare a giungere ad una soluzione.

- Discutere *le Condizioni di Esistenza* di tutti i logaritmi presenti, ed eventuali altre funzioni.
- Usare le proprietà dei logaritmi per ridurre l'equazione nella forma $\log_a(A(x)) \geq \log_a(B(x))$

Fino a questo punto non notiamo grandi differenze con lo svolgimento delle equazioni. Però adesso ci soffermiamo a fare una piccola osservazione: se ho una funzione crescente $f(x)$, quando gli assegno due valori $a < b$, questa mi restituisce due valori $f(a) < f(b)$. Quindi poiche noi ci stiamo chiedendo quando $f(a) < f(b)$ la risposta sarà quando $a < b$. Mentre se ho una funzione $g(x)$ decrescente e gli assegno $a < b$, questa restituisce $g(a) > g(b)$. Quindi se la nostra domanda è quando $g(a) < g(b)$, la risposta risulta $a > b$ (ovvero si inverte il segno della disegualianza). Tornando quindi alla nostra disequazione abbiamo

- Risolviamo $A(x) \geq B(x)$ se $a > 1$ perchè $y = \log_a x$ è crescente in questo caso
- Risolviamo $A(x) \leq B(x)$ se $0 < a < 1$ perchè $y = \log_a x$ è decrescente in questo caso

Ricordiamo inoltre di poter accettare solo le soluzioni che stanno all'interno delle Condizioni d'esistenza. Andiamo adesso ad analizzare un intero esercizio:

$$log_{\frac{3}{4}}(x^2 - 1) < 2$$

Come prima cosa dobbiamo, come sempre, discutere le condizioni di esistenza: nel nostro caso abbiamo solo un logaritmo quindi dobbiamo solo chiedere che $x^2 - 1 > 0$ quindi $x < -1 \vee x > 1$. Inoltre non tutti gli elementi sono posti in forma logaritmica, quindi come le consuete operazioni si ottine
$2 = 2 \cdot log_{\frac{3}{4}} \frac{3}{4} = log_{\frac{3}{4}} (\frac{3}{4})^2$ Giungiamo quindi:

$$log_{\frac{3}{4}}(x^2 - 1) < log_{\frac{3}{4}} \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Adesso, poichè $0 < \frac{3}{4} < 1$, la funzione logaritmo è decrescente,quindi inverte il segno della disequazione: dobbiamo allora andare a risolvere:

$$\begin{aligned}
&x^2 - 1 > \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 \\
&x^2 - 1 - \tfrac{9}{16} > 0 \\
&x^2 - \tfrac{25}{16} > 0 \\
&x < -\tfrac{5}{4} \vee x > \tfrac{5}{4}
\end{aligned} \tag{5}$$

Come sempre non dobbiamo però dimenticarci delle condizioni di esistenza. Quindi dobbiamo adesso risolvere

$$\begin{cases} x < -\frac{5}{4} \vee x > \frac{5}{4} \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases} \tag{6}$$

Abbiamo quindi che la soluzione dell'equazione è $x < -\frac{5}{4} \vee x > \frac{5}{4}$.