Dispense di Matematica: Esponenziali

1 Definizione Funzione Esponenziale

Vogliamo adesso andare ad estendere la definizione di elevamento a potenza fino ad ora conosciuta. Vogliamo infatti poter scrivere a^x con $x \in \mathbb{R}$. Fino ad ora, infatti, i nostri esponenti erano solo ed esclusivamente delle frazioni, mentre vogliamo dare senso a delle scritture buffe tipo π^π. Purtroppo non abbiamo gli strumenti necessari per comprendere a fondo come mai sia possibile fare una cosa del genere, ma prendiamo per buono che si possa fare e andremo a studiare tutte le proprietà di $y = a^x$ con $a > 0\, x \in \mathbb{R}$, che chiameremo *Funzione Esponenziale*.

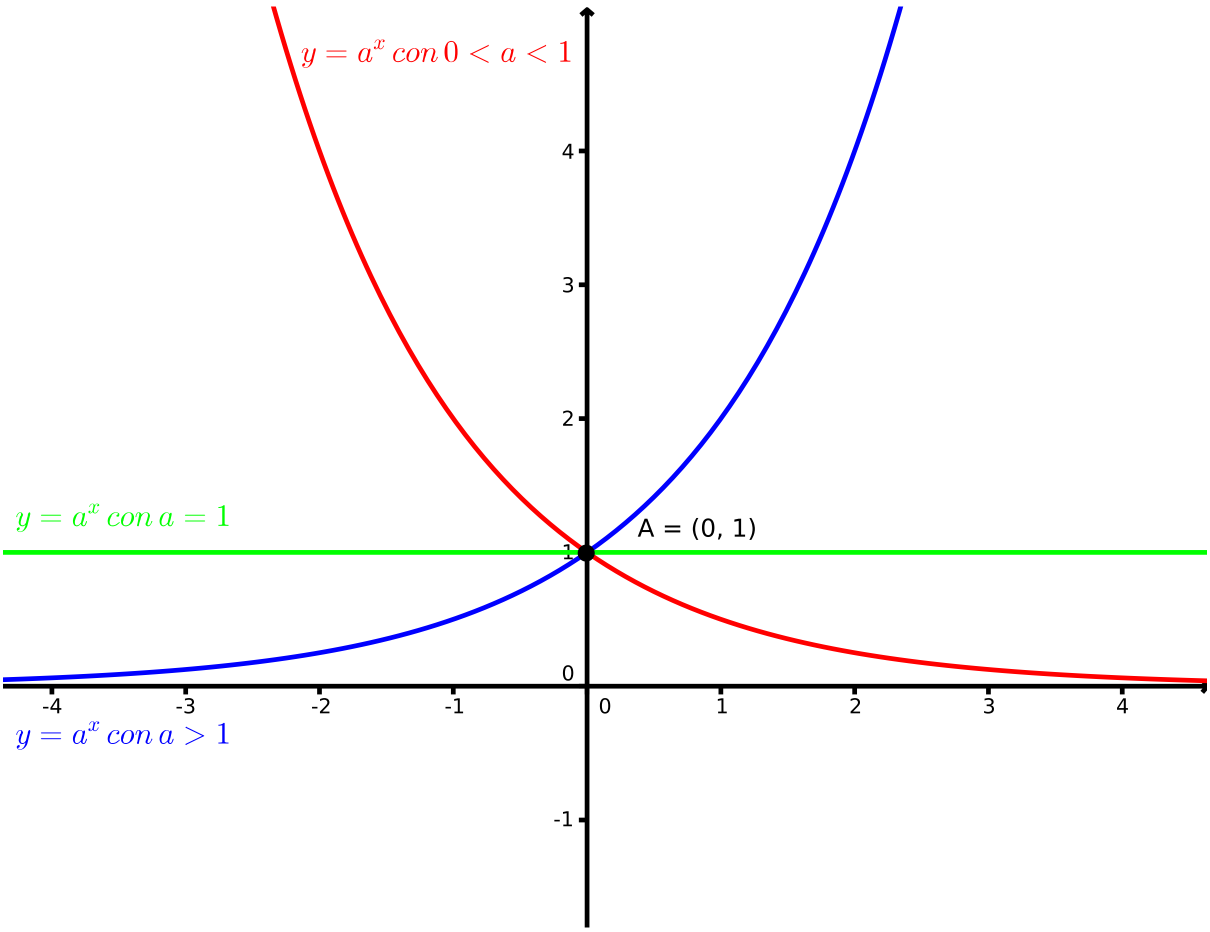

Figura 1: Grafico di tutti i possibili casi della finzione esponenziale

2 Proprietà della Funzione Esponenziale

Vogliamo adesso analizzare le principali proprità della funzione appena costruita. Per fortuna, l'aver esteso il mio dominio a $\mathbb{R}$ non mi ha fatto perdere tutte le proprietà delle potenze che andiamo a ripetere:

- $a^0 = 1 \quad \forall a \neq 0$
- $a^1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \forall a > 0 \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \forall a > 0 \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \quad \forall a > 0\, b > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad \forall a > 0\, b > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad \forall a > 0 \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $(\frac{a}{b})^{-x} = (\frac{b}{a})^x \quad \forall a > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$
- $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

Oltre a queste, a noi serviranno anche altre importanti proprietà della funzione esponenziale:

- $a^x > 0 \quad \forall a > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$
- $y = a^x$ è iniettiva $\quad \forall a > 0\, a \neq 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$
- $y = a^x$ è crescente $\quad \forall a > 1$
- $y = a^x$ è decrescente $\quad \forall\, 0 < a < 1$

Quindi per fortuna la funzione esponenziale non aggiunge proprietà che già non conoscevamo.

3 Equazioni Esponenziali

Andremo adesso ad analizzare alcuni tipi di equazioni esponenziali, mostrando che, per fortuna, le tipologie da affrontare non sono molteplici

3.1 Tipo 1:Riduzione alla stessa base

Andiamo a vedere le equazioni che si presentano nella forma più semplice: infatti una volta scelta la base comune a tutti gli esponenziali, che mediamente è la più piccola, si applicano le proprietà delle potenze, per arrivare ad avere un'equazione della forma:

$$a^{\mathrm{A}(x)} = a^{\mathrm{B}(x)}$$

fortunamente una volta giunti a questo punto basta risolvere l'equazione $\mathrm{A}(x) = \mathrm{B}(x)$ perchè la funzione esponenziale è iniettiva. Svolgiamo adesso un esercizio che può sembrare a prima vista molto complicato, ma in realtà è di facile risoluzione. Prendiamo quindi:

$$\frac{5^{1+x} \cdot 25^{3-x}}{125^{2-x}} = \frac{1}{25}$$

Notiamo che la base comune è ovviamente 5 quindi andiamo a portare tutti gli esponenziali in quella base:

$$\frac{5^{1+x}\cdot(5^2)^{3-x}}{(5^3)^{2-x}}=\frac{1}{5^2}$$

Adesso andando ad usare le proprietà delle potenze:

$$5^{1+x+2\cdot(3-x)-3\cdot(2-x)}=5^{-2}$$

Andiamo quindi a risolvere:

$$\begin{gathered}1+x+6-2x-6+3x=-2\\ 2x=-3\\ x=-\tfrac{3}{2}\end{gathered}$$

3.2 Tipo 2:Equazioni di primo grado

Una delle cose più difficili da capire quando si inizia ad affrontare equazioni con funzioni è che non subito bisogna preccuparsi di ricavare la x. Ovvero molto spesso ci dobbiamo preoccupare prima di ricavare i valori di a^x e poi andare a ricavare la x. Chiariamo meglio questo concetto con un esempio:

$$2^{x+2}-2^{x-1}-2^{x-2}=26.$$

Guardando questa equazione ci rendiamo subito conto che, a differenza della precedente, non è possibile ricavare una struttura del dito $a^{\mathrm{A}(x)}=a^{\mathrm{B}(x)}$, a causa della presenza delle somme e delle sottrazioni che non mi permettono di usare le proprietà delle potenze. Allora cerchiamo di isolare 2^x utilizzando le proprietà delle potenze dato che 2 ha come esponenti delle somme e sottrazioni. Otteniamo quindi:

$$2^{x+2}=2^2\cdot 2^x,\quad 2^{x-1}=\frac{2^x}{2},\quad 2^{x-2}=\frac{2^x}{2^2}.$$

Andando quindi a sostituire nell'equazione si ottiene:

$$4\cdot 2^x-\frac{2^x}{2}-\frac{2^x}{4}=26.$$

Andiamo quindi a focalizzarci su 2^x. Per facilitare la situazione conviene sostituire $s^x=t$ per ottenere un'equazione in t che risolveremo:

$$\begin{gathered}4t-\frac{t}{2}-\frac{t}{4}=26\\ \frac{16t-2t-t}{4}=26\\ \frac{13t}{4}=26\\ t=26\frac{4}{13}\\ t=8.\end{gathered}$$

Adesso basta ricordare che $t=2^x$ e otteniamo:

$$\begin{gathered}2^x=8\\ 2^x=2^3\\ x=3\end{gathered}$$

Abbiamo quindi risolto l'equazione.

3.3 Tipo 3: Equazioni di secondo grado o fratte

Seguendo l'idea che l'ingognita della nostra equazione iniziale non sia x, ma bensì $t = a^x$ notiamo che $a^{2x} = (a^x)^2 = t^2$, mentre $a^{-x} = (a^x)^{-1} = t^{-1} = \frac{1}{t}$. Quindi in generale se notiamo che un esponenziale ha un esponente dobbio dell'altro, oppure l'opposto la situazione che si presenta è quella descritta sopra. Vediamo cosa comporta questa osservazione in un esercizio:

$$9^x - 3 = 2 \cdot 3^x.$$

quando abbiamo più basi differenti la scelta ricade sulla base più piccola, quindi il $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$. Abbiamo quindi ottenuto l'esponenziale con l'esponente doppio, siamo quindi pronti per fare la sostituzione detta sopra cioè $3^x = t$ e $3^{2x} = t^2$:

$$t^2 - 3 = 2t$$
$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado in t otteniamo le due soluzioni $t = 3$ e $t = -1$. Dobbiamo adesso ricordarci che $t = 3^x$ da cui:

$$\begin{gathered} t = 3 \quad \vee \quad t = -1 \\ 3^x = 3 \quad \vee \quad 3^x = -1 \\ x = 1 \quad \vee \quad \emptyset \end{gathered}$$

Dove la seconda equazione è impossibile perchè un esponenziale non può mai essere uguale a una quantità negativa, perch'è l'esponenziale è sempre positivo

4 Disequazioni Esponenziali

Per risolvere una disequazione esponenziale dobbiamo inizialmente ricondurci, utilizzando sempre le proprietà delle potenze, a una delle seguenti situazioni:

$$a^{\mathrm{A}(x)} < a^{\mathrm{B}(x)}, \quad a^{\mathrm{A}(x)} > a^{\mathrm{B}(x)}, \quad a^{\mathrm{A}(x)} \leq a^{\mathrm{B}(x)}, \quad a^{\mathrm{A}(x)} \geq a^{\mathrm{B}(x)}.$$

Fino a questo punto non notiamo grandi differenze con lo svolgimento delle equazioni. Però adesso ci soffermiamo a fare una piccola osservazione: se ho una funzione crescente $f(x)$, quando gli assegno due valori $a < b$, questa mi restituisce due valori $f(a) < f(b)$. Quindi poichè noi ci stiamo chiedendo quando $f(a) < f(b)$ la risposta sarà quando $a < b$. Mentre se ho una funzione $g(x)$ decrescente e gli assegno $a < b$, questa restituisce $g(a) > g(b)$. Quindi se la nostra domanda è quando $g(a) < g(b)$, la risposta risulta $a > b$ (ovvero si inverte il segno della disegualianza). Tornando quindi alla nostra disequazione abbiamo

- Risolviamo $\mathrm{A}(x) \geq \mathrm{B}(x)$ se $a > 1$ perchè $y = a^x$ è crescente in questo caso
- Risolviamo $\mathrm{A}(x) \leq \mathrm{B}(x)$ se $0 < a < 1$ perchè $y = a^x$ è decrescente in questo caso

Andiamo in mettere in pratica con un esempio:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3} < \left(\frac{5}{2}\right)^{x-2}$$

A questo punto dobbiamo scegliere un base comune, ad esempio $\frac{5}{2}$, usando quindi le proprietà delle potenze si ottiene:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3} < \left(\frac{2}{5}\right)^{2-x}$$

Adesso, ricordando che, poichè $\frac{2}{5} < 1$, il verso della disequazione deve cambiare, otteniamo:

$$x + 3 > 2 - x$$
$$2x > 2 - 3$$
$$x > -\frac{1}{2}$$

4.1 Disequazioni di secondo grado o fratte

Nel caso in cui avessimo a che fare con disequazioni con scrutture di quelle di secondo grado o fratte, valgono i ragionamenti fatti per le equazioni. Quindi una volta fatta la sostituzione $a^x = t$, si risolve la disequazione in t, e poi nelle soluzioni ottenute inseriamo di nuovo a^x al posto di t e risolviamo utilizzando gli strumenti visti sopra. Vediamo in pratica con un esempio:

$$-4^x + 3 \cdot 2^x > 2^{2x} + 2^x$$

Iniziamo con le solite proprietà delle potenze per portare tutti gli esponenziali alla stessa base:

$$-(2^2)^x + 3 \cdot 2^x > 2^{2x} + 2^x$$
$$-2^{2x} + 3 \cdot 2^x > 2^{2x} + 2^x$$

Con l'usuale sostituzione $t = 2^x$ e di conseguenza $t^2 = 2^{2x}$, otteniamo:

$$-t^2 + 3t > t^2 + t$$
$$-2t^2 + 2t > 0$$
$$t^2 - 1 < 0$$

Con le usuali tecniche di risoluzione delle disequazioni otteniamo $-1 < t < 1$, da cui risostituendo alla $t = 2^x$ arriviamo a $-1 < 2^x < 1$. Ricordiamo che:

$$-1 < 2^x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > -1 \\ 2^x < 1 \end{cases} .$$

Risolviamo quindi le due disequazioni separatamente. Partiamo da $2^x > -1$. Questa è sempre vera perchè un esponenziale è sempre positivo mentre -1 è sempre negativo quindi ha come soluzione $\forall x \in \mathbb{R}$. Per l'altra disequazione invece facciamo come sopra e si ha:

$$2^x < 1$$
$$2^x < 2^0$$
$$x < 0$$

Allora:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow x < 0$$