Secondo Compitino
GTD

Cristian Sopio
Mat: 559597

26 November 2019

`Esercizio 1` Abbiamo che la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^3 + 3y^2\}$$

è parametrizzata da

$$\begin{aligned} \varphi : &\mathbb{R}^2 \longrightarrow S \\ &(x, y) \mapsto (x, y, x^3 + 3y^2) \end{aligned}$$

Si ha che la superfice è regolare se calcolati

$$\partial_x = (1, 0, 3x^2) \text{ e } \partial_y = (0, 1, 6y)$$

si ha

$$\partial_x \wedge \partial_y = (-3x^2, -6y, 1) \neq 0$$

E questo è realizzato in quanto la terza componente non si annulla mai. Ora abbiamo che $\varphi(1, 1) = (1, 1, 4)$ e come spazio vettoriale il piano tangente $\Pi = span\{(\partial_x)(x, y)_{|p}, (\partial_y)(x, y)_{|p}\} = span\{(1, 0, 3), (0, 1, 6)\}$. Invece il piano tangente in $p = (1, 1)$ è

$$\widetilde{\Pi} = (1 + s, 1 + t, 4 + 3s + 6t)$$

al variare di $t, s \in \mathbb{R}$. Infine una mappa di Gauss è

$$\begin{aligned} N \circ \varphi : &\mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \\ &(x, y) \mapsto \frac{(-3x^2, -6y, 1)}{\sqrt{9x^4 + 36y^2 + 1}} \end{aligned}$$

`Esercizio 2` Per verificare che la mappa φ è una parametrizzazione locale, bisogna verificare che φ è liscia e lo è perchè lo è componente per componente, che $d\varphi_{(u,v)}$ abbia sempre rango due e che φ sia un diffeomorfismo con l'immagine. Notiamo che vale

$$d\varphi_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \exp v \cos u & \exp v \sin u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ora, se $\cos u \neq 0$, il minore $M = \begin{pmatrix} \exp v \cos u & \exp v \sin u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; ha determinante diverso da zero, altrimenti non si annulla il determinante del minore

$$M' = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \exp v \cos u & \exp v \sin u \end{pmatrix}.$$

Per vedere che ogni punto di $\varphi((0,2\pi)\times\mathbb{R})$ ammette un intorno diffeomorfo ad un aperto del dominio, dividiamo $(0,2\pi)\times\mathbb{R}$ in tre parti, $U_1=(0,\pi)\times\mathbb{R}$, $U_2=(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})\times\mathbb{R}$ e $U_3=(\pi,2\pi)\times\mathbb{R}$ e abbiamo che $\varphi(\cup_{j=1}^{3}(U_j))=S$.
Basta quindi mostrare che $\varphi|_{U_j}$ è invertibile con inversa $\mathcal{C}^\infty$. Ora dalle le relazioni

$$\begin{aligned}\cos u &= x\\ \sin u &= \frac{y}{\exp v}\\ v &= z\end{aligned}$$

otteniamo che

$$\begin{aligned}(\varphi|_{U_1})^{-1}(x,y,z) &= (\arccos x, z)\\ (\varphi|_{U_2})^{-1}(x,y,z) &= (\pi+\arcsin\left(\frac{y}{\exp z}\right), z)\\ (\varphi|_{U_3})^{-1}(x,y,z) &= (2\pi-\arccos x, z)\end{aligned}$$

e la mappa indotta su $\bigcup_{j=1}^{3}U_j$ è liscia perchè lo è su un ricoprimento fondamentale e sono mappe $\mathcal{C}^\infty$, perchè lo sono componente per componente e sono inverse locali di φ, quindi φ è una parametrizzazione locale.
Derivando, abbiamo che

$$\partial_u=(-\sin u, \exp v\cos u, 0) \text{ e } \partial_v=(0,\exp v\sin u, 1)$$

e, rispetto alla parametrizzazione data,

$$\begin{aligned}E &= \langle\partial_u,\partial_u\rangle = \sin^2 u+\exp 2v\cos^2 u\\ F &= \langle\partial_u,\partial_v\rangle = \exp 2v\sin u\cos u\\ G &= \langle\partial_v,\partial_v\rangle = \exp 2v\sin^2 u+1\end{aligned}$$

Inoltre $\partial_u\wedge\partial_v=(\exp v\cos u, \sin u, -\exp v\sin^2 u)$ ha modulo sempre diverso da 0 perchè $\sin u$ e $\cos u$ non si annullano mai contemporaneamente. Per trovare i coefficenti di forma calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\partial_u &= (-\cos u, -\exp v\sin u, 0)\\ \frac{\partial}{\partial v}\partial_u &= (0,\exp v\cos u, 0)\\ \frac{\partial}{\partial v}\partial_v &= (0,\exp v\sin u, 0)\end{aligned}$$

e si ha che $\parallel\partial_u\wedge\partial_v\parallel=\exp 2v\sin^4 u+\sin^2 u+\exp 2v\cos^2 u$ e

$$\begin{aligned}e &= \frac{1}{\parallel\partial_u\wedge\partial_v\parallel}\langle(-\cos u,-\exp v\sin u,0),(\exp v\cos u,\sin u,-\exp v\sin^2 u)\rangle = -\frac{\exp v(\cos^u+\sin^2 u)}{\parallel\partial_u\wedge\partial_v\parallel}\\ f &= \frac{1}{\parallel\partial_u\wedge\partial_v\parallel}\langle(0,\exp v\cos u,0),(\exp v\cos u,\sin u,-\exp v\sin^2 u)\rangle = \frac{\exp v\sin u\cos u}{\parallel\partial_u\wedge\partial_v\parallel}\\ g &= \frac{1}{\parallel\partial_u\wedge\partial_v\parallel}\langle(0,\exp v\sin u,0),(\exp v\cos u,\sin u,-\exp v\sin^2 u)\rangle = \frac{\exp v\sin^2 u}{\parallel\partial_u\wedge\partial_v\parallel}\end{aligned}$$

Infine, la curvatura di Gauss è

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=\frac{-\exp 2v\sin^2 u(1+\cos^2 u)}{\parallel\partial_u\wedge\partial_v\parallel^4}$$

dove il denominatore è sempre > 0 e il numeratore è sempre negativo tranne se $\sin^2 u = 0$, ma ciò accade solo per $u = \pi$ in cui $K = 0$.
`Esercizio 3` Abbiamo che

$$d\psi_{(\vartheta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta cos\varphi \\ -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

e chiamate ∂_ϑ e ∂_φ rispettivamente la prima e la seconda colonna della matrice si ha:

$$\begin{aligned} E &= \langle \partial_\vartheta, \partial_\vartheta \rangle = \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1 \\ F &= \langle \partial_\varphi, \partial_\vartheta \rangle = -\cos\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi = 0 \\ G &= \langle \partial_\varphi, \partial_\varphi \rangle = \sin^2\vartheta(\sin^\varphi + \cos^2\varphi) = \sin^2\vartheta \end{aligned}$$

Restringendo ψ ad un dominio dove è un omeomorfismo con l'immagine($(0,\pi) \times (-\pi,\pi)$).
Abbiamo che chiamata A la matrice della prima forma fondamentale

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\vartheta} \end{pmatrix}$$

con semplici calcoli si trovano i simboli di Christoffel

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{1,1} &= 0 \\ \Gamma^2_{1,1} &= 0 \\ \Gamma^1_{1,2} &= 0 \\ \Gamma^2_{1,2} &= \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \\ \Gamma^1_{2,2} &= -\sin\vartheta\cos\vartheta \\ \Gamma^2_{2,2} &= 0 \end{aligned}$$

Ora sia

$$\begin{aligned} \gamma : & I \longrightarrow S \\ & s \mapsto \psi(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \end{aligned}$$

una curva liscia. Si ha che γ è una geodetica se rispetta:

$$\begin{cases} \sigma_1'' - (\sin\sigma_1\cos\sigma_1)\sigma_2'^2 = 0 \\ \sigma_2'' + 2\left(\frac{\cos\sigma_1}{\sin\sigma_1}\right)\sigma_1'\sigma_2' = 0 \end{cases}$$

`Esercizio 4` Derivando in u e in v si ha

$$\partial_u = (\sinh u\cos v, \sinh u \sin v, 1) \text{ e } \partial_v = (-\cosh u\sin v, \cosh u\cos v, 0)$$

e abbiamo

$$\begin{aligned} E &= \langle \partial_u, \partial_u \rangle = \cosh^2 u \\ F &= \langle \partial_u, \partial_v \rangle = 0 \\ G &= \langle \partial_v, \partial_v \rangle = \cosh^2 u \end{aligned}$$

Per trovare i coefficenti di forma calcolo

$$N \circ \sigma = \frac{\partial_u \wedge \partial_v}{\| \partial_u \wedge \partial_v \|} = \frac{(-\cos v, -\sin v, \sinh u)}{\cosh u}$$

Ora

$$\frac{\partial}{\partial u}\partial_u = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0)$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\partial_u = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0)$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\partial_v = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0)$$

e si trova

$$e = \langle \partial_{uu}, N \circ \sigma \rangle = -1$$
$$f = \langle \partial_{uv}, N \circ \sigma \rangle = 0$$
$$g = \langle \partial_{vv}, N \circ \sigma \rangle = 1$$

.
Intersecando la superficie con C^+ e C^- si trovano due circonferenze parametrizzate rispettivamente da

$$\begin{aligned}\gamma_+ :& [0, 2\pi] \longrightarrow S\\ & t \mapsto (R\cos t, R\sin t, h)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\gamma_- :& [0, 2\pi] \longrightarrow S\\ & t \mapsto (R\cos t, R\sin t, -h)\end{aligned}$$

i dischi che hanno tali curve come bordo hanno entrambi area

$$A(D_\pm) = \pi R^2$$

e

$$A(D_+) + A(D_-) = 2\pi R^2 = 2\pi \cosh^2 h$$

Essendo $\| \partial_u \wedge \partial_v \| = \cosh^2 u$, si ha che l'area della porzione di catenoide nell'insieme $\{|z| < h\}$ è

$$A(\sigma(\{|u| < h\})) = \int_{-h}^{h}\int_0^{2\pi} \cosh^2 u \, du \, dv = 2\pi(\sinh h \cosh h + h)$$

Quindi se vale la relazione data, la catenoide ha area maggiore della somma dell'area dei due dischi.
La catenoide è una superfice minima se

$$H \equiv 0$$

Ora abbiamo che

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG + gE}{EG} = \frac{1}{2}\frac{(-\cosh^2 u + \cosh^2 u)}{\cosh^4 u} \equiv 0$$

`Esercizio 5` Abbiamo visto a lezione che una superficie compatta orientabile e senza bordo in $\mathbb{R}^3$ ammette almeno un punto di curvatura gaussiana positiva, ora la compattezza, l'orientabilità e possedere un bordo sono invarianti per diffemorfismo, infatti i diffeomorfismi mandano superfici compatte in superfici compatte perchè in particolare sono funzioni continue, e orientabili in orientabili, per definizione di orientabilità delle varietà(il determinante del differenziale di un cambio di carta è invariante per diffeomorfismo), e mandano superfici senza bordo in superfici senza bordo (per verificare questo, basta (WLOG) trovare per ogni punto $p \in S_1$ un intorno diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^2$. Se φ è il diffeomorfismo da S_1 alla sfera e $q = \varphi(p)$

presa una carta $\psi : U_q \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$ si ha che $\psi \circ \varphi_{|\varphi^{-1}(U)}$ è l'intorno cercato)
Quindi sia per la sfera che per il toro $\exists p \in S_i : K(p) > 0$.
Ora usando il corollario di G-B Globale, abbiamo che

$$\int_S K\, dA = 2\pi\chi(S)$$

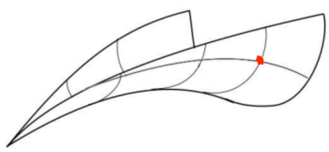
e quindi specificando al toro, S_2, visto che ha caratteristica di Eulero 0

$$\int_{S_2} K\, dA = 0$$

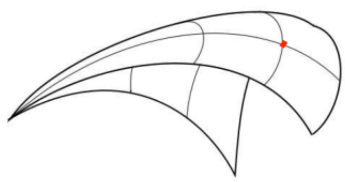
Abbiamo inoltre dimostrato che se $K \geq 0$ si avrebbe che S_2 sarebbe omeomorfa ad una sfera, quindi $\exists q \in S_2 : K(q) < 0$. Adesso possiamo concludere perchè essendo

$$K : S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

composizione di funzioni continue, ovvero i coefficenti di forma e i coefficenti metrici che si esprimamo in funzione del prodotto scalare che è continuo, si ha che K è continua e quindi per continuità e connessione del toro (e di S_2 essendo i diffeomorfismi funzioni continue) $\exists c \in S_2 : K(c) = 0$.
`Esercizio 6` Nelle figure date, se supponiamo che le linee disegnate siano le linee di curvatura, una fetta di pizza deve avere curvatura Gaussiana nulla in ogni punto, e pertanto una delle due curvature principali deve essere nulla. Nelle figure (c) e (f) ci sono invece punti in cui entrambi le curvature principali sono non nulle: ad esempio, guardando le linee di curvatura si vede che i punti evidenziati hanno questa proprietà.



(c)



(f)