# Prima Consegna Elementi di Topologia Algebrica

Cristian Sopio
Mat:559597

March 2020

**ALGEBRAIC TOPOLOGY**
**Homework 1**

1. Let $X$ be a path-connected topological space, and $x_0 \in X$ a point. Show that the map $S_\bullet(X) \to S_\bullet(X)$ induced by the constant map $X \to \{x_0\}$ is chain homotopic to the map $\varepsilon : S_\bullet(X) \to S_\bullet(X)$ for wich $\varepsilon_i = 0$ for $i > 0$ and $\varepsilon_0$ sends all generators $x \in X$ to $x_0$.

*Remark:* Together with the result proven in class, this gives a direct proof of the fact that if $X \subset \mathbf{R}^n$ is a convex subset, the identity map of $X$ and the constant map $X \to \{x_0\}$ induce chain homotopic maps on $S_\bullet(X)$.

2. A subspace $T \subset X$ is a *retract* of the topological space $X$ if there is a continuous map $r : X \to T$ with $r \circ i$ the identity of $T$, where $i : T \to X$ is the inclusion map.

In this situation consider the induced maps $i_* : H_i(T) \to H_i(X)$ and $r_* : H_i(X) \to H_i(T)$. Prove that $i_*$ is injective, $r_*$ is surjective, and there is a direct sum decomposition $H_i(X) \cong \ker(r_*) \oplus \mathrm{im}(i_*)$.

3. Compute the homology groups of the complement of two points in $\mathbf{R}^n$.

[*Hint:* $\mathbf{R}^n \setminus \{x_1, x_2\} = (\mathbf{R}^n \setminus \{x_1\}) \cap (\mathbf{R}^n \setminus \{x_2\})$.]

4. Compute the homology groups of $S^1 \times S^1$.

[*Hint:* Identify $S^1$ with the unit circle in $\mathbf{R}^2$ and cover it by two open sets $U$, $V$ given by the intersections with the open half-planes $\{y > -1/2\}$ and $\{y < 1/2\}$. Then consider the open covering of $S^1 \times S^1$ by $S^1 \times U$ and $S^1 \times V$.]

5. Identify $S^1$ with the unit circle in $\mathbf{R}^2$, and set $P_- := (-1, 0), P_+ := (1, 0)$.

Let $z : \Delta^1 \to S^1$ be the 1-cycle such that $z(0) = z(1) = P_-$ and '$z$ runs through the circle clockwise'. Also, let $z_+, z_- : \Delta^1 \to S^1$ be the two 1-chains with $z_+(0) = z_-(0) = P_-$ and $z_+(1) = z_-(1) = P_+$ that run through the two half-circles from $P_-$ to $P_+$, in the upper and lower half-planes, respectively. [Here we denoted the $j$-th face of $\Delta^1$ by $j$ $(j = 0, 1)$.]

Finally, consider the piece of the Mayer–Vietoris sequence

$$H_1(S^1) \xrightarrow{\partial} H_0(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} H_0(U) \oplus H_0(V)$$

where $U, V \subset S^1$ be the open subsets as in the previous hint.

*a*) Show that the class of $P_- - P_+$ generates $\ker(\Delta)$.

*b*) Check that the map $\partial$ sends the class of $z_+ - z_-$ to that of $P_- - P_+$. [*Hint:* Notice that $z_+ - z_-$ lies in $S_1^{\{U,V\}}(S^1)$.]

*c*) Check that $z$ and $z_+ - z_-$ have the same class in $H_1(S^1)$.

*d*) Conclude that the class of $z$ generates $H_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$.

*Nota:* Indichiamo che, dati $A, B$ gruppi abeliani, $A \longrightarrow B$ è un isomorfismo ($A \simeq B$) con

$$A \xrightarrow{\sim} B$$

*Nota:* L'esercizio 5 è stato risolto con Federico Butori

# Esercizio 1.

Detta $f : X \longrightarrow X$ la mappa costante ($x \mapsto x_0$) con $x_0 \in X$ fissato, abbiamo che la mappa indotta $f. : S.(X) \longrightarrow S.(X)$ é definita da

$$\begin{aligned} f_i :& S_i(X) \longrightarrow S_i(X) \\ &\sum_k n_k \sigma_k \longmapsto \sum_k n_k (f \circ \sigma_k) \end{aligned}$$

Allora dobbiamo definire mappe $k_i$ in modo che il diagramma con la mappa verticale $(f_* - \varepsilon)$.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d_3"] & S_2(X) \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_2"] \arrow[dl, "k_2"'] & S_1(X) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] \arrow[dl, "k_1"'] & S_0(X) \arrow[r, "d_0=0"] \arrow[d, "0"] \arrow[dl, "k_0"'] & 0 \\ \cdots \arrow[r, "d_3"] & S_2(X) \arrow[r, "d_2"] & S_1(X) \arrow[r, "d_1"] & S_0(X) \arrow[r, "d_0=0"] & 0 \end{tikzcd}$$

rispetti

$$\begin{aligned} 0 &= d_1 \circ k_0 \\ f_1 &= d_2 \circ k_1 + k_0 \circ d_1 \\ f_2 &= d_3 \circ k_2 + k_1 \circ d_2 \\ f_i &= d_{i+1} \circ k_i + k_{i-1} \circ d_i \end{aligned}$$

Se ora diciamo $\sigma_{x_0} : \Delta_i \longrightarrow X$ la mappa costante $((t_0, \cdots, t_i) \mapsto x_0)$ possiamo definire

$$\begin{aligned} k_i :& S_i(X) &&\longrightarrow S_{i+1}(X) \\ &\sum_k n_k \sigma_k &&\longmapsto (\sum_k n_k) \sigma_{x_0} \end{aligned}$$

e basta verificare che le relazioni sopra sono rispettate. D'altra parte, detti $d_i$ i differenziali abbiamo

$$k_{i-1} \circ d_i(\sigma) = \sum_{j=0}^{i} \left( (-1)^j \sum_k n_k \sigma_{x_0} \right)$$

e

$$d_{i+1} \circ k_i(\sigma) = \sum_{j=0}^{i+1} \left( (-1)^j \sum_k n_k \sigma_{x_0} \right)$$

per cui abbiamo

$$f_i = d_{i+1} \circ k_i + k_{i-1} \circ d_i = \sum_k n_k \sigma_{x_0}$$

## Esercizio 2.

Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mathcal{H}_i"] \arrow[rr, bend left, "id_T"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\mathcal{H}_i"] & T \arrow[d, "\mathcal{H}_i"] \\
\mathcal{H}_i(T) \arrow[r, "\iota_*"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{H}_i(id_T)=id_{\mathcal{H}_i(T)}"'] & \mathcal{H}_i(X) \arrow[r, "r_*"] & \mathcal{H}_i(T)
\end{tikzcd}$$

allora per le proprietà funtoriali di $\mathcal{H}_i$ abbiamo

$$\mathcal{H}_i(r \circ \iota) = \mathcal{H}_i(r) \circ \mathcal{H}_i(\iota) = r_* \circ \iota_* = \mathcal{H}_i(id_T) = id_{\mathcal{H}_i(T)}$$

ed essendo bigettiva quest'ultima, si ha che $\iota_*$ è iniettiva e $r_*$ è surgettiva.
Consideriamo ora invece la successione esatta per costruzione

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker r_* \arrow[r] & \mathcal{H}_i(X) \arrow[r, "r_*"'] & \mathcal{H}_i(T) \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\iota_*"'] & 0
\end{tikzcd}$$

dove la prima mappa è l'inclusione.
Poiché $\iota_*$ è una sezione di $r_*$, la successione spezza, da cui $\mathcal{H}_i(X) \xrightarrow{\sim} \ker r_* \oplus \mathcal{H}_i(T)$. Dal momento che $\mathcal{H}_i(T) \simeq \mathrm{im}(\iota_*)$ per l'iniettività di $\iota_*$, la tesi segue.

## Esercizio 3.

Consideriamo, dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ punti distinti, $U = \mathbb{R}^n \setminus \{x_1\}$ e $V = \mathbb{R}^n \setminus \{x_2\}$, abbiamo che

$$U \cup V = \mathbb{R}^n$$

e

$$U \cap V = X = \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, x_2\}.$$

Prendiamo quindi la successione esatta data dal teorema di Mayer-Vietoris

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{H}_{m-1}(X) \longrightarrow \mathcal{H}_{m-1}(U) \oplus \mathcal{H}_{m-1}(V) \longrightarrow \mathcal{H}_{m-1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{H}_0(X) \longrightarrow \mathcal{H}_0(U) \oplus \mathcal{H}_0(V) \longrightarrow \mathcal{H}_0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow 0$$

Abbiamo inoltre che $U$ e $V$ sono omotopi a $S^{n-1}$. Allora se $n > 1$ si ha

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(U) \oplus \mathcal{H}_0(V) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(\mathbb{R}^n) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

essendo $\mathbb{R}^n$ contrattile e $X$, $U$, $V$ connessi per archi.
Inoltre $\forall m > 1$ e $m \neq n$ vale

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{m-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{m-1}(S^{n-1}) \oplus \mathcal{H}_{m-1}(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{m-1}(\mathbb{R}^n) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathcal{H}_{m-1}(X) \arrow[r, "f"] & 0 \oplus 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ed essendo *esatta* si ha che $f$ è un isomorfismo e quindi $\mathcal{H}_{m-1}(X) \simeq 0$.
Se adesso $m = n$ abbiamo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_n(\mathbb{R}^n) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{n-1}(S^{n-1}) \oplus \mathcal{H}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathcal{H}_{n-1}(X) \arrow[r, "g"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ed essendo *esatta* si ha che $g$ è un isomorfismo e quindi $\mathcal{H}_{n-1}(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
Affrontiamo ora il caso $n = 1$.
Abbiamo che $\forall m > 1$ vale

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_m(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{m-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{m-1}(S^0) \oplus \mathcal{H}_{m-1}(S^0) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{m-1}(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathcal{H}_{m-1}(X) \arrow[r, "f"] & 0 \oplus 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ed essendo *esatta* si ha che $f$ è un isomorfismo e quindi $\mathcal{H}_{m-1}(X) \simeq 0$. La coda della sequenza di Mayer-Vietoris è, in questo caso,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_1(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_1(U) \oplus \mathcal{H}_1(V) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_1(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(U) \oplus \mathcal{H}_0(V) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}^3 \arrow[r] & \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dove gli isomorfismi verticali seguono dal fatto che $\mathbb{R}$ è contrattile, $U$ e $V$ sono omotopi a $S^0 = \{-1, 1\}$ e $\mathbb{R} \smallsetminus \{x_1, x_2\}$ ha 3 componenti connesse per archi.

Quindi, concludendo, abbiamo

$$\mathcal{H}_i(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}^3 & i = 0 \text{ e } n = 1 \\ \mathbb{Z} & i = 0 \text{ e } n > 1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & i > 0 \text{ e } n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

# Esercizio 4.

Consideriamo i due aperti $U$, $V$ che ricoprono il toro $T$ indicati nel suggerimento dell'esercizio. Abbiamo che $U, V$ si retraggono per deformazione a $S^1$ e $U \cap V$ si retrae per deformazione all'unione disgiunta di due $S^1$.
Allora considerando la successione di Mayer-Vietoris si ha $\forall m > 2$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_m(U) \oplus \mathcal{H}_m(V) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_m(T) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{m-1}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{m-1}(U) \oplus \mathcal{H}_{m-1}(V) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_m(S^1) \oplus \mathcal{H}_m(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_m(T) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{m-1}(S^1) \oplus \mathcal{H}_{m-1}(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{m-1}(S^1) \oplus \mathcal{H}_{m-1}(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \oplus 0 \arrow[r] & \mathcal{H}_m(T) \arrow[r, "f"] & 0 \arrow[r] & 0 \oplus 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

E quindi poiché la successione è *esatta* $f$ è un isomorfismo e $\mathcal{H}_m(T) \simeq 0$
Ora abbiamo che

$$\mathcal{H}_2(U) \oplus \mathcal{H}_2(V) \simeq \mathcal{H}_2(S^1) \oplus \mathcal{H}_2(S^1) \simeq 0$$

quindi

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_2(U) \oplus \mathcal{H}_2(V) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_2(T) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_1(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_1(U) \oplus \mathcal{H}_1(V) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_1(T) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(U) \oplus \mathcal{H}_0(V) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(T) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_2(S^1) \oplus \mathcal{H}_2(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_2(T) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_1(S^1 \cup S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_1(S^1) \oplus \mathcal{H}_1(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_1(T) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(S^1 \cup S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(S^1) \oplus \mathcal{H}_0(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(T) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \oplus 0 \arrow[r] & \mathcal{H}_2(T) \arrow[r, "g_1"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "g_2"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "g_3"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "g_4"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "g_5"] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "g_6"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dove abbiamo che $\mathcal{H}_1(S^1 \cup S^1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}_0(T) \simeq \mathbb{Z}$ essendo $T$ connesso per archi e $\mathcal{H}_1(T) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ essendo il $\pi_1(T) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (visto al corso di Geometria 2, ad esempio usando il teorema di Van-Kampen) e $\mathcal{H}_1(T)$ per Hurewicz è il suo abelianizzato.
La surgettività di $g_6$ implica che il $\ker g_6 \simeq \mathbb{Z}$; a questo punto, seguendo all'indietro la sequenza e sfruttando l'esattezza in ogni punto si ottiene immediatamente che $\ker g_i = \operatorname{im} g_{i-1} \simeq \mathbb{Z}$ da cui $\operatorname{im} g_1 \simeq \mathbb{Z}$ e per l'iniettività di $g_1$ abbiamo $\mathcal{H}_2(T) \simeq \mathbb{Z}$.
Concludendo abbiamo:

$$\mathcal{H}_i(T) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } i = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } i = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

# Esercizio 5.

a) Avendo $U \cap V$ due componenti connesse per archi, $\mathcal{H}_0(U \cap V)$ è generato dalle classi $[P_+]$ e $[P_-]$. La mappa $\Delta : \mathcal{H}_0(U \cap V) \longrightarrow \mathcal{H}_0(U) \oplus \mathcal{H}_0(V)$ è tale che

$$x = a[P_+] + b[P_-] \mapsto ((a+b)[P_+], (a+b)[P_-]) \, .$$

Se perciò $\Delta(x) = 0$ questo vuol dire che $a = -b$, quindi gli elementi in $\ker \Delta$ sono tutti e soli quelli della forma $a([P_- - P_+])$; ne segue che la classe $[P_- - P_+]$ genera $\ker \Delta$

b) La mappa $\partial : \mathcal{H}_1(S^1) \longrightarrow \mathcal{H}_0(U \cap V)$ è definita dallo *Snake lemma* come la mappa connettiva nel diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \mathcal{H}_1(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{H}_1(U) \oplus \mathcal{H}_1(V) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{H}_1(S^1) \arrow[d, hook] & \\
 & S_1(U \cap V)/B_1(S_{\cdot}(U \cap V)) \arrow[r] \arrow[d] & S_1(U) \oplus S_1(V)/B_1(S_{\cdot}(U \oplus V)) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\tilde{d_1}"] & S_1^{\mathcal{U}}(S^1)/B_1(S_{\cdot}^{\mathcal{U}}(S^1)) \arrow[r] \arrow[d, "H"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_0(S_{\cdot}(U \cap V)) \arrow[r, "\tilde{\Delta}"] \arrow[d, "\pi"] & Z_0(S_{\cdot}(U)) \oplus Z_0(S_{\cdot}(V)) \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\pi"] & Z_0(S_{\cdot}^{\mathcal{U}}(S^1)) \arrow[d, "\pi"] & \\
 & \mathcal{H}_0(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}_0(U) \oplus \mathcal{H}_0(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}_0(S^1) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

ottenuto dalla successione

$$0 \longrightarrow S_{\cdot}(A) \longrightarrow S_{\cdot}(B) \longrightarrow S_{\cdot}(C) \longrightarrow 0$$

con $A = U \cap V$, $B = U \oplus V$, $C = S^1$, $\mathcal{U} = \{U, V\}$, ricordando che $\mathcal{H}_i(S_{\cdot}^{\mathcal{U}}(X)) \simeq \mathcal{H}_i(S_{\cdot}(X))$. Allora, seguendo il diagramma, si ottiene che $\partial : \mathcal{H}_1(S^1) \longrightarrow \mathcal{H}_0(U \cap V)$ agisce su $[z_+ - z_-]$ nel modo seguente: una preimmagine di $[z_+ - z_-]$ tramite $D$ è $[z_+, z_-]$ che, attraverso $\tilde{d_1}$, è mappata in $(P_- - P_+, P_- - P_+)$. A questo punto, l'unica preimmagine di $(P_- - P_+, P_- - P_+)$ tramite $\tilde{\Delta}$ è $(P_- - P_+)$ che, passando al quoziente, dà $\pi\,(P_- - P_+) = [P_- - P_+]$.

c) Consideriamo la mappa $\sigma = z \circ \pi : \Delta_2 \longrightarrow S^1$ ottenuta componendo $z : [0,1] \longrightarrow S^1$ con $\pi : \Delta_2 \longrightarrow [0,1]$ la proiezione sulla base (a meno dell'omeomorfismo tra quest'ultima e l'intervallo unitario). Applicando ora il differenziale $d_2$ a $\sigma$ otteniamo $d_2(\sigma) = z - z_+ + z_-$, in quanto $\pi$ mappa i lati del 2-simplesso diversi dalla base in $[0, 1/2], [1/2, 1]$ rispettivamente. Ora, dall'uguaglianza $[z - z_+ - z_-] = [0]$ in $\mathcal{H}_1(S^1)$ segue

$$[z] = [z_+ - z_-]$$

d) Se consideriamo la successione di Mayer-Vietoris, abbiamo che $\mathcal{H}_1(U) \oplus \mathcal{H}_1(V) \simeq 0$, per cui da

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{H}_1(S^1) \xrightarrow{\partial} \mathcal{H}_0(U \cap V) \longrightarrow \mathcal{H}_0(U) \oplus \mathcal{H}_0(V) \longrightarrow \mathcal{H}_0(S^1) \longrightarrow 0$$

si ottiene che $\partial$ è iniettiva, e in particolare fornisce un isomorfismo tra $\mathcal{H}_1(S^1)$ e $\operatorname{im} \partial = \ker \Delta = \langle [P_- - P_+] \rangle$. Dal fatto che $\partial([z_+ - z_-]) = [P_- - P_+]$ si ottiene quindi che $[z_+ - z_-] = [z]$ è un generatore di $\mathcal{H}_1(S^1)$.