ETA esercizi del terzo gruppo, anno 2023-2024

Snaidero Andrea

Dicembre 2023

1 Esercizio uno

Usando la notazione introdotta in classe iniziamo con alcune osservazioni, preso $\sigma : \Delta^n \to X$ si hanno le seguenti identità:

$$\forall\ i \leq p \quad (\sigma \circ d^i)^1_p = \sigma^1_{p+1} \circ d^i$$

$$\forall\ i > p \quad (\sigma \circ d^i)^1_p = \sigma^1_p$$

$$\forall\ i > p \quad (\sigma \circ d^i)^2_{n-1-p} = \sigma^2_{n-p} \circ d^{i-p}$$

$$\forall\ i \leq p \quad (\sigma \circ d^i)^2_{n-1-p} = \sigma^2_{n-1-p}$$

$$(-1)^p \sigma^1_p \otimes (\sigma^2_{n-p} \circ d^0) + (-1)^{p+1}(\sigma^1_{p+1} \circ d^{p+1}) \otimes \sigma^2_{n-1-p} = 0 \tag{1}$$

Per dimostrare la tesi dobbiamo verificare che la mappa D commuti coi bordi. Dunque preso $\sigma : \Delta^n \to X$ si ha

$$D(\partial\sigma) = D\left(\sum_{0\leq i\leq n} (-1)^i \sigma \circ d^i\right) = \sum_{0\leq i\leq n} (-1)^i D(\sigma \circ d^i) =$$

$$= \sum_{0\leq i\leq n} (-1)^i \sum_{0\leq p\leq n-1} (\sigma \circ d^i)^1_p \otimes (\sigma \circ d^i)^2_{n-1-p} \overset{identitá\ di\ cui\ sopra}{=}$$

$$= \sum_{0\leq i\leq n} (-1)^i \left[\sum_{0\leq p<i} \sigma^1_p \otimes (\sigma^2_{n-p} \circ d^{i-p}) + \sum_{i\leq p\leq n-1} (\sigma^1_{p+1} \circ d^i) \otimes \sigma^2_{n-1-p}\right] =$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \left[\sum_{p<i\leq n} (-1)^i \sigma^1_p \otimes (\sigma^2_{n-p} \circ d^{i-p}) + \sum_{0\leq i\leq p} (-1)^i (\sigma^1_{p+1} \circ d^i) \otimes \sigma^2_{n-1-p}\right] \overset{(1)}{=}$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \left[\sum_{p\leq i\leq n} (-1)^i \sigma^1_p \otimes (\sigma^2_{n-p} \circ d^{i-p}) + \sum_{0\leq i\leq p+1} (-1)^i (\sigma^1_{p+1} \circ d^i) \otimes \sigma^2_{n-1-p}\right] \overset{j=i-p}{=}$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \left[(-1)^p \sigma^1_p \otimes \left(\sum_{0<j\leq n-p} (-1)^j \sigma^2_{n-p} \circ d^j\right) + \left(\sum_{0\leq i\leq p+1} (-1)^i \sigma^1_{p+1} \circ d^i\right) \otimes \sigma^2_{n-1-p}\right] =$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \left[(-1)^p \sigma^1_p \otimes (\partial\sigma^2_{n-p}) + (\partial\sigma^1_{p+1}) \otimes \sigma^2_{n-1-p}\right] =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \Big[(-1)^p \sigma^1_p \otimes (\partial \sigma^2_{n-p}) + (\partial \sigma^1_p) \otimes \sigma^2_{n-p} \Big] = \partial D(\sigma)$$

□

2 Esercizio due

La risoluzione dell'esercizio prevede di trovare esplicitamente la funzione α e effetuare i conti, però la definizione di α dipende da quella dell'omorfismo di Eilenberg-Zilber che è definito sulle catene a meno di omotopia, quindi come prima cosa bisogna osservare che mappe omotope inducono mappe isomorfe in co-omologia, cioè l'omotopia viene preservata dal funtore dualizzante $Hom(\,\cdot\,, R)$. Infatti prese $f, g : C \to D$ tali che $f - g = \Sigma\partial + \partial\Sigma$ allora $(f^* - g^*)(\varphi) = \varphi \circ (\Sigma\partial + \partial\Sigma) = \delta(\varphi\Sigma) + \delta(\varphi)\Sigma = (\delta\Sigma^* + \Sigma^*\delta)(\varphi)$.

Preso un χ un elemento di $H_*(X \times Y)$ questo si può rappresentare con le sue proiezioni $\chi = (\sigma, \tau)$ con $\sigma = \pi_X \circ \chi$ e $\tau = \pi_Y \circ \chi$. Forti di questa notazione e della notazione dell'esercizio precedente consideriamo dunque la mappa di Alexander–Whitney:

$$AW : C_*(X \times Y) \to C_*(X) \otimes C_*(Y)$$
$$(\sigma, \tau) \mapsto \sum_{0 \le i \le n} \sigma^1_i \otimes \tau^2_{n-i}$$

dove n è il grado di (σ, τ). AW è un morfismo di complessi, i conti sono gli stessi dell'esercizio precedente, li ricopio qui:

$$D(\partial(\sigma, \tau)) = D\left(\sum_{0 \le i \le n} (-1)^i (\sigma, \tau) \circ d^i \right) = \sum_{0 \le i \le n} (-1)^i D((\sigma, \tau) \circ d^i) =$$

$$= \sum_{0 \le i \le n} (-1)^i \sum_{0 \le p \le n-1} (\sigma \circ d^i)^1_p \otimes (\tau \circ d^i)^2_{n-1-p} \overset{identitá\ di\ cui\ all'esercizio\ precedente}{=}$$

$$= \sum_{0 \le i \le n} (-1)^i \left[\sum_{0 \le p < i} \sigma^1_p \otimes (\tau^2_{n-p} \circ d^{i-p}) + \sum_{i \le p \le n-1} (\sigma^1_{p+1} \circ d^i) \otimes \tau^2_{n-1-p} \right] =$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \left[\sum_{p < i \le n} (-1)^i \sigma^1_p \otimes (\tau^2_{n-p} \circ d^{i-p}) + \sum_{0 \le i \le p} (-1)^i (\sigma^1_{p+1} \circ d^i) \otimes \tau^2_{n-1-p} \right] \overset{(1)}{=}$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \left[\sum_{p \le i \le n} (-1)^i \sigma^1_p \otimes (\tau^2_{n-p} \circ d^{i-p}) + \sum_{0 \le i \le p+1} (-1)^i (\sigma^1_{p+1} \circ d^i) \otimes \tau^2_{n-1-p} \right] \overset{j=i-p}{=}$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \left[(-1)^p \sigma^1_p \otimes \left(\sum_{0 < j \le n-p} (-1)^j \tau^2_{n-p} \circ d^j \right) + \left(\sum_{0 \le i \le p+1} (-1)^i \sigma^1_{p+1} \circ d^i \right) \otimes \tau^2_{n-1-p} \right] =$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \Big[(-1)^p \sigma^1_p \otimes (\partial \tau^2_{n-p}) + (\partial \sigma^1_{p+1}) \otimes \tau^2_{n-1-p} \Big] =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \left[(-1)^p \sigma_p^1 \otimes (\partial \tau_{n-p}^2) + (\partial \sigma_p^1) \otimes \tau_{n-p}^2 \right] = \partial D(\sigma)$$

Dato che in grado zero $AW(\sigma, \tau) = \sigma \otimes \tau$, il teorema dei funtori liberi e aciclici (le cui ipotesi in questo contesto si sono verificate a lezione quando abbiamo definito gli omomorfismi di Eilenberg-Zilber) ci garantisce che AW è un omomorfismo di Eilenberg-Zilber.

Ricordiamo qual è il morfismo $\Psi : \ H^*(X) \times H^*(Y) \to H^*(C_*(X) \otimes C_*(Y))$, vediamolo sui generatori:

$$\Psi([\beta] \otimes [\gamma]) = [\psi(\beta \otimes \gamma)]$$

dove preso $b \otimes c$ dello stesso grado di $\beta \otimes \gamma$ si ha

$$\psi(\beta \otimes \gamma)(b \otimes c) = \begin{cases} \beta(b) \cdot \gamma(c) & \text{se i gradi di } b \text{ e } c \text{ sono rispettivamente li stessi di } \beta \text{ e } \gamma \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha dunque $\alpha = AW^* \circ \Psi$. Affermo che $\alpha(\beta \otimes \gamma) = \pi_X^*(\beta) \smile \pi_Y^*(\gamma)$, infatti preso $(\sigma, \tau) : \ \Delta^n \to X \times Y$ dove $n = p + q$ e $p, \ q$ sono rispettivamente i gradi di $\beta \in H^*(X)$ e di $\gamma \in H^*(Y)$ si ha,

$$\alpha([\beta] \otimes [\gamma]) = AW^*([\psi(\beta \otimes \gamma)]) = [\psi(\beta \otimes \gamma) \circ AW]$$

$$(\psi(\beta \otimes \gamma) \circ AW)(\sigma, \tau) = \psi(\beta \otimes \gamma) \left(\sum_{0 \le i \le n} \sigma_i^1 \otimes \tau_{n-i}^2 \right) =$$
$$= \psi(\beta \otimes \gamma)(\sigma_p^1 \otimes \tau_q^2) = \beta(\sigma_p^1) \cdot \gamma(\tau_q^2) =$$
$$= \beta(\pi_X \circ (\sigma, \tau)_p^1) \cdot \gamma(\pi_Y \circ (\sigma, \tau)_q^2) = \pi_X^\#(\beta) \smile \pi_Y^\#(\gamma)(\sigma, \tau)$$

Poiché si appura facilmente tramite verifica diretta che $\pi^*(\beta \smile \gamma) = \pi^*(\beta) \smile \pi^*(\gamma)$ l'identità da verificare si riduce facilmente a un'identità nota del prodotto cup:

$$\alpha(a_i \otimes a_j) \smile \alpha(b_p \otimes b_q) = (-1)^{jp} \alpha((a_i \smile b_p) \otimes (a_j \smile b_q))$$
$$\pi_X^*(a_i) \smile \pi_Y^*(a_j) \smile \pi_X^*(b_p) \smile \pi_Y^*(b_q) = (-1)^{jp} \pi_X^*(a_i \smile b_p) \smile \pi_Y^*(a_j \smile b_q)$$
$$\pi_X^*(a_i) \smile \pi_Y^*(a_j) \smile \pi_X^*(b_p) \smile \pi_Y^*(b_q) = (-1)^{jp} \pi_X^*(a_i) \smile \pi_X^*(b_p) \smile \pi_Y^*(a_j) \smile \pi_Y^*(b_q)$$
$$\pi_Y^*(a_j) \smile \pi_X^*(b_p) = (-1)^{jp} \pi_X^*(b_p) \smile \pi_Y^*(a_j)$$

□

3 Esercizio tre

Dimostriamo per induzione su n che

$$H^i(T^n) = \mathbb{Z}^{\binom{n}{i}}$$

e che, chiamata $F\mathbb{Z}(X)$ l'algebra libera su $\mathbb{Z}$ generata da X, indicato con $I(x_0, \ldots, x_n)$ il seguente ideale di $F\mathbb{Z}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$: $(x_0^2 - x_0) + \sum_{1 \le j, i \le n} (x_i^2, \ x_0 x_i -$

$x_i,\ x_i x_0 - x_1,\ x_i x_j + x_j x_i)$; si ha

$$H^*(T^n) = \frac{F\mathbb{Z}(x_0, x_1, \ldots, x_n)}{I(x_0, x_1, \ldots, x_n)} \text{ come algebra su } \mathbb{Z}$$

dove, per $i \neq 0,\ x_i$ sono i generatori di $H^1(T^n)$ e x_0 è il generatore di $H^0(T^n)$

Passo base: Per i gruppi di co-omologia la tesi è vera, ed è nota dalla teoria fatta in classe. Per quanto riguarda l'anello di co-omologia chiamiamo x_0 e x_1 i generatori rispettivamente di $H^0(S^1)$ e $H^1(S^1)$. Si ha che $x_1 \smile x_1 \in H^2(S^1)$ che è banale, dunque $x_1 \smile x_1 = 0$.

Studiamo ora $x_0 \smile x_0$. Sia $\psi \in C^0(S^1)$ tale che per ogni $\sigma : \Delta^0 \to S^1$ si abbia $\psi(\sigma) = 1$. Si ha $\delta(\psi) = 0$ in quanto per ogni $\sigma : \Delta^1 \to S^1$ $\delta(\psi)(\sigma) = (\psi \circ \partial)(\sigma) = \psi(\partial(\sigma)) = \psi(\sigma(e_1)) - \psi(\sigma(e_0)) = 1 - 1 = 0$, dove δ è il differenziale in co-omologia e con un abuso di notazione abbiamo indicato con $\sigma(e_i)$ lo 0-simplesso singolare $: \Delta^0 \to \{\sigma(e_i)\} \subseteq S^1$.
L'approssimazione del prodotto cup di Alexander-Whitney ci dice che preso $\sigma \in \Delta^0$ si ha $(\psi \smile \psi)(\sigma) = (\psi(\sigma))^2 = 1$, da cui deduciamo che ψ è un idempotente. Allora, poiché ψ è un ciclo, $\exists a \in \mathbb{Z}$ tale che $[\psi] = ax_0$, da cui per bilinearità del prodotto si ha $ax_0 = [\psi] = [\psi] \smile [\psi] = a^2(x_0 \smile x_0)$ da cui, poiché $a \neq 0$ dato che non ci sono co-bordi in grado zero, $a(x_0 \smile x_0) = x_0$. Allora, poiché $(x_0 \smile x_0) = bx_0$ per un qualche $b \in \mathbb{Z}$, a è un invertibile di $\mathbb{Z}$, dunque a meno di scambiare x_0 col suo opposto si ottiene $x_0 = [\psi]$, cioè $(x_0 \smile x_0) - x_0 = ([\psi] \smile [\psi]) - [\psi] = 0$.
Studiamo ora $x_0 \smile x_1$. Detto χ un rappresentate di x_1 in $C^1(S^1)$, preso $\sigma : \Delta^1 \to S^1$ si ha $(\psi \smile \chi)(\sigma) = \psi(\sigma(e_0))\chi(\sigma) = \chi(\sigma)$, cioè $x_0 \smile x_1 = x_1$. Analogamente $x_1 \smile x_0 = x_1$

Considerata l'algebra libera su $\mathbb{Z}$ genrata da due elementi quozientata per le relazioni fin qui trovate si ottiene appunto $\frac{F\mathbb{Z}(x_0,x_1)}{I(x_0,x_1)}$, dunque $H^*(S^1)$ deve esserne un suo quoziente, ma poiché entrambe queste algebre hanno rango 2 come moduli su $\mathbb{Z}$, osservato che un ideale di modulo libero è libero e che quoziente libero di moduli liberi ha rango pari alla differenza dei ranghi si conclude che il quoziente deve essere banale e $\frac{F\mathbb{Z}(x_0,x_1)}{I(x_0,x_1)} = H^*(S^1)$

Passo induttivo: Supponiamo vera la tesi per n e dimostriamola per $n+1$.

Per quanto riguarda i gruppi di co-omologia, considerato l'omomorfismo di Eilenberg-Zilber, considerata la formula di Kunneth, osservato che il tor di moduli liberi è banale, concluso che siamo nel caso dell'isomorfismo della formula di Kunneth, si ha che

$$H^i(T^{n+1}) = (H^*(T^n) \otimes H^*(S^1))^i =$$

$$= (H^i(T^n) \otimes H^0(S^1)) \oplus (H^{i-1}(T^n) \otimes H^1(S^1)) \overset{ip.indutt.}{=}$$

$$= (\mathbb{Z}^{\binom{n}{i}} \otimes \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}^{\binom{n}{i-1}} \otimes \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{i}}$$

Definiamo il prodotto tensore di algebre graduate $A \otimes B$ come il prodotto tensore dei rispettivi moduli a cui viene aggiunto il prodotto definito dalla seguente relazione: $\forall a \otimes b,\ a' \otimes b' \in A \otimes B,\ (a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|}(a \cdot a') \otimes (b \cdot b')$, dove $\forall x \in A,\ B,\ |x|$ indica il grado di x.

Per quanto riguarda la struttura di anello, considerato quanto enunciato nell'esercizio 2 di questa stessa scheda di esercizi, considerata la definizione di prodotto tensiorale di algebre graduate, si ha che $H^*(T^n) \otimes H^*(S^1) = H^*(T^{n+1})$ come algebra graduata.

Siano $H^*(T^n)$ e $H^*(S^1)$ indicati come nell'ipotesi induttiva.
Sia $\varphi : F\mathbb{Z}(y_0, \ldots, y_{n+1}) \to H^*(T^n) \otimes H^*(S^1)$ tale che $\varphi(y_0) = x_0 \otimes x_0$, $\varphi(y_{n+1}) = x_0 \otimes x_1$ e, per $i \neq 0, n+1$, $\varphi(y_i) = x_i \otimes x_0$. Osservato che φ è surgettiva, per concludere rimane da mostrare che il suo nucleo è $I(y_0, \ldots, y_{n+1})$. Sicuramente $I(y_0, \ldots, y_{n+1}) \subseteq \ker(\varphi)$, infatti, per $i, j \neq 0, n+1$

$$\varphi(y_0^2 - y_0) = (x_0 \otimes x_0)^2 - x_0 \otimes x_0 = (-1)^{0 \cdot 0}(x_0^2) \otimes (x_0^2) - x_0 \otimes x_0 = x_0 \otimes x_0 - x_0 \otimes x_0 = 0$$

$$\varphi(y_i^2) = (x_i \otimes x_0)^2 = (-1)^{0 \cdot 1}(x_i^2) \otimes (x_0^2) = 0 \otimes x_0 = 0$$

$$\begin{gathered}\varphi(y_i y_j + y_j y_i) = (x_i \otimes x_0)(x_j \otimes x_0) + (x_j \otimes x_0)(x_i \otimes x_0) = \\ = (-1)^{0 \cdot 1}(x_i x_j) \otimes (x_0^2) + (-1)^{0 \cdot 1}(x_j x_i) \otimes (x_0^2) = (x_i x_j) \otimes (x_0^2) + (x_j x_i) \otimes (x_0^2) = \\ = (x_i x_j) \otimes (x_0^2) + (-x_i x_j) \otimes (x_0^2) = 0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\varphi(y_0 y_i - y_i) = (x_0 \otimes x_0)(x_i \otimes x_0) - (x_i \otimes x_0) = (-1)^{0 \cdot 1}(x_0 x_i) \otimes (x_0^2) - (x_i \otimes x_0) = \\ = (x_0 x_i) \otimes (x_0^2) - (x_i \otimes x_0) = (x_i \otimes x_0) - (x_i \otimes x_0) = 0\end{gathered}$$

$$\varphi(y_{n+1}^2) = (x_0 \otimes x_1)^2 = (-1)^{1 \cdot 0}(x_0^2) \otimes (x_1^2) = x_0 \otimes 0 = 0$$

$$\begin{gathered}\varphi(y_{n+1} y_i + y_i y_{n+1}) = (x_0 \otimes x_1)(x_i \otimes x_0) + (x_i \otimes x_0)(x_0 \otimes x_1) = \\ = (-1)^{1 \cdot 1}(x_0 x_i) \otimes (x_1 x_0) + (-1)^{0 \cdot 0}(x_i x_0) \otimes (x_0 x_1) = -(x_i \otimes x_1) + (x_i \otimes x_1) = \\ = (x_i x_j) \otimes (x_0^2) + (-x_i x_j) \otimes (x_0^2) = 0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\varphi(y_0 y_{n+1} - y_{n+1}) = (x_0 \otimes x_0)(x_0 \otimes x_1) - (x_0 \otimes x_1) = (-1)^{0 \cdot 0}(x_0 x_0) \otimes (x_0 x_1) - (x_0 \otimes x_1) = \\ = (x_0 x_0) \otimes (x_0 x_1) - (x_0 \otimes x_1) = (x_0 \otimes x_1) - (x_0 \otimes x_1) = 0\end{gathered}$$

Analogamente a quest'ultima verifica vale anche $\varphi(y_{n+1} y_0 - y_{n+1}) = \varphi(y_i y_0 - y_i) = 0$.

Dato che $rank_{\mathbb{Z}}(H^*(T^{n+1})) = \sum \binom{n}{i} = 2^n = rank_{\mathbb{Z}}\left(\frac{F\mathbb{Z}(y_0, \ldots, y_{n+1})}{I(y_0, \ldots, y_{n+1})}\right)$, dato che sottomodulo di modulo libero è libero, dato che quoziente libero di moduli liberi ha rango pari alla differenza dei ranghi, se per assurdo l'inclusione $I(y_0, \ldots, y_{n+1}) \subseteq \ker(\varphi)$ fosse stretta allora, per il terzo teorema di isomorfismo per moduli, si avrebbe la contraddizione che

$$rank_{\mathbb{Z}}(H^*(T^{n+1})) > rank_{\mathbb{Z}}\left(\frac{F\mathbb{Z}(y_0, \ldots, y_{n+1})}{ker(\varphi)}\right)$$

e

$$H^*(T^{n+1}) = \frac{F\mathbb{Z}(y_0, \ldots, y_{n+1})}{ker(\varphi)}$$

□

4 Esercizio quattro

Per la dualità di Poincaré la tesi segue dopo aver verificato che $H^0_C(X)$ è banale. Affermo che $\forall\ [\alpha] \in H^*_C(X)$ si ha $\alpha = 0 \in C^0(X)$ da cui la tesi. Infatti per definizione di co-omologia a supporto compatto esiste K compatto di X tale che $\forall\ x \in X \setminus K$ si ha $\alpha(x) = 0$ (gli 0-simplessi singolari possono essere indentificati con la propria immagine), dunque ci manca da dimostrare che α sia nulla anche su K. Essendo X connesso e localmente connesso per archi in quanto localmente omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ è anche connesso per archi, scegliamo dunque $x_0 \in X \setminus K$ che è non vuoto in quanto X non è compatto, e $\forall x \in K$ chiamiamo γ_x l'1-simplesso singolare di X tale che $\gamma_x(e_0) = x_0$ e $\gamma_x(e_1) = x$. Poiché essendo α un rappresentante in co-omologia deve essere un ciclo si ha che $\delta(\alpha) = 0$ in particolare $\forall x \in K$

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha)(\gamma_x) &= 0 \\
\alpha(\partial(\gamma_x)) &= 0 \\
\alpha(x - x_0) &= 0 \\
\alpha(x) &= \alpha(x_0) \\
\alpha(x) &= 0
\end{aligned}$$

□