Università di Pisa

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Forme differenziali su gruppi di Lie

Il Relatore
Prof. Enrico Le Donne

Il Candidato
Cristian Sopio

Anno Accademico 2020/2021

Indice

Sommario

Lo scopo di questo lavoro di tesi è indagare quali sfere S^n possono ammettere una struttura di gruppo di Lie. Un gruppo di Lie è una varietà differenziabile G su cui sono ben definite due mappe lisce $\mu : G \times G \longrightarrow G$ e $\nu : G \longrightarrow G$ denominate rispettivamente mappa di moltiplicazione e mappa inversa che rendono G un gruppo. Per fare ciò, inizialmente affronteremo in maniera diretta i casi $n = 0, 1, 3$ costruendo esplicitamente una struttura di gruppo di Lie e, tramite un assurdo, osserveremo che per $n > 1$ non è possibile che S^n abbia struttura di gruppo di Lie abeliano. Successivamente analizzeremo i possibili n per cui S^n è un gruppo di Lie non abeliano. In particolare, dopo aver richiamato le forme differenziali e la coomologia di De Rham, introdurremo le G-varietà, ovvero varietà differenziabili per cui si ha che un gruppo di Lie G agisce su di esse, le forme differenziali left-invariant e definiremo una nuova coomologia di tali forme, mostrando che le mappe di bordo sono ben definite sulla restrizione ai complessi delle forme left-invariant. Successivamente, dimostreremo che per ogni gruppo di Lie compatto esiste una forma volume contemporaneamente left-invariant e right-invariant, ovvero bi-invariant, e che per una G-varietà compatta la coomologia di De Rham e la coomologia delle forme differenziali left-invariant sono canonicamente isomorfe. Inoltre vedremo che per un gruppo di Lie compatto il complesso delle forme bi-invariant è isomorfo all'anello graduato della coomologia di De Rham, osservando che ogni forma bi-invariant è in particolare chiusa. Infine, grazie a quest'ultimo isomorfismo, mostreremo che per un gruppo di Lie non abeliano, compatto e connesso il terzo spazio di coomologia di De Rham è non nullo e quindi per $n > 1$ l'unica possibilità è S^3.

1 Concetti preliminari

Lo scopo di questa prima sezione è quello di illustrare alcuni concetti preliminari di algebra multilineare necessari per la definizione delle forme differenziali, che verranno poi trattate estesamente nella Sezione 3. Dopo aver introdotto la nozione di tensore, ci concentriamo sull'algebra tensoriale covariante, costruendone la struttura e calcolandone la dimensione. Seguono poi richiami di argomenti di geometria differenziale, quali fibrati, sezioni, campi vettoriali e flussi.

1.1 Algebra multilineare

Siano $V_1, V_2, \dots, V_k$ spazi vettoriali di dimensione rispettivamente $n_1, n_2, \dots, n_k$. Si definisce il loro *prodotto tensore* $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_k$ come lo spazio di tutte le mappe multilineari $V_1^* \times V_2^* \times \cdots \times V_k^* \longrightarrow \mathbb{R}$, ovvero

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_k \overset{def}{=} \mathrm{Mult}(V_1^*, V_2^*, \dots, V_k^*).$$

Definizione 1.1. *Sia V uno spazio vettoriale reale e h, k due interi non negativi. Si dice tensore di tipo (h, k) un elemento T dello spazio vettoriale*

$$\mathcal{T}_h^k(V) \overset{def}{=} \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{h} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k}.$$

Si può quindi pensare T come una mappa multilineare

$$T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{h} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Osservazione 1.2. Ponendo

$$T'(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \dots, \mathbf{v}_h^*) = T(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \dots, \mathbf{v}_h^*, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$$

ne segue che ogni tensore T di tipo (h, k) può essere interpretato come una mappa multilineare

$$T' : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{h}.$$

Dalla Definizione 1.1 risulta che

$$\mathcal{T}_h^k \otimes \mathcal{T}_m^n = \mathcal{T}_{h+m}^{k+n},$$

per cui, dato $S \in \mathcal{T}_h^k$ e $T \in \mathcal{T}_m^n$, il loro prodotto $S \otimes T$, trattato in [1, Definizione 1.3.5.] è un elemento di $\mathcal{T}_{h+m}^{k+n}$. Possiamo allora definire l'*algebra tensoriale* di V come

$$\mathcal{T}(V) \overset{def}{=} \bigoplus_{h,k \geq 0} \mathcal{T}_h^k(V)$$

dove il prodotto è definito su ogni coppia di tensori e viene esteso in maniera distributiva su tutto $\mathcal{T}(V)$. Con questa operazione, $\mathcal{T}(V)$ è un algebra associativa di dimensione infinita (se V non è banale). Posto per semplicità

$$\mathcal{T}_h(V) \overset{def}{=} \mathcal{T}_h^0(V), \quad \mathcal{T}^k(V) \overset{def}{=} \mathcal{T}_0^k(V)$$

gli spazi vettoriali

$$\mathcal{T}_*(V) \overset{def}{=} \bigoplus_{h\geq 0} \mathcal{T}_h(V), \quad \mathcal{T}^*(V) \overset{def}{=} \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{T}^k(V)$$

sono entrambi sottoalgebre di $\mathcal{T}(V)$ e vengono rispettivamente denominate *algebra tensoriale controvariante* e *algebra tensoriale covariante.*

Definizione 1.3. *Un tensore $T \in \mathcal{T}^k(V)$ è detto* antisimmetrico *se*

$$T(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_k}) = \operatorname{sgn}(\sigma) T(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \mathbf{u}_{\sigma(2)}, \ldots, \mathbf{u}_{\sigma(k)})$$

per ogni $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ e per ogni $\sigma \in S_k$.

Per ogni k intero non negativo, introduciamo il sottospazio vettoriale di $\mathcal{T}^k(V)$ costituito dai tutti i suoi tensori antisimmetrici. Indichiamo con $\Lambda^k(V)$ tale sottospazio, e sia

$$\Lambda^*(V) \overset{def}{=} \bigoplus_{k\geq 0} \Lambda^k(V).$$

Si osservi come lo spazio vettoriale $\Lambda^*(V)$ non sia una sottoalgebra di $\mathcal{T}^*(V)$, in quanto essa non è chiusa rispetto al prodotto $\otimes$. Un modo per rendere $\Lambda^*(V)$ un'algebra associativa consiste nell'introdurre il *prodotto antisimmetrizzato*

$$T^1 \wedge T^2 \wedge \ldots \wedge T^m \overset{def}{=} \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_m)!)}{k_1! k_2! \cdots k_m!} A(T^1 \otimes T^2 \otimes \cdots \otimes T^m)$$

dove $T^i \in \mathcal{T}^{k_i}$ per $1 \leq i \leq k$ e A è l'antisimmetrizzazione di T, definita da

$$A(T)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) \overset{def}{=} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) T(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \mathbf{v}_{\sigma(2)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}).$$

Possiamo adesso costruire una base standard di $\Lambda^k(V)$ e calcolarne la dimensione.

Proposizione 1.4. *Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base di V e $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n\}$*

una base per V^*. Allora una base per $\Lambda^k(V)$ è

$$\{\mathbf{v}^{i_1} \wedge \mathbf{v}^{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}^{i_k} : 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n\}.$$

Corollario 1.5. *Tenuto conto che il numero delle possibili scelte degli interi $i_1, i_2, \ldots, i_k$ è pari a $\binom{n}{k}$, si ha*

$$\dim \Lambda^k(V) = \begin{cases} \binom{n}{k} & \textit{se } k \leq n \\ 0 & \textit{se } k \geq n \end{cases}$$

Corollario 1.6. *L'algebra $\Lambda^*(V)$ è anticommutativa, nel senso*

$$T \wedge U = (-1)^{pq}(U \wedge T)$$

per ogni $T \in \Lambda^p(V)$ e per ogni $U \in \Lambda^q(V)$.

1.2 Geometria differenziale

Nel seguito verrà fatto largo uso della nozione di *varietà differenziabile* senza bordo immersa in $\mathbb{R}^n$, si veda [1, Capitolo 2.1]. Richiamiamo alcuni concetti ad esse collegati.

Spazio Tangente

Data la varietà M, ad ogni punto p in M possiamo associare il suo tangente T_pM. Esso è uno spazio vettoriale di dimensione n che puó essere definito in vari modi. Di seguito ricordiamo il metodo basato sulle curve e quello basato sulle derivazioni.

Definizione 1.7. *Per ogni punto $p \in M$ consideriamo tutte le curve $\gamma : I \longrightarrow M$ con $0 \in I \subset \mathbb{R}$. Si definisce allora T_pM come*

$$T_pM \overset{def}{=} \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, \exists\, \varepsilon > 0 :\, \exists\, \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M : \gamma \in \mathbb{C}^\infty : \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v\}$$

.

Definizione 1.8. *Una derivazione v in $p \in M$ è un operazione che assegna un numero $v(f)$ ad ogni funzione liscia $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definita in qualche intorno U di p e che soddisfa le seguenti condizioni:*

1. *se f e g sono compatibili in un intorno di p, allora $v(f) = v(g)$;*

2. *v è lineare ;*

3. *$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$.*

Il tangente T_pM è l'insieme di tutte le derivazioni in p.

Differenziale

Prese M e N rispettivamente m e n varietà e $f : M \longrightarrow N$ una mappa liscia, il *differenziale* di f in p è una mappa lineare $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ che trasforma curve tangenti in curve tangenti e derivazioni in derivazioni. In altri termini, data la derivazione $v \in T_pM$, si ha $df_p(v) = v'$ che agisce come $v'(g) = v(g \circ f)$.

Algebra di Lie

Sia M una varietà liscia e X, Y due campi vettoriali su G. Allora la *parentesi di Lie* $[X, Y]$ è un campo vettoriale che misura la "mancanza di commutatività" tra X e Y. Se usiamo il punto di vista delle derivazioni, si veda la Definizione 1.8, per ogni sottoinsieme $U \subset M$ e per ogni funzione liscia $f \in C^\infty(U)$ possiamo definire una nuova funzione $Xf \in C^\infty(U)$ tale che

$$(Xf)(p) = X(p)(f).$$

In coordinate si ha

$$X^i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

É quindi naturale usare i campi vettoriali per "derivare" le funzioni. Come conseguenza della Definizione 1.8, tale costruzione soddisfa la regola di Liebnitz

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

Definizione 1.9. *Siano X, Y due campi vettoriali su M. Allora le* parentesi di Lie *$[X, Y]$ sono l'unico campo vettoriale tale che per ogni funzione liscia definita su un aperto $U \subset M$ si ha*

$$[X, Y]f = XYf - YXf.$$

Proposizione 1.10. *Il campo vettoriale* $[X, Y]$ *è ben definito.*

Dimostrazione. Per quanto detto, $[X, Y]$ è solamente un operatore sulle funzioni lisce definite su $U \subset M$ un aperto. Per ogni $f, g \in C^\infty(U)$ si ha

$$\begin{aligned} XY(fg) &= X((Yf)g) + X(f(Yg)) \\ &= (XYf)g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) + f(XYg); \end{aligned}$$

$$YX(fg) = (YXf)g + (Xf)(Yg) + (Yf)(Xg) + f(YXg),$$

da cui si ottiene che anche $[X, Y]$ è una derivazione, infatti

$$[X, Y](fg) = ([X, Y]f)g + f([X, Y]g).$$

É possibile allora definire $[X, Y]$ come il campo vettoriale tale che per ogni $p \in G$ e per ogni $f \in C^\infty(U)$, si ha

$$[X, Y](p)(f) = [X, Y](f)(p).$$

□

Definizione 1.11. *Sia A uno spazio vettoriale reale. Allora si dice che A è un'*algebra di Lie *se esiste una operazione bilineare*

$$[\cdot, \cdot] : A \times A \longrightarrow A$$

tale che soddisfa l'identità di Jacobi, ovvero

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \qquad \forall\, x, y, z \in A$$

ed è antisimmetrica, ovvero

$$[x, y] = -[y, x] \qquad \forall\, x, y \in A.$$

Esempio 1.12. Data una varietà differenziabile M, lo spazio $\mathfrak{X}(M)$ di tutti i suoi campi vettoriali, successivamente introdotti in 1.4, ha una struttura di algebra di Lie (di dimensione infinita).

1.3 Fibrati e sezioni

Si consideri una varietà differenziabile F. Si definisce *fibrato liscio* con fibra F è una mappa

$$\pi : E \longrightarrow B$$

tra due varietà lisce chiamate rispettivamente *spazio totale* e *spazio base* che soddisfa alcune condizioni locali. Per ogni punto $p \in B$ deve esistere un aperto $U \subset B$ e una mappa φ tali che la preimmagine $\pi^{-1}(U)$ sia diffeomorfa a $U \times F$ tramite la mappa $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$. In particolare deve commutare il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

nel quale $\pi_1 : U \times F \longrightarrow U$ è la proiezione sul primo fattore.
Introduciamo inoltre, una particolare classe di fibrati, i *fibrati vettoriali.* Nella notazione precedente, si ha che E è un fibrato vettoriale se ogni fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ ha una struttura di uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e in particolare, ogni punto $p \in M$ ha un intorno aperto U per cui commuta il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

nel quale φ è un diffeomorfismo e $E_p \longmapsto \mathbb{R}^k \times \{p\}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.
Consideriamo allora $\pi : B \longrightarrow E$ un fibrato vettoriale. Si dice che $s : B \longrightarrow E$ è una *sezione liscia del fibrato* se $\pi \circ s = id_B$. Denoteremo l'insieme delle sezioni per un fibrato vettoriale con $\Gamma(E)$. Inoltre $\Gamma(E)$ ha una naturale struttura di spazio vettoriale ponendo $(s + s')(p) = s(p) + s'(p)$ per ogni $p \in E$. Tutti i fibrati vettoriali $E \longrightarrow B$ hanno una sezione canonica $s : B \longrightarrow E$ denominata *zero-sezione.* Infatti se 0 è lo zero dello spazio vettoriale E_p, per ogni $p \in M$ si può definire $s(p) = 0$. Inoltre si ha che lo zero di $\Gamma(E)$ è la zero-sezione e per ogni funzione liscia $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ e per ogni sezione liscia s è possibile definire una

nuova funzione fs tale che $(fs)(p) = f(p)s(p)$. Come conseguenza di quest'ultima operazione, $\Gamma(E)$ è dotato di una struttura di C^∞-modulo.

Esempi di fibrati

Trattiamo adesso tre esempi importanti di fibrati vettoriali. In particolare, per una trattazione più dettagliata si veda [1, Esempio 3.1.11, Esempio 3.1.13, Definizione 3.1.16].

Definizione 1.13. (Fibrato tangente) *Sia M una varietà liscia. Allora possiamo definire il fibrato tangente di M come l'unione disgiunta*

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

di tutti gli spazi tangenti. Esiste allora una proiezione $\pi : TM \longrightarrow M$ tale che $T_pM \longmapsto p$.

Osservazione 1.14. La struttura di varietà differenziabile di TM è quella per cui il campi vettoriali ∂_i indotti dalle parametrizzazioni locali, sono sezioni lisce.

Osservazione 1.15. Sia M una varietà liscia per cui tutti i tangenti di M sono canonicamente isomorfi a $\mathbb{R}^n$. Allora, M si dice *parallelizzabile* e, vale che

$$TM \simeq M \times \mathbb{R}^n.$$

Definizione 1.16. (Fibrato cotangente) *Sia M una varietà liscia. Allora, il fibrato cotangente T^*M di M è lo spazio duale del fibrato tangente TM. La fibra T_p^*M in p è lo spazio duale di T_pM ed è chiamato spazio cotangente in p.*

Osservazione 1.17. Il fibrato cotangente ha una curiosa caratteristica. Ogni funzione liscia $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ induce in ogni punto $p \in M$ un differenziale $df_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$, ovvero $df_p \in T_p^*M$. Sia $\{df_p\}_{p \in M}$ la famiglia ad una fissata funzione dei differenziali nei punti di M. Otteniamo allora una sezione liscia del fibrato cotangente che chiameremo semplicemente df.

Definizione 1.18. (Fibrato alternante) *Sia M una varietà liscia. Allora, il fibrato alternante su M è*

$$\Lambda^k(M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_pM^*).$$

La proiezione $\pi : \Lambda^k(M) \longrightarrow M$ *è tale che* $\Lambda^k(T_pM^*) \longmapsto p$.

Osservazione 1.19. La struttura di varietà differenziabile di $\Lambda^1(M)$ è l'unica per cui df è una sezione liscia, per ogni $f \in C^\infty(M)$.

1.4 Campi vettoriali

Sia M una varietà liscia, allora una sezione liscia $X : M \longrightarrow TM$ del fibrato tangente tale che ad ogni punto $p \in M$ assegna un vettore tangente $X(p) \in T_pM$ e varia in maniera liscia con p si dice *campo vettoriale*. Denotiamo con $\mathfrak{X}(M)$ l'insieme dei campi vettoriali su M, ovvero $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$. Esso è uno spazio vettoriale che ha una struttura di $C^\infty(M)$-modulo. Siano M, N varietà lisce e $f : M \longrightarrow N$ un diffeomorfismo. Allora se $X \in \mathfrak{X}(M)$ è un campo vettoriale su M, è possibile trasportare X tramite il differenziale df ad un campo vettoriale su N, imponendo

$$Xf(p) \overset{def}{=} df_p(X(p)).$$

Come conseguenza di tale operazione, si ha un isomorfismo tra $\mathfrak{X}(M)$ e $\mathfrak{X}(N)$. Sia $\{\frac{\partial}{\partial x_i} : i = 1, 2, \dots, n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vettoriale su M. Allora passando in carta, si ha

$$X(x) = \Big(X^1(x), X^2(x), \dots, X^n(x)\Big) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}).$$

La notazione scelta è utile perché se scegliamo altre coordinate, $\{\frac{\partial}{\partial \overline{x}_i} : i = 1, 2, \dots, n\}$, si ha un cambiamento controvariante, tale che

$$\overline{X}^j = X^i \frac{\partial \overline{x}_j}{\partial x_i}.$$

Curve integrali e flussi

Sia M una varietà liscia e X un campo vettoriale su M e $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Allora $\gamma : I \longrightarrow M$ è una *curva integrale* per X se per ogni $t \in I$, si ha

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)).$$

Come conseguenza del Teorema di *Cauchy-Lipschitz*, si veda [7], si possono ottenere risultati di esistenza e unicità di curve integrali.

Proposizione 1.20. *Sia M una varietà liscia e X un campo vettoriale su M. Allora, per ogni punto $p \in M$ esiste un'unica curva integrale per X massimale con $\gamma(0) = p$.*

Come conseguenza della proposizione precedente la cui dimostrazione è riportata in [6], si può definire il concetto di flusso. Inoltre, per il Teorema di *Cauchy-Lipschitz* si ha che la soluzione unica dipende in maniera liscia dai dati iniziali.

Teorema 1.21. *Sia M una varietà differenziabile e X un campo vettoriale su M. Esiste allora un unico intorno aperto $U \subset M \times \{0\} \subset M \times \mathbb{R}$ e un'unica mappa liscia $\Phi : U \longrightarrow M$ tale che, per ogni punto $p \in M$ l'insieme*

$$I_p = \{t \in \mathbb{R} : (p, t) \in U\}$$

è un intervallo aperto e si ha che $\gamma_p : I_p \longrightarrow M$ tale che $\gamma_p(t) = \Phi(p, t)$ è la curva integrale massimale relativa a $\gamma_p(0) = p$.

Definizione 1.22. *La mappa Φ è il* flusso associato *a X. Inoltre se l'aperto $U = M \times \mathbb{R}$ allora il flusso si dice* completo.

Osservazione 1.23. Concludiamo questa sezione con un osservazione topologica sulle varietà e i rivestimenti universali. Un noto teorema di topologia, trattato in [5], afferma che:

Sia M uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi. Allora M ammette rivestimento universale se e solo se M è semilocalmente semplicemente connesso.

In particolare, una varietà differenziabile è localmente isomorfa ad aperti di $\mathbb{R}^n$, per cui è semilocalmente semplicemente connessa e quindi ammette rivestimento universale.

2 Gruppi di Lie

In questa sezione, ci concentreremo su una particolare tipologia di varietà differenziabili, i gruppi di Lie trattati ampiamente in [8]. In geometria si trovano ovunque, anche i gruppi più simmetrici, come il gruppo ortogonale matriciale o il gruppo lineare speciale sono gruppi di Lie. In particolare, inizialmente definiremo tali gruppi e particolari mappe tra essi, successivamente nel secondo paragrafo ci concentreremo sulla struttura del tangente nell'unità e del gruppo, ovvero l'algebra di Lie e verrà evidenziato il fatto che esiste una corrispondenza biunivoca tra algebre e gruppi semplicemente connessi. Infine, nel terzo paragrafo distingueremo tra gruppi di Lie abeliani e non abeliani, osservando le principali conseguenze sulla rispettiva algebra di Lie.

2.1 Definizioni e prime proprietà

Definizione 2.1. *Un* gruppo di Lie *è un gruppo G fornito anche di una struttura di varietà differenziabile tale che le mappe di moltiplicazione e di inverso*

$$\begin{aligned} \mu : G \times G \longrightarrow \quad & G, \qquad\qquad (g,h) \mapsto (gh), \\ \nu : G \longrightarrow \quad & G, \qquad\qquad g \mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

sono applicazioni lisce.

É adesso naturale cercare delle mappe tra due gruppi di Lie G e H, che siano compatibili sia con la struttura di varietà, sia con la struttura di gruppo.

Definizione 2.2. *Siano G e H due gruppi di Lie e $f : G \longrightarrow H$ una mappa. Allora diremo che f è un* omomorfismo di Lie *se è una mappa liscia tale che, per ogni $g, h \in G$, si ha*

$$f(gh) = f(g)f(h).$$

Inoltre, viene chiamato endomorfismo di Lie *un omomorfismo da $G \longrightarrow G$ e* isomorfismo di Lie *se f è invertibile ed è un diffeomorfismo.*

Definizione 2.3. *Sia G un gruppo di Lie e $g \in G$. La moltiplicazione a sinistra e la moltiplicazione a destra per g sono rispettivamente le mappe lisce*

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G, \qquad x \mapsto gx, \\ R_g : G &\longrightarrow G, \qquad x \mapsto xg. \end{aligned}$$

Osservazione 2.4. Le precedenti mappe sono diffeomorfismi con inverse $L_{g^{-1}}$ e $R_{g^{-1}}$, ma se $g \neq e$ non sono isomorfismi. Per ogni $g, g' \in G$ le mappe L_g e $R_{g'}$ commutano e l'operatore di coniugio in G è semplicemente

$$C_g \overset{def}{=} L_{g^{-1}} \circ R_g.$$

Lemma 2.5. *Sia G un gruppo di Lie, $\mu : G \times G \longrightarrow G$ la moltiplicazione e $\nu : G \longrightarrow G$ la mappa di inverso. Allora, tramite l'identificazione come spazi vettoriali $T(G \times G) \simeq T(G) \oplus T(G)$, per ogni $X \in T_g(G)$ e per ogni $Y \in T_{g'}(G)$ si ha*

$$d\mu_{(g,g')}(X, Y) = dL_g(Y) + dR_{g'}(X) \qquad e \qquad d\nu_g(X) = -(dL_g)^{-1} \circ dR_{g^{-1}}(X).$$

Dimostrazione. Come conseguenza dell'identificazione $T(G \times G) \simeq T(G) \oplus T(G)$, possiamo scrivere un vettore tangente su $G \times G$ in (g, g') come immagine di due vettori in $T_g(G)$ e in $T_{g'}(G)$. Infatti, se $X \in T_g(G)$ è rappresentato da una curva $\gamma(t)$, la sua immagine $\tilde{X}$ è rappresentata da $(\gamma(t), g')$ e, analogamente, se $Y \in T_{g'}(G)$ è rappresentato da una curva $\sigma(t)$, la sua immagine $\tilde{Y}$ è rappresentata da $(g', \sigma(t))$. Come conseguenza di questa osservazione è allora immediato calcolare

$$d\mu_{(g,g')}(\tilde{X}) = \frac{d}{dt}(\mu(\gamma(t), g'))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t), g')|_{t=0} = dR_{g'}(X)$$

$$d\mu_{(g,g')}(\tilde{Y}) = \frac{d}{dt}\mu(g', \sigma(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(g', \sigma(t))|_{t=0} = dL_g(Y)$$

da cui

$$d\mu_{(g,g')}(X, Y) = d\mu_{(g,g')}(\tilde{X}) + d\mu_{(g,g')}(\tilde{Y}) = dL_g(Y) + dR_{g'}(X).$$

Da ciò e dall'uguaglianza $\mu(g, \nu(g)) = e$ per ogni $g \in G$ si deduce:

$$0 = d\mu_{(g,\nu(g))}(X, Y) = dL_g(Y) + dR_{\nu(g)}(X)$$

e differenziando la mappa $g \longmapsto (g, \nu(g)) \longmapsto \mu(g, \nu(g))$ si ottiene

$$dL_g(X) + dR_{\nu(g)} d\nu_g(X) = 0,$$

da cui la tesi

$$d\nu_g(X) = -(dL_g)^{-1} \circ dR_{g^{-1}}(X).$$

□

Come conseguenza della prossima proposizione e dell'Osservazione 1.23, ogni gruppo di Lie G ammette rivestimento universale ed anch'esso ha una struttura di gruppo di Lie indotta da G.

Proposizione 2.6. *Sia G un gruppo di Lie connesso e $\tilde{G}$ il suo rivestimento universale. Allora, esiste una naturale struttura di gruppo di Lie su $\tilde{G}$ tale che la mappa di rivestimento $\pi : \tilde{G} \longrightarrow G$ è un omomorfismo di Lie.*

Dimostrazione. Consideriamo $\pi^{-1}(e)$, la preimmagine tramite il rivestimento dell'elemento neutro di G. Preso un arbitrario $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$, usando la semplice connessione di $\tilde{G}$, sia la mappa di moltiplicazione sia la mappa inversa si sollevano al rivestimento come mappe lisce per cui rispettivamente, si ha

$$\begin{aligned} (\tilde{e}, \tilde{e}) &\longmapsto \tilde{e} \\ \tilde{e} &\longmapsto \tilde{e}. \end{aligned}$$

Infine usando l'unicità del sollevamento di cammini si ottiene che entrambe le mappe soddisfano gli assiomi di gruppo.[1] □

2.2 Algebra di Lie di un gruppo di Lie

Sia G un gruppo di Lie e T_eG il tangente nell'elemento neutro e del gruppo. Allora T_eG ha una naturale struttura di algebra di Lie, infatti se consideriamo L_g,

[1] Per più dettagli si veda la tesi di Nicola Paddeu.

la moltiplicazione a sinistra, si ha che

$$d(L_g)_e : T_eG \longrightarrow T_gG$$

induce un isomorfismo canonico tra T_gG e T_eG. Come conseguenza di questo isomorfismo canonico, se consideriamo $v \in T_eG$ è possibile estendere v in maniera canonica ad un campo vettoriale X su G ponendo

$$X(g) \stackrel{def}{=} (d(L_g)_e)(v).$$

Il campo X è *left-invariant*, ovvero è invariante sotto il diffeomorfismo L_h per ogni $h \in G$, infatti

$$(d(L_h)_g)(X(g)) = (d(L_h))_g \circ (d(L_g)_e)(v) = (d(L_{hg})_e(v) = X(hg).$$

In particolare si ottiene così un naturale isomorfismo tra T_eG e il sottospazio di $\mathfrak{X}(G)$ dei campi vettoriali left-invariant. Un'analoga costruzione si ottiene usando R_g, la moltiplicazione a destra, trovando un isomorfismo canonico tra T_eG e il sottospazio di $\mathfrak{X}(G)$ dei campi vettoriali right-invariant.

Proposizione 2.7. *Siano $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ campi vettoriali left-invariant. Allora il campo vettoriale $[X, Y]$ è left-invariant.*

Come conseguenza della proposizione precedente se due campi vettoriali sono left-invariant, anche la loro parenti si Lie lo è, perciò T_eG può essere identificato con una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(G)$ che indicheremo con $\mathfrak{g}$. In questa terminologia si ha che tutti gli omomorfismi di gruppi di Lie $f : G \longrightarrow H$ inducono una mappa lineare

$$f_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h},$$

ovvero $f_* = df_e$.

Proposizione 2.8. *Siano G, H due gruppi di Lie, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ le relative algebre di Lie e $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di Lie. Allora, la mappa $f_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ è un omomorfismo di algebre di Lie.*

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni $g \in G$ l'omomorfismo f commuta con L_g, ovvero $f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$. In particolare se $X \in \mathfrak{g}$ è un campo vettoriale left-invariant, la sua immagine $f_*(X) \in \mathfrak{h}$ è left-invariant. Infine, per l'unicità di $[X, Y]$ si ha che

$$f_*([X, Y]) = [f_*(X), f_*(Y)],$$

per cui f_* è un omomorfismo di algebre di Lie. □

Proposizione 2.9. *Sia G un gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Allora esiste un omomorfismo di gruppi di Lie*

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$$

definito come

$$\mathrm{Ad}(g)(X) = ((dR_g)^{-1} \circ (dL_g))(X)$$

dove $GL(\mathfrak{g})$ è il gruppo degli isomorfismi lineari di $\mathfrak{g}$.

Definizione 2.10. *La mappa* $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ *è detta* rappresentazione aggiunta *del gruppo di Lie G.*

Proposizione 2.11. *Sia $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ l'algebra di Lie del gruppo $GL(\mathfrak{g})$. Allora, la derivata dell'omomorfismo aggiunto è un morfismo di algebre definito da $\mathfrak{ad}(X)(Y) = [X, Y]$.*

Proposizione 2.12. *Siano G, H due gruppi di Lie connessi e $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di Lie. Allora f è un rivestimento liscio se e solo se df_e è invertibile.*

Dimostrazione. Se f è un rivestimento liscio, allora esiste un intorno U di e tale per cui $f|_U$ è un diffeomorfismo e quindi df_e è invertibile. Viceversa, per l'invertibilità di df_e esistono aperti $U \subset G$ e $V \subset G$ rispettivamente di $e_G \in G$ e $e_H \in H$ tali che

$$f|_U : U \longrightarrow V$$

è un diffeomorfismo tra U e V. Per ogni $h \in H$ e $g \in f^{-1}(h)$ è possibile definire gli $V_h = L_h(V)$ e $U_g = L_g(U)$ tali per cui

$$f^{-1}(V_h) = \bigsqcup_{g \in f^{-1}(h)} U_g.$$

Infine si ha che la restrizione di f a U_g è un diffeomorfismo tra U_g e V_h, per cui f è un rivestimento liscio. □

Teorema 2.13. *Siano G, H gruppi di Lie, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ le rispettive algebre di Lie e un omomorfismo di algebre di Lie $F : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$. Esiste allora un aperto $U \subset G$ e un omomorfismo locale $f : U \longrightarrow H$ con $df_e = F$.*

Dimostrazione. Consideriamo il grafico della mappa F

$$\mathfrak{k} = \{(X, F(X)) : X \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}.$$

In particolare $\mathfrak{k}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. Come conseguenza di [6, Teorema 12.2.6] esiste un unico sottogruppo $K \subset G \times H$ in corrispondenza a $\mathfrak{k}$. Le proiezioni da $\pi_1 : K \longrightarrow G$ e $\pi_2 : K \longrightarrow H$ sono omomorfismi di gruppi di Lie e il differenziale di π_1 in (e, e) è invertibile, infatti $(X; F(X)) \mapsto X$. Allora π_1 è un diffeomorfismo locale in (e, e) e allora è possibile definire su un intorno aperto U di e l'omomorfismo locale $f : U \longrightarrow H$. In particolare si ha che $f = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ e il suo differenziale $df_e = F$. □

Corollario 2.14. *Siano G, H gruppi di Lie, G semplicemente connesso e $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ le algebra di Lie. Allora ogni omomorfismo di algebre $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ è il differenziale di un unico omomorfismo di Lie $G \longrightarrow H$.*

Dimostrazione. Siano π_1 e π_2 le mappe introdotte nella dimostrazione della Proposizione 2.12. In particolare, si ha che π_1 è un rivestimento liscio. Per la semplice connessione di G, π_1 è un isomorfismo, per cui possiamo definire $f = \pi_2 \circ \pi_1^{-1} : G \longrightarrow H$. L'unicità è una conseguenza immediata dell'unicità del sollevamento. □

Trattiamo adesso alcuni risultati sui gruppi di Lie semplicemente connessi che ci permetteranno di studiare il caso delle sfere S^n.

Proposizione 2.15. *Due gruppi di Lie semplicemente connessi sono isomorfi se e solo se le loro algebre di Lie sono isomorfe.*

Dimostrazione. Siano G, H due gruppi di Lie con rispettive algebre di Lie $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$. Come conseguenza del corollario precedente, per ogni isomorfismo $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ si hanno due omomorfismi $G \longrightarrow H$ e $H \longrightarrow G$. Se adesso componiamo in differenziali di tali omomorfismi otteniamo l'identità, per cui anche la composizione degli isomorfismi deve essere l'identità, dimostrando così la tesi. □

2.3 Gruppi e algebre di Lie abeliani e non abeliani

Definizione 2.16. *Un algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è abeliana se per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$ si ha che*

$$[X, Y] = 0.$$

Osservazione 2.17. Per ogni dimensione $n > 0$, esiste un'unica algebra di Lie abeliana di dimensione n.

Dimostrazione. Sia n un numero naturale non nullo e $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione n. Per la Definizione 1.11, come spazio vettoriale $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n$ e necessariamente, per abelianità, il prodotto di Lie $[,] : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è la mappa nulla. $\square$

Osservazione 2.18. Per ogni gruppo di Lie abeliano, l'algebra di Lie è abeliana.

Dimostrazione. Sia G un gruppo di Lie e $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di G. Per abelianità di G la mappa inversa $G \longrightarrow G$ che mappa $g \mapsto g^{-1}$ è un endomorfismo. Il suo endomorfismo di algebre indotto è $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ che mappa $X \mapsto -X$. Quindi per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$, si ha che

$$-[X, Y] = [-X, -Y] = [X, Y],$$

da cui si deduce $[X, Y] = 0$ e quindi l'algebra $\mathfrak{g}$ è commutativa. $\square$

Osservazione 2.19. Osserviamo che per $n = 0, 1$, la sfera n-dimensionale S^n ammette una struttura di gruppo di Lie. In particolare in entrambi i casi è possibile costruire una struttura di gruppo di Lie. Consideriamo per S^0 l'unica struttura possibile di gruppo per uno spazio di due elementi e le mappe ottenute sono lisce perché, come varietà, S^0 ha la topologia discreta. La circonferenza unitaria S^1 è rappresentabile come

$$S^1 = \{e^{i\vartheta} \in \mathbb{C} : \vartheta \in [0, 2\pi]\}$$

e le mappe di moltiplicazione e di inverso sono lisce perché restrizioni delle mappe in $\mathbb{C}$, a loro volta lisce.

Osservazione 2.20. Ogni gruppo di Lie connesso, non abeliano ha algebra di Lie non abeliana.

Dimostrazione. Se un gruppo di Lie non è abeliano, allora anche il gruppo del suo rivestimento universale non è abeliano per costruzione. Inoltre l'algebra di Lie del rivestimento universale è la stessa del gruppo. Per l'Osservazione 2.17, per ogni dimensione n esiste un solo gruppo di Lie abeliano con algebra di Lie abeliana, e per la Proposizione 2.15 si ha necessariamente che l'algebra di Lie del rivestimento universale e del gruppo non è abeliana. $\square$

3 Forme differenziali

Tratteremo adesso un'altra parte di prerequisiti che sarà di fondamentale importanza nel corso della Sezione 4. Richiameremo le principali proprietà delle forme differenziali come il pull-back nel primo paragrafo e definiremo la contrazione di forme differenziali, la derivata esterna e la derivata di Lie nel paragrafo due. Infine introdurremo la coomologia di De Rham, e tratteremo l'integrazione di forme differenziali su le varietà lisce.

3.1 Definizione di forma differenziale e pull-back

Definizione 3.1. *Data M una n-varietà liscia, una k-forma è una sezione liscia ω del fibrato alternante $\Lambda^k(M)$ su M. In altre parole, per ogni $p \in M$ abbiamo una forma multilineare antisimmetrica*

$$\omega(p) : \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{k} \longrightarrow \mathbb{R}$$

che varia in maniera liscia con $p \in M$.

Osservazione 3.2. Possiamo inoltre equipaggiare l'algebra esterna di uno spazio vettoriale reale $\Lambda^*(V)$ con un prodotto esterno $\wedge$, quindi, prese ω e η una k-forma e una h-forma su M, il loro prodotto esterno $\omega \wedge \eta$ è la $(k+h)$-forma tale per cui

$$(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p).$$

Denoteremo con $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k(M))$ lo spazio delle k-forme su M e con

$$\Omega(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(M)$$

il relativo anello graduato che ha una struttura di algebra associativa e anticommutativa con

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{hk} \eta \wedge \omega,$$

dove $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^h(M)$. In particolare, se k è dispari e $\omega \in \Omega^k(M)$, si ha

$$\omega \wedge \omega = 0.$$

Presa una mappa liscia $f : M \longrightarrow N$ tra varietà lisce, per ogni campo α di tensori covarianti di tipo $(0, k)$ su N, il *pull-back* $f^*\alpha$ tramite f di α è il campo di tensori dello stesso tipo $(0, k)$ su M, definito da

$$f^*\alpha(p)(v_1, v_2, \ldots, v_k) \overset{def}{=} \alpha(f(p))(df_p(v_1), df_p(v_2), \ldots, df_p(v_k))),$$

per ogni $p \in M$ e per ogni $v_1, v_2, \ldots, v_k \in T_pM$. Osserviamo che, questa operazione mantiene l'antisimmetria e in particolare il pull-back di una k-forma ω su N è una k-forma $f^*\omega$ su M. Come conseguenza si ha un morfismo di algebre

$$f^* : \Omega(N) \longrightarrow \Omega(M),$$

tale che, per ogni $\omega, \eta \in \Omega(N)$, si ha

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta).$$

3.2 Contrazione, derivata esterna e derivata di Lie

Per affrontare la Sezione 4 e sviluppare la parte centrale di questo elaborato, si ha la necessità di definire i seguenti tre operatori:

$$i(X), \qquad d\omega, \qquad \mathcal{L}(X).$$

Definizione 3.3. (Contrazione) *Sia M una varietà differenziabile e X un campo di vettori su M. Definiamo la mappa*

$$i(X) : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

tale che $\Big(\omega \in \Omega^k(M)\Big) \mapsto \Big(i(X)(\omega) \in \Omega^{k-1}(M)\Big)$ *e si ha*

$$i(X)(\omega)(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}) \overset{def}{=} \omega(X, v_1, v_2, \dots, v_{k-1})$$

É utile per definire $d\omega$ scrivere una forma differenziale in coordinate. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Per motivi notazionali scriviamo la base canonica di $\mathbb{R}^n$ come

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$$

e una base di $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$ come

$$\{dx^1, dx^2, \dots, dx^n\}.$$

Come conseguenza del Corollario 1.5, per $k \leq n$ $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ ha dimensione $\binom{n}{k}$ e una base è costituita da gli elementi

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

al variare di $1 \leq i_1 < x_2 < \dots < i_k \leq n$. Allora ogni $k-$forma ω in U può essere scritta come:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

con $f_{i_1, \dots, i_k} \in C^\infty(U)$. Inoltre, la notazione è appropriata perché è possibile interpretare dx^i come il differenziale della mappa lineare $x \mapsto x_i$. Sia ora ω una k-forma su varietà liscia M. Vogliamo definire la *derivata esterna* $d\omega$, una nuova $(k+1)$-forma su M. Consideriamo inizialmente il caso di M un aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora, definiamo

$$d\omega \overset{def}{=} \sum_{i_1 < \dots < i_k} df_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

ricordando che $df_{i_1 \dots i_k}$ è una 1-forma per l'Osservazione 1.17, ottenendo così una $(k+1)$-forma. Infine, se M è una varietà liscia definiamo $d\omega$ localmente, come in $\mathbb{R}^n$, tramite il passaggio in carta.

Proposizione 3.4. *La definizione di* $d\omega$ *usando le carte è ben posta e la derivata* *esterna induce una mappa lineare*

$$d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

tale che per ogni $\omega \in \Omega^k(M)$ *e* $\eta \in \Omega^h(M)$*, si ha*

1. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$
2. $d(d\omega)) = 0$

Dimostrazione. Proviamo prima le proprietà su una fissata carta e poi usiamo queste proprietà per mostrare che $d\omega$ è indipendente dalla carta e quindi la una definizione è ben posta.
La linearità di d è ovvia dalla definizione e come sua conseguenza è possibile supporre che $\omega = f dx^I$ e $\eta = g dx^J$ con I, J multi-indici. Allora si ha

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) =& d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^j = df \wedge dx^I \wedge g dx^J + dg \wedge f dx^I \wedge dx^J \\ =& d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}.$$

Se inoltre $\omega = f dx^I$ come conseguenza di $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, si ha

$$d(d\omega) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_i} \partial_{dx_j}} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^I = 0.$$

Infine, proviamo che la definizione è indipendente dalla carta. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, la derivata d può essere inoltre caratterizzata come l'unica mappa lineare $d : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+1}(U)$ se $k > 0$ e il differenziale ordinario se $k = 0$, mantenendo le proprietà 1 e 2. Allora le due definizioni di d devono coincidere sulle intersezioni delle carte. □

Osservazione 3.5. Inoltre, si ha che la derivata esterna commuta con il pull-back, ovvero

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega).$$

Infine definiamo il terzo operatore $\mathcal{L}(X)$. Nella Definizione 1.8 è stato evidenziato che un campo vettoriale può essere usato per derivare funzioni, ma più in generale può permette di derivare ogni forma differenziale e più in generale, i campi tensoriali. Sia F_t il flusso associato a X, introdotto nella Definizione 1.22, un campo vettoriale su una varietà differenziabile M. Per ogni $p \in M$ esiste un ε abbastanza piccolo tale che per ogni $|t| < \varepsilon$, si ha che $F_t(p)$ è definito in un intorno di p ed è un diffeomorfismo. Sia ω una k-forma, $(F_t)_*(\omega)$ è una nuova forma differenziale definita in un intorno di $F_t(p)$ che varia in maniera liscia con t. L'idea è quella di mettere in relazione ω e $(F_t)_*(\omega)$. Notiamo che $(F_t)_*$ trasporta la forma $\omega(F_t(p))$, che vive nello spazio alternante in $F_t(p)$, nello spazio alternante in p e quindi può essere messa in relazione con $\omega(p)$. Più specificamente, per ogni t, si ha che la forma

$$(F_{-t})_*(\omega(F_t)(p)) \in \mathcal{T}^k(T_pM)$$

e varia in maniera liscia con t. Ha allora senso la definizione della sua derivata.

Definizione 3.6. (Derivata di Lie) *La mappa lineare*

$$\mathcal{L}(\mathcal{X}) : \Gamma(\mathcal{T}^k(M)) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{T}^k(M))$$

è definita da

$$(\mathcal{L}(X)(\omega))(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(F_{-t})_*(\omega(F_t(p))).$$

Osservazione 3.7. Questi tre operatori si comportano in maniera simile rispetto al prodotto $\wedge$, infatti per ogni $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^h(M)$ si ha

1. $\mathcal{L}(X)(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}(X)\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathcal{L}(X)\eta)$
2. $i(X)(\omega \wedge \eta) = (i(X)\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i(X)\eta)$

Proposizione 3.8. *Abbiamo che*

$$\mathcal{L}(X) \circ d = d \circ \mathcal{L}(X)$$

Dimostrazione. L'uguaglianza deriva dal fatto che la derivata esterna d commuta con i diffeomorfismi e la derivazione di cammini di forme, ovvero se F_t è il flusso associato a X

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X)(d\omega)(p) =& \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(F_{-t})_*(d\omega(F_t(p))) \\ =& \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d(F_{-t})_*(\omega(F_t(p))) \\ =& d\left(\frac{d}{dt}(F_{-t})_*(\omega(F_t(p)))\right) = d(\mathcal{L}(X)(\omega))(p).\end{aligned}$$

□

In generale $i(X)$ e d non commutano, ma vale la così detta *formula magica di Cartan*

Teorema 3.9. *In ogni varietà liscia, scelto un campo vettoriale X, si ha che*

$$\mathcal{L}(X) = d \circ i(X) + i(X) \circ d.$$

Dimostrazione. Osserviamo che l'uguaglianza vale per una funzione f in quanto $i(X)(f) = 0$ e

$$\mathcal{L}(X)(f) = X(f) = i(X)(df).$$

Inoltre, sulla 1-forma df, l'uguaglianza continua a valere perché $d(df) = 0$ e

$$\mathcal{L}(X)(df) = d\mathcal{L}(X)(f) = d(i(X)(f)).$$

Ogni k-forma ω, può essere scritta localmente come prodotto wedge $f dx^I$ di funzioni e 1-forme dx^i, per ogni fattore vale perciò l'uguaglianza di Cartan. Infine, è possibile concludere osservando che i membri sono derivazioni e l'uguaglianza continua a valere per ω. □

3.3 Coomologia di De Rham

Introduciamo adesso la Coomologia di De Rham, di cui non dimostreremo particolari risultati perché non centrali per lo scopo dello studio delle forme differenziali sui gruppi di Lie, ma ampiamente trattata in [1]. Quanto appena detto può sembrare una contraddizione, ma vedremo nella quarta sezione che, come conseguenza delle maggiori proprietà che hanno i gruppi di Lie rispetto alle varietà, su di essi è possibile definire una coomologia di forme differenziali sfruttando l'invarianza rispetto alle mappe L_g e R_g introdotte nella Definizione 2.3, con g un elemento del gruppo.

Definizione 3.10. *Data una varietà liscia M, il k-esimo gruppo di coomologia di De Rham*

$$\mathcal{H}^k(M; \mathbb{R})$$

è definito come il quoziente delle k-forme su M chiuse rispetto alle k-forme esatte.

Osservazione 3.11. La coomologia appena introdotta, ha le principali proprietà che si possono riscontrare anche nella coomologia singolare, ovvero è un invariante omotopico, è ben definito un anello $\mathcal{H}^*(M;\mathbb{R})$ graduato e vale il teorema di *Mayer-Vietoris*.

Proposizione 3.12. *Sia $n > 0$ un intero e S^n la sfera unitaria n-dimensionale. Allora si ha*

$$\mathcal{H}^k(S^n;\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{se } k \in \{0, n\} \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

3.4 Integrazione di forme differenziali su varietà

Sia M una n-varietà orientabile. In generale non si ha una nozione canonica di volume per M, però $\Omega^n(M)$ ha dimensione uno come conseguenza del Corollario 1.5, quindi esiste un'unica n-forma a meno di moltiplicare per una funzione $C^\infty(M)$.

Definizione 3.13. *Sia M una varietà liscia orientata.* Una forma volume *su M è una n-forma ω tale che per ogni $p \in M$ e per ogni base orientata positivamente $v_1, v_2, \ldots, v_n$ di T_pM, si ha*

$$\omega(p)(v_1, v_2, \ldots, v_n) > 0.$$

Definiamo adesso, una nozione di volume e quindi un'integrazione su M e su i suoi sottoinsiemi boreliani (a chiusura compatta). Consideriamo inizialmente una n-forma

$$\omega = f\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

definita su un aperto $V \subset \mathbb{R}^n$ a chiusura compatta e definiamo l'integrale di ω su V come

$$\int_V \omega \overset{def}{=} \int_V f\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n.$$

Sia ora $\psi : V \longrightarrow V'$ un diffeomorfismo che preserva l'orientazione tra due aperti di $\mathbb{R}^n$ e denotiamo con $\psi_*\omega = (\psi^{-1})^*\omega$ la n-forma trasportata lungo ψ. Allora, per il *Teorema di cambio di coordinate in* $\mathbb{R}^n$ si ha che

$$\int_V \omega = \int_V f\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = \int_{V'} f \circ \psi^{-1} |\mathrm{Jac}(\psi)|\, d[\psi^{-1}(x_1)] \cdots d[\psi^{-1}(x_n)] = \int_{V'} \psi_*\omega.$$

Come conseguenza di quest'ultima osservazione possiamo definire l'integrale di una n-forma ω definita su una n-varietà orientabile M. Se il supporto di ω è totalmente contenuto in un aperto $U \subset M$ di una carta $\varphi : U \longrightarrow V$ scriveremo

$$\int_M \omega = \int_V \varphi_* \omega.$$

e si ha che la definizione è ben posta perché essa è indipendente dalle carte per quanto detto. Se invece non siamo nel caso precedente, possiamo scrivere localmente $\omega = \sum_i \rho_i \omega$ dove i ρ_i sono subordinati ad un'atlante orientata che ricopre M e definire

$$\int_M \omega \overset{def}{=} \sum_i \int_M \rho_i \omega.$$

Proposizione 3.14. *Se M è una varietà orientata esiste sempre una forma volume su M.*

Dimostrazione. Sia $\{\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i\}$ un'atlante orientato e ρ_i una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento degli $\{U_i\}$. Definiamo la forma volume cercata come

$$\omega(p) = \sum_i \rho_i(p) \varphi_i^*(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n).$$

Infatti per ogni $p \in M$ e per ogni base orientata positivamente $v_1, v_2, \ldots, v_n$ di T_pM si ha che $\omega(p)$ è una somma di numeri strettamente positivi con coefficienti strettamente positivi $\rho_i(p)$. $\square$

É adesso possibile considerare le varietà orientabili equipaggiate con una nozione di volume, scelta a priori. Inoltre, se ω è la forma volume scelta e $f \in C^\infty(M)$, è ben definito l'integrale di f su M. Infatti si ha che $f\omega$ è nuovamente una n-forma e definiamo

$$\int_M f \overset{def}{=} \int_M f\omega.$$

Osservazione 3.15. Consideriamo adesso $\pi : M \longrightarrow N$ una submersione di varietà lisce compatte e orientate di dimensione rispettivamente m e n con $m \geq n$ e per ogni $p \in N$ la fibra $F = \pi^{-1}(p)$ una varietà liscia di dimensione $h = m - n$ con un'orientazione indotta da M e N. Ovvero, una base $v_1, v_2, \ldots, v_h$ di T_pF è positivamente orientata se può essere completata ad una base $v_1, v_2, \ldots, v_m$ positivamente orientata di T_pM e la proiezione di $v_{h+1}, v_{h+2}, \ldots, v_m$ via $d\pi_p$ è una base positiva per $T_{\pi(p)}M$. Definiamo allora,

$$\pi_* : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-h}(N)$$

l'*integrazione come parametro* come segue: per ogni $p \in N$ e $v_1, v_2, \ldots, v_{k-h} \in T_pN$

$$\pi_*(\omega)(p)(v_1, v_2, \ldots, v_{k-h}) \stackrel{def}{=} \int_{\pi^{-1}(p)} \beta$$

dove β è l'h-forma sulla h-sottovarietà $F = \pi^{-1}(p)$, definita da

$$\beta(q)(w_1, w_2, \ldots, w_h) \stackrel{def}{=} \omega(w_1, w_2, \ldots, w_h, \tilde{v_1}, \tilde{v_2}, \ldots, \widetilde{v_{k-h}})$$

e i vettori $\tilde{v}_i \in T_qF$ per cui $d\pi_q(\tilde{v}_1) = v_1$.

4 Forme differenziali su gruppi di Lie

In questa sezione ci concentreremo sullo studio delle forme differenziali su gruppi di Lie, introdotti nella Sezione 2. In particolare, introdurremo una nuova coomologia usando le forme left-invariant e proveremo che la coomologia di De Rham e quella delle forme left-invariant sono isomorfe nel caso delle G-varietà compatte, che saranno oggetto del primo paragrafo. Come conseguenza del Teorema 4.9, nel Corollario 4.10 saremo in grado di rispondere alla domanda iniziale che ci siamo posti in questo lavoro, ovvero per quali n è possibile che la sfera S^n ammetta una struttura di gruppo di Lie.

4.1 G-Varietà e forme invarianti

Definizione 4.1. *Un'*azione sinistra *di un gruppo di Lie G su una varietà M è una mappa liscia da $G \times M$ in M, tale che, denotando con gx l'immagine della coppia $(g, x) \in G \times M$, si ha che $(g \cdot g')x = g(g'x)$ per ogni $g, g' \in G$ e inoltre, detto e l'elemento neutro di G, si ha $ex = x$ per ogni $x \in M$. Si dice* left G-varietà *una varietà differenziabile dotata di un'azione sinistra di G su di essa.*
In modo analogo, è possibile definire le azioni destre *di un gruppo G su una varietà M e denoteremo tali varietà con il nome di* right G-varietà

Enunciamo adesso alcune definizioni che ci serviranno nel corso di questa Sezione. Per brevità, ci concentreremo sulle azioni sinistre, ma in modo analogo si possono dare le stesse definizioni per le azioni destre e le right G-varietà. Denotiamo con M una left G-varietà e con $L_g : M \longrightarrow M$ la mappa indotta dalla moltiplicazione per un elemento $g \in G$.

Definizione 4.2. *Una* forma left-invariant *su una left G-varietà M è una forma differenziale $\omega \in \Omega(M)$ per cui risulta $L_g^*\omega = \omega$ per ogni $g \in G$ e L_g^* il pull-back di L_g. Denotiamo con $\Omega_L(M)$ l'insieme delle forme left-invariant su M.*

Osservazione 4.3. Nel caso in cui G sia un gruppo di Lie, le moltiplicazioni forniscono un'azione destra e una sinistra. In tal caso, denotiamo con $\Omega_L(G)$ l'insieme delle forme left-invariant su G e con $\Omega_R(G)$ l'insieme delle forme right-invariant su G. Qualora una forma sia contemporaneamente left-invariant e right-invariant, si dice che è *bi-invariant* e l'insieme delle forme bi-invariant su G verrà denotato con $\Omega_I(G)$.

Nel seguito mostreremo come le forme left-invariant determinino la coomologia di De Rham di una left G-varietà compatta.

Proposizione 4.4. *Sia $G \curvearrowright M$ un'azione di un gruppo di Lie su una varietà. Allora le forme left-invariant su M sono stabili sotto d, $i(X)$ e $\mathcal{L}(X)$, con X un campo di vettori left-invariant.*

Dimostrazione. Verifichiamo che per un gruppo G le forme left-invariant sono stabili sotto $i(X)$. Usando la left-invariance di X e di ω abbiamo

$$\begin{aligned}
[L_g^*(i(X)\omega)](p)(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) &= (i(X)\omega)(gp)\,(d(L_g)_p(Y_1), d(L_g)_p(Y_2), \dots, d(L_g)_p(Y_k)) \\
&= \omega(gp)(X_{gp}, d(L_g)_p(Y_1), d(L_g)_p(Y_2), \dots, d(L_g)_p(Y_k)) \\
&= \omega(gp)(d(L_g)_p(X), d(L_g)_p(Y_1), d(L_g)_p(Y_2), \dots, d(L_g)_p(Y_k)) \\
&= (L_g)^*\omega(p)(X_p, Y_1|_p, Y_2|_p, \dots, Y_k|_p) \\
&= \omega(p)(X_p, Y_1|_p, Y_2|_p, \dots, Y_k|_p) \\
&= i(X)\omega(p)(Y_1, Y_2, \dots Y_k),
\end{aligned}$$

che dimostra la tesi. La stabilità sotto d è conseguenza del fatto che il pull-back commuta con il differenziale, come stabilito nell'Osservazione 3.5. La stabilità sotto $\mathcal{L}(X)$ è invece conseguenza della *formula magica di Cartan* dimostrata nel Teorema 3.9. □

4.2 Coomologia di forme differenziali left-invariant

Data una G-varietà M, usando la Proposizione 4.4 è possibile definire la coomologia di M come l'omologia del complesso di cocatene

$$(\Omega_L(M), d)$$

$$\cdots \longrightarrow \Omega_L^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega_L^k(M) \xrightarrow{d} \Omega_L^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \cdots$$

essendo d la derivata esterna. Diciamo allora $\mathcal{H}_L^k(M)$ il k-esimo gruppo di coomologia di questa cocatena e indichiamo con $\mathcal{H}_L^*(M)$ l'anello di coomologia graduato di M. Allora, $\mathcal{H}_L^*(M)$ ha la struttura di anello graduato con il prodotto, il *prodotto wedge*, ed è ben definito perchè il pull-back commuta con il prodotto wedge.

Introduciamo adesso una proposizione che ci permetterà di dimostrare il Teorema 4.6, il quale stabilisce che per una left G-varietà compatta le precedenti due coomologie sono canonicamente isomorfe.

Proposizione 4.5. *Su ogni gruppo di Lie compatto esiste una forma volume bi-invariant.*

Dimostrazione. Mostriamo inizialmente che esiste almeno una forma volume right-invariant. Sia $\alpha \in \Lambda^n(\mathfrak{g})$ non nullo, dove $n = \dim(\mathfrak{g})$. Sia allora α_R l'unica forma right-invariant in $\Omega_R^n(G)$ tale che $\alpha_R(e) = \alpha$, ovvero

$$(\alpha_R)(g)(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \alpha(d(R_g)_g^{-1}(X_1), d(R_g)_g^{-1}(X_2), \ldots, d(R_g)_g^{-1}(X_n)).$$

Osserviamo che α_R è una forma volume perché α è non nullo. Ora mostriamo che ogni n-forma α_R right-invariant è anche left-invariant. Tramite il pull-back indotto da L_g di α_R, si ottiene

$$\begin{aligned}(L_g^*\alpha_R)(h)(X_1, X_2, \ldots, X_n) &= \alpha_R(gh)(d(L_g)(X_1), d(L_g)(X_2), \ldots, d(L_g)(X_n))) \\ &= \alpha([d(R_{gh})^{-1} \circ (dL_g)](X_1), \ldots, [d(R_{gh})^{-1} \circ (dL_g)(X_n)]) \\ &= \alpha_R(h)([d((R_g))^{-1} \circ d(L_g)](X_1), \ldots, [d((R_g))^{-1} \circ d(L_g)](X_n)) \\ &= (\det \mathrm{Ad}(g))\alpha_R(h)(X_1, X_2, \ldots, X_n).\end{aligned}$$

La composizione $\det \circ \mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathbb{R}^*$ ha come immagine uno dei due sottogruppi moltiplicativi compatti di $\mathbb{R}^*$, ovvero $\{1\}$ oppure $\{-1, 1\}$. Essendo G connesso, risulta $\det \mathrm{Ad}(g) = 1$ per ogni $g \in G$, e quindi concludiamo che α_R è una forma volume bi-invariant. □

Teorema 4.6. *Sia $G \curvearrowright M$ un'azione sinistra di un gruppo di Lie compatto e connesso su una varietà M compatta. Allora $\mathcal{H}^*_L(M)$ e $\mathcal{H}^*(M; \mathbb{R})$ sono canonicamente isomorfi.*

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema basta provare che la mappa iniettiva

$$\iota : \Omega_L(M) \longrightarrow \Omega(M)$$

induce un isomorfismo in coomologia. A tale scopo, scegliamo una forma volume dg bi-invariant su G in modo che il volume totale di G sia 1. Fissato $p \in M$, consideriamo la mappa

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \Lambda^*(T_p(M)) \\ g & \longmapsto & ((L_g)^*\omega)(p) \end{array}$$

con $\omega \in \Omega^k(M)$ e otteniamo così una forma differenziale $\rho(\omega)$ su M definita da

$$\rho(\omega)(p)(X_1, X_2, \ldots, X_k) = \int_G L_g^*\omega(p)(X_1, X_2, \ldots, X_k)\, dg.$$

In tal modo si è costruita una mappa $\rho : \Omega(M) \longrightarrow \Omega(M)$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\rho(\omega) \in \Omega_L(M)$.
   Fissato $g' \in G$, la mappa $d(L_{g'})_p : T_p(M) \longrightarrow T_{g'p}(M)$ induce un'alta mappa

$$\wedge(d(L_{g'}))^* : \Lambda^*(T_p(M)) \longrightarrow \Lambda^*(T_{g'p}(M))$$

che, applicata a $\rho(\omega)$, produce

$$\begin{aligned}\wedge(d(L_{g'}))^*\rho(\omega)(p) &= \wedge\,(d(L_{g'}))^*\int_G (L_g)^*\omega(p)\,dg\\ &=\int_G (L_{g'\cdot g})^*\omega(p)\,dg\\ &=\int_G (L_g)^*\omega(p)\,dg\\ &=\rho(\omega)(p).\end{aligned}$$

2. Se $\omega \in \Omega_L(M)$, allora si ha $\rho(\omega) = \omega$.
   Tale proprietà si dimostra osservando che, se $L_g^*\omega(p) = \omega(p)$, allora

   $$\rho(\omega)(p) = \int_G L_g^*\omega(p)\,dg = \int_G \omega(p)\,dg = \omega(p),$$

   essendo $\omega(p)$ indipendente da G.

3. $\rho \circ d = d \circ \rho$.
   Tenuto conto che d commuta sia con il pull-back che con l'integrale si ha

   $$\begin{aligned}d\rho(\omega)(p)(X_1, X_2, \dots, X_k) &= d\int_G L_g^*\omega(p)(X_1, X_2, \dots, X_k)\,dg\\ &=\int_G d(L_g^*\omega)(p)(X_1, X_2, \dots, X_k)\,dg\\ &=\int_G L_g^*(d\omega)(p)(X_1, X_2, \dots, X_k)\,dg.\end{aligned}$$

Combinando le tre suddette proprietà si ottiene $\rho \circ \iota = id_{\Omega_L}$, da cui discende che $\mathcal{H}(\iota)$ è iniettiva.

4. L'integrazione su G può essere ristretta ad un intorno di e, al prezzo di rinunciare alla bi-invariance della forma volume. Se infatti U è un intorno dell'identità, indichiamo con $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ una mappa liscia a supporto compatto contenuto in U, con $\int_G \varphi\,dg = 1$. Detta ω_{vol} la forma volume bi-invariant dg, possiamo sostituire ω_{vol} con $\varphi\omega_{vol}$ lasciando l'integrale invariato. Avendo ora φ supporto contenuto in U, possiamo ridurre l'integrazione ad U.

Una volta stabilite le suddette proprietà, definiamo con $L\circ i : U\times M \longrightarrow G\times M \longrightarrow M$ l'azione di G su M. Denotiamo inoltre con $\pi_G^*(\varphi\omega_{vol})$ il pull-back di $\varphi\omega_{vol}$ a $\Omega(U\times M)$ tramite la proiezione $\pi_G : G\times M \longrightarrow G$ e sia $(L\circ i)^* : \Omega(M) \longrightarrow \Omega(U\times M)$

la mappa indotta da $L \circ i$. Se α è una forma su $U \times M$, indichiamo con $I(\alpha)$ l'integrazione di $\alpha \wedge \pi_G^*(\varphi\omega_{vol})$ su U considerando M come parametro, trattata nell'Osservazione 3.15. Abbiamo allora che $I : \Omega(U \times M) \longrightarrow \Omega(M)$ è compatibile con il differenziale d e induce quindi la mappa $\mathcal{H}(I)$ in coomologia.
Procediamo associando ad ogni $\omega \in \Omega(M)$ la forma $(L \circ i)^*(\omega) \wedge \pi_G^*(\varphi\omega_{vol})$ su $U \times M$ e osserviamo che si ha

$$\rho(\omega) = I(L^*(\omega)),$$

per i dettagli si veda [3, Pagina 150]. Ciò conduce al seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\Omega(M) \arrow[r, "(L\circ i)^*"] \arrow[dr, "\rho"'] & \Omega(U \times M) \arrow[r, "I"] & \Omega(M) \\
& \Omega_L(M). \arrow[ur, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

Se inoltre scegliamo per U un intorno contrattile di e, l'identità di $U \times M$ è omotopica alla composizione

$$U \times M \xrightarrow{\pi} M \xrightarrow{\jmath} U \times M$$

essendo π la proiezione e j la mappa $j : p \mapsto (e, p)$.
Tenendo conto che $I \circ \pi^* = id$ e usando la compatibilità della coomologia di De Rham con l'omotopia di mappe, otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(I) \circ \mathcal{H}((L \circ i)^*) =& \mathcal{H}(I) \circ id_{\mathcal{H}(M \times U)} \circ \mathcal{H}((L \circ i)^*) \\
=& \mathcal{H}(I) \circ \mathcal{H}(\pi^*) \circ \mathcal{H}(j^*) \circ \mathcal{H}((L \circ i)^*) \\
=& \mathcal{H}(j^*) \circ \mathcal{H}((L \circ i)^*) \\
=& \mathcal{H}((L \circ i \circ j)^*) = id
\end{aligned}$$

da cui si deduce che $\mathcal{H}(\iota)$ è surgettiva. Avendo dimostrato che $\mathcal{H}(\iota)$ è sia iniettiva che surgettiva, concludiamo che $\mathcal{H}(\iota)$ è un isomorfismo. □

Teorema 4.7. *Sia G un gruppo di Lie compatto e connesso con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Allora si ha*

$$\begin{aligned}
&\Omega_L(G) \simeq \Omega_R(G) \simeq \Lambda^*(\mathfrak{g}), \\
&\mathcal{H}_L^*(G) \simeq \mathcal{H}_R^*(G) \simeq \mathcal{H}^*(G; \mathbb{R}) \simeq \Omega_I(G).
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Poiché il primo enunciato è già stato discusso durante la dimostrazione della Proposizione 4.5, ci concentriamo esclusivamente sul secondo.

Tenendo conto che G agisce sia a destra, sia a sinistra su se stesso tramite le moltiplicazioni, gli isomorfismi $\mathcal{H}_L(G) \simeq \mathcal{H}_R(G) \simeq \mathcal{H}^*(G;\mathbb{R})$ si ottengono direttamente dal teorema precedente usando $M = G$. Osserviamo ora che $\Omega_I(G)$ è l'insieme delle forme invarianti a sinistra per l'azione del gruppo $G \times G$ su G, definite da $(g_1, g_2)g' = g_1 \cdot g' \cdot g_2^{-1}$. Quindi, dal teorema precedente si ottiene

$$\mathcal{H}^*(G;\mathbb{R}) \simeq \mathcal{H}_I^*(G).$$

Per quanto riguarda l'isomorfismo $\mathcal{H}^*(G;\mathbb{R}) \simeq \Omega_I(G)$, è sufficiente verificare che tutte le forme bi-invariant sono chiuse, per cui tutti i differenziali del complesso $\Omega_I(G)$ sono nulli e la proiezione al quoziente è quindi un isomorfismo. Per provare che le forme bi-invariant sono chiuse, indichiamo con α una forma bi-invariant su G e sia ν la mappa inversa di G. Come conseguenza del Lemma 2.5, si ha

$$\begin{aligned}\nu^*\alpha(g)(X_1, X_2, \ldots, X_k) =& \alpha(g^{-1})([-(dL_g)^{-1} \circ dR_{g^{-1}}](X_1), \ldots, [-(dL_g)^{-1} \circ dR_{g^{-1}}](X_k)) \\ =& (-1)^k \alpha(g)(X_1, X_2, \ldots, X_k)\end{aligned}$$

da cui discende che $\nu^*\alpha = (-1)^k\alpha$. Osservando infine che $\Omega_I(G) = \Omega_L(G) \cap \Omega_R(G)$ è stabile sotto d, possiamo scrivere

$$\nu^*(d\alpha) = (-1)^{k+1} d\alpha$$

$$d(\nu^*\alpha) = d((-1)^k\alpha) = (-1)^k d\alpha$$

e combinando queste due relazioni si trova $d\alpha = 0$.

□

4.3 Terzo gruppo di coomologia dei gruppi di Lie compatti

Lemma 4.8. *Sia G un gruppo di Lie compatto con algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di dimensione non zero. Esiste allora una forma $F : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineare, simmetrica e definita positiva tale che, per ogni tripla $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, valgono le seguenti relazioni:*

1. $F(\mathrm{Ad}(g)(X), \mathrm{Ad}(g)(Z)) = F(X, Z)$;
2. $F([X, Y], Z) = F(X, [Y, Z])$.

Una tale forma bilineare F è detta invariante.

Dimostrazione. Sia $\overline{F}$ una qualunque forma bilineare simmetrica definita positiva su $\mathfrak{g}$, che esiste perché la $\dim \mathfrak{g} > 0$. Poniamo

$$F(X, Z) \overset{def}{=} \int_G \overline{F}(\mathrm{Ad}(g)(X), \mathrm{Ad}(g)(Z))\, dg$$

con dg una forma volume bi-invariant che fissiamo, e la rappresentazione aggiunta $\mathrm{Ad}(g)(X) = ((dR_g)^{-1} \circ (dL_g))(X)$. Osserviamo che dg esiste per la Proposizione 4.5 e ha integrale finito perché G è compatto. Come conseguenza dell'invarianza di dg otteniamo che F soddisfa la prima proprietà. Infatti, si ha

$$\begin{aligned}
F(\mathrm{Ad}(g)(X), \mathrm{Ad}(g)(Z)) &= \int_G \overline{F}(\mathrm{Ad}(g)(X), \mathrm{Ad}(g)(Z))\, dg \\
&= \int_G \overline{F}(\mathrm{Ad}(h)\,\mathrm{Ad}(g)(X), \mathrm{Ad}(h)\,\mathrm{Ad}(g)(Z))\, dh \\
&= \int_G \overline{F}(\mathrm{Ad}(hg)(X), \mathrm{Ad}(hg)(Z))\, d(hg) \\
&= \int_G \overline{F}(\mathrm{Ad}(g)(X), \mathrm{Ad}(g)(Z))\, dg \\
&= F(X, Z).
\end{aligned}$$

Inoltre, utilizzando $X' = \mathrm{Ad}(g^{-1})(X)$, si ottiene che

$$F(\mathrm{Ad}(g^{-1})(X), Z) = F(X, \mathrm{Ad}(g)(Z)),$$

per ogni $g \in G$. Per dimostrare che F soddisfa la seconda proprietà consideriamo $\varphi_1, \varphi_2 : G \longrightarrow \mathfrak{g}$ che mappano rispettivamente

$$g \mapsto \mathrm{Ad}(g^{-1})(X) \mapsto F(\mathrm{Ad}(g^{-1})(X), Z) \quad \text{e} \quad g \mapsto \mathrm{Ad}(g)(Z) \mapsto F(X, \mathrm{Ad}(g)Z).$$

Differenziando nell'identità $e \in G$, si ha

$$d(\varphi_1)_e(Y) = F([X, Y], Z) \quad \text{e} \quad d(\varphi_2)_e(Y) = F(X, [Y, Z])$$

e per ogni tripla $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ si ottiene che

$$F([X, Y], Z) = F(X, [Y, Z]).$$

□

Come conseguenza del precedente lemma, saremo in grado di provare un risultato importante su i gruppi di Lie compatti e connessi non abeliani.

Teorema 4.9. *In ogni gruppo di Lie non abeliano compatto e connesso il terzo numero di Betti è non nullo.*

Dimostrazione. Sia G un gruppo di Lie e indichiamo con $b_3(G)$ il terzo *numero di Betti* di G. Al fine di dimostrare che $b_3(G)$ non è zero sfruttiamo il Teorema 4.7 per cui si ha che il terzo spazio di coomologia $\mathcal{H}^3(G;\mathbb{R})$ è isomorfo allo spazio vettoriale $\Omega^3_I(G)$ delle 3-forme invarianti su G. Come conseguenza del Lemma 4.8 esiste una forma F bilineare simmetrica invariante definita positiva su $\mathfrak{g}$ tale che per ogni tripla $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ si pone

$$F([X,Y],Z) = F(X,[Y,Z]) \quad \text{e} \quad F(\mathrm{Ad}(g)(X), \mathrm{Ad}(g)(Z)) = F(X,Z).$$

Per una tale F è possibile definire una forma differenziale $\omega_F \in \Lambda^3(\mathfrak{g})$, ovvero per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ si ha

$$\omega_F(X,Y,Z) \overset{def}{=} F([X,Y],Z).$$

L'alternanza di ω è un'immediata conseguenza del Lemma 4.8. Per il Teorema 4.7 lo spazio delle 3-forme su $\mathfrak{g}$ è isomorfo allo spazio vettoriale delle 3-forme left-invariant su G, ovvero $\Lambda^3(\mathfrak{g}) \simeq \Omega^3_L(G)$. Per concludere è sufficiente provare che $\omega_F \in \Omega^3_I(G)$, ovvero che ω_F è right-invariant o equivalentemente che è Ad-invariant. Infatti, si ha che

$$\begin{aligned}
\omega_F(\mathrm{Ad}(g)(X), \mathrm{Ad}(g)(Y), \mathrm{Ad}(g)(Z)) =& F([\mathrm{Ad}(g)(X), \mathrm{Ad}(g)(Y)], \mathrm{Ad}(g)(Z)) \\
=& F(\mathrm{Ad}(g)([X,Y]), \mathrm{Ad}(g)(Z)) \\
=& \omega_F(X,Y,Z).
\end{aligned}$$

Per concludere che $b_3(G)$ è non nullo, è sufficiente provare che ω_F è non banale. Come conseguenza dell'Osservazione 2.20 l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ non è abeliana, perciò esistono $X, Y \in \mathfrak{g}$ tali che $[X,Y]$ è non nullo. In particolare, F è definita positiva e si ha che $\omega_F(X,Y,[X,Y])$ è non nulla, infatti

$$\omega_F(X,Y,[X,Y]) = F([X,Y],[X,Y]) > 0.$$

□

Corollario 4.10. *Le uniche sfere che possono ammettere una struttura di gruppo di Lie sono S^0, S^1 e S^3.*

Dimostrazione. Sia S^n la sfera n-dimensionale. I casi $n = 0, 1$ sono di semplice verifica e sono già stati trattati nell'Osservazione 2.19. Come primo passo, se una sfera S^n per $n > 1$ ammette una struttura di gruppo di Lie, esso può essere abeliano o non abeliano. Mostriamo che non è possibile che il gruppo sia abeliano per $n > 1$. In particolare per $n > 1$ si ha che S^n è semplicemente connesso e per l'Osservazione 2.18 l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di S^n è abeliana di dimensione n. Per l'Osservazione 2.17 si ha necessariamente che $\mathfrak{g}$ è isomorfa all'unica algebra di Lie abeliana di dimensione n. Come conseguenza della Proposizione 2.15, due gruppi di Lie semplicemente connessi sono isomorfi se e solo se le loro algebre di Lie lo sono, per cui si avrebbe che, come gruppi, S^n e il gruppo $\mathbb{R}^n$ sarebbero isomorfi, ma ciò è assurdo perché non sono omeomorfi. Quindi se S^n ammettesse una struttura di gruppo di Lie per $n > 1$, necessariamente il gruppo sarebbe non abeliano.
Supponiamo ora che il gruppo di Lie di S^n non sia abeliano. Per il Teorema 4.9, il terzo numero di Betti $b_3(G)$ sarebbe non nullo e quindi si avrebbe che il terzo spazio di coomologia $\mathcal{H}^3(S^n; \mathbb{R})$ è non banale. In particolare, per la Proposizione 3.12 l'unica sfera che ha questa proprietà è S^3 e quindi $n = 3$ è l'unica altra possibilità. $\square$

Appendice

Concludiamo questo lavoro con alcuni risultati su i gruppi di Lie. In particolare tratteremo i gruppi di Lie *semi-semplici* che sono la generalizzazione naturale del caso delle sfere su cui ci siamo concentrati. Inoltre, costruiremo la struttura di gruppo di S^3 e caratterizzeremo la coomologia in dimensione bassa per i gruppi semi-semplici.

Struttura di gruppo di Lie di S^3

Consideriamo i *Quaternioni di Hamilton* $\mathbb{H}$ trattati in [4] e vediamo S^3 come l'insieme dei quaternioni unitari

$$\{q \in \mathbb{H} : |q|^2 = 1\}.$$

In particolare, il prodotto preserva la norma, ovvero per ogni $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, si ha

$$|q_1 q_2|^2 = |q_1|^2 |q_2|^2.$$

Come conseguenza della precedente uguaglianza, la moltiplicazione in $\mathbb{H}$ discende a S^3 con elemento neutro $e = 1 \in \mathbb{H}$ e mappa di moltiplicazione e inversa lisce perché restrizioni di mappe lisce.

Coomologia in bassa dimensione dei gruppi di Lie semi-semplici compatti e connessi

Cercando in letteratura la caratterizzazione che abbiamo affrontato durante questo lavoro, dei gruppi di Lie sulle sfere, è emersa spesso la nozione di gruppo *semi-semplice*. Infatti, l'obiettivo di questa appendice sarà quello di completare la trattazione estendendosi ad una classe più ampia di gruppi di Lie che contiene i gruppi di Lie non abeliani, i semi-semplici. Osserveremo che il primo e il secondo gruppo di coomologia di un gruppo di Lie compatto, connesso e semi-semplice è banale e invece il terzo spazio di coomologia è non banale, ovvero estenderemo il risultato del Teorema 4.9. Introduciamo adesso i gruppi di Lie semi-semplici. In letteratura sono disponibili diverse definizioni, tra le quali riportiamo la seguente.

Definizione A.11. *Un gruppo di Lie è semi-semplice se e solo se lo è la sua algebra di Lie e un'algebra di Lie è semi-semplice se non contiene ideali abeliani diversi da* 0*.*

Il nostro scopo sarà quello di caratterizzare la coomologia in dimensione bassa dei gruppi semi-semplici compatti e connessi. Quindi richiamiamo il [9, Corollario 7.8.6].

Proposizione A.12. *Per ogni gruppo di Lie compatto e connesso è equivalente essere semi-semplice ed avere il primo numero di Betti uguale a* 0*.*

Per provare invece che il secondo gruppo di coomologia è banale, si ha la necessità di osservare il seguente fatto, trattato in [6].

Proposizione A.13. *In ogni gruppo di Lie connesso, il flusso associato ad un campo vettoriale è la moltiplicazione per un elemento del gruppo.*

Osservazione A.14. Come conseguenza della proposizione precedente si ha che per ogni ω forma differenziale left-invariant e per ogni X campo vettoriale left-invariant

$$\mathcal{L}(X)\omega = 0.$$

Teorema A.15. *In ogni gruppo di Lie compatto connesso e semi-semplice il secondo numero di Betti è nullo. Ovvero* $\mathcal{H}^2(G;\mathbb{R}) \simeq 0$*.*

Dimostrazione. Sia G il gruppo di Lie e sia $\alpha \in \Omega^2_I(G)$. Come conseguenza del Teorema 4.7, per dimostrare che il secondo numero di Betti è nullo e quindi che $\mathcal{H}^2(G;\mathbb{R}) = \{0\}$ è sufficiente verificare che $\alpha = 0$. Sia X un campo vettoriale left-invariant. Grazie alla $\mathcal{L}$-invariance di α e alla formula magica di Cartan, si ha che

$$0 = \mathcal{L}(X)\alpha = (i(X) \circ d + d \circ i(X))\alpha = i(X)(d\alpha) + d(i(X)\alpha) = d(i(X)\alpha).$$

Inoltre α è una forma differenziale bi-invariant, e quindi chiusa. Da ciò, si ottiene che anche $i(X)\alpha$ è chiusa. Per semi-semplicità di G, $\mathcal{H}^1(G;\mathbb{R}) = \{0\}$, e dunque $i(X)\alpha$ è una 1-forma esatta left-invariant. Esiste allora una funzione liscia $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ che $i(X)\alpha = df$. Per il Teorema 4.6 la coomologia delle forme left-invariant è isomorfa alla coomologia di De Rham, ma allora f è necessariamente costante. Per ogni X campo vettoriale left-invariant otteniamo che $i(X)\alpha = 0$. Infine mostriamo che $\alpha = 0$. Sia $g \in G$ e v_g, $w_g \in T_g(G)$ due vettori. É possibile trovare come conseguenza della moltiplicazione a sinistra due campi vettoriali left-invariant V e W tali per cui $V_g = v_g$ e $W_g = w_g$. come conseguenza della left-invariance di V, si ha che

$$\alpha_g(v_g, w_g) = \alpha_g(V_g, W_g)) = \alpha(g)(V, W) = i(V)\alpha(g)(W) = 0$$

e per l'arbitrarietà di g, v_g e w_g concludiamo che $\alpha = 0$. $\square$

Per concludere questa trattazione osserviamo che nella dimostrazione del Teorema 4.9, abbiamo dimostrato che esiste una forma differenziale non nulla su G sfruttando solo l'ipotesi che G non fosse abeliano. In particolare, per la definizione che abbiamo dato di gruppo semi-semplice e per l'Osservazione 2.20, la stessa dimostrazione del Teorema 4.9 può essere usata per caratterizzare il terzo spazio di coomologia di un gruppo di Lie semi-semplice compatto e connesso.

Teorema A.16. *In ogni gruppo di Lie semi-semplice, compatto e connesso il terzo numero di betti è non nullo.*

Riferimenti bibliografici

[1] Marco Abate, Francesca Tovena. *Geometria Differenziale* Springer- Verlag Italia, 2011, ISBN 9788847019195

[2] Yves Félix, John Oprea, Daniel Tanré. *Algebraic Models in Geometry.* Oxford Graduate Texts in Mathematics, 2008, ISBN 9780199206513

[3] Greub, Werner, Halperin, Stephen, and Vanstone, Ray. *Connections, Curvature, and Cohomology. Vol. II: Lie Groups, Principal Bundles, and Characteristic Classes.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York. Pure and Applied Mathematics, 1973, Vol. 47-II.

[4] Hamilton, William Rowan. *On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra.* Philosophical Magazine 25 (3): 489–495, 1844, doi:10.1080/14786444408645047.

[5] Marco Manetti. *Topologia.* Springer-Verlag Milano, 2014, ISBN 9788847056619

[6] Bruno Martelli. *Manifolds.* Dipartimento di Matematica di Pisa, `people.dm.unipi.it/martelli/didattica/matematica/2020/Manifolds.pdf`

[7] Walter Rudini. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, 1953, ISBN-13 9780070542358

[8] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and lie groups.* Springer, 1971, ISBN 9781475717990

[9] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Cambridge University press, 1997, ISBN 0521559871

Ringraziamenti

Voglio dirlo. Non vedevo l'ora di scrivere i ringraziamenti.
Fin dalle prime lauree che ho visto, andare in aula Stud e leggere i ringraziamenti dei laureati mi metteva sempre un po' di emozione e mi dava la carica di continuare a credere in quello che stavo facendo. E adesso sono qua. Dopo tre anni pieni di emozioni, paure e difficoltà sono arrivato a mettere un primo punto. Sono però dispiaciuto, che come me, non ci sarà un novizio con molta voglia di fare, a leggere queste frasi in aula Stud. Ma adesso, iniziamo a fare quello per cui siamo qui, ringraziamo!

Iniziamo da lei, che mi ha svoltato la vita, che dalla quarta superiore ha creduto in me, ha creduto che potessi avere un futuro e mi ha sempre spinto a dare il massimo per ottenere ciò che volevo. Mille parole non bastano e nemmeno un semplice grazie. Sei la persona più forte che conosco, mi hai insegnato il valore dell'impegno e della famiglia.
Colgo infatti, l'occasione per ringraziare anche loro, mi hanno accolto come un figlio e mi hanno trattato, a volte anche meglio di quanto meritassi.

Beh Loris, sta a te. La nostra amicizia è sempre stata un punto fermo da quando siamo piccoli. Se sono qui adesso è anche merito tuo. Te mi hai insegnato il sacrificio. Entrambi proveniamo dallo stesso mondo, ma te mi hai mostrato come impegnarsi per il proprio futuro, e ti ammiro per questo.

Credo sia arrivato il vostro momento. Mamma e babbo.. Cosa dire? Sicuramente non siamo una famiglia ”comune”, ma questo non ci ha mai distrutti. Non sono il tipo che cerca sempre in voi un appoggio, ma quando ho bisogno ci siete sempre. Potrebbe essere una cosa scontata da leggere, ma la sento davvero. Durante gli anni non ho sempre rigato dritto, ma voi non avete mai smesso di credere in me e spero davvero che questo traguardo vi renda orgogliosi.

Se parliamo di famiglia come non parlare di voi, i bimbi, **La Bandaccia**. Voi che ci siete e ci sarete sempre. Dove trovo sostegno o anche un po di svago per staccare. Ne abbiamo passate tante insieme, no? É vero, non sono più il Sopi di una volta, ma su di me potrete sempre contare, perché questa è la vera amicizia. E adesso, ci avreste mai creduto che sarei arrivato qui?

Fra, Chiara e Vitto, eravamo i 4.
Sicuramente con voi ho trovato un'amicizia senza eguali. Mi avete fatto passare i momenti più belli, che non vorrò mai dimenticare. Ne abbiamo fatte mille insieme, dalle semplici giornate all'avventura, alle serate, ai viaggi. É passato qualche anno, ma mi ricordo che per la prima volta con voi mi sono sentito capito e al sicuro.
Un ringraziamento davvero di cuore va a te Fra, *al mio amico d'una vita.* Seppur, non ci sentiamo più tutti i giorni so che posso contare su di te. Grazie per tutto quello che abbiamo vissuto e per aver sempre dimostrato a tutti che sei orgoglioso di me, ti voglio bene.

Is now the Time?
Adesso parliamo di voi, voi che in questi ultimi anni siete stati un esempio, un punto di forza, e una piccola famiglia aggiunta.
Non dimenticherò mai la quarantena, in cui mi avete dato spensieratezza e il sorriso ogni giorno, i pranzi tutti insieme e diciamolo.. **Le Cene!**

Tucio: Beh, sei unico. Sei stato una delle prime persone che ho conosciuto a Matematica e da allora siamo sempre qua. Ti ringrazio per tutti i problemi di Aritmetica e, in particolare, i Pokemon che hanno fatto tiltare Lombardo. Rimani sempre così, strano, ma Tucio.

Budori: Sei un livornese. Un po' tirchio, che pari di Genova. Sei stato un gran compagno di studi e ti ringrazio per l'estate fantastica che mi ha fatto passare. E sì, Livorno è di fori. Anche se hai preferito i soldi, speriamo di poter preparare ancora qualche esame insieme. *Magari a quel tavolo, dopo cena, con una tazzina di Amaro Del Capo.*

Dipri: Sei un alcolizzato. Sei sempre stato un obiettivo da raggiungere, ma anche un vero amico. Per qualunque cosa ci sei sempre sia di Matematica, sia di vita. Mi fai capire se sto sbagliando e mi fai vedere altre prospettive. Sei il top compagno per la gara di gruppi e il prossimo anno gli facciamo il culo. Grazie, ma rimani un alcolizzato.

Cris: Sei il mastro maxatore. Un mostro in tutto. All'inizio, ancora prima che si formasse questo gruppo, ci siamo spaccati insieme per tutto il primo anno: alle sei di mattina o fino a notte tarda, o entrambe. Grazie per le relazioni di Fisica, per la dispensa, Analisi o G1. Piccole cazzate che però quando ci ripenso mi viene sempre un sorriso. Mi hai fatto capire che con l'impegno le difficoltà si superano sempre e che, le difficoltà di oggi saranno le banalità di domani. Grazie di cuore di questi anni.

Rand: **C'è Raaaaaand**, mamma mia che risate. Se parliamo di far tardi la notte, come non darti il titolo di Re. Che dire? Sei una persona che non si accontenta mai e, ti ringrazio perché, con il tuo entusiasmo sei sempre riuscito a farmi piacere cose anche lontane da me.

Beh, siamo essenzialmente arrivati alla fine. Ci sarebbero altre persone a cui vorrei dire una frase, ma seppur ne abbia voglia, credo che già abbia esagerato con questi ringraziamenti. Quindi un saluto a tutti quelli che non ho nominato e a tutto il Dip.