Modelli ricorsivi di frammenti dell'aritmetica

Tesi triennale in logica matematica

Andrea Snaidero

Università di Pisa

25 ottobre 2024

Numeri naturali e logica del primo ordine

Consideriamo la struttura dei numeri naturali: $(\mathbb{N}, +, *, \leq, 1, 0)$. Siamo interessati allo studio delle proprietà esprimibili mediante formule del primo ordine. Ad esempio:

$$\text{"}x \text{ è primo"} \quad (\forall y, z)(x = y * z \rightarrow y = 1 \vee z = 1)$$

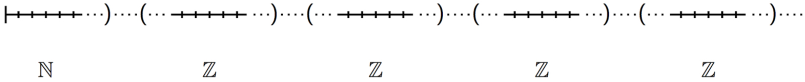
I simboli del linguaggio sono $\{+, *, 0, 1, \leq, =\}$.

Definizione. $\mathrm{T}_{\mathbb{N}}$ è la teoria dei numeri naturali, ovvero l'insieme di tutte le formule soddisfatte da $\mathbb{N}$.

Come è fatto un modello nonstandard?

Fatto. $\mathrm{T}_{\mathbb{N}}$ ha modelli di ogni cardinalità. (Löwenheim-Skolem).

Pertanto esistono modelli nonstandard di $\mathrm{T}_{\mathbb{N}}$ (non isomorfi a $\mathbb{N}$).



Tuttavia questo risultato non è costruttivo poiché si base sull'assioma di scelta.

Domanda. È possibile esibire esplicitamente un modello nonstandard di $\mathrm{T}_{\mathbb{N}}$?

Computabilità e frammenti dell'aritmetica

Formalmente, intendiamo che un modello "esplicito" sia un modello computabile.

A decision method must be like a recipe, which tells one what to do at each step so that no intelligence is required to follow it; and the method can be applied by anyone so long as he is able to read and follow directions.

-Alfred Tarski (A decision method for elementary algebra and geometry)

La risposta alla domanda è no: $T_{\mathbb{N}}$ non ammette modelli nonstandard computabili poiché è troppo espressiva.

Domanda, seconda versione. Quali frammenti dell'aritmetica ammettono un modello computabile?

Aritmetica di Peano, PA

Definizione. Teoria PA:

$$x + 1 \neq 0 \tag{P1}$$

$$x + 1 = y + 1 \to x = y \tag{P2}$$

$$x + 0 = x \tag{P3}$$

$$x + (y + 1) = (x + y) + 1 \tag{P4}$$

$$x * 0 = 0 \tag{P5}$$

$$x * (y + 1) = x * y + x \tag{P6}$$

$$x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(x + z = y) \tag{P7}$$

$$\varphi(0) \land (\forall x)(\varphi(x) \to \varphi(x + 1)) \to (\forall x)(\varphi(x)) \tag{P8}$$

Questa teoria è la più forte tra quelle che presenteremo.

Aritemtica di Robinson, Q

Definizione. Teoria Q:

$$x + 1 \neq 0 \tag{Q1}$$

$$x + 1 = y + 1 \to x = y \tag{Q2}$$

$$x + 0 = x \tag{Q3}$$

$$x + (y + 1) = (x + y) + 1 \tag{Q4}$$

$$x * 0 = 0 \tag{Q5}$$

$$x * (y + 1) = x * y + x \tag{Q6}$$

$$x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(x + z = y) \tag{Q7}$$

$$x \neq 0 \to (\exists y)(y + 1 = x) \tag{Q8}$$

Questa è la teoria più debole fra quelle che presenteremo.

Frammenti dell'aritmetica

$$\mathrm{Q} \subset \mathrm{OI} \subset I\Delta_0 \subset \mathrm{PA} \subset \mathrm{T}_{\mathbb{N}}$$

Open Induction (OI) = Q + assiomi di induzione per le formule senza quantificatori.

$I\Delta_0$ = Q + assiomi di induzione per le *formule limitate*.

Esempio di formula limitata:
$(\forall y, z \leq x)(x = y * z \rightarrow y = 1 \vee z = 1)$

Obbiettivi.

- OI ammette un modello nonstandard computabile.
- $I\Delta_0$ non ammette modelli nonstandard computabili.

Esempio di modello ricorsivo di Q

$$\mathbb{Z}[X]^{\geq 0} = \left\{ a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \middle| a_i \in \mathbb{Z} \wedge a_n > 0 \right\}$$

Fatto. $\mathbb{Z}[X]^{\geq 0} \vDash Q$

Domanda: $\mathbb{Z}[X]^{\geq 0}$ è un modello anche per PA (o almeno di OI)?

Esempio di modello ricorsivo di Q

$$\mathbb{Z}[X]^{\geq 0} = \left\{ a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \middle| a_i \in \mathbb{Z} \wedge a_n > 0 \right\}$$

Fatto. $\mathbb{Z}[X]^{\geq 0} \vDash Q$

Domanda: $\mathbb{Z}[X]^{\geq 0}$ è un modello anche per PA (o almeno di OI)?
No.

Dimostrazione.
OI $\vdash (\forall x)(\exists y)(y = \lfloor \sqrt{x} \rfloor)$ $\qquad (\forall x)(\exists y)(y^2 \leq x < (y+1)^2)$.
Tuttavia, $\lfloor \sqrt{X} \rfloor \notin \mathbb{Z}[X]^{\geq 0}$.

Tennenbaum

Teorema

Non esistono modelli nonstadard computabili di $I\Delta_0$.

Corollario

Non esistono modelli nonstadard computabili di PA né di $T_{\mathbb{N}}$.

Per illustrare il metodo dimostriamo:

Teorema

Non esistono modelli nonstadard computabili di $T_{\mathbb{N}}$.

Dimostrazione

H={"Codici sorgente di programmi che non vanno in loop"}

Fatto. H non è computabile.

Usando la numerazione di Gödel otteniamo $\varphi(x)$ tale che

$$\mathbb{N} \vDash \varphi(x) \iff x \in \mathrm{H}.$$

Inoltre

$$\mathbb{N} \vDash (\forall x)(\exists C_x)(\forall z \leq x)(\varphi(z) \leftrightarrow P_z | C_x)$$
$$\mathbb{N}^* \vDash (\forall x)(\exists C_x)(\forall z \leq x)(\varphi(z) \leftrightarrow P_z | C_x)$$

Pongo $x = X \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ nonstandard e fisso un C_x.

$$k \in \mathrm{H} \iff \mathbb{N}^* \vDash P_k | C_x$$

Ostacoli

$I\Delta_0$ non dimostra che esiste x^y.

Soluzioni

- Definire $x^y = z$ mediante una formula limitata.
  Attenzione: $I\Delta_0 \nvdash (\forall x)(\forall y)(\exists z)(x^y = z)$.
- Principio di overspill.
  Attenzione: è valido solo per formule limitate.

Modelli di OI

Definizione. R è un campo reale chiuso se $i \notin \mathrm{R}$ ma $\mathrm{R}(i) = \overline{\mathrm{R}}$.

Osservazione. Un campo reale chiuso è ordinabile.

Teorema (Sheperdson)

Una struttura aritmetica è un modello di OI se e solo se è costituito dagli elementi non negativi di una parte intera di un campo reale chiuso.

Definizione. Un anello discreto Z è una parte intera di R se per ogni $x \in \mathrm{R}$ esiste $a \in \mathrm{Z}$ tale che $a \leq x < a + 1$.

Obbiettivo

- Esibire un modello nonstandard computabile di OI

Un campo reale computabile

Ci serve un campo reale chiuso computabile.

Proposizione

$\mathbb{R}_{alg}$ è computabile.

Dimostrazione

- Codificare gli elementi $\alpha \in \mathbb{R}_{alg}$.
  $\alpha = \langle p(x), n \rangle$ se e solo se:
  $p(x) = 0$ e ci sono n radici di $p(x)$ più piccole di α.
- Esprimere le relazioni fra gli elementi di $\mathbb{R}_{alg}$ mediante formule.
- Usare il teorema di Tarski per convertire tali formule in formule senza quantificatori.
- Valutare le formule senza quantificatori

Serie di Puiseux

Definizione. $\mathbb{R}_{alg}\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle = \left\{\sum_{i=k}^{+\infty} a_i\varepsilon^{iq} \middle| a_i \in \mathbb{R}_{alg}\ q \in \mathbb{Q}\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Teorema (Newton-Puiseux)

$\mathbb{R}_{alg}\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ *è un campo reale chiuso.*

Definizione. S è costituito da tutti i polinomi nella indeterminata ε^{-q} al variare di $q \in \mathbb{Q}$ positivo, a coefficienti in $\mathbb{R}_{alg}$ e con termine noto intero.

S è una parte intera di $\mathbb{R}_{alg}\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$.

Corollario

$S^{\geq 0}$ *è un modello nonstandard computabile di OI.*

Grazie per l'attenzione