Consegna 3 IstAlg

ANDREA SNAIDERO

December 2024

1 Esercizio C1

Siamo interessati a contare a meno di isomorfismo i gruppi E che soddisfano la condizione $1 \to A \to E \to G \to 1$. Per farlo svolgiamo un passaggio intermedio: studiamo a meno di isomorfismo di estensioni, tutte le successioni esatte corte di gruppi della forma $1 \to A \to E \to G \to 1$ al variare di E. In questo modo potremmo usare la teoria della coomologia di gruppi. Prima di iniziare verifichiamo alcuni risultati generali (per A e G generici).

Lemma 1. Siano G e E due gruppi, e A un gruppo abeliano, e siano tutti e tre $G-$moduli. Consideriamo l'estensione $1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$ nella categoria dei $G-$moduli. Se la moltiplicazione scalare su A agisce banalmente, allora A si inietta nel centro di E (mediante i).

Dimostrazione. Dalla teoria svolta in classe sappiamo che esiste una funzione $f : G \times G \to A$ tale che $f(id_G, g) = f(g, id_G) = id_E$ e $E \cong (A \times G, *)$ dove $(a, b) * (c, d) = (a + b.c + f(b, d), bd)$. Inoltre sappiamo che sotto l'identificazione $E \cong (A \times G, *)$ vale che $i(a) = (a, 1)$. Dobbiamo mostrare allora che $(a, 1) \in Z(A \times G, *)$ per ogni $a \in A$. Questo segue immediatamente: $(a, 1)(b, c) = (a + 0.b + f(1, c), 1c) = (a + b, c) \overset{\star}{=} (b + c.a + f(c, 1), c1) = (b, c)(a, 1)$, dove in $\star$ abbiamo usato che l'azione di G su A è banale. $\square$

Lemma 2. Siano G e E due gruppi, e A un gruppo abeliano, e siano tutti e tre $G-$moduli. Consideriamo l'estensione $1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$ nella categoria dei $G-$moduli. Se la moltiplicazione scalare su A non agisce banalmente allora E non è abeliano.

Dimostrazione. Siano $a \in A$ e $g \in G$ tale che $g.a \neq a$. Consideriamo la stessa identificazione $E \cong (A \times G, *)$ descritta nella dimostrazione precedente. Vale che $(a, 1)(0, g) = (a, g) \neq (g.a, g) = (0, g)(a, 1)$, quindi E non è abeliano. $\square$

Siamo pronti per svolgere l'esercizio. Siano $A \cong G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Sappiamo che ogni successione esatta corta di gruppi $1 \to A \to E \to G \to 1$ induce una struttura di $G-$modulo su E ed A. Per svolgere l'esercizio dobbiamo considerare separatamente tutte le possibili strutture di $G-$modulo di cui possiamo dotare A. Essendo $Aut(A) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ esistono due tali strutture. Chiaramente usiamo la struttura additiva per A e moltiplicativa per G, nonostante G sia abeliano, per non confondere la somma in G con la somma in $\mathbb{Z}[G]$.

- Caso (I) in cui G agisce banalmente su A. Consideriamo il gruppo $E/Z(E)$, per il lemma 1 e per corrispondenza, tale gruppo è isomorfo a un sottogruppo di G, dunque è ciclico e perciò E è abeliano.
- Caso (II) in cui $G = \langle g \rangle$ agisce su A in modo tale che $g.a = -a$ per ogni $a \in A$. Per il lemma 2, E non è abeliano.

Perciò, nel caso (I) ricadono tutte e sole le estensioni di gruppi in cui E è abeliano e nel caso (II) ricadono tutte e sole le estensioni di gruppi in cui E non è abeliano. Nel seguito denotiamo con A_* il gruppo A dotato di una particolare struttura di $G-$modulo.

A meno di isomorfismo, nel caso (I), E può essere solo $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Verificare che questi gruppi soddisfano la richiesta è banale. Inoltre, nessun altro gruppo abeliano la può soddisfare, infatti l'unico altro gruppo abeliano di ordine 16 che hanno un elemento di ordine 4 è $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, tuttavia si verifica che quozientando questo gruppo per uno qualunque dei suoi sottogruppi ciclici non è possibile ottenere $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,, infatti il doppio di un qualunque elemento di ordine 4 è $(2,0,0)$.

Per studiare il caso (II) ricorriamo all'uso della coomologia. Dalla teoria sappiamo che le estensioni di G mediante A_* sono in bigezione con $H^2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, A_*) \cong A_*^G/NA_*$, dove $N = 1+g+g^2+g^3$ e $G = \langle g\rangle$. Osserviamo che per ogni $a \in A_*$ vale che $N.a = a+(-a)+a+(-a) = 0$, dunque $H^2(G, A_*)$ ha due elementi, ovvero i punti fissi di A_*, ovvero gli elementi a di A che soddisfano $a = -a$. Nel caso banale abbiamo $E \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Nell'altro caso potrebbe a priori accadere $E \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, oppure no. Tuttavia, affermo che tutte le estensioni in cui $E \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ corrispondono alla classe di coomologia banale di $H^2(A_*, G)$. Da questo segue che nel caso non banale si ha $E \ncong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Consideriamo una estensione $1 \to A_* \xrightarrow{i} E = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{p} G \to 1$. Per mostrare che la classe di isomorfismo dell'estensione considerata corrisponde alla classe banale basta dimostrare che la successione spezza, ovvero che p ha una sezione. Per farlo basta mostrare che $i[A] \lhd E$ ha un complementare. Gli unici sottogruppi normali di E isomorfi a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sono $\langle(1,0)\rangle$ e $\langle(1,2)\rangle$, e in entrambi i casi $\langle(0,1)\rangle$ costituisce un sottogruppo complementare, perciò p spezza e la classe di estensione considerata è banale. Abbiamo perciò dimostrato che la classe di isomorfismo di estensioni non banale rappresenta un gruppo E non isomorfo a $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \rtimes \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$.

In conclusione esistono a meno di isomorfismo 3 gruppi abeliani e 2 non abeliani distinti che soddisfano le condizioni poste dall'esercizio.

2 Esercizio C4

1. Consideriamo F il funtore $M \mapsto Hom(\mathbb{Q}, M)$, questo funtore è covariante ed esatto a sinistra. Sia R^iF il suo funtore derivato destro. Dobbiamo calcolare $Ext^i_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$, ovvero $R^1F(\mathbb{Z})$. Scegliamo quindi come risoluzione iniettiva di $\mathbb{Z}$ la successione $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \to 0$. Infatti si ha che $\mathbb{Q}$ e $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ sono $\mathbb{Z}-$moduli iniettivi in quanto sono divisibili. Consideriamo la successione eliminata e applichiamogli il funtore F, in questo modo otteniamo $0 \to Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \xrightarrow{\pi_*} Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$. I gruppi abeliani $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},T)$ hanno una struttura naturale di $\mathbb{Q}-$spazio vettoriale, precisamente presi $x \in \mathbb{Q}$ e $\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},T)$ poniamo $x\varphi(x') = \varphi(xx')$. Si verifica anche facilmente che la mappa π_* è $\mathbb{Q}-$lineare, perciò $\pi_*[Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q})]$ è uno spazio vettoriale. Dunque $Ext^1(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) = \frac{Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}{\pi_*[Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q})]}$ è ancora uno spazio vettoriale.

2. Due spazi vettoriali sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione, ovvero se le rispettive basi hanno la stessa cardinalità. Dunque basta mostrare che un $\mathbb{Q}-$spazio vettoriale di cardinalità $2^{\aleph_0}$ ha dimensione $2^{\aleph_0}$. Un risultato noto della teoria degli insiemi afferma che un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale con base B ha cardinalità $|\mathbb{K}|\cdot|B|$ se almeno uno fra B e $\mathbb{K}$ è un insieme infinito. Più in generale, scelto un elemento $y_0 \in Y$, vale che $|\{f : X \to Y | \# f^{-1}[Y \setminus y_0] \in \mathbb{N}\}| = |X|\cdot|Y|$, se almeno uno fra X e Y sono infiniti. Sia B una $\mathbb{Q}$-base di uno $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale che ha cardinalità $2^{\aleph_0}$. Dato che $|\mathbb{Q}| < 2^{\aleph_0}$ e che $|X|\cdot|Y| = max\{|X|,|Y|\}$ si deve avere $|B| = 2^{\aleph_0}$.

3. Per ogni $q \in \mathbb{Q}$ esiste unico $\varphi \in Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ tale che $\varphi(1) = q$, infatti scelta l'immagine di 1 si determina l'immagine su $\mathbb{Z}$ e poi su tutte le frazioni, infatti $\varphi(a/b) = a\varphi(1/b) = ay$ dove $by = \varphi(1) = q$, dunque deve vale $y = q/b$, ovvero $\varphi(a/b) = q\cdot a/b$. In altre parole ogni elemento di $Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ è la moltiplicazione per un elemento razionale. Per questo $|Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q})| = \aleph_0$. Si verifica facilmente che la mappa π_* indotta dalla proiezione al quoziente π è iniettiva; in ogni caso per il teorema di Lagrange vale che $|Ext^1(\mathbb{Q},\mathbb{Z})|\cdot|Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q})| \geq |Ext^1(\mathbb{Q},\mathbb{Z})|\cdot|\pi_*[Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q})]| = |Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})|$. Dunque, dimostrato che $|Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})| = 2^{\aleph_0}$, segue immediatamente che $|Ext^1(\mathbb{Q},\mathbb{Z})| = 2^{\aleph_0}$.

   Per concludere dobbiamo quindi trovare una funzione iniettiva $\{$Funzioni da $\mathbb{N}$ a $\{0,1\}\} \to Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Prendiamo dunque $\sigma : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ e definiamo $f_\sigma \in Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. L'idea è quella di codificare σ per mezzo del comportamento di f_σ sui numeri della forma 2^{-n}, e lo facciamo mediante la seguente strategia. Supponiamo di aver già definito $f_\sigma(2^{-n})$, allora abbiamo due modi per estendere f_σ a 2^{-n-1}: possiamo scegliere $f_\sigma(2^{-n-1}) = \frac{f_\sigma(2^{-n})}{2}$ oppure $f_\sigma(2^{-n-1}) = \frac{f_\sigma(2^{-n})}{2} + 2^{-1}$, ed effettuiamo questa scelta sulla base del valore $\sigma(n+1)$. Seguendo questa logica, $f_\sigma(2^{-n})$ dovrebbe assumere il valore $N_n^\sigma := \sum_{i=0}^n 2^{i-1-n}\sigma(i)$. Formalmente, dato un numero $\frac{a}{d2^n}$ con d dispari, poniamo $f_\sigma(\frac{a}{d2^n}) = \pi(\frac{a}{d}N_n^\sigma)$, dove $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è la proiezione al quoziente. La funzione f_σ è ben definita, infatti eventuali primi dispari in comune fra a e d si semplificano e anche i primi pari si semplificano in quanto $\pi(2N_{n+1}^\sigma) = \pi(N_n^\sigma)$ per verifica diretta. Osservato che $f_\sigma(\frac{a}{b}) = a \cdot f_\sigma(\frac{1}{b})$, dove $\cdot$ è il prodotto scalare come $\mathbb{Z}-$moduli, si verifica facilmente che la funzione f_σ è un omomorfismo di gruppi abeliani. Inoltre la funzione $\sigma \mapsto f_\sigma$ è iniettiva; infatti, ad esempio, se n è il minimo dei numeri su cui σ_0 e σ_1 differiscono, allora $f_{\sigma_0}(2^{-n}) \neq f_{\sigma_1}(2^{-n})$. Dunque abbiamo appena mostrato che $|Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})| \geq 2^{\aleph_0}$, e chiaramente vale anche $|Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})| \leq |\{\text{Funzioni da } \mathbb{Q} \text{ a } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\}| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Per Cantor-Berstein vale $|Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})| = 2^{\aleph_0}$, e abbiamo concluso.

3 Esercizio P3

Fissiamo N un $R-$modulo e sia G il funtore $M \mapsto M \otimes N$. Dimostriamo per induzione su i che per ogni M si può calcolare $Tor_i(M, N)$ usando una risoluzione piatta di M. Fissiamo $\cdots \to F_3 \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to M$ una risoluzione piatta di M.

- Il passo base è conseguenza del fatto che G è esatto a destra. Da questo segue che la successione $F_1 \otimes N \to F_0 \otimes N \to M \otimes N \to 0$ è esatta, perciò $H_0(\cdots \to F_1 \otimes N \to F_0 \otimes N \to 0) = M \otimes N$.
- Il passo induttivo si divide in due casi.
  - Consideriamo il caso $i = 1$. Poniamo $K = ker(\pi_0)$ e consideriamo la successione esatta corta $0 \to K \to F_0 \to M \to 0$. Applicando il funtore G sappiamo che esiste la seguente catena esatta lunga $0 = Tor_1(F_0, N) \to Tor_1(M, N) \to K \otimes N \to F_0 \otimes N \to M \otimes N \to 0$. Dunque $Tor_1(M, N) = ker(K \otimes N \to F_0 \otimes N)$. Tuttavia anche la successione $F_2 \xrightarrow{f} F_1 \to K \to 0$ è esatta, dunque, applicando il funtore G, otteniamo che $ker(K \otimes N \to F_0 \otimes N) = ker(\frac{F_1 \otimes N}{f_*[F_2 \otimes N]} \to F_0 \otimes N) = H_1(\cdots \to F_2 \otimes N \to F_1 \otimes N \to F_0 \otimes N)$.
  - Nel caso $i \geq 2$ consideriamo sempre la successione esatta lunga relativa a $0 \to K \to F_0 \to M \to 0$ e al funtore G. Dato che F_0 è piatto si ha che $Tor_i(F_0, N) = 0$, dunque $Tor_{i+1}(M, N) = Tor_i(K, N) \stackrel{\star}{=} H_i(\cdots \to F_3 \otimes N \to F_2 \otimes N \to F_1 \otimes N) = H_{i+1}(\cdots \to F_2 \otimes N \to F_1 \otimes N \to F_0 \otimes N)$, dove in $\star$ abbiamo usato l'ipotesi induttiva e che $\cdots \to F_3 \to F_2 \to F_1 \to K \to 0$ è una risoluzione piatta di K.

4 Esercizio P2

1. Consideriamo l'estensione $1 \to N \to G \to G/N \to 1$. Sia $[f] = u \in H^2(G, G/N)$ la classe di coomologia relativo a quest'estensione e supponiamo che f sia normalizzato. Allora, a meno di isomorfismo, possiamo assumere $G = (N \times G/N, *_G)$ con $(a, b)(c, d) = (a + b.c + f(b, d), b *_{G/N} d)$. Consideriamo $E = (N \times G', *_E)$ con $(a, b)(c, d) = (a + \overline{\varphi}(b).c + f(\overline{\varphi}(b).\overline{\varphi}(d)), b *_{G'} d)$. Si ha che la classe di coomolgia di $1 \to N \to E \to G' \to 1$ è $\varphi^*(u)$. Osservando come funziona il prodotto su questi due gruppi, si deduce che $id \times \overline{\varphi} : E \to G$ è un omomorfismo di gruppi.
   - Supponiamo che $\varphi^*(u)$ sia banale. Allora esiste una sezione $s = (s', id)$ di G' su E, componendo questa sezione con $id \times \overline{\varphi}$ otteniamo un morfismo $\varphi : G' \to G$. Inoltre vale che $\pi \circ \varphi(g) = \pi \circ (id \times \overline{\varphi})(s'(g), g) = \pi(s'(g), \overline{\varphi}(g)) = \overline{\varphi}(g)$.
   - Supponiamo che esista $\varphi : G' \to G$ tale che $\pi \circ \varphi = \overline{\varphi}$, vogliamo trovare una sezione di $E \to G'$. Nel seguito ci riferiremo ai gruppi identificandoli con il loro dominio senza menzionare l'operazione come si fa usualmente, dunque vale la pena avvertire che ogni

occorrenza del simbolo $\times$ rappresenta il prodotto cartesiano di insiemi e non il prodotto diretto di gruppi.

  – Consideriamo prima il caso in cui φ è iniettiva. Si ha che φ è un isomorfismo fra G' e $Im(\varphi)$, dunque restringendo il codominio all'immagine possiamo considerare l'isomorfismo inverso $\varphi^{-1} : Im(\varphi) \to G'$. Gli elementi di $Im(\varphi)$ sono coppie $(a, b) \in N \times \frac{G}{N}$, e, se $\varphi(g') = (a, b)$, allora $\overline{\varphi}(g') = b$; perciò si verifica direttamente che la mappa $g : Im(\varphi) \to N \times G'$ definita come segue, $g : (a, b) \mapsto (a, \varphi^{-1}(a, b))$, è un omomorfismo. È tautologico verificare che $g \circ \varphi$ è la sezione cercata.
  – Caso generale. Sia $K = ker(\varphi) \subset ker(\overline{\varphi})$. Si verifica direttamente che $0 \times K \lhd E$, inoltre, come nel caso dei prodotti diretti di gruppi, vale che $\frac{N\times G'}{0\times K} \cong N \times \frac{G'}{K}$ e $\frac{N\times K}{0\times K} \cong N \times \frac{K}{K}$ tramite le mappe ovvie. Consideriamo la proiezione al quoziente $\frac{N\times G'}{0\times K} \to \frac{G}{K}$, dato che siamo nelle ipotesi del caso precedente, abbiamo una sezione $g : \frac{G'}{K} \to \frac{N\times G'}{0\times K}$. Consideriamo, per il teorema di corrispondenza di sottogruppi, $H < E$ tale che $K < H$ e $\frac{H}{0\times K} = Im(g)$. Dato che l'omomorfismo g è una sezione, rimane iniettivo anche dopo la composizione con la proiezione a $\frac{G'}{K}$, quindi $Im(g) \cap \frac{N\times K}{0\times K} = 0$. Perciò $H \cap (N \times 0) = 0$. Dunque la proiezione al quoziente ristretta a H è un isomorfismo fra H e G', la cui inversa è la sezione cercata.

2. Fissiamo $\varphi : G' \to G$ un omomorfismo con $\pi \circ \varphi = \overline{\varphi}$.

   Per ogni altro omomorfismo ψ con $\pi \circ \psi = \overline{\varphi}$ definiamo $f_\psi : G' \to G$ ponendo $f_\psi(g) = \varphi(g) *_G \psi(g^{-1})$. Ricordiamo che gli 1-cocicli si possono vedere come funzioni da G' ad N che rispettino la seguente proprietà $f(\sigma\tau) = f(\sigma) + \sigma.f(\tau)$ per ogni $\sigma, \tau \in G'$, dove l'azione di G' su N è di G/N su N, data da una sezione insiemistica, e indotta poi su G' tramite $\overline{\varphi}$. Ricordando che $G = N \times (G/N)$ e che $\pi \circ \varphi = \pi \circ \psi$ si ottiene che effettivamente f_ψ è a valori in N. Inoltre dalla definizione di omomorfismo, studiando il prodotto di G, segue $f(\sigma\tau) = f(\sigma) + \sigma.f(\tau)$ per ogni $\sigma, \tau \in G'$. Infatti, dobbiamo verificare che $f(\sigma\tau) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau)\psi(\tau^{-1})\psi(\sigma^{-1}) \stackrel{?}{=} \varphi(\sigma)\psi(\sigma^{-1}) + \sigma.\varphi(\tau)\psi(\tau^{-1})$. Quest'ultima uguaglianza è vera, infatti $\sigma.x = gxg^{-1}$ per un qualunque $g \in G$ tale che $\pi(g) = \overline{\varphi}(\sigma)$; dato che $\pi \circ \psi = \overline{\varphi}$ per ipotesi, possiamo scegliere $g = \psi(\sigma)$ e la tesi segue (infatti il segno di operazione $+$ sta a significare solo che N è abeliano, tuttavia $+$ coincide con l'operazione $*_G$ di G ristretta ad N).

   Viceversa, dato un 1-cociclo f, definiamo $\varphi_f : G' \to G$ ponendo $\varphi_f(g) = (f(g))^{-1} *_G \varphi(g)$. Conti analoghi a quelli svolti in precedenza mostrano che φ_f è un morfismo e rispetta $\pi \circ \varphi_f = \pi \circ \varphi = \overline{\varphi}$.

   È immediato verificare che le funzioni $f \mapsto \varphi_f$ e $\psi \to f_\psi$ sono l'una l'inversa dell'altra. In questo modo otteniamo l'equipotenza cercata.