A.A. 2019/2020
Analisi Armonica

Vladimir Simeonov Guergiev

Appunti completi del corso

Matteo Stefanini

Questi appunti sono stati presi direttamente a lezione e non sono stati revisionati quindi è molto probabile che siano presenti degli errori. Se volete potete segnalarmi quelli presenti e vi manderò nel più breve tempo possibile la versione rimodificata. L'indice è stato creato copiandolo dal registro delle lezioni. Spero che vi siano d'aiuto e buono studio!

Indice

LEZIONE 01

Titolo nota 26/09/2019

TRASFORMATA DI FOURIER (E DISTRIBUZIONI)

ESEMPIO : $\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

FORMALMENTE

$$\hat{\theta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\, \theta(x)\, dx$$ MA FORMALMENTE NON ESISTE

STRATEGIA : REGOLARIZZARE L'INTEGRALE IN MODO CHE SIA INTEGRABILE

$$\hat{\theta}(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-i\xi x}\, dx \overset{\text{REGOLARIZZO}}{\rightsquigarrow} I_\varepsilon(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-ix\xi} \underbrace{e^{-\varepsilon x}}_{\text{TERMINE REGOLARIZZANTE}} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-i(x\xi - i\varepsilon)x}\, dx = -\frac{1}{i}\,\frac{1}{\xi - i\varepsilon}$$

ALLORA DEFINISCO

$$\hat{\theta}(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{i}{\xi - i\varepsilon} = i\,\frac{1}{\xi - i0} \quad \text{DISTRIBUZIONE}$$

DEF DATO $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) := \left(C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\right)^*$ NOTAZIONE : $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ SUPPORTO COMPATTO

CIOÈ $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ SE (Λ, φ) HA SENSO $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

AZIONE DI Λ SU φ

ESEMPIO δ_0 DELTA DI DIRAC CENTRATA IN 0

$$(\delta_0, \varphi) = \varphi(0)$$

PROBLEMA : DARE UNA DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ IN $D'(\mathbb{R}^n)$

DEF CONTINUITÀ DI Λ SIGNIFICA

CONV. UNIFORME A 0 DI φ E TUTTE LE DERIVATE

$$\left.\begin{array}{l} \text{SE } \varphi_k \in C_0^\infty,\ \partial_x^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows 0 \\ \exists\, K \text{ COMPATTO tc } \operatorname{supp} \varphi_k \subset K \end{array}\right\} \Rightarrow (\Lambda, \varphi_k) \to (\Lambda, 0)$$

ESEMPIO 2 $\frac{1}{x \pm i0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\left(\frac{1}{x+i0}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x+i\varepsilon}\varphi(x)\,dx$$

PROBLEMA in $x_0 = 0$ (LO SISTEMEREMO DOPO)

DEF: VALORE PRINCIPALE DI $\frac{1}{x}$

ESEMPIO 3 $\left(P_v\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx =$

$y = -x$

$$\Rightarrow \int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(y)}{y}\,dy =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(-x)}{x}\,dx =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx$$

QUI HA SENSO $\varepsilon \to 0$

$$\Rightarrow \left(P_v\left(\frac{1}{x}\right), \varphi(x)\right) := \int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx$$

LA $\delta_0(x)$, $\frac{1}{x+i0}$ e $P_v\left(\frac{1}{x}\right)$ SONO LEGATE DA

PROP: RELAZIONE SOKHOTSKI – PLEMELJ

$$\boxed{\frac{1}{x \pm i0} = P_v\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\,\delta_0(x)}$$

(PROVARE A DIMOSTRARLA)

POICHÉ $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ È SPAZIO VETT. $\Rightarrow$ ESEMPIO 2 $\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

CATENE DI SPAZI:

SPAZI DI LORENTZ

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p,r}(\mathbb{R}^n) \qquad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

TRASFORMATA DEL LAPLACIANO

$$(-\Delta)u = f \Rightarrow \xi^2\hat{u} = \hat{f} \Rightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2}\hat{f}(\xi)$$

$$u(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\frac{1}{|\xi|^2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\xi y}\,dy\right)d\xi$$

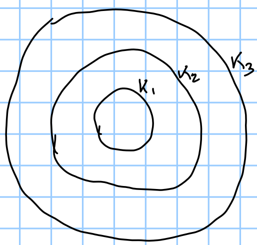
REGOLARIZZO

$$\sim (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \frac{e^{-\varepsilon|\xi|}}{|\xi|^2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-i\xi y}\, dy \right) d\xi =$$

ORA POSSO USARE FUBINI-TONELLI

$$\Rightarrow w(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \Bigg(\underbrace{\int \frac{e^{i(x-y)\xi}\, e^{-\varepsilon|\xi|}}{|\xi|^2}\, d\xi}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0}\ \frac{c}{|x-y|^{n-3}}} \Bigg) f(y)\, dy$$

TEOREMA DEI 3 CERCHI (ANA COMPLESSA)



SIANO $K_1\ K_2\ K_3$ CIRC. CONCENTRICHE

E $B_1 \subset B_2 \subset B_3$ LE RISPETTIVE PALLE

SIA f: ANALITICA IN $\mathring{B_3} \setminus B_1$

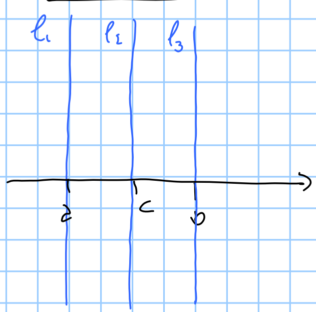
CONTINUA IN $\overline{B_3 \setminus B_1}$

E $\left| f|_{K_1} \right| \le M_1$, $\left| f|_{K_3} \right| \le M_3$

$\Rightarrow \left| f|_{K_2} \right| \le M_1^{\theta} M_3^{1-\theta}$ DOVE θ DIPENDE DAI RAPPORTI DEI RAGGI.

CI OCCUPEREMO SOLO DI INTERPOLAZIONE COMPLESSA PERCHÈ QUELLA REALE È PIÙ COMPLESSA.

CASO DI 3 RETTE : LEMMA PRINCIPALE INT. COMPLESSA.



SIANO ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 RETTE PERPENDICOLARI ASSE X

E $c = \theta a + (1-\theta) b$

SIA $f : \{ a < \operatorname{Re}(z) < b \}$ ANALITICA

f CONTINUA SU $\{ a \le \operatorname{Re}(z) \le b \}$

$\left| f|_{\ell_1} \right| \le M_1$, $\left| f|_{\ell_3} \right| \le M_3$, $\overbrace{|f(z)| \le C_1 e^{\varepsilon|\operatorname{Im}(z)|}}^{\text{IPOTESI IMPORTANTE}}$

$\Rightarrow \left| f|_{\ell_2} \right| < +\infty$

OSS L'IPOTESI SULLA LIMITATEZZA È IMPORTANTE

INFATTI $f(z) = e^{h(z)}$ $h(z) = e^{iz}$ $a = \frac{\pi}{2}$ $b = \frac{3}{2}\pi$ $c = \pi$

$z = x+iy \qquad |f(z)| = e^{-\mathrm{Re}\, h(z)}$

$h(z) = e^{i(x+iy)} = e^{-y} e^{ix} \qquad \mathrm{Re}\, h(z) = e^{-y} \cos x$

$|f(z)| = e^{-\cos x\, e^{-y}}$

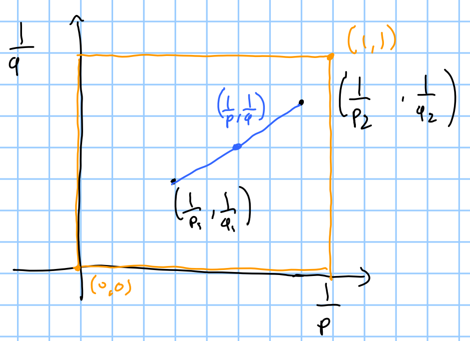
TEO: (INTERPOLAZIONE DI UN OPERATORE) RIESZ - THORIN

$T : L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{q_1}(\mathbb{R}^n)$ È LIMITATO $\left(\|T(f)\|_{L^{q_1}} \le c \|f\|_{L^{p_1}} \right)$

$T : L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{q_2}(\mathbb{R}^n)$ È LIMITATO $\qquad 1 \le p_i \le \infty$

$\Rightarrow \quad T : L^{p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{q}(\mathbb{R}^n)$ È LIMITATO $\qquad 1 \le q_i \le \infty$

CON $\quad \dfrac{1}{p} = \dfrac{\vartheta}{p_1} + \dfrac{(1-\vartheta)}{p_2} \quad$ e $\quad \dfrac{1}{q} = \dfrac{\vartheta}{q_1} + \dfrac{(1-\vartheta)}{q_2}$



□ = TUTTI VALORI AMMISSIBILI PER $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{q}$

(DICE CHE LA DIM. NON È DIFFICILE)

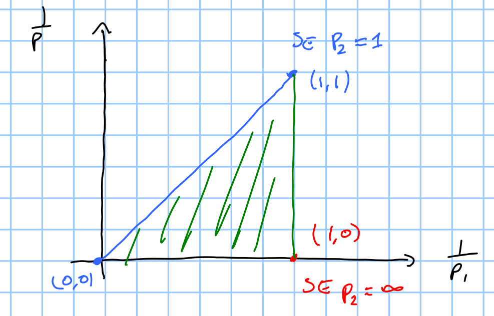
OSS T POSSIAMO VEDERLO COME OPERATORE $T : L^{p_1} + L^{p_2}$ E CON LE RESTRIZIONI A SOLO L^{p_1} e L^{p_2}

APPLICAZIONE 1

$\| f * g \|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^{p_1}} \|g\|_{L^{p_2}} \qquad 1 \le p_1, p_2 \le \infty$

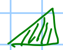
$1 + \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}$

DIM



SE $p_2 = 1$ PER R-S BASTA VERIFICARE IN (0,0) e (1,1) E LA STIMA CE L'HO SU TUTTO IL SEGMENTO

- $(0,0) \Rightarrow \|f*g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$ PROP DELLA CONVOLUZIONE
- $(1,1) \Rightarrow \|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ PROP. DELLA CONV.
- $(1,0)$ $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$

$\Rightarrow$ PER R-T HO TUTTO IL 

APPLICAZIONE 2

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = 0 \\ u(0) = f \end{cases} \Rightarrow u(t,x) = c \int \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{t^{n/2}} f(y)\,dy$$

CON TRASFORMATA

$$\partial_t \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} = 0 \Rightarrow \hat{u}(t,x) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{f}(\xi) \quad (*)$$

CONSIDERO $T(f) = u(t,x)$

1) $\|T_t(f)\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$ SEGUE DA $(*)$ E POINCARÈ

2) $\|T_t(f)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{n/2}} \|f\|_{L^1}$

ADESSO APPLICANDO R-T $\|T_t(f)\|_{L^q} \leq c(t) \|f\|_{L^p}$

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{1} \qquad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{\infty}$$

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} \Rightarrow p \text{ e } q \text{ SONO CONIUGATI}$$

$c(t) \sim \frac{C}{t^A}$ (OSS IN R-T SE AVESSI C_1 IN (1) E C_2 IN (2) ALLORA $C = C_1^\theta \cdot C_2^{1-\theta}$)

E FACENDO IL CONTO POSSO TROVARE A.

LEZIONE 02

Titolo nota 30/09/2019

INTERSEZIONE SPAZI DI BANACH (SPAZIO PIÙ PICCOLO)

$A_0 , A_1 \longrightarrow \Delta(A_0, A_1) = A_0 \cap A_1 \ni a \quad \|a\|_\Delta = \|a\|_0 + \|a\|_1$

$\| \ \|_0 \quad \|\cdot\|_1$

SOMMA DI SPAZI (SPAZIO + GRANDE POSSIBILE)

$A_0 , A_1 \longrightarrow \Sigma(A_0, A_1) \ni a = a_0 + a_1$

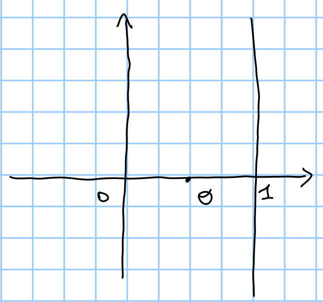
$\|\cdot\|_0 \quad \|\cdot\|_1$

$$\|a\|_\Sigma = \inf_{a_0, a_1} \left\{ \|a_0\|_0 + \|a_1\|_1 \ : \ a = a_0 + a_1 \right\}$$

CON $(A_0, A_1)_\theta$ INDICHEREMO LO SPAZIO INTERPOLAZIONE CHE STA TRA $\Delta(A_0, A_1)$ e $\Sigma(A_0, A_1)$

LEMMA: SIA $S = \{ 0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1 \}$ e 1) $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$, CONTINUA

e $|f(z)| \le c\, e^{c|\mathrm{Im}\, z|} \quad \forall z \in S$



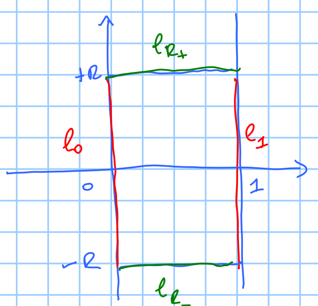
2) f è ANALITICA in $\{ 0 < \mathrm{Re}\, z < 1 \}$

3) $\exists\ C_J$ tc $|f(J + iy)| \le C_J$ CON $J = 0, 1$

ALLORA $|f(\theta)| \le C_0^{1-\theta} C_1^{\theta}$ (IN REALTÀ VALE $|f(\theta + iy)| \le C_0^{1-\theta} C_1^{\theta}$ MA A NOI BASTANO I θ REALI)

DIM PASSO I: SUPPONIAMO CHE (4) $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ z \in S}} f(z) = 0$ e (5) $C_1 = C_0 = 1$

$\Rightarrow R > 0$ tc



f ANALITICA $\Rightarrow$ ARMONICA $\Rightarrow$ RISPETTA IL PRINCIPIO DEL MASSIMO ASSUME I MAX SUL BORDO
MA SU ℓ_0 e ℓ_1 HO LA STIMA ≤ 1
SU $\ell_{R\pm}$ PER LA RICHIESTA DEL LIMITE POSSO SUPPORRE R ABB. GRANDE AFFINCHÉ LI SIA ≤ 1
QUINDI VALE LA TESI

PASSO 2 DATA $e^{\varepsilon z^2} = e^{\varepsilon(x+iy)^2} = e^{\varepsilon(x^2-y^2)+2\varepsilon ixy}$

$\Rightarrow \quad |e^{\varepsilon z^2}| = e^{\varepsilon(x^2-y^2)} \xrightarrow[\substack{y\to+\infty \\ x+iy\in S}]{} 0 \quad \Rightarrow X$ è LIMITATO

DATA $g_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon z^2} f(z)$ SODDISFA (4) $\forall \varepsilon>0$

PER SISTEMARE (5) BASTA

$g_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon z^2} f(z)\, C_0^{z-1} C_1^{-z}$ SI VERIFICA (5)

USANDO IL PRIMO PASSO A $g_\varepsilon(z)$ SI OTTIENE

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |g_\varepsilon(j+iy)| \le 1 \qquad j=0,1$$

QUINDI $|g_\varepsilon(\theta)| \le 1$

$$|e^{\varepsilon\theta^2} f(\theta)\cdot C_0^{\theta-1} C_1^{-\theta}| \le 1$$

$$|f(\theta)| \le C_0^{1-\theta} C_1^{\theta} e^{\varepsilon\theta^2} \quad \text{MANDANDO } \varepsilon\to 0$$

SI HA LA TESI

QUESTA PARTE SEGUE BERGH LÖFSTRÖM "INTERPOLATION SPACE"

DEF $f\in F(\gamma) := \left\{ f: S \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(z) \text{ CONTINUA}, |f(z)| \le C e^{c|\mathrm{Im}\, z|}, f(z) \text{ ANALITICA IN } \mathring{S}, \\ \exists\, C_j \quad |f(j+iy)| \le C_j \quad j=0,1 \end{array} \right\}$

DATI A_0 e A_1 BANACH e $\bar{A} = (A_0, A_1)$

$$(A_0, A_1)_\theta = \left\{ a\in \Sigma(A_0,A_1) \;\middle|\; a = f(\theta) \text{ con } f\in F(\bar{A}) \right\}$$

SPAZIO DI INTERPOLAZIONE

$$F(\bar{A}) = \left\{ f: S \to \Sigma(A_0,A_1) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ f(z) \text{ è CONTINUA } \|f(z)\| \le C,\ \lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in S}} f(z) = 0 \\ 2)\ f(z) \text{ ANALITICA IN } \mathring{S} \\ 3)\ f(j+iy) \in A_j \end{array} \right\}$$

(SI RISOLVE PRENDENDO UN OPERATORE SU $\Sigma(A_0,A_1)$ E CHIEDERE OPERATORE f SIA ANALITICA REALE)

ESEMPIO $(L^{p_0}, L^{p_1})_\theta = L^p$ CON

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

OSS QUINDI L'INTERPOLAZIONE COMPLESSA NON DA NUOVI SPAZI. NOI NON VEDREMO L'INTERPOLAZIONE REALE CHE VA VERSO SPAZI DI LORENTZ

RICORDIAMO RIESZ-THORIN

SE T: 1) $L^{p_0} \to L^{q_0}$ LIMITATO $\|T(f)\|_{q_0} \le C_0 \|f\|_{p_0}$

2) $L^{p_1} \to L^{q_1}$ LIMITATO $\|T(f)\|_{q_1} \le C_1 \|f\|_{p_1}$

$\Rightarrow$ $T : L^p \to L^q$ È LIMITATO

SE $\|T\|_{p,q} = \sup_{\|f\|_{L^p}} \|T(f)\|_{L^q}$

(POSSIAMO CHIEDERE T SUBLINEARE)

VALE INOLTRE
$$\|T\|_{pq} \le \|T\|_{p_0 q_0}^{1-\theta} \|T\|_{p_1 q_1}^{\theta}$$
QUANDO
$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$
$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

DIM METTENDOCI NEL CASO $(\varphi, \psi) = \int \varphi(x)\psi(x)\,dx$

$\|T\|_{p,q} = \sup (Tf, g)$ $f \in L^p$ $g \in L^{q'}$ q' DUALE DI q

$\|f\|_{L^p} = 1$ $\|g\|_{L^{q'}} = 1$

DOBBIAMO MOSTRARE CHE $|(Tf, g)| \le C \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}}$

SE $C_0 = \|T\|_{p_0 q_0}$ e $C_1 = \|T\|_{p_1 q_1}$ $\Rightarrow C = C_0^{1-\theta} C_1^{\theta}$

(LA STIMA LA DIMOSTRO PER FUNZIONI SEMPLICI E POI USO UN ARGOMENTO DI DENSITÀ).

DATE $f(x) = \sum a_j \mathbb{1}_{E_j}(x)$ e $g(x) = \sum b_k \mathbb{1}_{F_k}(x)$ $a_j = |a_j| e^{i\theta_j}$ $b_k = |b_k| e^{i\varphi_k}$

SE RIUSCIAMO A FAR VEDERE CHE $(Tf, g) = (Tf_z, g_z)\big|_{z=\theta}$

$$f_z = \sum_j |a_j|^{\frac{p}{p_z}} e^{i\theta_j} \mathbb{1}_{E_j} \qquad \text{CON } \frac{1}{p_z} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$$

$$g_z = \sum_k |b_k|^{\frac{q'}{q_z'}} e^{i\varphi_k} \mathbb{1}_{F_k} \qquad \frac{1}{q_z'} = \frac{1-z}{q_0'} + \frac{z}{q_1'}$$

f_z e g_z SONO BEN DEFINITE SU S, SONO ANALITICHE SU $\mathring{S}$

RESTA DA VEDERE LE STIME SU $\mathrm{Re}(z) = 0, 1$

- SE $z = iy$

$$|f(z)| \leq \sum_j |a_j|^{Re \frac{p}{p_z}} \mathbb{1}_{E_j} \qquad e \quad Re\left(\frac{p}{p_z}\right) = Re\, p\left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}\right) = \frac{p}{p_0}$$

$$\Rightarrow \quad |f(z)| \leq \sum_j |a_j|^{\frac{p}{p_0}} \mathbb{1}_{E_j}$$

- SE $Re\, z = 1$ $\quad Re \frac{p}{p_z} = \frac{p}{p_1} \Rightarrow |f(z)| \leq \sum_j |a_j|^{\frac{p}{p_1}} \mathbb{1}_{E_j}$

IN MODO ANALOGO TROVIAMO CHE

SU $Re\, z = 0$ $\qquad |g_z(x)| \leq \sum_k |b_k|^{\frac{q'}{q_0'}} \mathbb{1}_{F_k}(x)$

e su $Re\, z = 1$ $\qquad |g_z(x)| \leq \sum_k |b_k|^{\frac{q'}{q_1'}} \mathbb{1}_{F_k}(x)$

DA QUESTO NE DEDUCO su $Re\, z = 0$

$$\|f_z\|_{L^{p_0}}^{p_0} \leq \sum_j \left(|a_j|^{\frac{p}{p_0}}\right)^{p_0} \mathbb{1}_{E_j} = \|f\|_{L^p}^{p} \Rightarrow f_z \in L^{p_0} \text{ SE } Re\, z = 0$$

$$\|g_z\|_{L^{q_0'}}^{q_0'} \leq \sum_k \left(|b_k|^{\frac{q'}{q_0'}}\right)^{q_0'} \mathbb{1}_{F_k} = \|g\|_{L^{q'}}^{q'} \Rightarrow g_z \in L^{q_0'}$$

IN MODO ANALOGO SE $Re\, z = 1$ $\quad f_z \in L^{p_1}$ e $g_z \in L^{q_1'}$

$\Rightarrow$ DALLE IPOTESI 1) e 2)

$$\boxed{\left(T\left(f_{j+iy}\right), g_{j+iy}\right) \leq C_j \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}}} \quad (*) \quad \text{PER } j = 0, 1$$

VEDIAMO DI TROVARE ϑ t.c. $\left(T f_\vartheta, g_\vartheta\right) = \left(T f, g\right)$

MA $\quad f_\vartheta = \sum |a_j|^{\frac{p}{p_\vartheta}} e^{i\alpha_j} \mathbb{1}_{E_j}$ $\qquad$ SE SCELGO ϑ t.c. $\frac{p}{p_\vartheta} = p\left(\frac{1-\vartheta}{p_0} + \frac{\vartheta}{p_1}\right) = 1$

$$\Rightarrow \quad f_\vartheta = f \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{1}{p} = \frac{1-\vartheta}{p_0} + \frac{\vartheta}{p_1}}$$

IN MODO ANALOGO SE $\frac{1}{q'} = \frac{1-\vartheta}{q_0'} + \frac{\vartheta}{q_1'}$

$$g_\vartheta = g$$

QUINDI APPLICANDO LEMMA DELLE 3 RETTE

$$\left|\left(T f_\vartheta, g_\vartheta\right)\right| \leq \left[\sup_{Re\, z = 0} \left(T f_z, g_z\right)\right]^{1-\vartheta} \left[\sup_{Re\, z = 1} \left(T f_z, g_z\right)\right]^{\vartheta} \leq$$

$$\underset{\substack{\text{USANDO}\\(*)}}{\leq} \left(C_0 \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}}\right)^{1-\theta} \left(C_1 \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}}\right)^{\theta} = C_0^{1-\theta} C_1^{\theta} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}}$$

TORNANDO AD ALCUNE DOMANDE

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ix\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2}}{|\xi|^2} d\xi$$

OSS 1) SE $f(|\xi|)$

$$g(x) = \int e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \implies g(x) \text{ È RADIALE}$$

DATA $O \in O(n)$

$$\langle Ox, \xi \rangle = \langle x, \underset{O^T}{\overset{\|}{O^{-1}}} \xi \rangle$$

$$O^{-1}\xi = \xi' \implies |\det J| = |\det O^{-1}| = 1$$

$$g(Ox) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{ixO^{-1}\xi} \hat{f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi'} \hat{f}(O\xi') d\xi' \underset{\hat{f} \text{ È RADIALE}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi'} \hat{f}(\xi') d\xi' = g(x)$$

ALLORA g È INVARIANTE PER TRASFORMAZIONI O QUINDI È RADIALE.

2) OMOGENEITÀ

f È OMOGENEA DI ORDINE m $\quad f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$

$$\implies \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

$$\langle \lambda x, \xi \rangle = \langle x, \lambda \xi \rangle$$

$$\hat{f}(\lambda\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda x\xi} f(x) dx \underset{\lambda x = y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \frac{dy}{\lambda^n} \underset{f \text{ È } m\text{-OMOG.}}{=}$$

$$= \lambda^{-n-m} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} f(y) dy$$

$\implies \hat{f}$ È $-n-m$ OMOGENEA

QUINDI TORNANDO AL CONTO RADIALE E OMOGENEA DI ORDINE -2

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ix\xi} \, e^{-\varepsilon|\xi|^2}}{|\xi|^2} \, d\xi = C \cdot |x|^{-3+2} = \frac{C}{|x|}$$

LA PROSSIMA VOLTA VEDREMO IL CONTO ESPLICITO

LEZIONE 03

Titolo nota 03/10/2019

CALCOLO DI

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ix\xi}\, e^{-\varepsilon|\xi|}}{|\xi|^2}\, d\xi = \qquad \xi = \rho\cdot\omega \quad \rho = |\xi| \quad \omega = \frac{\xi}{|\xi|} \quad d\xi = \rho^2 \sin\theta \, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

POICHÉ IL RISULTATO È RADIALE POSSO SCEGLIERE

$$x = (0,0,|x|) \Rightarrow x\cdot\xi = |x|\,\rho\cos\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi} \left(e^{-i|x|\rho\cos\theta}\sin\theta\right) e^{-\varepsilon\rho}\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{+\infty} \left.\frac{e^{-i|x|\rho\cos\theta}}{i|x|\rho}\right|_0^{\pi} d\rho = \frac{2\pi}{i|x|}\int_0^{+\infty} \frac{e^{i|x|\rho} - e^{-i|x|\rho}}{\rho}\, e^{-\varepsilon\rho}\, d\rho$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{2\pi}{i|x|}\int_0^{+\infty} \frac{\sin|x|\rho}{\rho}\, d\rho$$

SIMMETRIZZAZIONE DI SCHWARTZ

$f(x)$ MISURABILE, $f(x)\geq 0$

IL SOPRALIVELLO $\mu(x;\, f(x)>\sigma)$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\int_0^{f(x)} d\sigma\, dx \overset{\text{FUBINI TONELLI}}{=} \int_0^{+\infty} \mu(x, f(x)>\sigma)\, d\sigma$$

IN MODO ANALOGO

$$\|f(x)\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}}\int_0^{|f(x)|^p} d\tilde{\sigma}\, dx = \int_0^{+\infty} \mu(f(x)^p > \tilde{\sigma})\, d\tilde{\sigma} \overset{\tilde{\sigma}=\sigma^p}{=}$$

$$= p\int_0^{+\infty} \mu(f(x)>\sigma)\,\sigma^{p-1}\,\sigma = p\int_0^{+\infty} \mu(f(x)>\sigma)\,\sigma^p\,\frac{d\sigma}{\sigma}$$

LEMMA $\quad f\in L^p \Rightarrow \mu(f(x)>\sigma) < \left(\frac{1}{\sigma}\|f\|_{L^p}\right)^p$

DIM $\quad \|f\|_{L^p}^p \geq \int_{f(x)>\sigma} |f(x)|^p\, dx \geq \sigma^p \mu(f(x)>\sigma)$

OSS LA TESI CONVIENE VEDERLA COME $\quad \sigma\,\mu(f(x)>\sigma)^{1/p} \leq \|f\|_{L^p}$

DEF $f \in L^{p,\infty} \iff \| \sigma\, \mu(f(x) > \sigma)^{1/p} \|_{L^\infty(\mathbb{R})} < +\infty$ $\quad 1 \le p \le +\infty$

L^p DEBOLI

OSS $L^{\infty,\infty} = L^\infty$

ESEMPIO $f(x) = \dfrac{1}{|x|^{1/p}}$ $\quad x \in \mathbb{R}$ $\quad \left(f(x) = \dfrac{1}{|x|^{n/p}} \quad x \in \mathbb{R}^n \right)$ $\quad 1 \le p < +\infty$

$f(x) \notin L^p$

DATO $\dfrac{1}{|x|^p} > \sigma \Rightarrow |x| < \sigma^{-p}$

$$\mu\left(f(x) > \sigma\right) = 2\sigma^{-p}$$

$$\Rightarrow \| \sigma \cdot \mu(f(x) > \sigma)^{1/p} \|_\infty = \| \sigma \cdot (2\sigma^{-p})^{1/p} \|_\infty < \infty \Rightarrow f(x) \in L^{p,\infty}$$

DEF $f \in L^{p,r} \iff \| \sigma\, \mu(f(x) > \sigma)^{1/p} \|_{L^r} < +\infty$

SPAZI DI LORENTZ

SOLO UNO DEI DUE DEVE ESSERE STRETTO

DEF $f^*(t) = \inf \{ \sigma \,;\, \mu(f(x) > \sigma) \le t \}$

SIMMETRIZZATA DI SCHWARTZ

ALCUNE PROP $\mu(f(x) > \sigma)$ è DEC. e CONTINUA DA DX

$f^*(t)$ è CONTINUA DA DX

ES $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha} & x > 0 \quad \alpha > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^*(t) = \dfrac{1}{t^\alpha} \quad t > 0$

- $\|f\|_{L^p} = \|f^*\|_{L^p}$

- SE g è CRESCENTE

$$\int g(f(x))\, dx = \int g(f^*(t))\, dt$$

– $\int |\nabla f^*|^2 \leq \int |\nabla f|^2$ (CI SONO ALTRE RELAZIONI MA VEDERE LE DISPENSE ONLINE) O SUL LIBRO LIEB - LOSS

OPERATORI DEBOLMENTE LIMITATI E TEOREMI DI MARCINKIEWICZ

DEF $T: L^p \longrightarrow L^q$ è LIMITATO (IN SENSO FORTE) SE $\|T(f)\|_{L^q} \leq c \|f\|_{L^p} \quad \forall f \in L^p$

DEF SEMINORMA $\|g\|_{L^{q,\infty}} = \| \sigma \, \mu(g(x) > \sigma)^{1/q} \|_{L^\infty}$

DEF $T: L^p \longrightarrow L^{q,\infty}$ È LIMITATO DEBOLMENTE SE $\|T(f)\|_{L^{q,\infty}} \leq c \|f\|_{L^p}$

TEOREMA DI MARKI__ (NO DIM CASO GENERALE)

1) $T: L^{p_0} \longrightarrow L^{q_0,\infty}$ DEB LIMITATO $\quad 1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$

2) $T: L^{p_1} \longrightarrow L^{q_1,\infty}$ DEB LIMITATO $\quad \boxed{q_0 < q_1}$ ATTENZIONE

$\Rightarrow T: L^p \longrightarrow L^q$ CON $\frac{1}{p} = \frac{1-\vartheta}{p_0} + \frac{\vartheta}{p_1} \qquad 0 < \vartheta < 1$

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\vartheta}{q_0} + \frac{\vartheta}{q_1}$$

(OSS NON CI SONO STIME SULLE SULLE COSTANTI IN $L^{p,r}$ E $L^{p,\infty}$ L'UNICO LAVORO FATTO UN PO' BENE È LA TESI DOTT DI O'NEIL)

VERSIONE BABY $(p_0 = q_0, \; p_1 = q_1, \; q_0 < q_1 < +\infty)$

TH $T: L^p \longrightarrow L^p \qquad \frac{1}{p} = \frac{1-\vartheta}{p_0} + \frac{\vartheta}{p_1}$

DIM

SO CHE (*) $\sigma \, \mu(T(f(x)) > \sigma)^{\frac{1}{p_j}} < \|f\|_{p_j} \qquad j = 0, 1$

SIA $\|T(f)\|_{L^p}^p = p \int_0^{+\infty} \sigma^{p-1} \mu(T(f) > \sigma) \, d\sigma$

$$f(x) = \underbrace{f(x) \mathbb{1}_{\{f(x) > c\sigma\}}}_{f_0} + \underbrace{f(x) \mathbb{1}_{\{f(x) < c\sigma\}}}_{f_1}$$

$|T(f(x))| \leq |T(f_0)| + |T(f_1)|$ PER SUBLINEARITÀ

$\Rightarrow \mu(T(f) > \sigma) \leq \mu(T(f_0) > \sigma) + \mu(T(f_1) > \sigma)$

$$\Rightarrow \quad \|T(f)\|_{L^p}^p \le \int_0^{+\infty} \sigma^{p-1}\mu(T(f_0)>\sigma) + \int_0^{+\infty} \sigma^{p-1}\mu(T(f_1)>\sigma)\, d\sigma \underset{\text{USANDO }(*)}{\le}$$

$$\le \int_0^{+\infty} \sigma^{p-1-p_0}\|f_0\|_{L^{p_0}}^{p_0}\, d\sigma + \int_0^{+\infty} \sigma^{p-1-p_1}\|f_1\|_{L^{p_1}}^{p_1} \underset{\text{SCRIVO } \|\cdot\|_{p_0}^{p_0} \text{ e } \|\cdot\|_{p_1}^{p_1} \text{ IN FORMA } \int}{=}$$

$$= \int_0^{+\infty} \sigma^{p-1-p_0}\left(\int_{f(x)>c\sigma} |f(x)|^{p_0}\, dx\right) d\sigma + \int_0^{+\infty} \sigma^{p-1-p_1}\left(\int_{f(x)<c\sigma} |f(x)|^{p_1}\, dx\right) d\sigma$$

$$\underset{\text{FUBINI, T.ONELLI}}{=} \int |f(x)|^{p_0}\, dx \underbrace{\int_0^{\frac{f(x)}{c}} \sigma^{p-1-p_0}\, d\sigma}_{\shortparallel \\ |f(x)|^{p-p_0}} + \int |f(x)|^{p_1}\, dx \underbrace{\int_{\frac{f(x)}{c}}^{\infty} \sigma^{p-1-p_1}\, d\sigma}_{|f(x)|^{p-p_1}} \le$$

$$\le \underset{\substack{\downarrow \\ \text{COSTANTE}}}{C}\, \|f\|_{L^p}^p$$

ESEMPI DI OPERATORI

$$A = \sqrt{-\Delta} \qquad f \in \underset{\text{FUNZIONI DI SCHWARTZ}}{S}(\mathbb{R}^n)$$

USANDO LA TRASFORMATA $\qquad \widehat{\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} f}(\xi) = \xi_j \hat{f}(\xi)$

$$\widehat{\sqrt{-\Delta}\, f} = \|\xi\|\, \hat{f}(\xi)$$

$$(-\Delta)^{1/2} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}|\xi|\hat{f}(\xi)\, d\xi$$

SE $n=1$ $\qquad \Delta = \partial_x^2 \qquad$ SI PUÒ VEDERE $\quad \sqrt{-\Delta} = c \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{TRASFORMATA} \\ \text{DI HILBERT}}}{H}\, \partial_x$

$$Hf(x) = \int \underset{\substack{\downarrow \\ \text{PARTE PRINCIPALE}}}{P_v}\left(\frac{1}{x-y}\right) f(y)\, dy = \int \frac{f(y)-f(-y)}{x-y}\, dy$$

LEZIONE 04

Titolo nota 07/10/2019

TEO: L'ESISTENZA DECOMPOSIZIONE PARTE BUONA E CATTIVA IN L^1) . (LEMMA DI CALDERON – ZYGMUND)

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\lambda > 0$

Siano $\{Q_J\}_{J \in \mathbb{N}}$ intervalli diadici con $\{\mathring{Q}_J\}$ disgiunti tali che:

RICORDA: $L^{1,\infty}(\mathbb{R}) = \{ f : \sup_{\sigma > 0} \sigma \cdot \mu(|f(x)| > \sigma) < +\infty \}$

1) $|Q_J| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1(Q_J)}$ (Q_J piccoli $\sum_J |Q_J| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$)

Sia $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin \bigcup Q_J \\ \frac{1}{|Q_J|} \int_{Q_J} f(x) & x \in Q_J \end{cases}$ (g = good PARTE BUONA DI f)

2) $\|g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$ e $\|g\|_{L^\infty} \lesssim \lambda$

$b(x) = \sum b_J = f - g$ (b = bad) $\quad b_J(x) = \mathbb{1}_{Q_J} \left(f - \frac{1}{|Q_J|} \int_{Q_J} f(x)\,dx \right)$

3) $\|b_J(x)\|_{L^1(Q_J)} \lesssim \lambda \cdot |Q_J|$

PRIMA VARIANTE LEMMA DI VITALI

$(\mathbb{R}, \mu)$ SIA $\mathcal{B}(a,r)$: 1) $\mathcal{B}(x,r) \cap \mathcal{B}(y,r) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{B}(y,r) \subseteq \mathcal{B}(x,2r)$

2) $\mu(\mathcal{B}(x,2r)) \leq 2\,\mu(\mathcal{B}(x,r))$

$\exists$ OCCHI TALE CHE DATO UN APERTO $\mathcal{U} = \bigcup_{J=1}^{N} B_J \Rightarrow \exists\, J = \{J_1, \dots, J_K\} \subseteq \{1 \dots N\}$

TALI CHE a) $\{B_{J_\ell}\}_{\ell=1}^{K}$ SONO DISGIUNTE

b) $\sum_{\ell=1}^{K} \mu(B_{J_\ell}) \geq c \cdot \mu(\mathcal{U})$

DIM (VITALI) Si $J_1 = 1$ e B_1 SUPPONIAMO CHE B_1 ABBIA RAGGIO MASSIMALE

Sia $F_1 = \{ B_J : B_1 \cap B_J = \emptyset \}$

CASO 1 SE $F_1 = \emptyset \Rightarrow \mu(U) \leq 2\mu(B_1)$

CASO 2 SE $F_1 \neq \emptyset$ SCELGO J_2 INDICE CON PALLA DI RAGGIO MASSIMALE IN F_1

e $F_2 = \{ B_J : B_J \cap B_{J_i} = \emptyset \text{ con } i = 1, 2 \}$

⋮

E così VIA.

SECONDA VARIANTE DI VITALI (NO DIM)

$\exists$ 2 COSTANTI $1 < c^* << c^{**}$ TALE CHE $\forall F \subset \mathbb{R}^n$ CHIUSO

$\exists\ B_1 = B(x_1, r_1),\ B_2 = (x_2, R_2), \dots$ (NUMERABILE)

TALI CHE

i) $B_i \cap B_j = \emptyset$

ii) $\bigcup_j B(x_j, c^* r_r) = F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$

iii) $B(x_j, c^{**} r_j) \cap F \neq \emptyset$

DIM (DECOMPOSIZIONE)

$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$

PASSO 0 $\exists\ Q^*$ CUBO $|Q^*| \geq \frac{\|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}}{\lambda}$ SIA $\ell = \ell(Q^*)$ LATO

ALLORA $\mathcal{F}_0 = \{$ RICOPRIMENTO DI $\mathbb{R}^n$ CON CUBI TRASLATI DI Q^* IN MODO TALE CHE $\mathrm{int}(Q_\alpha) \cap \mathrm{int}(Q_\beta) = \emptyset \} \neq \emptyset$

$\forall\ Q^0 \in \mathcal{F}_0$ $\quad Q^0$ LO DIVIDO IN 2 PARTI UGUALI $\quad \underbrace{\qquad}_{Q_1^1}\underbrace{\qquad}_{Q_2^1}$

CASO 1 a) $|Q_j^1| \geq \frac{\|f\|_{\mathcal{L}^1(Q_j^1)}}{\lambda}$

CASO 2 b) $|Q_j^1| < \frac{\|f\|_{\mathcal{L}^1(Q_j^1)}}{\lambda}$

$\mathcal{F}_1 = \{ Q_j^1 \mid \text{VALE b)} \}$ $\qquad \mathcal{F}_1^c = \{ Q_j^1 \mid \text{VALE a)} \} \neq \emptyset$

ALTRIMENTI SE VALE b) $\forall Q_j^1$ SOMMANDO SI CONTRADDICE LA DEF DI Q^*

$\forall\ Q^1 \in \mathcal{F}_c^1$ LO DIVIDIAMO IN $Q_1^2\ Q_2^2$ E SI COSTRUISCE

SCEGLIENDO $\|f\|_{\mathcal{L}^1(Q^2)}$

$\mathcal{F}_2 = \{ Q_j^2 \mid \text{VALE b)} \}$ $\qquad \mathcal{F}_2^c = \{ Q_j^2 \mid \text{VALE a)} \}$

E ITERIAMO LASCIANDO FERMI GLI $\mathcal{F}_i$

SIA $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots = \{Q_J\}$

e $|Q_J| < \dfrac{\|f\|_{L(Q_J)}}{\lambda}$

SE $\widetilde{Q_J}$ È TALE CHE $\ell(\widetilde{Q_J}) = 2\ell(Q_J) \Rightarrow$ SE $Q_J \in \mathcal{F}_i \Rightarrow \widetilde{Q_J} \in \mathcal{F}_{i-1}^c$

$$\Rightarrow 2|Q_J| = |\widetilde{Q_J}| \geq \frac{\|f\|_{L^1(\widetilde{Q_J})}}{\lambda} \geq \frac{\|f\|_{L^1(Q_J)}}{\lambda}$$

$$\Rightarrow |Q_J| \sim \frac{\|f\|_{L(Q_J)}}{\lambda}$$

<u>OSS</u> SE $\forall i \geq 1 \quad \mathcal{F}_i = \emptyset$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} f(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{|Q_i|} \|f\|_{L^1(Q_i)} \overset{(\text{PER } \partial)}{\leq} \lambda \Rightarrow \text{PER TEO DELLA MEDIA}$$

$$|f(x)| \leq \lambda$$

QUINDI BASTA AGGIUNGERE L'IPOTESI SE $f \in L^\infty \Rightarrow \lambda < \|f\|_\infty$

(MA SE $f \in L^\infty \cap L^1$ NON C'È NIENTE DA DIMOSTRARE POICHÉ $f = g$)

<u>OSS 2</u> DA SISTEMARE IL FATTO CHE Q_i SONO DISGIUNTI (SISTEMATO CON MODO $\mathcal{F}_0$)

BASTA CHE IN $\mathcal{F}_i$ LI SELEZIONIAMO DISGIUNTI USANDO VITALI (DI ANALISI REALE QUELLO PER FAMIGLIE INFINITE DI INSIEMI)

DATE

$$b_J = \begin{cases} f(x) - \dfrac{1}{|Q_J|} \displaystyle\int_{Q_J} f(x) & x \in Q_J \\ 0 & x \notin Q_J \end{cases}$$

$$\int_{Q_J} |b_J(x)|\,dx \lesssim \lambda |Q_J| \quad e \quad \sum_J |Q_J| \leq \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\lambda}$$

LEZIONE 05

Titolo nota 10/10/2019

SISTEMIAMO NOTAZIONE CUBI DIMOSTRAZIONE DECOMPOSIZIONE

NOTAZIONE: $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ $\quad b_j - a_j = \ell(Q) \ \forall i$

$\alpha Q \Rightarrow \ell(\alpha Q) = \alpha \ell(Q)$ e centro (αQ) = centro (Q)

$\mathring{Q} = \mathrm{int}(Q) = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$

OPERATORE DI HILBERT

$$H(f)(x) = \left(P_v \left(\frac{1}{x-y} \right) f(y) \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y| > \varepsilon} \frac{1}{x-y} f(y)\, dy$$

RICHIAMI: SPAZI DI SOBOLEV

$H_2^1(\mathbb{R}) = \{ f \in L^2, \ |D| f \in L^2 \}$

$-\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

FORMULAZIONE DEBOLE

$W^{1,2}(\mathbb{R}) = \{ f \in L^2, \ f'(x) \in L^2 \}$

$\|f\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2}$

$$(-\Delta)^{s/2}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ixs} |\xi|^s \hat{f}(s)\, ds$$

NOTAZIONE: $s = 1$ $\quad (-\Delta)^{1/2} = |D|$

e $D = \frac{1}{i} \partial_x$

MOSTRIAMO LEGAME TRA

DA DIMOSTRARE

$\sqrt{-\Delta} = |D| = c \cdot H \quad \partial_x$

COME POSSO GENERALIZZARE A

$H_p^s(\mathbb{R}) = \{ f \in L^p \mid |D|^s \in L^p \}$

FRAZIONARIO, INTERO

$W^s_p(\mathbb{R}) = (W_p^k(\mathbb{R}), L_p)_\theta$ con $k\theta = s$

$(-\Delta)^{s/2}(f) = |D|^s f$

NOTA SE s NON È INTERO H_p^s e W_p^s SONO SPAZI DIVERSI

IDEA DI LAVORO:

"DIFFICILE" (1) $H : L^1 \longrightarrow L^{1,\infty}$ LIMITATO

"FACILE" (2) $H : L^2 \longrightarrow L^2$ LIMITATO

$\Rightarrow$ MARZ. $H : L^p \longrightarrow L^p$ $\forall\ 1 < p \leq 2$

E PER PASSARE A TUTTI I P SI PASSA AL DUALE E SI VEDE CHE HILBERT NON CAMBIA E OTTENIAMO TUTTI I $p' = 1 - \frac{1}{p} > 2$

DIM $H : L^2 \longrightarrow L^2$ LIMITATO

$$Hf(x) = \left(P_v\left(\frac{1}{1-y}\right), f(y) \right) = \left(P_v\left(\frac{1}{z}\right), f(x-z) \right)$$

OSS VALE IDENTITÀ DI PARSEVAL

$$(A, \varphi) = c\,(\hat{A}(-\xi), \varphi(\xi))$$

$$(A, \varphi) = \int A(z)\,\varphi(z)\,dz = \frac{1}{2\pi} \int A(z) \int e^{iz\xi}\,\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi\,dz \overset{\text{FUBINI TONELLI}}{=}$$

C_0^∞ ALLORA POSSO USARE INVERSA DELLA TRASFORMATA

$$= \frac{1}{2\pi} \int \hat{A}(-\xi)\,\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi$$

PROVIAMO A CALCOLARE

$$\widehat{Hf}(\xi) = \int e^{-i\xi x} \left(P_v\left(\frac{1}{z}\right) f(x-z) \right) dx =$$

$$= \left(P_v\left(\frac{1}{z}\right), \int e^{-i\xi x}\, f(\underbrace{x-z}_{y})\, dx \right) = \overbrace{V}^{P_v\left(\frac{1}{z}\right)} e^{-i\xi z} \int e^{-iy\xi} f(y)\,dy =$$

$$= \left(P_v\left(\frac{1}{z}\right), e^{-iz\xi} \right) \hat{f}(\xi) = \widehat{P_v\left(\frac{1}{z}\right)}(\xi)\,\hat{f}(\xi) =$$

E VEDREMO $\widehat{P_v\left(\frac{1}{z}\right)}(\xi) = c\,\mathrm{sgn}(\xi)$ $= c \cdot \mathrm{sgn}(\xi)\,\hat{f}(\xi)$

$\Rightarrow$ $\widehat{Hf}(\xi)$ È LIMITATA $\Rightarrow$ $Hf(x)$ MANDA L^2 IN L^2 LIMITATO

ADESSO MOSTRIAMO $H : L^1 \longrightarrow L^{1,\infty}$ È LIMITATO

CIOÈ $\lambda \mu\left(|Hf(x)| > \lambda\right) \lesssim \|f\|_{L^1} \quad \forall f \in L^1$

FORMALMENTE $Hf(x) = \int \frac{1}{x-y} f(y)\,dy$

$f \in L^1$ QUINDI POSSO USARE LEMMA CALDERON-ZYGMUND PER DECOMPORRE f

$Q_J = I_J$

$$\left\{ |H(g+b)(x)| > \lambda \right\} \subseteq \left\{ |H(g)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \cup \left\{ |H(b)| > \frac{\lambda}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow \mu\left(\left\{ |H(g+b)(x)| > \lambda \right\}\right) \leq \mu\left(\left\{ |H(g)| > \frac{\lambda}{2} \right\}\right) + \mu\left(\underbrace{\left\{ |H(b)| > \frac{\lambda}{2} \right\}}\right)$$

$g \in L^\infty$ NON CI SONO PROBLEMI

MI CONCENTRO SU LUI

SIA $\left\{ |H(b)(x)| > \frac{\lambda}{2},\ x \notin \cup(\alpha I_J) \right\} \cup \left(\cup \alpha I_J \right) \supseteq \left\{ |Hb(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\}$

E RICORDIAMO INOLTRE

$$b_J(y) = 1\!\!1_{I_J} \left(f(y) - \frac{1}{|I_J|} \int_{I_J} f \right)$$

SIA a_J IL CENTRO DI I_J

$$\left| H(b_J(y))(x) \right| = \left| \int_{I_J} \underbrace{\frac{1}{x-y}}_{\neq 0} \left(f(y) - \frac{1}{|I_J|} \int_{I_J} f(z)\,dz \right) dy \right| =$$

PERCHÉ $x \notin \cup \alpha I_J$

APPLICANDO F.TONELLI AL SECONDO PEZZO RIMANE

$$\frac{1}{I_J} \int_{I_J} \frac{1}{x-y}\,dy$$

MA

$$\frac{1}{|x-y|}$$

$$\leq \int_{I_J} \left[\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-a_J} \right] f(y)\,dy$$

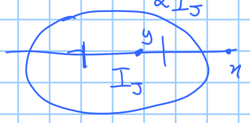
$$\Rightarrow \int_{(\cup \alpha I_J)^c} |H(b)(x)|\,dx \leq \int_{(\cup \alpha I_J)^c} \sum_J \left| \int_{I_J} \left[\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-a_J} \right] f(y)\,dy \right| dx$$

SE $x \notin \cup \alpha I_J$

$$\int_{(\cup \alpha I_J)^c} \left| \underbrace{\left[\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-z_J} \right]}_{\simeq \frac{1}{x^2}} \right| dx \leq C \qquad y \in I_J$$

$\frac{1}{x^2}$ A $+\infty$ QUINDI CONV. A $+\infty$

NON PROBLEMATICO PERCHÉ



QUINDI x e y NON POSSONO ESSERE ARBITRARIAMENTE VICINI

QUINDI

$$\int_{(\cup \alpha I_c)^c} |H(b)(x)|\, dx \lesssim \int c\, |f(y)|\, dy$$

LEZIONE 06

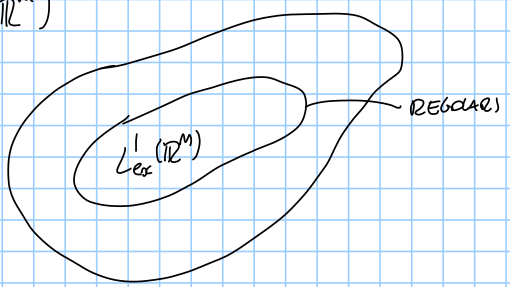
Titolo nota 14/10/2019

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ APERTO

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) \quad \text{FUNZIONI TEST}$$
$$\cap\!\!\!\!\mid$$
$$\mathcal{S}(\Omega) = \text{SPAZIO DI SCHWARTZ} = \text{FUNZIONI A CRESCITA LENTA}$$
$$\cap$$
$$\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$$

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \text{SPAZIO DELLE DISTRIBUZIONI}$$
$$\cup$$
$$\mathcal{S}'(\Omega) = \text{DISTRIBUZIONI TEMPERATE}$$
$$\cup\!\!\!\!\mid$$
$$\mathcal{E}'(\Omega) = \quad \text{"} \quad \text{A SUPPORTO COMPATTO}$$

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^M)$



ESERCIZI : 1) SIA $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi(0) = 0$

DIMOSTRARE CHE $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\psi(x) = \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)x}{2} + \dots + \varphi^{(k)}(0)x^{k-1} + o(x^{k-1})$$

$$\text{e} \quad \psi^{(k)}(0) = \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}$$

2) $x \cdot u = 0 \qquad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \langle \varphi, xu \rangle := \langle \varphi x, u \rangle = 0$

$$\Updownarrow$$

$\tilde{\varphi}(x) = x\varphi(x)$

$\tilde{\varphi}(0) = 0$

$\langle \psi, u \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\psi(0) = 0$

$\Uparrow$ OVVIO $\qquad \Downarrow$ SIA $\varphi(x) = \dfrac{\psi(x)}{x} \Rightarrow \psi(x) = x\varphi(x)$

ALLORA VOGLIO MOSTRARE CHE

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \langle \varphi, u \rangle = C \cdot \varphi(0)$.

$\langle \varphi, u \rangle = \varphi(0) \underbrace{\langle \frac{\varphi}{\varphi(0)}, u \rangle}_{\text{NON DIPENDE DA } \varphi}$

PERCHÉ $\frac{\varphi}{\varphi(0)}(0) = 1$

PRENDO $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 1$

$\langle \varphi_1 - \varphi_2, u \rangle = 0 \qquad (\varphi_1 - \varphi_2)(0) = 0$

$\langle \varphi_1, u \rangle = \langle \varphi_2, u \rangle$ QUINDI u È CONCENTRATA IN 0

3) $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tc $x^2 u = 0$

$x \cdot (\underset{v}{x u}) = 0 \quad \Rightarrow$

$v = C \delta_0$

$(v =)\ x \cdot u = C_1 \delta \longrightarrow$ SOL PARTICOLARE + TUTTE SOL DELL'OMOGENEA

PROVO $u = C \cdot \delta'$

$\langle \varphi, xu \rangle = \langle \varphi, C x \delta' \rangle = C \langle x\varphi, \delta' \rangle =$

$= -C \langle (x\varphi)', \delta \rangle =$

$= -C \langle \varphi + x\varphi', \delta \rangle =$

$= -C \langle \varphi, \delta \rangle = C_1 \delta \quad \Rightarrow C = -C_1$

$\Rightarrow u = -C_1 \delta' + C_2 \delta$

3bis) $x^m u = 0 \qquad u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$\Rightarrow u = C_1 \delta + \dots + C_m \delta^{(m-1)}$

4) $x^3 (x-1)^2 u = 0$

$u = C_0 \delta(x) + C_1 \delta'(x) + C_2 \delta''(x) + C_3 \delta(x-1) + C_4 \delta'(x-1)$

5) $\sin x \cdot u = 0 \Rightarrow u \in \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta(x - k\pi)$ $\in \mathcal{D}'$, $\in \mathcal{S}'$, $\notin \mathcal{E}'$ DIMOSTRARLO

STEP 1 : PRENDERE UNA φ CON SUPPORTO IN UN SOLO 0

STEP 2 : SPEZZARE LA φ CON PARTIZIONI UNITÀ E FAR VEDERE CHE LA SERIE CONV.

6) $P\left(\frac{1}{x}\right) \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$$\langle \varphi, P\left(\tfrac{1}{x}\right) \rangle := V_{principale} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

DIMOSTRARE CHE $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e supporto $\varphi = [-R, R]$

$$\langle \varphi, P\left(\tfrac{1}{x}\right) \rangle = \int_{-R}^{+R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx$$

DIM $\langle \varphi, P\left(\frac{1}{x}\right) \rangle = V_p \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx =$

L'INTEGRALE È BEN DEFINITO

$$= \cancel{V_p} \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx + V_p \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(0)}{x}\, dx =$$

CALCOLO $\varphi(0) \cdot V_p \int_{-R}^{R} \frac{1}{x}\, dx = \varphi(0) \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{x}\, dx =$

$$= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0} \ln|\varepsilon| - \ln(R) + \ln R - \ln|\varepsilon| = 0$$

7) QUANTO FA

$$x\, P\left(\frac{1}{x}\right) = \,?$$

$$\langle \varphi, x P\left(\tfrac{1}{x}\right) \rangle = \cancel{V_p} \int \frac{\cancel{x}\, \varphi(x)}{\cancel{x}}\, dx = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \varphi(x)\, dx = \langle \varphi, 1 \rangle$$

8) $$\left(P\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)' = - V_p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\, dx = -P\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

PER CASA

9)
$$\langle \varphi, x^2 \mathcal{P}\left(\frac{1}{x^2}\right)\rangle = \int \frac{x^2\varphi(x)}{x^2} = \int \varphi(x) = \langle \varphi, 1\rangle$$

ES $\quad x \cdot u = 1 \Rightarrow u = C\delta + \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$

10) REGOLARIZZARE $\frac{1}{x}$

PRENDO
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)}{x\pm i\varepsilon}\,dx \overset{\text{LO CHIAMO}}{=} \mathcal{P}\left(\frac{1}{x\pm i0}\right)$$ CON SUPP. $\varphi \in [-R,R]$

|| (AGGIUNGO E TOLGO $\varphi(0)$)

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-R}^{+R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x\pm i\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\varphi(0)\int_{-R}^{R}\frac{1}{x\pm i\varepsilon}\,dx =$$

$$\overset{\text{TEO LEB}}{=} \int_{-R}^{R}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x\pm i\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(0)\int_{-R}^{R}\frac{1}{x\pm i\varepsilon}\,dx$$

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(0)\int_{-R}^{R}\frac{x\mp i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

$$= \langle\varphi, \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(0)\underbrace{\int_{-R}^{R}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}}_{0} \underbrace{\mp i\varepsilon\varphi(0)\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+\varepsilon^2}}_{\mp i\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0} 2\arctan\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)}$$

$$\langle\varphi, \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)\rangle \mp i\varphi(0)\pi =$$ FORMULA DI SOBOTSKI - PLEMEY

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{x\pm i0}\right) = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta$$

11) $x \cdot \mathcal{P}\left(\frac{1}{x\pm i0}\right) = 1 \Rightarrow \mathcal{P}\left(\frac{1}{x\pm i0}\right)$ SONO LE SOL A $x \cdot u = 1$

12)

$$\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left\langle \varphi, \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \varphi(x)\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \underbrace{\int \varphi(\varepsilon y)\sin(y)\, dy}_{\text{USANDO LEB. TENDE A QUALCOSA DI LIMITATO}} = 0$$

13)

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \to \delta \cdot \int_{\mathbb{R}} f\, dx$$

MA $f(x) = \frac{\sin x}{x} \notin L^1(\mathbb{R})$ MA RIEMANN GENERALIZZATA INTEGRABILE

$$g_\varepsilon(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{x} \xrightarrow{\quad} \delta \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}$$

GIUSTO MA NON POSSO USARE IL RISULTATO SOPRA

SIA $f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin(y)}{y}\, dy$ $\quad f(-\infty) = 0 \quad f(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = \pi$

$f \in C^1(\mathbb{R})$ LIMITATA

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{x} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\varepsilon y) \overset{f'(y)}{\overset{\parallel}{\frac{\sin(y)}{y}}}\, dy \overset{\text{USANDO } \varphi \text{ COMPATTA}}{=}$$

$$- \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \varphi'(\varepsilon y)\cdot \varepsilon\, dy = - \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\varphi'(x)\, \overset{\to \pi h(x)}{f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}}_{\text{POSSO USARE LEBESGUE E PORTA}}\, dx =$$

con $h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

$$= - \int \varphi'(x)\pi h(x)\, dx = -\pi\langle \varphi', h\rangle = \pi\langle \varphi, h'\rangle \quad e \quad h' = \delta$$

ES $f(x) = \cos(e^x)$

$f'(x)$ in $\mathcal{D}'(x)$ È COME NEL CASO NORMALE POICHÈ LE C^1

$f'(x)$ in $\mathcal{S}'(x)$ NON È È $-e^x \sin(e^x)$

LEZIONE 07

Titolo nota 17/10/2019

$$S(\mathbb{R}) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall k,m \; x^k \partial_m f(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \}$$

$S \subset L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$ LA TRASFORMATA FUNZIONA BENE

$\varphi \in S \quad \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \varphi(x)\, dx$

PROP $\varphi \in S \Rightarrow \hat{\varphi} \in S$

DIM SEGUE DA $\widehat{\partial_h f}(\xi) = (i\xi)^h \hat{f}(\xi)$

$\widehat{x^h f}(\xi) = i^h \partial_\xi^h \hat{f}(\xi)$

NOZIONE DI CONV. IN $S(\mathbb{R})$

$\{\varphi_n\} \subseteq S(\mathbb{R})$

$\varphi_n \to 0$ in $S(\mathbb{R}) \Leftrightarrow x^k \varphi_n^{(h)} \to 0 \;\; \forall h,k$ UNIFORMEMENTE in $\mathbb{R}$

DEF $v : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ è UNA DISTRIBUZIONE TEMPERATA $v \in S'(\mathbb{R})$ SE v è LINEARE E CONTINUA.

DOVE CONTINUA INTESO NEL SENSO SOPRA

QUINDI $\{\varphi_n\} \subset S$

$\varphi_n \to 0$ in S ALLORA $v(\varphi_n) = \langle v, \varphi_n \rangle \to 0$ PER $n \to \infty$

DEF DATA $v \in S'(\mathbb{R})$

$\mathcal{F}(v), \hat{v} \overset{def}{=}$ TRASFORMATA DI FOURIER DELLA DISTRIBUZIONE TEMP.

$\langle \hat{v}, \varphi \rangle \overset{def}{=} \langle v, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in S$

PROP $\hat{v} \in S'(\mathbb{R})$ (CIOÈ È CONTINUO COME OPERATORE DA $S(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$)

DEF $\{v_n\} \subseteq S'(\mathbb{R}) \qquad v_n \to 0$ in $S'(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \langle v_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0 \;\; \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$

PROP $\hat{v}$ è CONTINUO DA $S'(\mathbb{R}) \to S'(\mathbb{R})$

CIOÈ PRESA $v_n \in S'(\mathbb{R}) \quad v_n \overset{\text{in } S'}{\to} 0 \Rightarrow \hat{v}_n \to 0$ in $S'(\mathbb{R})$

DIM $\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$ $\langle \hat{v}_n, \varphi \rangle \underset{\text{PER DEF DI } \hat{v}_n}{=} \langle v_n, \hat{\varphi} \rangle \to 0$, $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R})$

$v \in S(\mathbb{R}) \overset{\text{INDUCE IN MODO CANONICO}}{\rightsquigarrow} \langle v,\varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} v(x)\,\varphi(x)\,dx$ UN ELEMENTO DI $S'(\mathbb{R})$

QUINDI $S(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R})$ IN MODO CANONICO

PROP POTREMO VEDERE CHE LA TRASFORMATA DELL'ELEMENTO INDOTTO IN $S'(\mathbb{R})$ DA v COINCIDE CON L'ELEMENTO INDOTTO DALLA TRASFORMATA DI $v \in S(\mathbb{R})$

DIM

TRASF DI FOUR. DI V COME DISTR. TEMP.

$$\langle \hat{v},\varphi\rangle \overset{\text{def di trasf.}}{=} \langle v,\hat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}} v(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} v(x)\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\varphi(\xi)\,d\xi\,dx =$$

$$\overset{\text{FUBINI TONELLI}}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}v(x)\,dx\,d\xi = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\,\hat{v}(\xi)}_{\text{AZIONE DELLA TRASFORMATA DI V COME ELEMENTO DI } S'(\mathbb{R})} = \langle \varphi,\hat{v}\rangle$$

TRASFORMATA DELLA δ_0

$$\delta_0 : S(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi(0) = \langle \delta_0,\varphi\rangle$$

SE $\varphi \in S(\mathbb{R})$

$$\langle \hat{\delta}_0,\varphi\rangle = \langle \delta_0,\hat{\varphi}\rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \langle 1,\varphi(x)\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\delta}_0 = 1$$

TRASFORMATA DELLA FUNZIONE DI HEAVYSIDE.

$$\vartheta_0(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

NON È LISCIA $(\notin S(\mathbb{R}))$ QUINDI IN CHE SENSO CALCOLIAMO LA SUA TRASFORMATA. e $\vartheta_0 \notin L^1$

CONSIDERO L'AZIONE DI ϑ_0 SU $S(\mathbb{R})$ $\langle \vartheta_0,\varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ E QUESTO È CONTINUA

OSS $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}) \longrightarrow S'(\mathbb{R})$ È UN ISOMORFISMO DA I CONTI SOPRA

PRESE $e^{-\varepsilon x}\vartheta_0(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \vartheta_0(x)$ IN $S'(\mathbb{R})$

CIOÈ $\langle e^{-\varepsilon x}\vartheta_0(x),\varphi\rangle \longrightarrow \langle \vartheta_0,\varphi\rangle$ IN $S'(\mathbb{R})$ $\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon x}\vartheta_0(x)\,\varphi(x)\,dx \overset{\text{CONV. DOMINATA}}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

ADESSO LE $e^{-\varepsilon x} \vartheta_0(x) \notin S(\mathbb{R})$ MA ALMENO STANNO IN $L^1(\mathbb{R})$

QUINDI SO CALCOLARE LA LORO TRASFORMATA IN SENSO CLASSICO

$$\mathcal{F}\left(e^{-\varepsilon x}\vartheta_0(x)\right)(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-i\xi x} e^{-\varepsilon x}\, dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{(-i\xi-\varepsilon)x}\, dx = \frac{1}{i\xi+\varepsilon} = -i\frac{1}{(\xi-i\varepsilon)} =$$

PORTANDO IL lim $\varepsilon \to 0$ DA ENTRAMBI

$$\mathcal{F}\left(\vartheta_0(x)\right)(\xi) = -i\frac{1}{\xi - i0}$$

OSS SONO POTUTO PASSARE AL LIMITE PER LA CONTINUITÀ DI $\mathcal{F}$

FORMULA DI SOKHOTSKY – PLEMELJ

$$\frac{1}{\xi \pm i0} = P_V\left(\frac{1}{\xi}\right) \mp i\pi\delta_0$$

$$\mathcal{F}(\vartheta_0) = -i\left(P_V\left(\frac{1}{\xi}\right) + i\pi\delta_0\right) = -i\,P_V\left(\frac{1}{\xi}\right) + \pi\delta_0$$

NOTAZIONE $\varphi(x) \in S(\mathbb{R})$ $\quad \varphi^*(x) \overset{def}{=} \varphi(-x)$

$v \in S'(\mathbb{R})$

$v^* \in S'(\mathbb{R})$ $\quad \langle v^*, \varphi\rangle \overset{def}{=} \langle v, \varphi^*\rangle \quad \forall \varphi \in S$

PROP $\quad \mathcal{F}(\varphi^*) = [F(\varphi)]^*$

DIM $\quad \mathcal{F}(\varphi^*)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\varphi(-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{iy\xi}\varphi(y)\,dy =$

$$= \mathcal{F}(\varphi)(-\xi) = [\mathcal{F}(\varphi)]^*$$

QUINDI

$$\langle \mathcal{F}(v^*), \varphi\rangle = \langle v^*, \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \langle v, (\mathcal{F}(\varphi))^*\rangle = \langle v, \mathcal{F}(\varphi^*)\rangle$$

SIA ϑ_0^* ALLORA $\quad \mathcal{F}(\vartheta_0^*) = [\mathcal{F}(\vartheta_0)]^* = -i\Big[\underset{\text{DI SIM. DISPARI}}{P_V}\left(\frac{1}{\xi}\right)\Big]^* + \pi\underset{\text{PARI}}{\delta_0}^* =$

$$= i\,P_V\left(\frac{1}{\xi}\right) + \pi\delta_0$$

LA FUNZIONE SEGNO (non ce sono le considerazioni che lei non sta in $\mathcal{L}^1$ ...
(analoga a δ_0)

$$\mathrm{Sgn}(x) = \delta_0 - \delta_0^*$$

$$\mathcal{F}(\mathrm{Sgn}(x))(\xi) = \mathcal{F}(\delta_0) - \mathcal{F}(\delta_0^*) = -2i\, P_V\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

Sia $k \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{F}(\mathrm{Sgn}(x-k)) = -2i\, e^{-ik\xi}\, P_V\left(\frac{1}{\xi}\right)$

Ricorda $f \in \mathcal{L}^1$
$\mathcal{F}(f(x-k))(\xi) = e^{-ik\xi} \hat{f}(\xi)$
e questa si estende alle distribuzioni dopo aver definito $V(x-k)$

– Formula di inversione in $S(\mathbb{R})$

$\varphi \in S(\mathbb{R})$

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi)) = \varphi^*}_{\text{vale questa}} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\varphi^*)$$

Dim Denoto con $G(\varphi) = \dfrac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\varphi^*)$

Voglio vedere che $\mathcal{F}(G(\varphi)) = \varphi$ e $G(\mathcal{F}(\varphi)) = \varphi$

$$\mathcal{F}(G(\varphi)) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\varphi^*)\right) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi^*)) = (\varphi^*)^* = \varphi$$

OSS Usando la dualità la stessa formula vale su $S'(\mathbb{R})$

Usando $\mathcal{F}(\mathrm{Sgn}(x))(\xi) = -2i\, P_V\left(\frac{1}{\xi}\right)$

voglio calcolare

$$\mathcal{F}\left(P_V\left(\frac{1}{x}\right)\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{i}{2} \mathcal{F}(\mathrm{Sgn}(x))\right)(\xi) =$$

$$= \frac{i}{2} \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathrm{Sgn}(x)))(\xi) = \frac{i}{\pi} (\mathrm{Sgn}(\xi))^* = -i\pi\, \mathrm{Sgn}(\xi)$$

CALCOLO DI $\mathcal{F}(\delta_0)$ CON CONTI BRUTI

$$\langle \mathcal{F}(\delta_0), \varphi \rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \theta_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)dx =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \hat{\varphi}(\xi)d\xi = \lim_{M\to\infty} \int_0^M \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(x)dx\, d\xi \overset{\text{FUBINI TONELL.}}{=}$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \int_0^M e^{-ix\xi} d\xi\, dx}_{I_M} =$$

$$I_M = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left. \frac{e^{-ix\xi}}{-ix} \right|_0^M = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \frac{e^{-iMx} - 1}{-ix} =$$

$$= i \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} (e^{-iMx} - 1)\, dx =$$

$$= i \left[\int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(x)}{x} (e^{-iMx} - 1) dx + \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} (e^{-iMx} - 1) dx \right]$$

$$= i \left[\int_0^{+\infty} - \frac{\varphi(-x)}{x} (e^{iMx} - 1)\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \left(e^{-iMx} - 1\right) dx \right] =$$

$$= -i \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}}_{-i \langle P_v\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle} + i \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} e^{-iMx} - \frac{\varphi(-x)}{x} e^{iMx}\, dx$$

$$\shortparallel$$

$$i \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} (\cos Mx - i\sin(Mx)) - \frac{\varphi(-x)}{x} (\cos Mx + i \sin Mx)\, dx =$$

$$\shortparallel$$

$$i \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \cos(Mx) + \overbrace{i(-i)}^{1} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x} \sin(Mx)}_{\text{STUDIO CUI } Mx = y}$$

$$\downarrow M\to\infty$$

$$0$$

PER LEMMA DI RIEMANN LEB.

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\left[\varphi\left(\frac{y}{n}\right) + \varphi\left(-\frac{y}{n}\right)\right]}_{\downarrow \atop 2\varphi(0)} \frac{\sin y}{y}\, dy = 2\varphi(0)\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = 2\varphi(0)\frac{\pi}{2} = \pi \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

Allora $\langle \mathcal{F}(g_0), \varphi \rangle = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = -i \langle P_V\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle + \pi \langle \delta_0, \varphi \rangle$

$$= \langle -i\, P_V\left(\frac{1}{x}\right) + \pi\delta_0, \varphi \rangle$$

LEZIONE 08

Titolo nota 28/10/2019

Moltiplicatori di Fourier

① Operatore di convoluzione

$$\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad f \longrightarrow A(f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\, a(\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi =$$

def: simbolo di A

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\, a(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi y} f(y)\, dy \right) d\xi =$$

se $a(\xi) \in S(\mathbb{R}^n)$
posso applicare Fubini-Tonelli

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi}\, a(\xi)\, d\xi \right)}_{\hat{a}(y-x)} dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \hat{a}(y-x)\, dy$$

Def Un Moltiplicatore di Fourier se $A(f)$ come sopra manda $L^p \longrightarrow L^p$

PROP Se $a \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A(f)$ è un moltiplicatore di Fourier

dim
$$A(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underset{b(x-y)}{\underset{\shortparallel}{\hat{a}(y-x)}}\, f(y)\, dy = (b * f)(x)$$

Se dimostro che $b \in L^1 \Rightarrow$ per la disuguaglianza di Young $b*f \in L^p$
$\forall f \in L^p$ $\quad (\|b*f\|_{L^p} \le \|b\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^p})$

ma ricordo che $a \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{a} \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow b \in S(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1$

Ma si può fare di meglio!!

ESERCIZIO $\quad a(\xi) = \langle \xi \rangle^\alpha \qquad$ Dove $\langle \xi \rangle = \sqrt{1+|\xi|^2}$

Per quali α $\quad A_\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\, a(\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi : L^p \longrightarrow L^p$?

Per rispondere basta chiedersi per quali α $\hat{a}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi z} \langle\xi\rangle^\alpha d\xi \in L^1_z$

partiamo con chiedersi $\int \langle\xi\rangle^\alpha d\xi < +\infty$ per $\alpha < -n$

$\boxed{\text{in } n=1}$

supponiamo z lontano da 0 — derivata in ξ — scarico la derivata

$$I_\alpha(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi z} \langle\xi\rangle^\alpha d\xi = \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^\alpha \frac{\left(e^{-i\xi z}\right)'}{-iz} =$$

$$= \frac{1}{iz} \int \left(\langle\xi\rangle^\alpha\right)' e^{-i\xi z} dz$$

limitato

$$\left(\langle\xi\rangle^\alpha\right)' = \alpha \langle\xi\rangle^{\alpha-1} \boxed{\frac{\xi}{\langle\xi\rangle}} \Rightarrow \left|\left(\langle\xi\rangle^\alpha\right)^{(k)}\right| \lesssim \langle\xi\rangle^{\alpha-k}$$

$\Downarrow$ $|z|\geq 1$

e se z è vicino a zero $|\widehat{\langle\xi\rangle^\alpha}(z)| \lesssim 1$ $\qquad |I_\alpha(z)| \leq \frac{C}{|z|^N}$

Allora sta in L^1_{loc}

Se $n \geq 2$ $\qquad e^{-i\xi z} = \frac{1}{|z|} P\left(e^{-iz\xi}\right) = \underbrace{\left(i \left\langle \frac{z}{|z|}, \nabla_\xi \right\rangle\right)}_{P} e^{-i\xi z}$

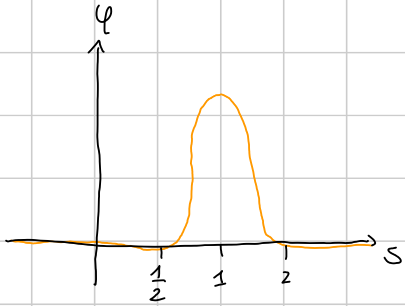
Applico ∇_ξ e poi faccio il prodotto scalare.

e usando lo stesso operatore P ottengo le stesse stime di sopra

<u>Esempio 2</u>

$\varphi > 0$ in $(\frac{1}{2}, 2)$

$\operatorname{supp}\varphi \subset [\frac{1}{2}, 2]$



Sia $A_\varphi(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \varphi\left(\frac{|\xi|}{R}\right) \hat{f}(\xi) d\xi \qquad R>0$

$\cap$
$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \supset S(\mathbb{R}^n)$

quindi $A_\varphi : L^p \longrightarrow L^p$ ma la norma di A_φ dipende da R, e si come dipende da R?

$$\hat{\varphi}\left(\frac{|\xi|}{R}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \varphi\left(\frac{|\xi|}{R}\right) d\xi \overset{\xi = R\cdot\eta}{=} \int e^{-ix\eta R} \varphi(|\eta|) R^n d\eta =$$

$= R^n \, \hat{\varphi}(xR) \rightarrow$ Adesso ne calcolo la sua norma L^1 per vedere la dis. di Young cosa produce

$$\left\| \hat{\varphi}\left(\frac{|3|}{2}\right)(x) \right\|_{L^1} = \int R^n \, |\hat{\varphi}(\underbrace{xR}_{y})| \, dx = \int |\hat{\varphi}(y)| \, dy = \|\hat{\varphi}\|_{L^1}$$

Quindi non dipende da R.

si assume limitata per come è φ ($\varphi \in L^1$)

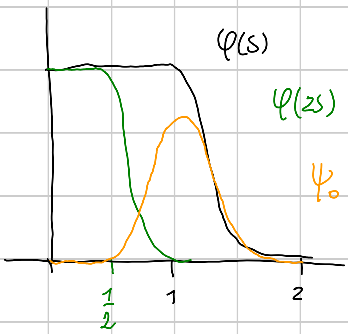
Idea della decomposizione di Paley-Littlewood

OBIETTIVO Costruire ψ_k t.c.

i) $\psi_k \geq 0$

ii) $\operatorname{supp} \psi_k \subset [2^{k-1}, 2^{k+1}]$

iii) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k(s) = 1 \quad \forall s > 0$



$$\psi_k(s) = \varphi(2^k s) - \varphi(2^{k+1} s)$$

LEZIONE 09

Titolo nota 31/10/2019

Torniamo alla dimostrazione della limitatezza dell'operatore H da L^1 in $L^{1,\infty}$

Ricordiamo $H(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y)\, f(y)\, dy$ con $K(z) = P_V\left(\frac{1}{z}\right)$

Allora $\hat{K}(\xi) = c \cdot \operatorname{sing} \xi$

<u>Def</u> Operatore di Calderon-Zygmund

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x-y)\, f(y)\, dy \quad \text{tc} \quad a)\ |K(z)| \lesssim \frac{1}{|z|^N} \quad \text{con } z \neq 0$$

$$b)\ \int_{\partial B^N(0,1)} K(z)\, dz = 0$$

$\downarrow$ condizione non necessaria.

<u>Esempio</u>: $K(z) = \frac{z_j}{|z|^{N+1}}$

Al posto di b) a volte si richiede b') $\hat{K}(\xi) = O(1)$

b' ci regala subito che $\mathcal{L} : L^2 \to L^2$ (si dimostra allo stesso modo di H).

<u>Dim</u> ($H : L^1 \to L^{1,\infty}$ limitato)

obiettivo: $\left|\{|H(f)(x)| > \lambda\}\right| \lesssim \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}$ con $f \in L^1$

Usando il lemma di decomposizione di Calderon-Zygmund

$f(x) = g(x) + b(x)$ con

Stimiamo la parte buona.

$$\|g\|_{L^1} \lesssim \|f\|_{L^1} \qquad \|g\|_{L^\infty} \lesssim \lambda$$

Chebichev — H è limitato in L^2

$$\left|\{|H(g)(x)| > \lambda\}\right| \lesssim \frac{\|H(g)\|_{L^2}^2}{\lambda^2} \lesssim \frac{\|g\|_{L^2}^2}{\lambda^2} \leq \frac{\|g\|_{L^1}\|g\|_{L^\infty}}{\lambda^2} \lesssim \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}$$

Adesso stimiamo la parte cattiva.

$$b = \sum_J b_J \quad \text{con supp } b_J \subset Q_J, \quad \sum_J |Q_J| \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}, \quad \|b_J\|_{L^1} \lesssim \frac{|Q_J|}{\lambda}$$

Q_J quasi disgiunti

$a_J \to$ centri dei quadrati.

$$\left|\{|H(b)(x)| > \lambda\}\right|$$

$$H(b)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-y)} b(y)\,dy = \sum \int_{Q_J} \frac{1}{(x-y)} b_J(y)\,dy$$

Considero αQ_J un quadrato con centro a_J

cioè se $Q_J = (a_J - e_J, a_J + e_J)$ $\quad \alpha Q_J = (a_J - \alpha e_J, a_J + \alpha e_J)$

Considero $\bigcup_J \alpha Q_J$ con $\alpha = 2$

Se $x \in \bigcup_J \alpha Q_J$ non ho stime.

dis Markov

$$\left|\{|H(b)(x)| > \lambda,\ x \in \cup \alpha Q_J\}\right| \leq \sum_J \alpha |Q_J| \lesssim \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}$$

Se $x \notin \cup \alpha Q_J \Rightarrow |x-y| \geq e_J > 0$ (se $\alpha \geq 2$)

dis Markov

$$\left|\{|H(b)(x)| > \lambda,\ x \in \cup_\alpha Q_J\}\right| \leq \frac{\|H(b)\|_{L^1(\mathbb{R} \setminus \bigcup_J \alpha Q_J)}}{\lambda}$$

$$H(b)(x) = \sum_J \int_{Q_J} \frac{1}{(x-y)} b_J(y)\, dy = \otimes$$

Ricordando che $b_J(y) = \begin{cases} f(y) - \frac{1}{|Q_J|}\int_{Q_J} f(x)\,dx \\ 0 \qquad y \in Q_J \end{cases} \Rightarrow b_J(y)$ ha media nulla.

$$\otimes = \sum_J \int_{Q_J} \left(\frac{1}{(x-y)} - \underbrace{\frac{1}{x-a_J}}_{\text{non dipende da } y} \right) b_J(y)\, dy$$

Quindi lo posso aggiungere tanto b_J ha media nulla.

$$\|H(b)\|_{L^1(\mathbb{R}\setminus \bigcup_J \alpha Q_J)} \leq \sum_J \|H(b_J)\|_{L^1(\mathbb{R}\setminus \bigcup_k \alpha Q_k)}$$

$$\|H(b_J)\|_{L^1(\mathbb{R}\setminus \bigcup_k \alpha Q_k)} = \int_{\mathbb{R}\setminus \bigcup_k \alpha Q_J} \left| \int_{Q_J} \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-a_J} \right) b_J(y)\, dy \right| dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}\setminus \bigcup_k \alpha Q_k} \int_{Q_J} \left| \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-a_J} \right) \right| |b_J(y)|\, dy\, dx \overset{\text{uso Fubini-Tonelli}}{\leq}$$

$$\leq \sup_y \int_{\mathbb{R}\setminus \bigcup_k \alpha Q_k} \left| \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-a_J} \right| dx \underbrace{\int_{Q_J} |b_J(y)|\, dy}_{= \|b_J\|_{L^1}} =$$

$$= \sup_{y \in Q_J} \int_{\mathbb{R}\setminus \bigcup_k \alpha Q_k} \left| \frac{\overset{\cancel{|\tilde y| \ell_J}}{(y-a_J)}}{\underset{\cancel{\ell_J}|\tilde x - \tilde y|\, \cancel{\ell_J}|\tilde x|}{(x-y)(x-a_J)}} \right| \overset{\cancel{\ell_J}\, d\tilde x}{dx} \int_{Q_J} |b_J(y)|\, dy \leq \otimes$$

Se $|x-y| \geq \ell_J$ $\quad |x-a_J| \geq \alpha \ell_J \quad |y-a_J| \overset{y\in Q_J}{\leq} \ell_J$ Riesco a dire

che il primo integrale è limitato da una costante.?

chiamo $\tilde x = \frac{x-a_J}{\ell_J}$ e $\frac{y-a_J}{\ell_J} = \tilde y$

Allora il primo integrale diventa con $|\tilde y| \leq 1$

$$\int_{\substack{|\tilde{x}|\geq 2 \\ |\tilde{x}-\tilde{y}|\geq 1}} \frac{|\tilde{y}|}{|\tilde{x}||\tilde{x}-\tilde{y}|}\, d\tilde{x} \leq \int_{|\tilde{x}|\geq 2} \frac{2}{|\tilde{x}|^2} \leq C < +\infty$$

oss non dipende da J

controlla se le stime con e_J non hanno costo

$|\tilde{x}-\tilde{y}| \geq |\tilde{x}| - 1 \geq |\tilde{x}| - \frac{|\tilde{x}|}{2} = \frac{|\tilde{x}|}{2}$

$|\tilde{y}| \leq 1$

Allora $\leq_{⊛} C \, \|b_J\|_{L^1(Q_J)}$

non mi trovano le stime su $\|b_J\|$ e $|Q_J|$

$$\Rightarrow \|H(b)\|_{L^1(\mathbb{R} \setminus \bigcup_k \alpha Q_k)} \leq \sum_J \|b_J\|_{L^1(Q_J)} \leq \|f\|_{L^1}$$

Def **Operatore Massimale**

$$M(f)(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{|B(x,R)|} \int_{|x-y|<R} |f(y)| \, dy$$

<u>oss</u> $M(f)$ è sub-lineare

si vede $\|M(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$ facilmente

$M: L^1 \longrightarrow L^{1,\infty}$ è difficile

<u>Idea di dim</u> $E_\lambda = \{ M(f)(x) > \lambda \}$ PRESO K COMPATTO

Voglio vedere che $|E_\lambda \cap K| \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}$

$$\exists \; I_{x_J} \quad \frac{1}{|I_{x_J}|} \int_{I_{x_J}} |f| \geq \lambda$$

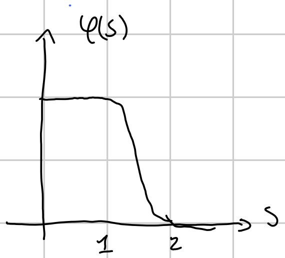
con $K \subseteq \bigcup_J I_{x_J} \Rightarrow$ per Vitali $\exists \{ I_{x_{J_1}} \dots I_{x_{J_K}} \}$

tc $\{I_{x_{j_i}}\}_{i=1..k}$ sono disgiunti e $\{3I_{x_{j_i}}\}_{i=1..k}$ Ricoprono K

$$\Rightarrow |E_\lambda \cap K| \leq |K| \leq 3\sum_{i=1}^{k} |I_{x_{j_i}}| \leq \frac{3}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\int_{I_{x_{j_i}}} |f| \lesssim \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}$$

Torniamo a Paley-Littlewood.

Prese $\phi(s)$



costruiso $\psi(\tau) = \phi(\tau) - \phi(2\tau)$

(a) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k(\tau) = 1 \quad s>0$

(b) $\text{Suppo } \psi_k(\tau) \subset [2^{k-1}, 2^{k+1}]$

(c) $\psi_k \geq 0 \quad , \psi_k \in C_c^\infty((0,+\infty))$

$\phi_k(\tau) = \phi\left(\frac{\tau}{2^k}\right) \quad \forall k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \psi_k(\tau) = \phi_k(\tau) - \phi_{k-1}(\tau)$ ✓ Sto facendo un macello con con gli indici

$$\Rightarrow \sum_{\ell=n}^{m} \psi_\ell(\tau) = \phi_m(\tau) - \phi_{n-1}(\tau) \xrightarrow[\substack{m\to+\infty \\ n\to-\infty}]{} 1$$

LEZIONE 10

Titolo nota 05/11/2019

Definizione di operatore aggiunto

Dato $A: B_1 \longrightarrow B_1$ operatore limitato, avendo a disposizione una nozione di dualità del tipo $\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)\,dx$ $\forall f \in B_1$ $\forall g \in B_1'$

Definisco $A^*: B_1' \longrightarrow B_1'$ tale che $\langle A^*g, f\rangle \overset{def}{=} \langle g, Af\rangle$ $\forall f \in B_1$ $\forall g \in B_1'$

Lemma Se $\|A(f)\|_{B_1} \leq c\|f\|_{B_1} \Rightarrow \|A^*(g)\|_{B_1'} \leq c\|g\|_{B_1'}$

Dim $\|A^*(g)\|_{B_1'} = \sup_{\substack{f\in B_1\\ \|f\|_{B_1}=1}} |\langle A^*(g), f\rangle| \overset{\text{def di } A^*}{=} \sup_{\|f\|_{B_1}=1} |\langle g, A(f)\rangle| \overset{\text{Holder}}{\leq} \|g\|_{B_1'} \sup_{\|f\|=1} \|A(f)\|_{B_1} \overset{A \text{ è limitato}}{\leq}$

$\leq \|g\|_{B_1'} \sup_{\|f\|_{B_1}=1} c\cdot\|f\|_{B_1} = C\|g\|_{B_1'}$

Esempio Ricordando gli operatori $\mathcal{A}(f)(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi$ voglio calcolare chi è $\mathcal{A}^*(g)$

Per definizione $\langle \mathcal{A}(f), g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{A}(f)(x)\overset{\text{uso il prodotto in campo complesso}}{\overline{g(x)}}\,dx = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}a(\xi)\hat{f}(\xi)\overline{g(x)}\,d\xi\,dx =$

$= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(\xi) e^{-iy\xi} f(y)\overline{g(x)}\,dy\,d\xi\,dx \;=$ se aggiungo che per ipotesi $|a(\xi)| \leq \frac{c}{\langle\xi\rangle^{n+1}}$ posso usare Fubini-Tonelli

$= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\underline{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi(y-x)} a(\xi)\overline{g(x)}\,dx\,d\xi}\right)dy \;=$ coniugo 2 volte il secondo pezzo

$= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\overline{\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi(y-x)}\overline{a(\xi)}\,g(x)\,dx\,d\xi\right)}dy \overset{\text{per definizione}}{=} \langle f, \mathcal{A}^*(g)\rangle$

da cui $\mathcal{A}^*(g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi(y-x)}\overline{a(\xi)}\,g(x)\,dx\,d\xi \overset{\text{usando F.T}}{=}$

$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi y} \overline{a(\xi)}\, \hat{g}(\xi)\, d\xi$, quindi è uguale a $A(f)$ ma

con peso $a(\xi)$ coniugato.

Oss: l'ipotesi vista in corso $|a(\xi)| \leq \frac{C}{\langle \xi \rangle^{n+1}}$ si può indebolire

Def $a \in S^k(\mathbb{R}^n)$ se $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{R}$ e $|\partial_\xi^\alpha a(\xi)| \leq C_\alpha \left((1+|\xi|) \right)^{k-|\alpha|}$ $\forall \alpha$

Oss L'ipotesi sopra si può sostituire con $a(\xi) \in S^k$ e scegliendo un k giusto.

Problema $A(f)$ potrebbe non essere ben definito per $a(\xi) \in S^k$ allora si procede con la solita regolarizzazione prendendo
$a_\varepsilon(\xi) = a(\xi)\, e^{-\varepsilon|\xi|}$ oppure $a_\varepsilon(\xi) = a(\xi)\,(1+\varepsilon|\xi|)^{-N}$

Prendiamo $a(\xi) \in S^0$ e $A(f)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$

poiché ha senso per $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vorrei definirlo per $f \in L^p$

Lemma vale che $\|A(f)\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}$ $\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Oss la buona definizione in C_0^∞ e il fatto che $A(f)$ è limitato in norma L^2 mi dice che è ben definito $A(f): L^2 \to L^2$ perché per densità di C_0^∞ in L^2 posso definirlo per passaggio al limite di succ.

Dim Osservo che $\widehat{A(f)}(\xi) = a(\xi)\, \hat{f}(\xi)$

$\Rightarrow \|\widehat{A}(f)\|_{L^2} = \|a \hat{f}\|_{L^2} < +\infty \Rightarrow \widehat{A}(f)(\xi)$ è limitata in $L^2 \Rightarrow A(f) \in L^2$ perché la trasf. di Fourier manda L^2 in L^2.

perché $a \in S^0$ quindi limitata e $\hat{f} \in C_0^\infty$

Analizziamo il caso $1<p<2$

Se $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{A}(f)(\xi) = \underset{\underset{S^0}{\Uparrow}}{a(\xi)}\, \underset{\underset{\text{Schwarz}}{\Uparrow}}{\hat{f}(\xi)} \in L^p(\mathbb{R}^n)\ \forall_p\ 1\leq p\leq +\infty$

Ricordando le pro. della t. di Fourier

a) $\|g\|_{L^\infty} \leq C\|\hat{g}\|_{L^1}$

b) $\|g\|_{L^2} = C\|\hat{g}\|_{L^2}$

$\Rightarrow$ RIESZ-TORIN (i) $\|g\|_{L^{p'}} \lesssim \|\hat{g}\|_{L^p}$ (dis Young) $\forall p'\geq 2$

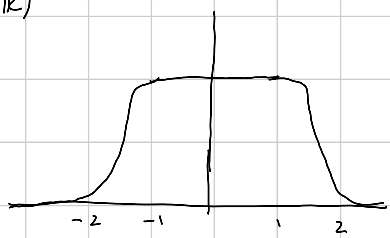
Quindi

$$\|A(f)\|_{L^{p'}} \overset{(i)}{\lesssim} \|\hat{A}(f)\|_{L^p} = \|a(\xi)\hat{f}(\xi)\|_{L^p} \underset{a(\xi)\text{ è limitata}}{\lesssim} \|\hat{f}(\xi)\|_{L^p} \overset{(i)}{\lesssim} \|f\|_{L^p}$$

$\Rightarrow A(f)\in L^{p'}\quad \forall p'\in[2,+\infty]$

Regolarizzazione di $A(f)$ con $a(\xi)\in S^0$

prendiamo $\varphi(s)\in C_c^\infty(\mathbb{R})$



costruisco $a_\varepsilon(\xi) = a(\xi)\varphi(\varepsilon\langle\xi\rangle)$

$$A_\varepsilon(f)(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a_\varepsilon(\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

EX 1 $\quad a\in S^0\quad \varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow a\cdot\varphi\in S^0$

EX 2 $\quad a\in S^0\quad \varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow a\varphi(\varepsilon\langle\xi\rangle)\in S^0$ e valgono le stime

$$|\partial_\xi^\alpha a(\xi)\varphi(\varepsilon\langle\xi\rangle)| \leq \underset{\varepsilon\text{- indipendenti.}}{C_\alpha}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

Suggerimento stime sulle derivate:

partire dalla derivata di φ $\quad \partial_{\xi_1}\varphi(\varepsilon\langle\xi\rangle) = \varphi'(\varepsilon\langle\xi\rangle)\,\varepsilon \underset{\text{salta fuori un } \frac{1}{\langle\xi\rangle^{|\alpha|}}}{\frac{\xi_1}{\langle\xi\rangle}} \Rightarrow \oplus$

osservo che il supp $\varphi'\subset[1,2] \Rightarrow \quad \varepsilon\sim\frac{1}{\langle\xi\rangle}$ affinché $1\leq\varepsilon\langle\xi\rangle\leq 2$

$$\circledast \quad \left|\partial_\xi^\alpha \varphi(\varepsilon\langle\xi\rangle)\right| \le \frac{C_\alpha}{\langle\xi\rangle^{|\alpha|}}$$

Per vederla si fa vedere che $|\partial_\xi^\alpha \langle\xi\rangle^N| \le C_{\alpha,N} \langle\xi\rangle^{N-|\alpha|}$ per induzione su $|\alpha|$

usando per il passo induttivo $\partial_\xi^\alpha \langle\xi\rangle^N = \langle\xi\rangle^{N-2|\alpha|} P_{|\alpha|}(\xi)$

$\rightarrow$ polinomio di grado $|\alpha|$

Teo (Operatori di Kalderon-Zygmund)

Sia $T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y)\,dy$ se valgono

i) $|\nabla K| \le \dfrac{C}{|z|^{n+1}}, \ \forall z \neq 0$

ii) $\|\hat{K}\|_{L^\infty} < +\infty$.

$\Rightarrow$ $T(f): L^p \longrightarrow L^p$ è limitato $\forall p \quad 1<p<+\infty$

Dim Segue la stessa dimostrazione della trasformata di Hilbert.

Quindi prima da L^2 in L^2, poi da L^1 in $L^{1,\infty}$, poi si usa Marcinkiewicz

e poi si passa all'operatore duale con il Lemma a inizio lezione.

Teorema di Michelin (dim di Hörmander)

Se vale $\sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^n \\ |\alpha|\le n+2}} \langle\xi\rangle^\alpha |\partial_\xi^\alpha a_\varepsilon(\xi)| \le C_n < +\infty \quad , a \in S^0$

$\Rightarrow \quad A_\varepsilon : L^p \longrightarrow L^p$ è limitato $\forall p \quad 1<p<+\infty$

Dim L'idea è quella di far vedere che A_ε si può scrivere come un operatore di Kalderon-Zygmund e che le stime su $a_\varepsilon(\xi)$ mi permettono di applicare il teo di K-Z.

$$A_\varepsilon(f)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\, a_\varepsilon(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} f(y)\,dy =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int e^{i(x-y)\xi} a_\varepsilon(\xi)\, d\xi \right)}_{\hat{a}_\varepsilon(y-x) = K(x-y)} f(y)\, dy$$

$$\nabla K(z) = \nabla \hat{a}_\varepsilon(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\xi} \cdot \xi\, a_\varepsilon(\xi)\, d\xi =$$

oss l'integrale $\forall \varepsilon > 0$ finito è a supporto compatto quindi ben definito.

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\xi} \xi\, a_\varepsilon(\xi)\, \varphi(|\xi||z|)}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\xi} \cdot \xi\, a_\varepsilon(\xi)\, \varphi(|\xi||z|)}_{I_2}$$

$$|I_1| \lesssim \int_{|\xi| \leq \frac{2}{|z|}} |\xi|\, d\xi \lesssim \frac{1}{|z|^{n+1}}$$

come mai ??

φ è a supporto in $|z||\xi| \leq 2$.
a_ε è limitato per le stime

Per stimare I_2 uso intanto la seguente identità

$$\underbrace{\left\langle \frac{z}{i|z|^2}, \nabla_\xi \right\rangle}_{\substack{\text{|| - lo chiamo} \\ P_z(\partial_\xi)}} e^{iz\xi} = e^{iz\xi}$$

inoltre

$$\int P_z(\partial_\xi) f(\xi)\, \overline{g(\xi)}\, d\xi = \int f(\xi)\, \overline{P_z^*(\partial_\xi) g(\xi)}$$

integrazione per parti e duale

Poiché un'integrazione per parti manda $\nabla \to -\nabla$ mentre il coniugio manda $i \to -i$

$$\Rightarrow \quad P_z(\partial_\xi) = P_z^*(\partial_\xi)$$

Inoltre da $P_z(\partial_\xi) e^{iz\xi} = e^{i\xi z} \Rightarrow P_z^N(\partial_\xi) e^{iz\xi} = e^{iz\xi} \quad \forall N$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\xi} \xi\, a_\varepsilon(\xi) \left(1 - \varphi(|\xi||z|)\right) d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} P_z^N(\partial_\xi) e^{iz\xi} \xi\, a_\varepsilon(\xi) \left(1 - \varphi(|\xi||z|)\right) d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\xi} P_z^{N*}(\partial_\xi)\, \xi\, a_\varepsilon(\xi) \left(1 - \varphi(|\xi||z|)\right) d\xi$$

Da qui mi sono perso ma lui dice che la stima dell'ipotesi diventa

$$\left| P_z^N(\partial_\xi)\, \xi\, a_\varepsilon(\xi) \right| \lesssim \frac{C}{|z|^N} \langle \xi \rangle^{1-N}$$ e Bisogna scegliere $\boxed{N = n+2}$

Inoltre aggiunge che si può vedere che

$$\left| P_z^N(\partial_\xi)\, \xi\, a_\varepsilon(\xi) \left(1 - \varphi(|z||\xi|)\right) \right| \lesssim \frac{C}{|z|^N} \langle \xi \rangle^{1-N}$$

LEZIONE 11

Titolo nota 07/11/2019

$$\mathcal{A}(f)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} a(\xi) \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

La stima richiesta dal teorema di Michlin era

$$\sup |\partial^\alpha a(\xi)| \le \frac{C_\alpha}{\langle \xi \rangle^{|\alpha|}} \quad \text{con } |\alpha| \le n+2$$

Teorema di Coiffmann - Mayer (operatori bilineari)

$$B(f,g)(x) = (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix(\xi+\eta)} b(\xi,\eta) \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta)\, d\xi\, d\eta$$

Se $b \equiv 1 \Rightarrow B_0(f,g)(x) = f(x) g(x)$ e vale

$$\| B_0(f,g) \|_{L^p} \lesssim \| f(x) \|_{L^{q_1}} \| g(x) \|_{L^{q_2}} \quad \text{se } \frac{1}{p} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$$

Teo di Coiffmann - Mayer (Ex: provare a vedere se si dimostra usando K-Z)

Se $\displaystyle |\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta b(\xi,\eta)| \le \frac{C_{\alpha,\beta}}{(|\xi|+|\eta|)^{|\alpha|+|\beta|}}$ (Possiamo chiedere $|\alpha|, |\beta| \le N(n)$)

$$\Rightarrow \quad \| B(f,g) \|_{L^p} \lesssim \| f(x) \|_{L^{q_1}} \| g \|_{L^{q_1}} \quad \text{con } \frac{1}{p} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$$

e $1 < p, q_1, q_2 < +\infty$

Torniamo alla decomposizione di Palley-Littlewood e spazi

$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ e $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Besov $\quad$ Triebel - Lizorking

Esempi:
- $W^s_p(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,p} = B^s_{p,p}$
- $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ con norma $(1-\Delta)^{k/2} f \in L^2 = F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$

$\boxed{\text{Teo se } 1<p<+\infty \quad k\in\mathbb{N} \quad W^k_p(\mathbb{R}^n) = H^k_p(\mathbb{R}^n)}$ quindi se $s \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N} \Rightarrow W^s_p \neq H^s_p$

Spazio di Hardly $H^1 = B^0_{1,2} \subset L^1$

$bmo = B^0_{\infty,2}$

bounded mollyfy oscillation

P-L| Se $s>0$ esiste partizione unità $\psi_j(s)$ tc

$$\begin{cases} 1 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j(s) \\ \psi_j = \psi\left(\frac{s}{2^j}\right) \\ \psi \in C^\infty_0(0,+\infty) \\ \operatorname{Supp}\psi = [\frac{1}{2}, 2] \end{cases} \longrightarrow \operatorname{supp}\psi_j(s) \subset [2^{j-1}, 2^{j+1}]$$

con $\psi(s) = \varphi(s) - \varphi(2s)$ e $\varphi(s)$

Verso disuguaglianza di Berstein

Def $\psi_j(D) f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \psi_j(|\xi|) \hat{f}(\xi)\, d\xi$

esempio $(-\Delta)f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} |\xi|^2 \hat{f}(\xi) d\xi$

$D^{2s} f(x) = (-\Delta)^s f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} |\xi|^{2s} \hat{f}(\xi) d\xi \quad s \in \mathbb{R}$

chiamando $D = \sqrt{-\Delta}$

Lemma dis di Berstein

Vale. $\| \varphi_J(D) f \|_{L^p} \leq C 2^J \|f\|_{L^q} \quad \forall \; 1 \leq q \leq p \leq +\infty$

Dim $\varphi_J(|\xi|) = \varphi\left(\frac{|\xi|}{2^J}\right) \qquad \left| \partial_\xi^\alpha \varphi\left(\frac{|\xi|}{2^J}\right) \right| \leq \frac{C_\alpha}{2^{J|\alpha|}} \underset{\sim}{\leq} \frac{C_\alpha}{|\xi|^{|\alpha|}}$

per il supp. di φ_J

Vale ipotesi di Michlin

Quindi $\| \varphi_J(D) f \|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$ per Michlin $\forall \; 1 < p < +\infty$

Se ho la stima per $p = +\infty$ posso usare Riesz-Torin

Passo alla rapp. di K-Z

$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \varphi_J(|\xi|) \hat{f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} K_J(x-y) f(y) dy$

e ricordo $K(-z) = \hat{\varphi}_J(z)$

osservando $f_\lambda(\xi) = f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \Rightarrow \hat{f}_\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} f_\lambda(\xi) d\xi = \lambda^n \hat{f}(\lambda z)$

$\hat{\varphi}_J(|\xi|) = \varphi\left(\frac{|\xi|}{2^J}\right) \rightarrow K_J(z) = 2^{Jn} K(2^J z)$

dove $K(z) = \hat{\varphi}(z) \in S(\mathbb{R}^n) \subseteq L^q(\mathbb{R}^n)$

$$\| \varphi_J(D) f \|_{L^\infty} \overset{\text{Young}}{\leq} \|K_J\|_{L^{q'}} \|f\|_{L^q}$$

$$1 + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}$$

$$\|K_J\|_{L^{q'}}^{q'} = \int_{\mathbb{R}^n} 2^{Jnq'} K(2^J z)^{q'} dz \overset{2^J z = u}{=} \int_{\mathbb{R}^n} 2^{-Jn} 2^{Jnq'} K(u)^{q'} du$$

$$\|K_J\|_{L^{q'}} = 2^{Jn\left(1-\frac{1}{q'}\right)} \overset{\|K\|_{L^{q'}}}{C} = 2^{\frac{Jn}{q}} \cdot C$$

$\Rightarrow$ 2) $\|\Psi_J(D) f\|_{L^\infty} \lesssim 2^{\frac{Jn}{q}} \|f\|_{L^q}$ ricordo 1) $\|\Psi_J(D) f\|_{L^q} \lesssim \|f\|_{L^q}$

Interpolando $\|\Psi_J(D) f\|_{L^p} \leq 2^{Jn\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \|f\|_{L^q}$ $1 < q < +\infty$

la stessa su norma L^r di K (non dipende da J)

infine uso Young $\|\Psi_i(D) f\|_{L^p} \leq \|K_J\|_{L^r} \|f\|_{L^q} \leq C\, 2^{\frac{Jn}{r}} \|f\|_{L^q}$

$1 \leq q \leq p \leq +\infty$ $\quad 1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q'} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$

Guadagno anche gli estremi.

<u>Oss</u> $2^{Js} \|\Psi_J(D) f\|_{L^q} \sim \|D^s(\Psi_J(D) f)\|_{L^q}$ perché $2^J \sim |\xi|$

dove $D^s g(x) = \left(\sqrt{-\Delta}\right)^s g = \int e^{ix\xi} |\xi|^s \hat{g}(\xi)\, d\xi$

$$\| D^s (\Psi_J(D) f)\|_{L^q} \leq C\, 2^{Js} \|f\|_{L^q}$$

Applicando Bernstein per $\tilde{\Psi}$

$$\left\| \frac{D^s}{2^{Js}} (\Psi_J(D) f)\right\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^q}$$

Perché $\frac{D^s}{2^{Js}} \Psi_J(D) \to \frac{|\xi|^s}{2^{Js}} \Psi\left(\frac{|\xi|}{2^J}\right) \Rightarrow \tilde{\Psi}\left(\frac{\xi}{2^J}\right) = |\xi|^s \Psi(\xi)$

$\qquad \qquad \qquad \| \quad \tilde{\Psi}_J(D) \qquad \qquad \tilde{\Psi}_J = \tilde{\Psi}\left(\frac{\xi}{2^J}\right)$

<u>Esercizio</u> dimostrare $\|2^{Js} \Psi_J(D) f\|_{L^q} \leq \|\overbrace{D^s f}^{g}\|_{L^q}$ e usando di nuovo Ber..

$\Rightarrow$ Ho il $\sim$ visto sopra

<u>Oss 2</u> Sobolev mi dice $\|f\|_{L^p} \leq C \|D^s f\|_{L^q}$ $1 < q \leq p < +\infty$

$$s = n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$$

Ricordando $D^{-s} f = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} |\xi|^{-s} \hat{f}(\xi) d\xi$

usando K-Z ricaviamo K e seguendo la dim. sopra ma

usando Young con L^p deboli si ottiene Sobolev.

OSS 3 prendo $f \longrightarrow f = \sum f_i \qquad f_i = \varphi_i(D) f$

localizzo, non localizzo

$$\|f_i\|_{L^p} \lesssim c \|D^s f\|_{L^q} = c\|D^s \tilde{\varphi}_j f\|_{L^q} \sim 2^{j\left(n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right)} \|\tilde{\varphi}_j f\|_{L^q}$$

ma ricordando $\varphi_j(\xi) = \varphi_j(\xi) \underbrace{\left(\varphi_{j-1}(\xi) + \varphi_j(\xi) + \varphi_{j+1}(\xi)\right)}_{\tilde{\varphi}_j(\xi)}$

Qui la stima è localizzata e inoltre a differenza di Sobolev comprende gli estremi 1 e $+\infty$ sia per p che per q.

Introduzione agli spazi di Besov

Notazione $f_i = \varphi_j(D) f$

Presa $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\quad 1 \le p \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \le q \le +\infty$

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} := \left\| \{ 2^{js} \|f_j\|_{L^p} \} \right\|_{\ell^q_{j\in\mathbb{Z}}}$$

sopra B e F vuol dire omogeneo

$$\|\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^q} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^q\right)^{1/q}$$

Spazi $F^s_{p,q}$

$$\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}} = \left\| \|2^{js} f_j(x)\|_{\ell^q_{j\in\mathbb{Z}}} \right\|_{L^p}$$

LEZIONE 12

Titolo nota 11/11/2019

Esempio Ricordando la partizione di Paley-Littlewood ψ_J

(i) $\sum_{J=-\infty}^{+\infty} \psi_J(s) = 1$, $s>0$

(ii) $\psi_J(s) = \psi\left(\frac{s}{2^J}\right)$ $\quad s = |\xi| \sim 2^J$

$\Rightarrow$ $f = \sum_{J=-\infty}^{+\infty} f_J$ con $f_J = \psi_J(D) f = c\int e^{ix\xi} \psi_J(|\xi|) \hat{f}(\xi)\, d\xi$

$\Rightarrow$ $\hat{f}_J(\xi) = \psi_J(|\xi|)\, \hat{f}(\xi)$

omogeneo

$\Rightarrow$ preso $0<s<1$ e $\dot{W}^s_p$ una norma è

(1) $\|f\|_{\dot{W}^s_p} = \| 2^{Js} \|f_J\|_{L^p} \|_{\ell^p}$

Norme equivalente (con differenze)

misura omogenea

$W^s_p(\mathbb{R})$ $\quad \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|^s} \right|^p \frac{dh}{|h|}\, dx \right)^{1/p}$

$\wr$ $\to$ è una norma equivalente

$\|f\|_{\dot{W}^s_p(\mathbb{R})}$

Il punto chiave della dimostrazione dell'equivalenza è la disuguaglianza di Hardy (equivalente al principio di indeterminazione di Heisenberg)

Vogliamo vedere nel caso non omogeneo.

Ricordiamo che $\dot{W}^s_p(\mathbb{R}^n) = \dot{B}^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$

Quindi $\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \| 2^{sj} \|f\|_{L^p} \|_{\ell^q}$ con P-L.

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \left[\int \left(\left\| \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^s} \right\|_{L^p_x} \right)^q \frac{dh}{\|h\|^n} \right]^{1/q} = \left\| \left\| \frac{f(x+h)-f(x)}{|h|^s} \right\|_{L^p_x} \right\|_{L^q\left(\frac{dh}{|h|^n}\right)}$$

con le differenze

Anche in questo caso le norme sono equivalenti

<u>Caso non omogeneo</u>

Con P-L

$$\tilde{\varphi}_0(\xi) = \sum_{j=-\infty}^{0} \varphi_j(\xi) \Rightarrow \tilde{\varphi}_0(\xi) + \sum_{j\geq 1} \varphi_j(\xi) = 1$$

nuova partizione

$$f = \sum_{j\geq 0} f_j$$

$$\Rightarrow \|f\|_{B^s_{p,q}} = \| 2^{sj} \|f_j\|_{L^p} \|_{\ell^q_{j\geq 0}}$$

Con le differenze avevo visto che $\tilde{\varphi}_0(D) : L^p \to L^p$ (usando K-Z)

Abbiamo $\|f\|_{B^s_{p,q}} = \|f\|_{L^p} + \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}$

Scambiando p e q nell'ordine delle norme si ottengono $F^s_{p,q}$ (non trattiamo)

<u>Teorema</u> Disuguaglianza di Hardy

in $\mathbb{R}^3$ $\exists C$ tc $\forall f \in C^\infty_0(\mathbb{R}^3)$

(i) $\left\| \frac{1}{|x|} f(x) \right\|_{L^2} \leq C \|\nabla f\|_{L^2}$

Dim Ricordando $|\nabla f(x)|^2 = |\partial_r f|^2 + \underbrace{[\ \ ]^2}_{\text{comp angolare}}$

Quindi $|\partial_r f|^2 \leq |\nabla f(x)|^2$ allora basta dimostrare il problema solo per funzioni radiali

quindi dobbiamo dimostrare che $\int_0^{+\infty} f(r)dr \leq c\int_0^{+\infty} f'(r)^2 r^2 dr$

$$f(r) = -\int_r^{+\infty} f'(s)\,ds \overset{s=r\vartheta}{=} -r\int_1^{+\infty} f'(r\vartheta)\,d\vartheta$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{1}{r}f(r)\right\|_{L^2(r^2dr)} = \left\|\int_1^{+\infty} f(r\vartheta)\,d\vartheta\right\|_{L^2(r^2dr)} \leq (*)$$

$$\leq \int_1^{+\infty} \|f(r\vartheta)\|_{L^2(r^2dr)}$$

$$\|g(r\vartheta)\|_{L^2(r^2dr)} = \left(\int_0^{+\infty} |g(\underbrace{r\vartheta}_{s})|^2 r^2 dr^2\right)^{1/2} =$$

$$= \vartheta^{-\frac{3}{2}}\left(\int_0^{+\infty} |g(s)|^2 s^2 ds\right)^{1/2}$$

$$(*) \leq \int_1^{+\infty} \vartheta^{-3/2}d\vartheta\ \|f'\|_{L^2(r^2dr)} = 2\|f'\|_{L^2(r^2dr)}$$

Generalizzando: per le funzioni radiali in $\mathbb{R}^n$

$$\left\|\frac{1}{r}f(r)\right\|_{L^p(r^{n-1}dr)} \leq C\|f'(r)\|_{L^p(r^{n-1}dr)} \qquad p<n$$

Dim

$$\left\|\frac{1}{r}f(r)\right\|_{L^p(r^{n-1}dr)} = \left\|\int_1^{+\infty} f'(r\vartheta)d\vartheta\right\|_{L^p(r^{n-1}dr)} \leq (*)$$

$$\|g(r\theta)\|_{L^p(r^{n-1}dr)} = \theta^{-\frac{n}{p}} \left(\int_0^{+\infty} |g(s)|^p r^{n-1} dr \right)^{1/p}$$

$$\leq \circledast \quad \frac{p}{n-p} \quad \|f'\|_{L^p(r^{n-1}dr)}$$

$$\overset{\shortparallel}{\int_{+1}^{\infty} \theta^{-\frac{n}{p}}}$$

Inoltre $\left| \partial_r f(r\theta) \right| = \left| \nabla f \cdot \theta \right| \underset{\circledast_1}{\leq} |\nabla f|$

Se f non è radiale

$$\left\| \frac{1}{|x|} f \right\|_{L^p} \leq C(p,n) \|\nabla f\|_{L^p}$$

Sistemo fisso θ in $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left| \frac{f(r\theta)}{r} \right|^p r^{n-1} dr \leq C^p \int_0^{+\infty} |\partial_r f(r,\theta)|^p r^{n-1} dr$

integrando in $d\theta$ e usando $\circledast_1$ a dx ho la dim nel caso non radiale

<u>Variante</u> se $p > n$ e $f(0) = 0 \Rightarrow f(r) = \displaystyle\int_0^r f'(s) ds$

Se $D = \sqrt{-\Delta}$ $\qquad \|\nabla f\|_{L^p} \lesssim \|Df\|_{L^p}$

$$\underbrace{\frac{1}{J}\partial_J}_{\text{SIMBOLI}} = R_J D \qquad \text{Perché} \quad \widehat{\frac{1}{J} D_J f(\xi)} = \xi_J \hat{f}(\xi)$$

$$\xi_J = \frac{\xi_J}{|\xi|} |\xi| \qquad \text{Con } R_J : L^p \to L^p \text{ quantive del tipo } \forall \text{ K-Z}$$

Teorema Hardy Frazionario $1 \le p < n$ $0 \le s \le 1$

$$\left\| \frac{1}{|x|^s} f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \underbrace{\| D^s f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}_{\|f\|_{\dot{H}^s_p}}$$

Riesz-Thorin applicato a s

Ricordo $\dot{H}^p_s \neq W^p_s$

$\dot{H}^p_s = F^s_{p,2}$, $W^p_s = \dot{B}^s_{p,p} = F^s_{p,p}$

Problema: Dimostrare che vale la stima anche se $sp < n$

LEZIONE 13

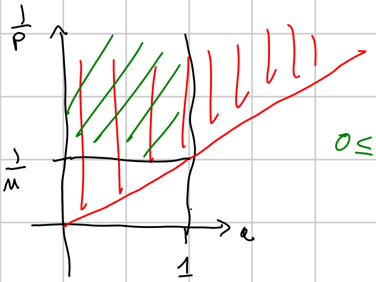
Titolo nota 14/11/2019

Prop | Hardy 1) $\| |x|^{-a} f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \| D^a f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ $\quad ap<n$, $p<\frac{n}{a}$

Hardy-Little-Sobolev 2) $\| |x|^{-\alpha} * f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \| f \|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ $\quad 1+\frac{1}{p} = \frac{a}{n} + \frac{1}{q}$

3) Heisenberg

Con Riesz-Torin



$0 \le a \le 1$

vedremo un metodo generico che ci permetterà di dimostrare 2) e ottenere la stima /// per 1)

Dim

Ricordiamo - Hölder $\| f \cdot g \|_{L^p} \le \| f \|_{L^{q_1}} \| g \|_{L^{q_2}}$, $\quad \frac{1}{p} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$

- Negli Spazi di Lorentz $L^{p,q}$

$$\| f \cdot g \|_{L^{p,q}} \lesssim \| f \|_{L^{q_1 r_1}} \| g \|_{L^{q_2 r_2}}$$

- Young in Lorentz $\| f * g \|_{L^{p,q}} \lesssim \| f \|_{L^{q_1 r_1}} \| g \|_{L^{q_2, r_2}}$ $\quad 1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} > 1$, $\quad \frac{1}{q} \le \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

LIBRO DI Bergh – Löfström interpolation Lorentz + Lavoro di O'Neil

OSS $L^p = L^{p,p} \subset L^{p,\infty}$

Notiamo che $|x|^{-a} \in L^{\frac{n}{a},\infty}(\mathbb{R}^n)$

Per mostrare (2)

$$\| |x|^{-\alpha} * f \|_{L^{p,p}} \overset{\text{Young in } L.}{\lesssim} \| |x|^{-\alpha} \|_{L^{\frac{n}{\alpha},\infty}} \| f \|_{L^{q_2 r_2}}$$

$\Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{p} = \frac{a}{n} + \frac{1}{q_2}$ e questo mi dà quello che voglio $\Rightarrow$ $1 \leq q_2 \leq p$ $\otimes$

Ma resta da vedere di sistemare gli r

Se $q \geq 1$ $\quad \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \Rightarrow \frac{1}{p} \leq \frac{1}{\infty} + \frac{1}{r_2}$

nel nostro caso

$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{r_2} \Rightarrow r_2 \leq p$

quindi da $\otimes$ scelgo $r_2 = q_2$

Perché ② è sobolev?

preso $D^{-s} f(x) = c \int \widehat{\frac{1}{|\xi|^s}}(|x-y|)\, f(y)\, dy = c \int |x-y|^{-(n-s)} f(y)\, dy$

se $a = n-s$ con $0<s<n$ $\Rightarrow 0<a<n$

$\widehat{\frac{1}{|\xi|^s}}(|x|) = c|x|^{s-n}$

Trasformata di una funzione radiale è radiale

$\Rightarrow \left\| |x|^{-a} * f \right\|_{L^p} = \| D^{-s} f \|_{L^p} \underset{\text{per ②}}{\lesssim} \| f \|_{L^q}$

se $g = D^{-s} f \Rightarrow f = D^s g$

$\| g \|_{L^q} \lesssim \| D^s g \|_{L^q} = \| g \|_{\dot{H}^s_q}$ $\quad 0<s<n$

$1 + \frac{1}{p} = \frac{n-s}{n} + \frac{1}{q}$

$\frac{1}{p} = \frac{-s}{n} + \frac{1}{q}$

$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{s}{n}$

<u>Generalizzando</u> $\forall p>2$ $\quad \| g \|_{L^{p,2}} \underset{\text{Sobolev - Lorentz}}{\leq} \| D^s g \|_{L^2}$ $\quad \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{p} = \frac{s}{n}}$

Per dimostrare ① nel caso $p=2$

$\left\| |x|^{-a} f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \| D^a f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ $\quad 1 \leq a < \frac{n}{2}$

$\left\| |x|^{-a} f \right\|_{L^{2,2}} \underset{\text{Young - Lorentz}}{\leq} \left\| \frac{1}{|x|^a} \right\|_{L^{\frac{n}{a},\infty}} \| f \|_{L^{q,2}} \leq$ $\quad \frac{1}{2} = \frac{a}{n} + \frac{1}{q} \Rightarrow q > 2$

$$\overset{\leq}{\downarrow} \quad \|D^a f\|_{L^2}$$

Sobolev Lorentz $\Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{a}{n} \Rightarrow \left\| \frac{1}{|x|^a} \right\|_{L^{\frac{n}{2},\infty}} < +\infty$

Matrici a esponente frazionario

data A simmetrica def. positiva

presa $x \in \mathbb{R}, x>0$ $\quad x^{s-1} = c \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^s}\, dt \overset{xt=u}{=}$

$$= c \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{x^{s-1}}{u^s}\, du = x^{s-1} \cdot c'$$

$$e \quad c \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^s}\, du = 1$$

se $1-s=\theta$ $\quad c \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{1-\theta}}\, du = 1$

$$x^{-\theta} = c \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, t^{\theta}\, \frac{dt}{t} \qquad \boxed{0<\theta} \quad \text{Per avere conv. int}$$

$$A^{-\theta} = c \int_0^{+\infty} e^{-At}\, t^{\theta}\, \frac{dt}{t}$$

In modo alternativo

$$x^{-\theta} = c_1 \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\theta}}{t+x}\, dt \overset{t=xu}{=} c_1 x^{-\theta} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{u^{-\theta}}{u+1}\, du}_{= \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\theta\pi}{2}\right)}} \qquad \boxed{0<\theta<1}$$

$$A^{-\theta} = c_1 \int_0^{+\infty} t^{-\theta} (t+A)^{-1}\, dt$$

Wavelets

Introduzione: obiettivo è di trovare una base su $L^2(\mathbb{R})$ $e_{m,\ell}(x)$

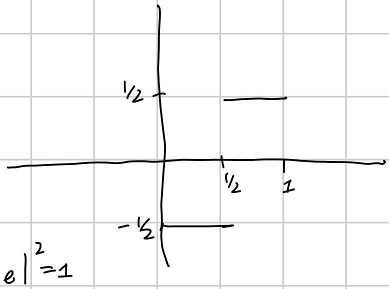
Su $L^2(S^1) = L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ abbiamo $e_k(x) = c_k e^{ikx}$ $k \in \mathbb{Z}$ una base.

Quindi $\{e_{m,\ell}(x)\}$ dovrà essere una base ortogonale, $m \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$

Il problema è che su tutto $\mathbb{R}$, $-\Delta$ non ha uno spettro discreto

Presa $a(x) \in L^1 \cap L^p$ $\forall p$ con $\int_{\mathbb{R}} a \, dx = 0$ e $\int_{\mathbb{R}} |a|^2 dx = 1$

esempio



serve in modo $\int_{\mathbb{R}} |e_{m\ell}|^2 = 1$

$$e_{m,\ell}(x) = 2^{\frac{m}{2}} a(2^m x - \ell)$$

- Cosa facile: sono completi
- Cosa difficile: sono ortogonali $\to$ Proviamo $a_{4,0} \perp a_{1,0}$ e poi si generalizza

Per verificare la completezza $f \in L^2(\mathbb{R})$ $f \perp e_{m,\ell}$ $\forall m,\ell \Rightarrow f = 0$ q.o.

Supponiamo $f \in L^2 \cap C^0$ (tanto posso poi completare)

Se $0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, a(\overbrace{2^m x - \ell}^{y})\, 2^{\frac{m}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} 2^{-\frac{m}{2}} f\left(\frac{y+\ell}{2^m}\right) a(y)\, dy$

!! $\boxed{0 = 0}$ da sistemare.

$\forall r \in \mathbb{R}_+$ $\exists$ ℓ t.c. $\frac{\ell}{2^m} \xrightarrow[m \to +\infty]{} r$ (per approssimazione di numeri diadici)

LEZIONE 14

Titolo nota 05/12/2019

Wavelets (basi ortonormali di $L^2(\mathbb{R})$)

Presa $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$ (media nulla)

$$\psi \in L^p(\mathbb{R}) \quad \forall \; 1 \le p \le \infty$$

Indichiamo con τ_b la traslazione, $\tau_b f(x) = f(x-b)$

e con S_a il riscalamento $S_a(f(x)) = a^{-1/2} f\left(\frac{x}{a}\right)$ $a > 0$

(in modo che S_a preservi la norma L^2)

Ci chiediamo $\|S_a(f)\|_{\dot{H}^s} = a^{?} \|f\|_{\dot{H}^s}$ da capire

Se $s=1$ $\|\nabla S_a f\|_{L^2} = a^{-1} \|\nabla f\|_{L^2} \Rightarrow s = -1$

si può vedere che $? = -s$

Lemma $\|S_a(f)\|_{\dot{H}^s} = a^{-s} \|f\|_{\dot{H}^s}$

Ricordiamo che se s è frazionario

$$D^s = \left(\sqrt{-\Delta}\right)^s \xrightarrow{\text{ha simbolo}} |\xi|^s$$

$\Rightarrow$ $\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R})} = \|D^s u\|_{L^2} = c \, \| |\xi|^s \hat{u}(\xi) \|_{L^2}$ $s \geq 0$ per evitare problemi in L^2

$$\widehat{S_a f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} a^{-n/2} f\left(\frac{x}{a}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iya\xi} a^{n/2} f(y) dy =$$

$$= a^{n/2} \hat{f}(a y) \quad (\text{in } \mathbb{R}^n)$$

$$\|S_a(f)\|^2_{\dot H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\widehat{S_a f}(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= a^n \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat f(\underbrace{a\xi}_{\eta})|^2 d\xi =$$

$$= a^{-2s} \int |\eta|^{2s} |\hat f(\eta)|^2 = (a^{-s})^2 \|f\|^2_{\dot H^s}$$

Scelta della base

$$\psi_{a,b} = S_a \tau_b \psi(x) = a^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad a = 2^j \quad b = k2^j \quad k, j \in \mathbb{Z}$$

Esempio 1 $\quad \psi(x) = \mathbb{1}_{[0,1]} e^{i2\pi x}$

$$\psi_{2^j, k2^j} = 2^{-\frac{j}{2}} \psi\left(\frac{x}{2^j} - k\right)$$

intervallo diadico.

$$\operatorname{supp} \psi_{2^j, k2^j} \subset [k2^j, (k+1)2^j] = I_{k,j}$$

Lemma 3 Presi I, J intervalli diadici $\left(\text{cioè } \begin{array}{l} I = [2^j k, 2^j(k+1)] \\ J = [2^i h, 2^i(h+1)] \end{array}\right)$

$$\langle \psi_I, \psi_J \rangle_{L^2} = 0 \quad \text{se} \quad I \neq J$$

Lemma 2 Se I e J sono diadici e $\overset{\circ}{\overline{I \cap J}} \neq \emptyset$

$\Rightarrow I \subset J \ \vee \ J \subset I$

Dim Lemma 2 $\quad I = [k2^i, (k+1)2^i] \quad J = [h2^j, (h+1)2^j]$

Se $j = i$ lunghezza di I = lunghezza di J $\Rightarrow$ $I = J$ $\vee$ $\overset{\circ}{\overline{I \cap J}} = \emptyset$

Se $i > j$ $\quad I$ è lungo $2^i \Rightarrow$ lo divido in intervalli

lunghi 2^j ottengo 2^{i-j} intervalli

se $I \cap J \Rightarrow J$ interseca uno degli intervallini lunghi 2^j

ma per quanto visto prima $\Rightarrow J$ coincide

con uno di loro $\Rightarrow J \subset I$

<u>Dim Lemma 3</u> $\quad I$ e J come nel lemma 2

Basta fare il caso $J \subset I$

perché se $i \neq j \; (i > j) \Rightarrow J \subset I$ e o i supporti sono non nulli

solo su intervalli lunghi 2^j

$$\psi_I = 2^{-\frac{i}{2}} \mathbb{1}_I \, e^{i 2\pi \left(\frac{x}{2^i} - k\right)}$$

è prodotto in $\mathbb{C}$

$$\langle \psi_I, \psi_J \rangle_{L^2} = 2^{-\frac{i}{2}} 2^{-j/2} \int_J e^{i2\pi\left(\frac{x}{2^i} - k\right)} \overline{e^{i2\pi\left(\frac{x}{2^j} - h\right)}} \, dx \overset{\swarrow}{=}$$

a meno di traslazione

riscalo l'intervallo

$$= C(i, j, k, h) \int_0^{2^j} e^{i 2\pi x \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^j}\right)} dx \overset{\swarrow}{=} \qquad \frac{x}{2^j} = y$$

$M = 2^{i-j}$

$$\overset{\searrow}{=} c \int_0^1 e^{i2\pi\left(\frac{y}{M} - y\right)} dy \overset{?}{=} 0$$

non torna!

<u>Esempio 2</u> (Funzione di Cos)

condizione

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/2) \\ -1 & x \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\psi_I(x) \perp$ a $\psi_J(x)$ con $J \subset I$

$\Rightarrow$ su $J \quad \psi_J \cdot \psi_I = \pm 2^i \psi_J$ e l'integrale su J è nullo

Sia $\psi \in L^p(\mathbb{R})$ $\forall p \in [1, +\infty]$ e $\int_{\mathbb{R}} \psi \, dx = 0$

Lemma 4 $\{\psi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sono ortonormali $\iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi+k)|^2 = 1$

cioè la Σ è costante in ψ

Lemma 5 Sia $g \in L^1(\mathbb{R})$ sono equivalenti:

a) $\hat{g}(m) = 0$ $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

b) $\underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x+k)}_{G(x)} = \int_{\mathbb{R}} g(x) \, dx$

$\boxed{\text{Idea Lemma 5} \Rightarrow \text{Lemma 4}}$

Dim Lemma 5 dico che $G(x) \in L^1(0,+1)$

$$\int_0^1 |G(x)| \, dx \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |g(x+k)| \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| \, dy$$

$a \Rightarrow b$

coeff di fourier

$$\hat{G}(m) = \int_0^1 G(x) e^{-imx2\pi} \, dx =$$

costituisco la serie

trasformata di g in m

$$= \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-imx2\pi} \, dx = \hat{g}(m) = 0 \quad m \neq 0$$

$\Rightarrow$ I coeff di $\hat{G}(m)$ sono tutti nulli tranne $m=0$

$$\Rightarrow \quad G(x) = \hat{G}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \, dx$$

LEZIONE 15

Titolo nota 06/12/2019

Lemma $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\varphi\|_{L^2} = 1$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi \, dx = 0$

sono equivalenti:

(a) $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{K}}$ sono ortonormali

(b) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 = 1 \quad \forall \xi \in [0,1]$ q.o.

Ricordo $g \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ix\xi 2\pi} dx$

Modifica lemma 5: $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ sono equivalenti:

(a') $g(m) = 0 \quad \forall m \neq 0$

(b') $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(\xi + k) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) d\xi$

Dim Lemma

invarianza per traslazione

$$\langle \varphi(\cdot - k), \varphi(\cdot - m) \rangle \overset{\downarrow}{=} \int \overline{\varphi}(x) \varphi(x + k - m) dx$$

Se $k \neq m$ mi aspetto che sia $\neq 0$

chiamo $g(y) = \int \overline{\varphi}(x) g(x+y) dx$

$$\hat{g}(\xi) = \int \overline{\varphi}(x) \int \varphi(\underbrace{x+y}_{z}) e^{-i\overset{z-x}{y}\xi 2\pi} dy =$$

$$= \int \overline{\varphi}(x) \hat{\varphi}(\xi) e^{ix\xi 2\pi} dx = \hat{\varphi}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)} = |\hat{\varphi}(\xi)|^2 = |\varphi(\xi)|^2$$

$\Rightarrow \hat{g}(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$

a) $\Rightarrow$ b) perché se suppongo a $\Rightarrow \hat{g}(m) = 0 \quad m \neq 0$

$\Rightarrow$ per Lemma 5 $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(\xi+k) \overset{\text{Lemma 5}}{=} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(\xi)|^2 dx = 1$ (ipotesi su φ)

$$\Vert$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(\xi)|^2$$

b) $\Rightarrow$ a) basta leggere la dim. al contrario

<u>Def</u> Prendiamo $\overline{\{\varphi(\cdot-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}} = V_0$ è <u>base di Riesz</u>

Se $\forall f\in V_0 \Rightarrow f(x) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\, \varphi(x-k)$

e inoltre $\exists\, A, B$ / $B\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^2 \leq \|f\|_{L^2} \leq A\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^2 \quad \forall f\in V_0$

<u>oss</u> Se la base è ortonormale $\Rightarrow A=B$ (cioè vale Parseval).

Dobbiamo introdurre un W_0 ortogonale a V_0

per definire $V_1 = V_0 \oplus W_0$

E poi creare una ricorsione

$(J>0)$ $\quad V_{J+1} = V_J \oplus W_J \quad$ e $W_J = \left\{2^{J/2} g(2^J x),\ g\in W_0\right\}$

<u>oss</u> $W_J \xrightarrow{J\to\infty} \{0\}$

$$V_{J+1} \overset{\text{vorrei}}{=} \bigoplus_{\ell=-\infty}^{J} W_\ell \xrightarrow[J\to+\infty]{\text{(ANCHE per } J<0)} L^2(\mathbb{R})$$

<u>VERIFICHE</u> $\quad V_0 \perp W_0$

Definisco $\quad V_1 = V_0 \oplus W_0 \qquad W_1 = \{2^{1/2} g(2x) \mid g\in W_0\}$

$\quad\quad h = v_0 + w_0$ ($h \in V_1$)

$$0 \overset{?}{=} \langle v_0 + w_0,\ 2^{1/2} g(2x)\rangle_{L^2}$$

Tutto si basa sulla scelta di W_0

Osservo che $V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$

Sia $\varphi(x) \in V_0$ la generatrice della base

$\Rightarrow 2^{-1/2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \in V_{-1} \subset V_0$

Perché se $\langle \varphi(x), g(x) \rangle_{L^2} = 0 \Rightarrow \langle 2^{-1/2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right), 2^{1/2} g\left(\frac{x}{2}\right) \rangle_{L^2} = 0$

$$\Rightarrow \quad 2^{-1/2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \varphi(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int 2^{-1/2}\varphi\left(\frac{y}{2}\right)\varphi(y-k)\,dy \; \varphi(x-k)$$

$$\Rightarrow 2^{1/2}\hat{\varphi}(2\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\xi 2\pi} a_k$$

usando $\widehat{\lambda^{-1/2}\varphi(\lambda x)} = \lambda^{1/2}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \underbrace{\left(2^{-1/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\xi 2\pi} a_k\right)}_{m(\xi)}$$

$m(\xi)$ — funzione di filtro (pass filter)

Caratterizzazione di V_0 e V_1

$$V_0 = \left\{ f;\ \hat{f}(\xi) = \ell(\xi)\hat{\varphi}(\xi),\ \ell \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \right\}$$

$$V_{-1} = \left\{ f:\ \hat{f}(\xi) = \mu(2\xi)\, m(\xi)\,\hat{\varphi}(\xi),\ \mu \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \right\}$$

Sistema di lavoro:
1) Scelgo φ che mi genera base ortonormale e V_0
2) Verifico che V_0 si rappresenta come sopra
3) Scelgo $m(\xi)$ una funzione filtro per definire V_{-1}
4) definisco W_{-1} come quello spazio t.c. $V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$
5) Verifico che i W_j ottenuti per rescaling.

Verifichiamo tutte le proprietà di ortogonalità.

Caratterizzazione di W_J una volta scelte φ, m

$$W_J = \left\{ f : \ \hat{f}(2^{J+1}\xi) = e^{i\xi 2\pi} S_f(2\xi)\, \overline{m(\xi+\pi)}\, \hat{\varphi}(\xi),\ S_f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \right\}$$

mancano le condizioni su φ e m

come

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi+k)|^2 = 1 \quad \text{per ortogonalità traslazione}$$

+ condizione che dovrei ortogonalità per rescaling.