



UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

Il Teorema di Whitehead per 4-varietà

Relatore:
Dott. Paolo Lisca

Candidato:
Alessio Siniscalchi

Anno Accademico 2020/2021

Introduzione

L'argomento discusso in questa tesi è un risultato classico sulle 4-varietà, il Teorema di Whitehead.

Quest'ultimo asserisce che la forma di intersezione di una 4-varietà chiusa, orientabile e 1-connessa, ne determina il tipo di omotopia.

Il primo capitolo è costituito da richiami di nozioni e teoremi generali sulle varietà.

Nel secondo invece viene introdotta la forma di intersezione di una 4-varietà, che governa il modo in cui le superfici si intersecano dentro la varietà.

Infine nell'ultimo capitolo viene dimostrato il Teorema.

In letteratura esistono varie dimostrazioni, da quelle puramente algebriche a quelle dal sapore più geometrico. Questa tesi si propone di fornire una dimostrazione geometrica completa e dettagliata.

La totalità delle figure presenti è stata realizzata a mano usando Goodnotes 5.

Indice

Introduzione	1
1 Preliminari	3
1.1 Immersioni e embedding	3
1.2 Trasversalità	4
1.2.1 Intersezione algebrica	4
2 Forme di intersezione	5
2.1 Rappresentazione di 2-classi di omologia tramite superfici embedded in modo liscio	5
2.2 Definizioni equivalenti di forma di intersezione	6
2.3 Proprietà della forma di intersezione	8
2.4 Alcuni esempi	10
3 Il Teorema di Whitehead	11
3.1 Prima parte della dimostrazione	11
3.2 Intermezzo	13
3.3 Gran finale	17
Bibliografia	29
Elenco delle figure	30

CAPITOLO 1

Preliminari

In questo capitolo richiamiamo alcuni risultati generali che saranno utili nei capitoli successivi. Richiami più specifici invece verranno fatti al momento opportuno.

1.1. Immersioni e embedding

Nei prossimi capitoli considereremo spesso le mappe a meno di omotopia; vediamo quali tipi di mappe con buone proprietà possiamo sempre trovare in una classe di omotopia.

Teorema 1.1.1. (Approssimazione cellulare [4])

Sia $f : X \rightarrow Y$ una mappa tra CW complessi. Allora f è omotopa a una mappa cellulare¹.

Teorema 1.1.2. (Approssimazione C^∞ [9])

Ogni mappa continua tra varietà è omotopa a una mappa liscia.

Nei prossimi teoremi assumeremo, a meno di omotopia, che ogni mappa tra varietà sia C^∞ .

Definizione

Una mappa liscia $f: M \rightarrow N$ tra varietà è una immersione se il differenziale di f è iniettivo in ogni punto di M .

Inoltre, se f è anche un omeomorfismo con l'immagine, si dice embedding.

Teorema 1.1.3. (Immersione debole di Whitney [1])

Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa tra varietà lisce di dimensioni rispettivamente m ed n , e supponiamo che M sia compatta. Allora se $m < 2n$ f è omotopa a un embedding mentre se $m = 2n$, f è omotopa a un'immersione.

¹Ovvero $f(X^n) \subseteq Y^n \quad \forall n \in \mathbf{N}$ dove X^n e Y^n sono gli n -scheletri rispettivamente di X e di Y .

1.2. Trasversalità

In questa sezione si suppone che ogni varietà sia liscia.

Definizione

(i) Due sottospazi U, V di \mathbb{R}^n si dicono trasversi se $U+V = \mathbb{R}^n$

(ii) Siano Y_1 e Y_2 due sottovarietà di X .

Y_1 e Y_2 sono trasverse ² se

$$T_x X = T_x Y_1 + T_x Y_2 \quad \forall x \in Y_1 \cap Y_2$$

(iii) Sia $f : X \rightarrow Y$ liscia tra varietà e sia $Z \subseteq Y$ una sottovarietà di Y . Diciamo che f è trasversa a Z se

$$T_{f(x)} Y = df_x T_x X + T_{f(x)} Z \quad \forall f(x) \in Z$$

Teorema 1.2.1. (Trasversalità omotopica [1])

Sia $f : X \rightarrow Y$ una mappa liscia tra varietà embedded e sia $Z \subseteq Y$ una sottovarietà. Allora f è omotopa a una mappa trasversa a Z .

Proposizione 1.2.2. [1] Sia $f : X \rightarrow Y$ una mappa liscia tra varietà e sia $Z \subseteq Y$. Se f è trasversa a Z , allora $f^{-1}(Z)$ è una sottovarietà di X di codimensione uguale alla codimensione di Z in Y .

1.2.1. Intersezione algebrica

Siano Y_1 e Y_2 due sottovarietà embedded di X . Supponiamo che siano tutte orientate e che $\dim X = \dim Y_1 + \dim Y_2$.

Per il teorema di trasversalità omotopica 1.2.1 possiamo anche assumere che Y_1 e Y_2 siano trasverse. Quindi

$$TY_1 \bigoplus TY_2 \Big|_{Y_1 \cap Y_2} = TX \Big|_{Y_1 \cap Y_2}$$

e Y_1 e Y_2 si intersecano in un numero finito di punti isolati. Ad ogni x in $Y_1 \cap Y_2$ assegnamo 1 se l'orientazione di $T_x Y_1 \bigoplus T_x Y_2$ coincide con quella di $T_x X$, -1 altrimenti. Sommando questi segni si ottiene il numero di intersezione algebrica di Y_1 e Y_2 , che denotiamo con $Y_1 \cdot Y_2$.

Osservazione La definizione data funziona anche nel caso in cui $Y_1 = Y_2$, infatti per trovare $Y_1 \cdot Y_1$ basta prendere una copia Z di Y_1 che sia trasversa ad Y_1 e calcolare $Y_1 \cdot Z$.

In questo caso $Y_1 \cdot Y_1$ si dice numero di autointersezione di Y_1 .

²Si usa il simbolo evocativo \pitchfork , infatti la linea e la curva che formano \pitchfork sono trasverse

CAPITOLO 2

Forme di intersezione

2.1. Rappresentazione di 2-classi di omologia tramite superfici embedded in modo liscio

Definizione Una varietà topologica si dice chiusa se è compatta e senza bordo

Sia M una 4-varietà liscia, chiusa e orientata.

L'obiettivo di questa sezione è rappresentare elementi di $H_2(M, \mathbb{Z})$ tramite superfici embedded.

Per cominciare supponiamo anche che M sia 1-connessa. Allora per il Teorema di Hurewicz, si ha che $H_2(M, \mathbb{Z}) \cong \pi_2(M)$, quindi possiamo associare a una 2-classe di omologia l'immagine di una mappa $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$ che possiamo supporre liscia per il teorema di approssimazione C^∞ 1.1.2. Per il Teorema di immersione debole di Whitney 1.1.3, a meno di omotopia f è un'immersione; inoltre l'immagine di quest'ultima si autointerseca in un numero finito di punti doppi isolati. Affinchè f sia un embedding dobbiamo rimuovere i punti doppi trasversi, al costo di aumentare il genere della superficie che immergiamo ¹.

Localmente le singolarità si presentano come due piani ortogonali che si intersecano in \mathbb{R}^4 e la loro traccia in \mathbb{S}^3 è il link di Hopf.

Perciò possiamo tagliare i due dischi trasversi contenuti in \mathbb{B}^4 e rimpiazzarli con un anello ² il cui bordo è isotopo al link di Hopf ³, come mostrato in figura 2.1. Eseguiamo l'operazione descritta a ogni punto doppio trasverso. Notiamo che la superficie ottenuta è orientata come curva complessa, infatti utilizzando

¹La domanda che ci possiamo porre è: qual è il minimo genere necessario per rappresentare una data classe di omologia con una superficie embedded? Per una trattazione generale di questo problema facciamo riferimento al capitolo 11 di [10]

²Non è un nastro di Moebius! Richiediamo infatti che sia orientabile. E' dato invece da una striscia ruotata di 360 gradi a cui vengono incollati i bordi.

³Nella sezione 3.2 è presentato un algoritmo generale per trovare questo tipo di superfici, dette di Seifert



Figura 2.1: A sinistra il link di Hopf, a destra la banda di Hopf

coordinate complesse, localmente, ha equazione $z_1 z_2 = \epsilon$ in \mathbb{C}^2 , e induce la stessa orientazione sul bordo.

Questo risultato rimane vero anche togliendo l'ipotesi di 1-connessione ⁴. Proponiamo di seguito solamente uno sketch della dimostrazione.

Per Dualità di Poincarè, è sufficiente associare a un elemento di $H^2(M, \mathbb{Z}) \cong H_2(M, \mathbb{Z})$ una superficie embedded.

Ricordiamo che dato uno spazio di Eilenberg Mac-Lane $K(G, n)$, esiste una bigezione naturale, indotta dal pullback, tra $[M, K(G, n)]$ e $H^n(M, G)$ [4].

In questo caso, è utile considerare uno spazio $K(\mathbb{Z}, 2)$, ad esempio $\mathbb{C}P^\infty$. Quindi a un elemento di $H^2(M, \mathbb{Z})$ corrisponde una classe di omotopia di mappe $M \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Per il teorema di approssimazione cellulare, possiamo rimuovere le celle di dimensione maggiore di 4, per cui rimane una classe di mappe $M \rightarrow \mathbb{C}P^2$. Scegliamo un rappresentante f che sia differenziabile e trasverso a $\mathbb{C}P^1$. La controimmagine di $\mathbb{C}P^1$ è una varietà compatta orientata di dimensione $4 - 2 = 2$, ovvero una superficie.

2.2. Definizioni equivalenti di forma di intersezione

Introduciamo dapprima la forma di intersezione per 4-varietà lisce, in quanto ha una interessante interpretazione geometrica. In seguito daremo una definizione

⁴Ancora più in generale è noto che ogni m -classe di omologia di una 4-varietà può essere rappresentata da una sottovarietà embedded di dimensione m [11].

algebraica valida in generale per varietà topologiche.

Definizione: Sia M una 4-varietà liscia, chiusa e orientata, definiamo la forma di intersezione come

$$Q_M : H_2(M) \times H_2(M) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow S_\alpha \cdot S_\beta$$

dove S_α e S_β sono due superfici embedded lisce e orientate che rappresentano le classi di α e β .

Osservazione: $S_\alpha \cdot S_\beta$ dipende solo dalle classi di orientazione su S_α e S_β , quindi non dipende dalla scelta del rappresentante della classe di omologia.

Si nota che nell'assunzione di M semplicemente connessa, $H_2(M) \cong H^2(M)$ è abeliano libero. Infatti dal Teorema dei coefficienti universali in coomologia, si ha la seguente successione esatta:

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_1(M), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}(H_2(M), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

da cui, siccome $H_1(M) = 0$ per Hurewicz, $H^2(M) \cong \text{Hom}(H_2(M), \mathbb{Z})$.

Ne segue che $H^2(M)$ è senza torsione, e quindi $H_2(M) \cong H^2(M) \cong \mathbb{Z}^{b_2}$ dove b_2 indica il secondo numero di Betti di M .

Tuttavia la forma di intersezione per linearità si annulla sugli elementi di torsione, quindi supporremo sempre che $H_2(M)$ sia libero.

Presentiamo ora una definizione puramente algebrica. Essendo M compatta, $H_4(M) \cong \mathbb{Z}$ è generato da una classe globale di orientazione su M ; sia essa $[M]$.

Definizione Sia M una 4-varietà topologica chiusa e orientata. Definiamo la forma di intersezione come

$$Q_M : H_2(M) \times H_2(M) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \langle \alpha^* \cup \beta^*, [M] \rangle$$

dove $\alpha^*, \beta^* \in H^2(M)$ denotano i duali di Poincarè di α, β .

Proviamo ora che, nel caso particolare di varietà lisce, le due definizioni date coincidono.

Lemma 2.2.1. *Sia M una 4-varietà liscia, chiusa e orientata. La forma $Q_M(\alpha, \beta) = S_\alpha \cdot S_\beta$ coincide con $Q_M(\alpha, \beta) = \langle \alpha^* \cup \beta^*, [M] \rangle$.*

Dimostrazione. (Sketch) Siano $\alpha, \beta \in H_2(M)$ e siano α^*, β^* i rispettivi duali di Poincarè cioè tali per cui $\alpha^* \cap [M] = \alpha$ e $\beta^* \cap [M] = \beta$.

Dalla formula di Kronecker si ha :

$$\langle \alpha^* \cup \beta^*, [M] \rangle = \langle \alpha^*, \beta^* \cap [M] \rangle = \langle \alpha^*, \beta \rangle$$

Perciò dobbiamo mostrare che $\alpha^*[S_\beta] = S_\alpha \cdot S_\beta$. Utilizziamo la coomologia di De Rham considerando α^* come elemento di $\Gamma(\Lambda^2(T_M^*))$.

Scegliamo coordinate locali (x, y, z, t) in modo che S_α coincida localmente con il piano descritto da $z = 0, t = 0$. Inoltre esiste una funzione f continua a supporto compatto con $\int_{\mathbb{R}^2} f = 1$ tale che $\alpha^* = f(x, y)dzdt$ [9].

Prendendo S_β trasversa a S_α , vicino ai punti di intersezione S_β è data dal piano $x = 0, y = 0$ (per la condizione di trasversalità). Con questa scelta di coordinate segue subito dalle definizioni che

$$\int_{S_\beta} \alpha^* = S_\alpha \cdot S_\beta$$

in quanto è somma di $+1$ o -1 a seconda dell'orientazione S_β indotta da dz e dt , da cui quanto voluto. \square

2.3. Proprietà della forma di intersezione

In questa sezione investighiamo alcune proprietà utili della forma di intersezione. Dalle proprietà del prodotto cup discende subito il fatto che Q_M è \mathbb{Z} bilineare e simmetrica (essendo definita in grado pari).

Unimodularità

Sia L una forma bilineare definita su \mathbb{Z}^n .

Definizione L si dice unimodulare se $\det A_L = \pm 1$, dove A_L è una matrice che rappresenta L .

Lemma 2.3.1. *Sono fatti equivalenti: [6]*

- (i) L è unimodulare
- (ii) Ogni matrice che rappresenta L è invertibile su \mathbb{Z}
- (iii) La mappa

$$L : \mathbb{Z}^n \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$$

$$x \rightarrow L_x : (y \rightarrow L(x, y))$$

è un isomorfismo.

Lemma 2.3.2. *Sia M una 4-varietà chiusa e supponiamo che $\text{Ext}(H_1(M), \mathbb{Z}) = 0$, allora la forma Q_M è unimodulare.*

Dimostrazione. Siccome $\text{Ext}(H_1(M), \mathbb{Z}) = 0$ allora $H^2(M)$ è libero e quindi Q_M è definita su \mathbb{Z}^n .

Per Dualità di Poincarè, la mappa

$$H_2(M) \rightarrow \text{Hom}(H_2(M), \mathbb{Z}) \cong H^2(M)$$

$$\alpha \rightarrow (x \rightarrow \langle \alpha^*, x \rangle = \langle \alpha^* \cup x^* \cdot [M] \rangle)$$

è un isomorfismo. Da cui la tesi per il Lemma precedente. \square

Somma connessa

Proposizione 2.3.3. *Siano M e N due 4-varietà topologiche e siano Q_M e Q_N le rispettive forme di intersezione.*

Allora la somma connessa $M \# N$ ha forma di intersezione :

$$Q_{M \# N} = Q_M \oplus Q_N$$

E' interessante anche riportare il seguente risultato, abbastanza sorprendente, dovuto a Freedman.

Teorema 2.3.4. (Freedman)

Sia M una 4-varietà semplicemente connessa, e supponiamo che $Q_M = Q_1 \oplus Q_2$. Allora esistono due 4-varietà M_1 e M_2 con forme di intersezione Q_1 e Q_2 tali per cui $M = M_1 \# M_2$.

Invarianti

Per distinguere due forme di intersezione, ricorriamo a invarianti algebrici.

Rango

Assumendo che $H^2(M)$ sia senza torsione, poniamo

$$\text{rango}(Q_M) = \text{rango}_{\mathbb{Z}} H^2(M)$$

Quindi è semplicemente il secondo numero di Betti di M .

Segnatura

La definiamo come segue. Innanzitutto diagonalizziamo su \mathbb{R} una matrice che rappresenta Q_M e contiamo il numero di autovalori positivi b_2^+ e il numero di autovalori negativi b_2^- , detti anche numeri di Betti parziali. Poi poniamo

$$\text{sgn}(Q_M) = b_2^+ - b_2^-$$

2.4. Alcuni esempi

Il piano proiettivo complesso

È ben noto che $H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ ed è generato dalla classe di una retta proiettiva $r \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Poichè due rette proiettive si intersecano in un punto, si ottiene che $Q_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} = [+1]$ oppure $[-1]$ a seconda dell'orientazione di $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Fatto Per due varietà complesse trasverse e immerse in \mathbb{C}^n , il numero di intersezione algebrico coincide con il numero di intersezione geometrico.⁵

Teorema 2.4.1. (Bézout su $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$)

Siano F e G due curve algebriche di $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ senza componenti comuni con $\deg F = m$ e $\deg G = n$, allora

$$\#(\mathbb{V}(F) \cap \mathbb{V}(G)) = m \cdot n$$

Dimostrazione. (Sketch) Per il fatto citato sopra vale $\#(\mathbb{V}(F) \cap \mathbb{V}(G)) = \mathbb{V}(F) \cdot \mathbb{V}(G)$.

Si verifica che tramite l'isomorfismo $H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ le classi di $\mathbb{V}(F)$ e $\mathbb{V}(G)$ corrispondono rispettivamente a m ed n . Pertanto

$$\mathbb{V}(F) \cdot \mathbb{V}(G) = Q_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}(\mathbb{V}(F), \mathbb{V}(G)) = m \cdot n$$

da cui la tesi. □

Prodotto di sfere

Usando la formula di Kunnet e il Teorema dei coefficienti universali, è facile vedere che $H_2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ed è generato dalle classi delle superfici $\Sigma = \mathbb{S}^2 \times p$ e $\Sigma' = p' \times \mathbb{S}^2$.

Fissiamo sulle copie di \mathbb{S}^2 l'orientazione data dalla scelta di $+1$ come generatore di $H_2(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}$. Allora Σ e Σ' si intersecano positivamente in un punto, inoltre $(\mathbb{S}^2 \times p_1) \cap (\mathbb{S}^2 \times p_2) = \emptyset$ se $p_1 \neq p_2$. Per cui $Q_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2}$ nella base $\{[\Sigma], [\Sigma']\}$ è rappresentata da

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

⁵Cioè la cardinalità dell'intersezione, senza considerare le orientazioni

CAPITOLO 3

Il Teorema di Whitehead

Teorema 3.0.1. (Whitehead)

Due 4-varietà chiuse, orientabili e 1-connesse sono omotopicamente equivalenti se e solo se le loro forme di intersezione sono isomorfe.

Cenni storici La prima dimostrazione è stata pubblicata nel 1940 da Milnor nel paper "On simply connected 4 manifolds" [7]. Il teorema viene proposto come corollario di un teorema provato precedentemente da Whitehead nell'opera "On simply connected 4 dimensional polyhedra" [12].

Successivamente nel 1980 Freedman ha dimostrato che la forma d'intersezione determina la varietà anche a meno di omeomorfismo, aggiungendo però l'ipotesi che la varietà in questione sia liscia [10].

Ci accingiamo adesso a dimostrare il teorema.

La dimostrazione proposta è suddivisa in due parti, inizialmente useremo argomentazioni teoretiche di topologia, e poi sfrutteremo una ben nota costruzione geometrica. ¹

3.1. Prima parte della dimostrazione

Innanzitutto richiamiamo il celebre teorema di Whitehead.

Teorema 3.1.1. (Whitehead)

Sia $f : X \rightarrow Y$ una mappa tra CW complessi che induce isomorfismi tra tutti i gruppi di omotopia.

Allora f è un'equivalenza omotopica.

E' utile dimostrare una piccola variante in omologia.

¹Si tratta della costruzione di Thom-Pontryagin e si può estendere a un contesto molto più generale, tuttavia noi faremo tutto nel caso particolare che ci interessa, per non far perdere al lettore la bellezza che racchiude.

Teorema 3.1.2. (Whitehead in omologia) *Siano X e Y due CW complessi 1-connessi e sia $f : X \rightarrow Y$ una mappa che induce isomorfismi in ogni gruppo di omologia, allora f è un'equivalenza omotopica.*

Dimostrazione. A meno di sostituire Y con il suo mapping cylinder M_f (che è un CW complesso omotopo a Y) possiamo supporre che f sia l'inclusione ² $i : X \rightarrow M_f$ [3].

Dalla successione esatta lunga della coppia (X, Y) ,

$$H_n(X) \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(X, Y) \longrightarrow H_{n-1}(X) \longrightarrow H_{n-1}(Y)$$

si deduce che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $H_n(Y, X) = 0$, infatti per ipotesi le mappe $H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ sono isomorfismi per ogni n .

Ma allora per induzione, usando il teorema di Hurewicz relativo, si perviene a $\pi_n(X, Y) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Quindi dalla successione esatta lunga di omotopia relativa,

$$\pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y) \longrightarrow \pi_n(X, Y) \longrightarrow \pi_{n-1}(X) \longrightarrow \pi_{n-1}(Y)$$

si ottiene che l'inclusione induce isomorfismi $i_* : \pi_n(X) \cong \pi_n(Y) \quad \forall n$. Da cui la tesi per il teorema di Whitehead. \square

Dimostrazione del Teorema 3.0.1 :

Una implicazione è immediata, infatti se due 4-varietà sono omotopicamente equivalenti, in particolare hanno lo stesso anello di coomologia e quindi stessa forma di intersezione. Rimane da provare l'altra.

Sia M come nelle ipotesi. Studiamo la sua omologia. Per semplice connessione $H_0(M) = \mathbb{Z}$ e $H_1(M) = 0$, inoltre per quanto visto nella sezione 1.2, $H_2(M) = \mathbb{Z}^n$ dove n è il secondo numero di Betti. Consideriamo la seguente successione esatta data dal teorema dei coefficienti universali :

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_0(M), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow \text{Hom}(H_1(M), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Siccome $H_0(M)$ è libero, allora $\text{Ext}(H_0(M), \mathbb{Z}) = 0$ quindi $H^1(M) = 0$, da cui per Dualità di Poincarè segue che $H_3(M) = 0$.

Per annullare anche il quarto gruppo di omologia, rimuoviamo una piccola palla aperta da M . Sia $M' = M \setminus \mathbb{B}^4$ e sia $V \subseteq M$ una palla aperta più grande che contiene la chiusura di \mathbb{B}^4 . Allora per escissione :

$$H_4(M', V \setminus \mathbb{B}^4) \cong H_4(M, V) \cong {}^3H_4(M/V) \cong H_4(M) \cong \mathbb{Z}$$

Siccome $V \setminus \mathbb{B}^4$ si retrae per deformazione su \mathbb{S}^3 , si ha per il Lemma dei 5 che

$$H_4(M', V \setminus \mathbb{B}^4) \cong H_4(M', \mathbb{S}^3)$$

²L'inclusione è omotopa in modo naturale a f

³Segue dal fatto che (M, V) è una buona coppia [4], in alternativa potevamo utilizzare la successione esatta della coppia (M, V)

Inoltre considerando il seguente frammento della successione esatta della coppia (M', \mathbb{S}^3)

$0 \longrightarrow H_4(M') \longrightarrow H_4(M', \mathbb{S}^3) \longrightarrow H_3(\mathbb{S}^3) \longrightarrow 0$ si ottiene come desiderato che $H_4(M') = 0$ perchè per quanto visto sopra $H_4(M', \mathbb{S}^3) \cong H_3(\mathbb{S}^3) \cong \mathbb{Z}$. Per il teorema di Hurewicz $\pi_2(M') \cong H_2(M') \cong \mathbb{Z}^n$. Siano $f_i : \mathbb{S}^2 \rightarrow M'$ $i = 1 \dots n$ dei rappresentanti di un sistema di generatori di $\pi_2(M')$ come gruppo abeliano libero. Sia $f : \mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2 \rightarrow M'$ la mappa ottenuta incollando le f_i . E' facile verificare che la mappa indotta in omologia

$$H(f) : H_2(\mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2) \rightarrow H_2(M')$$

è un isomorfismo, e risulta evidente che f induca isomorfismi anche tra gli altri gruppi di omologia (essendo tutti nulli tranne in grado zero).

Fatto: Ogni varietà topologica è omotopicamente equivalente a un CW complesso [2].

Dunque, evocando il teorema di Whitehead in omologia, M' è omotopicamente equivalente a $\mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2$ ed M è omotopicamente equivalente a uno spazio ottenuto attaccando una 4-cella \mathbb{D}^4 a $\mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2$ tramite una mappa $\phi : \partial\mathbb{D}^4 = \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2$.

3.2. Intermezzo

Introduciamo le nozioni di teoria dei nodi necessarie per proseguire con la dimostrazione.

Definizione : Un nodo (tame) K è l'immagine di un embedding di \mathbb{S}^1 in \mathbb{S}^3 tale che $\forall p \in K$ esiste un intorno U per cui la coppia $(U, U \cap K)$ sia omeomorfa a $(\mathbb{D}^2 \times I, 0 \times I)$.

Due nodi K_1, K_2 si dicono equivalenti se la coppia (\mathbb{S}^3, K_1) è omeomorfa alla coppia (\mathbb{S}^3, K_2) .

Definizione Un link con n componenti è una collezione di n nodi disgiunti.

Definizione Un diagramma di un link L è una proiezione di L su \mathbb{R}^2 con l'informazione del passaggio sopra o sotto a ogni incrocio. Inoltre, se il link è orientato, a ogni incrocio attribuiamo in segno $+1$ o -1 seguendo il criterio mostrato in figura.

Superfici di Seifert

Definizione Sia $K \subset \mathbb{S}^3$ un nodo orientato. Una superficie di Seifert per K



Figura 3.1: Il segno a un incrocio

è una superficie connessa, compatta orientata, embedded in \mathbb{S}^3 che ha come bordo K e l'orientazione indotta sul bordo coincide con quella di K .

Avevamo già visto nella sezione 2.1 che la banda di Hopf è una superficie di Seifert per il link di Hopf.

Descriviamo un algoritmo per costruire una superficie di Seifert per qualsiasi link (tame).

Proposizione 3.2.1. (Esistenza delle superfici di Seifert)

Sia K un nodo tame in \mathbb{S}^3 , allora ammette una superficie di Seifert.

Dimostrazione. Sia D il diagramma di K . Applichiamo le modifiche disegnate in figura 3.2 a ogni incrocio. Si ottiene una unione disgiunta di curve semplici



Figura 3.2: Modifiche da apportare

chiuse orientate che prendono il nome di cicli di Seifert. Ogni ciclo di Seifert è il bordo di un disco; uniamo i dischi attaccando delle bande a metà distorte come

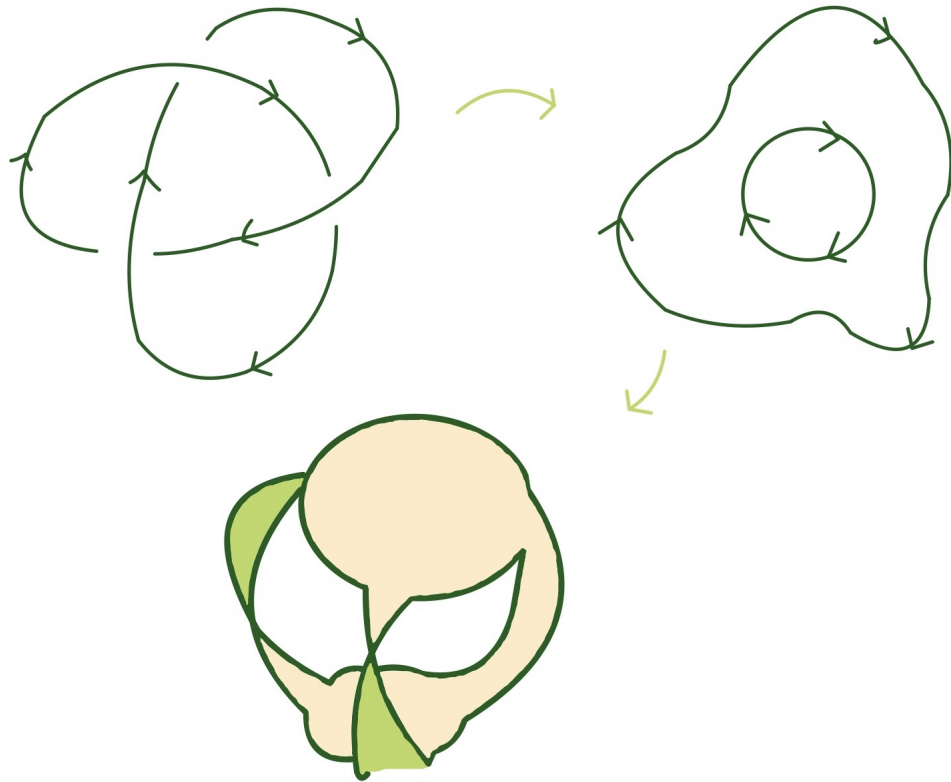


Figura 3.3: Algoritmo per il nodo a trifoglio

suggerisce la figura 3.3. Il risultato è una superficie F orientata coerentemente con i dischi (e quindi con K) con $\partial F = K$, come voluto. \square

Matrice di Allacciamento

Definizione Sia L un link in \mathbb{S}^3 , e siano L_i e L_j due componenti distinte. Definiamo il numero di allacciamento di L_i e L_j come :

$$lk(L_i, L_j) = F \cdot L_j$$

dove F è una superficie di Seifert per L_i .

Nota Si verifica che questa è una buona definizione, e che $lk(L_i, L_j) = lk(L_j, L_i) \quad \forall i \neq j$.

Finora abbiamo pensato un nodo come una "stringa". Per definire il numero di allacciamento di una componente con sè stessa, è utile equipaggiare un nodo con una struttura aggiuntiva che ci permetta di pensarlo come un "nastro".

Link con framing

Idea Un link con framing ha le componenti con dello spessore arbitrariamente piccolo, ovvero al posto di immergere delle copie di \mathbb{S}^1 , consideriamo dei piccoli tori solidi $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ embedded i cui "cuori" ($\mathbb{S}^1 \times 0$) coincidono con i nodi di partenza.

Definizione (framing)

Sia K un nodo tamed in \mathbb{S}^3 . Un framing di K è un embedding $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$ tale che $f(\mathbb{S}^1 \times 0) = K$ ⁴.

Per un nodo con framing definiamo anche il coefficiente di framing come :

$$fr(K) = lk(K, f(\mathbb{S}^1 \times 1))$$

Fatto Il coefficiente di framing determina il framing e viceversa.

Un link con framing è un link in cui ogni componente è equipaggiata con un framing.

Definizione (Matrice di allacciamento)

Sia L un link con framing in \mathbb{S}^3 con componenti $L_1 \dots L_n$. Definiamo la matrice di allacciamento $A(L) = [a_{i,j}]_{i,j}$ come segue. Se $i \neq j$ poniamo

$$a_{i,j} = lk(L_i, L_j)$$

Mentre gli $a_{i,i}$ si dicono numeri di autoallacciamento e li definiamo come il coefficiente di framing della componente L_i per ogni $i=1 \dots n$.

Osservazione $A(L) \in S(n, \mathbb{Z})$, il gruppo delle matrici simmetriche di taglia n a coefficienti in \mathbb{Z}

Cobordismo con framing

Definizione Due link L e L' si dicono framed cobordanti in \mathbb{S}^3 se lo spazio

$$L \times [0, \epsilon) \cup L' \times (1 - \epsilon, 1] \subseteq \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$$

⁴Notiamo che è equivalente all'usuale definizione, ovvero una trivializzazione del fibrato normale

⁵ $l = f(\mathbb{S}^1 \times 1)$ è chiamata una longitudine, ed è un generatore di $H_1(T) \cong \mathbb{Z}^2$ dove T è il bordo del toro solido. L'altro generatore si dice meridiano ed è il bordo di un disco trasverso

può essere esteso a una superficie compatta S in $\mathbb{S}^3 \times [0, 1]$ tale che $\partial S = (L \times 0) \cup (L' \times 1)$ ed una banalizzazione del fibrato normale che estende i framing su L e su L' .

Introduciamo la seguente relazione di equivalenza sull'insieme dei link con un numero fissato di componenti in \mathbb{S}^3 .

Siano $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ e $L' = L'_1 \cup \dots \cup L'_n$ due link in \mathbb{S}^3 , $L \sim L'$ se e solo se esiste un cobordismo con framing da L a L' con n componenti connesse, ciascuna delle quali è un cobordismo con framing da L_i a L'_i $\forall i = 1 \dots n$.

Nota L'ordine delle componenti conta.

Denotiamo con $\Omega_{1,n}^{framed}(\mathbb{S}^3)$ l'insieme quoziente, ovvero le classi di link con n componenti con framing in \mathbb{S}^3 a meno di framed cobordismo.

Investigheremo il legame tra la matrice di allacciamento e la classi in $\Omega_{1,n}^{framed}(\mathbb{S}^3)$ nella prossima sezione.

3.3. Gran finale

Sia $\phi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2$ la mappa di incollamento della sezione 3.1. Scegliamo a piacere n punti $p_1 \dots p_n$ su $\mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2$, uno su ogni sfera, diversi dal punto base. Per il Teorema di approssimazione C^∞ ⁶ esiste un rappresentante C^∞ nella classe $[\phi]$, sia esso φ . Modificandolo con una piccola omotopia, possiamo assumere che φ sia trasverso ai punti scelti sulle sfere.

Le fibre $\varphi^{-1}(p_i)$ sono delle 1-varietà in \mathbb{S}^3 . Assumiamo dapprima che queste ultime siano tutte connesse, affronteremo alla fine il caso sconnesso.

Quindi $L = \varphi^{-1}(p_1) \cup \dots \cup \varphi^{-1}(p_n) = L_1 \cup \dots \cup L_n$ è un link con n componenti in \mathbb{S}^3 .

Osserviamo che il differenziale $d\varphi : T_{\mathbb{S}^3} \rightarrow T_{\mathbb{S}^2}|_{p_i} \cong \mathbb{R}^2$ si restringe a una mappa $N_{L_i/\mathbb{S}^3} \rightarrow \mathbb{R}^2$ che è un isomorfismo ristretta alle fibre $\forall i = 1 \dots n$. Pertanto L è dotato di un framing, essendo il fibrato normale trivializzato.

Inoltre poichè $T_{\mathbb{S}^3}|_{L_i} = T_{L_i} \oplus N_{L_i/\mathbb{S}^3}$ e N_{L_i/\mathbb{S}^3} solleva una orientazione da \mathbb{S}^2 , ogni componente ha una orientazione indotta in modo naturale da $d\varphi$.

Questa costruzione definisce una mappa

$$\Gamma : \pi_3(\mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2) \rightarrow \Omega_{1,n}^{framed}(\mathbb{S}^3) \quad (3.1)$$

⁶Si usa separatamente a ogni sfera restringendo ϕ , e poi incollando le mappe ottenute

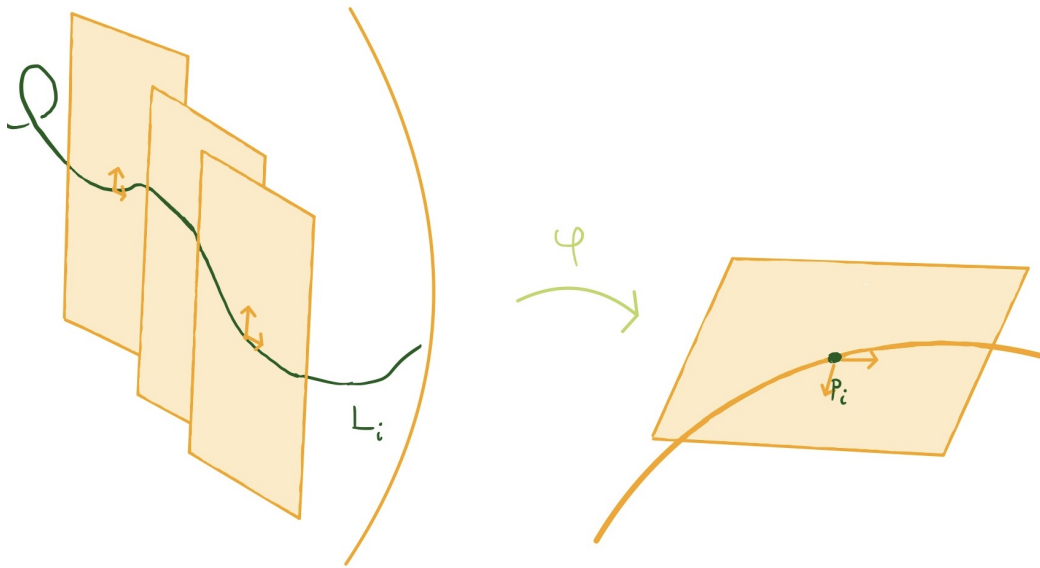


Figura 3.4: Portare indietro il framing

E' una buona definizione in quanto se φ e φ' sono omotope e trasverse ai punti $p_i \quad \forall i = 1 \dots n$, scegliendo una omotopia H che soddisfi :

$$H(x, t) = \varphi \quad t < \epsilon$$

$$H(x, t) = \varphi' \quad t > 1 - \epsilon$$

si ha che $H^{-1}(p_i)$ è un cobordismo con framing tra $\varphi^{-1}(p_i)$ e $\varphi'^{-1}(p_i) \quad \forall i = 1 \dots n$ e quindi $\Gamma([\varphi]) = \Gamma([\varphi'])$.

Consideriamo anche la mappa :

$$\Omega_{1,n}^{framed}(\mathbb{S}^3) \rightarrow S(n, \mathbb{Z})$$

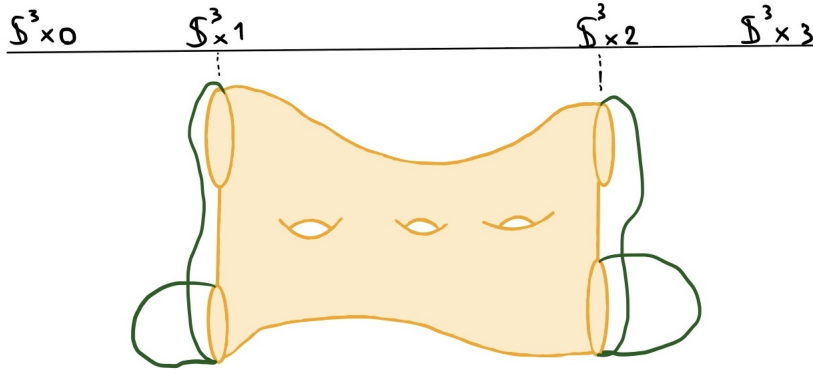
$$[L] \rightarrow A(L)$$

che associa a una classe di link con framing la matrice di allacciamento di un suo rappresentate. Il seguente Lemma ci assicura che la mappa di cui sopra sia ben definita.

Lemma 3.3.1. *Siano L ed L' due link framed cobordanti con n componenti in \mathbb{S}^3 . Allora $A(L) = A(L')$.*

Dimostrazione. Fissiamo $i \neq j$. Siano C_i e C_j i cobordismi in $\mathbb{S}^3 \times [1, 2]$ tra le rispettive componenti L_i, L'_i ed L_j, L'_j . Incolliamo lungo L_i una superficie di Seifert F_i per L_i contenuta in $\mathbb{S}^3 \times 1$, mentre lungo L_j incolliamo una superficie di Seifert

per L_j la cui parte interna sia stata spinta in $\mathbb{S}^3 \times [0, 1]$. Lungo L'_j incolliamo una superficie di Seifert F'_j per L'_j contenuta in $\mathbb{S}^3 \times 2$, infine lungo L'_j incolliamo una superficie di Seifert per L'_j la cui parte interna sia stata spinta in $\mathbb{S}^3 \times [2, 3]$. Si ottiene una superficie S chiusa in $\mathbb{S}^3 \times [0, 3]$. Poichè $H_2(\mathbb{S}^3 \times [0, 3]) = 0$,



$\mathbb{S}^3 \times [0, 3]$ ha forma di intersezione nulla, quindi in particolare $S \cdot S = 0$. Ma $S \cdot S = F_i \cdot L_j - F'_i \cdot L'_j = lk(L_i, L_j) - lk(L'_i, L'_j)$, da cui la tesi nel caso $i \neq j$. Sia C_i il cobordismo con framing tra L_i e L'_i , e siano K_i e K'_i i pushoff dati dai framing. Poichè il framing su C_i estende i framing su L_i e L'_i , esiste un cobordismo tra K_i e K'_i disgiunto da C_i . Adesso ripetiamo quanto fatto precedentemente. Incolliamo lungo L_i una superficie di Seifert F_i per L_i contenuta in $\mathbb{S}^3 \times 1$, mentre lungo K_i incolliamo una superficie di Seifert per K_i la cui parte interna sia stata spinta in $\mathbb{S}^3 \times [0, 1]$. Lungo L'_i incolliamo una superficie di Seifert F'_i per L'_i contenuta in $\mathbb{S}^3 \times 2$, infine lungo K'_i incolliamo una superficie di Seifert per K'_i la cui parte interna sia stata spinta in $\mathbb{S}^3 \times [2, 3]$. Si perviene alla medesima conclusione, ovvero $fr(L_i) = lk(L_i, K_i) = lk(L'_i, K'_i) = fr(L'_i)$. \square

Componendo la due mappe descritte in precedenza, otteniamo una applicazione

$$\Psi : \pi_3(\mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2) \rightarrow S(n, \mathbb{Z})$$

$$[\phi] \rightarrow A(L)$$

Investighiamo ora il legame tra $A(L)$ e la forma di intersezione di M .

Siano F_i delle superfici di Seifert per L_i in $\mathbb{S}^3 \forall i = 1, \dots, n$. Spingiamo la parte interna delle superfici F_i dentro \mathbb{B}^4 .

Ricostruendo $\mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2 \cup_{\phi} \mathbb{D}^4$ tramite ϕ , ogni L_i , ovvero il bordo di F_i , viene collassato al punto p_i . Perciò dopo l'incollamento della 4 cella, le F_i diventano delle superfici chiuse. Chiamiamo queste ultime F'_i e siano $\alpha_i = [F'_i] \in H_2(M)$.

Proposizione 3.3.2. *Le classi α_i formano una base di $H_2(M)$. Inoltre la matrice che rappresenta Q_M nella base $B_\phi = \{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$ coincide con $A(L)$.*

Dimostrazione. Per Hurewicz $H_2(M) \cong \pi_2(M) = \langle [f_1] \dots [f_n] \rangle$ dove $f_i : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$. Siccome F'_i interseca solo una copia di \mathbb{S}^2 esattamente in p_i , ne segue che $[f_i] \cdot \alpha_i = 1$ mentre $[f_j] \cdot \alpha_i = 0$ se $i \neq j$. Ma allora per quanto visto nella dimostrazione del Lemma 2.3.2, gli α_i formano una base (duale) di $\text{Hom}(H_2(M), \mathbb{Z}) \cong H^2(M) \cong H_2(M)$, da cui la prima asserzione.

Sia $\iota : F'_1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2 \cup_\phi \mathbb{D}^4$ la mappa data dalla composizione dell'inclusione con la mappa di incollamento, e sia $f : \mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2 \cup_\phi \mathbb{D}^4 \rightarrow M$ un'equivalenza omotopica liscia su \mathbb{D}^4 . Siccome $f \circ \iota$ è costante su $\partial F'_1$, si può estendere a una mappa $\tilde{f} : \tilde{F}_1$ dove \tilde{F}_1 è una superficie chiusa ottenuta attaccando un disco \mathbb{D}^2 sul bordo. Inoltre con una piccola omotopia possiamo rendere \tilde{f} liscia su tutto \tilde{F}_1 . Facendo la stessa operazione su tutte le F'_i , si vede che $F'_i \cdot F'_j = lk(L_i, L_j) \quad \forall i, j$, da cui la tesi. \square

Notazione Da questo punto in poi denoteremo con M un CW complesso omotopicamente equivalente alla varietà di partenza e con Q_M la forma di intersezione ereditata tramite un'equivalenza omotopica.

Siano $M_1 = \mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2 \cup_{\phi_1} \mathbb{D}^4$ e $M_2 = \mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2 \cup_{\phi_2} \mathbb{D}^4$ con forme di intersezione isomorfe. Bisogna dimostrare che ϕ_1 è omotopa a ϕ_2 . Per ipotesi esistono due basi B_1, B_2 rispettivamente di $H_2(M_1) = \pi_2(M_1)$, $H_2(M_2) = \pi_2(M_2)$ per cui la matrice di intersezione di M_1 nella base B_1 coincide con quella di M_2 scritta nella base B_2 . Sia $U = [u_{i,j}]$ la matrice di cambiamento di base da B_{ϕ_1} (costruita come nella proposizione precedente) a B_1 . Consideriamo il primo elemento di B_{ϕ_1} , sia esso $[g_1]$ con $g_1 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2$ ⁷.

Con un argomento di Thòm-Pontryagin⁸ che risulterà più evidente al termine della dimostrazione, possiamo trovare una mappa g'_1 omotopa a g_1 tale che $\#g'^{-1}_1(p_i) = u_{i,1} \quad \forall i = 1 \dots n$. Ripetendo il ragionamento per ogni elemento di base e incollando le mappe ottenute, si ricava una mappa $\xi : \mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2$ tale che

$$\xi_* : \pi_2(\mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2) \rightarrow \pi_2(\mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2)$$

è un isomorfismo che manda la base B_1 in B_{ϕ_1} . Estendiamo ξ a una mappa $\tilde{\xi} = \xi \cup id : M'_1 = \mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2 \cup_\phi \mathbb{D}^4 \rightarrow \mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2 \cup_{\xi \circ \phi} \mathbb{D}^4$ in modo che sia l'identità sulla 4-cella. Poichè la mappa indotta nel quarto gruppo di omologia ha grado 1, allora per il Teorema di Whitehead in omologia $\tilde{\xi}$ è una equivalenza omotopica. Operiamo allo stesso modo su M_2 , trovando una mappa ξ' tale per

⁷ $\pi_2(M_1)$ coincide con il π_2 del suo 2-scheletro, cioè $\mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2$

⁸E' banale il fatto che un insieme discreto di punti è framed cobordante a ogni altro insieme finito di punti.

cui $\mathbb{S}^2 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^2 \cup_{\xi' \circ \phi} \mathbb{D}^4$ sia omotopicamente equivalente a M_2 .

Adesso $\Psi([\xi \circ \phi_1]) = A(L_{\xi \circ \phi_1})$ coincide con $\Psi([\xi' \circ \phi_2]) = A(L_{\xi' \circ \phi_2})$.

Dunque per completare la dimostrazione del teorema, è sufficiente provare l'iniettività di $\Psi : \pi_3(\mathbb{S}^2 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^2) \rightarrow S(n, \mathbb{Z})$.

Il seguente Teorema prova l'iniettività di $[L] \rightarrow A(L)$.

Teorema 3.3.3. (Converso del Lemma 3.3.1)

Se due link in \mathbb{S}^3 hanno la stessa matrice di allacciamento allora sono framed cobordanti in \mathbb{S}^3 .

Dimostrazione. Siano L e L' due link in \mathbb{S}^3 con $A(L) = A(L')$. Procediamo per induzione su n , il numero di componenti.

Passo base

Innanzitutto osserviamo che la mossa locale suggerita in figura 3.5 è realizzata da un cobordismo con framing. Infatti se $\varphi(t)$ è una funzione C^∞ che vale costantemente -1 se $t \leq -\frac{1}{2}$ e 1 se $t \geq \frac{1}{2}$ il cobordismo è dato da

$$C = \{(x, y, t) \text{ tali che } xy - \varphi(t) = 0 \quad t \in [-1, 1]\}$$

e il framing ottenuto applicando il gradiente all'equazione che definisce C estende il framing sui nodi. Dati due nodi con lo stesso coefficiente di framing, possiamo

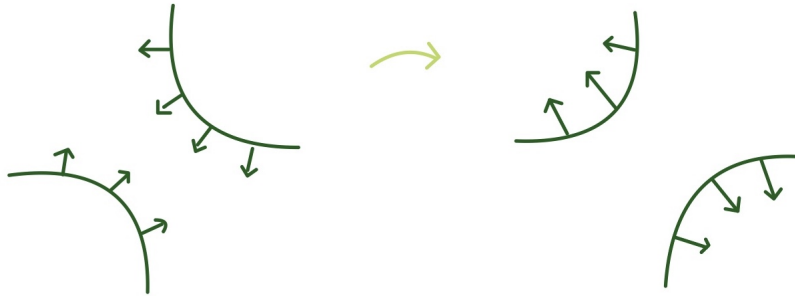


Figura 3.5: Mossa locale

usare ripetutamente la mossa locale e mosse di Reidemeister per ridurli a due nodi banali con lo stesso coefficiente di framing, come raffigurato nell'esempio 3.6. Risulta evidente che, una volta portati in questa forma, sono equivalenti.

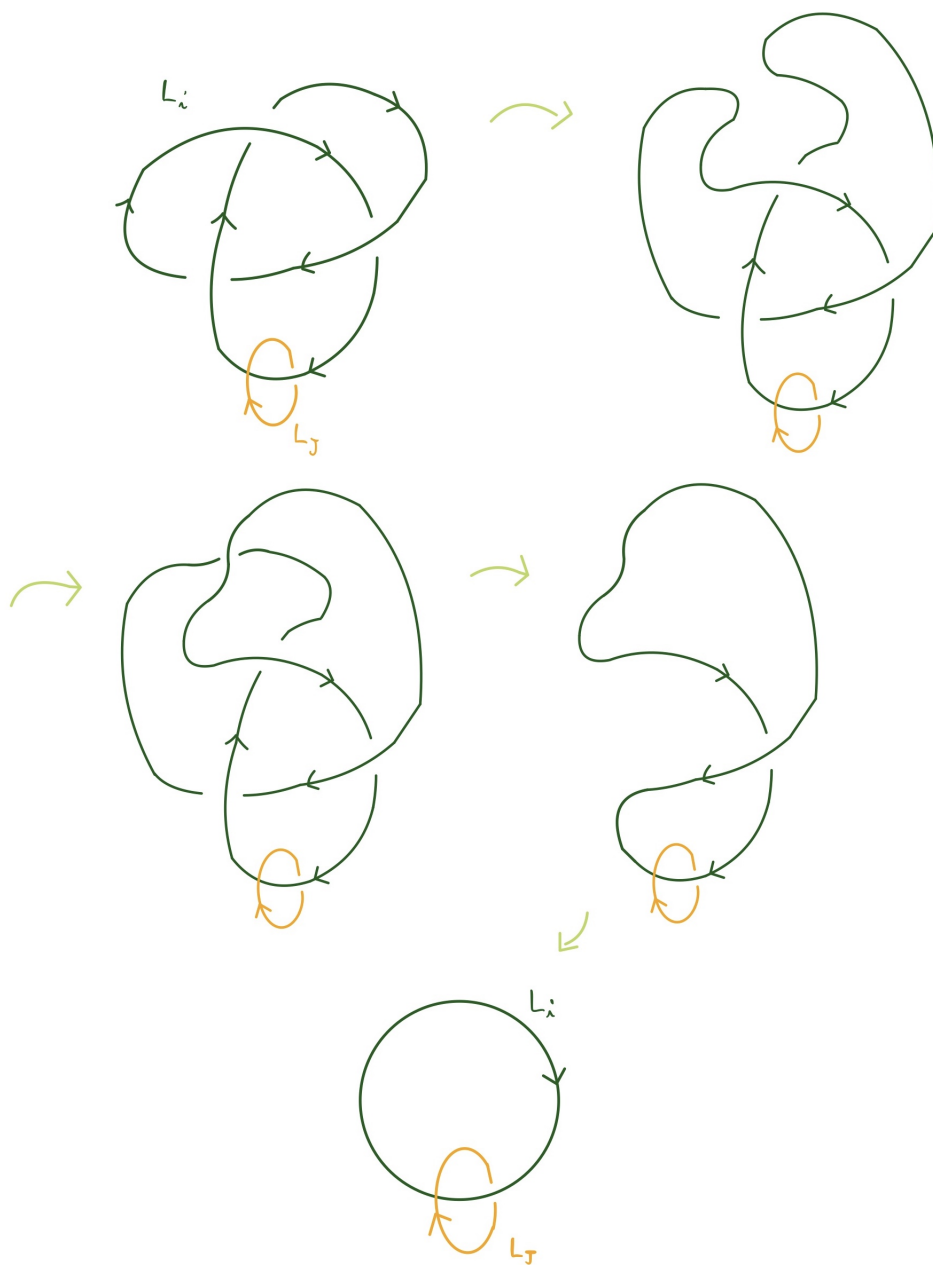


Figura 3.6: Banalizzazione di un nodo a trifoglio

Passo Induttivo

Sia $n \geq 2$. Sia F una superficie di Seifert per L_1 . Rimuovendo dei dischi su F , centrati nei punti dove F interseca le altre componenti di L , si costruisce un cobordismo Σ in $\mathbb{S}^3 \setminus L_2 \cup \dots \cup L_n$ tra L_1 e una unione di meridiani orientati $m_1 \cup \dots \cup m_k$ di $L_2 \cup \dots \cup L_n$.

Nota: Si può assumere che almeno un'altra componente intersechi F , altrimenti

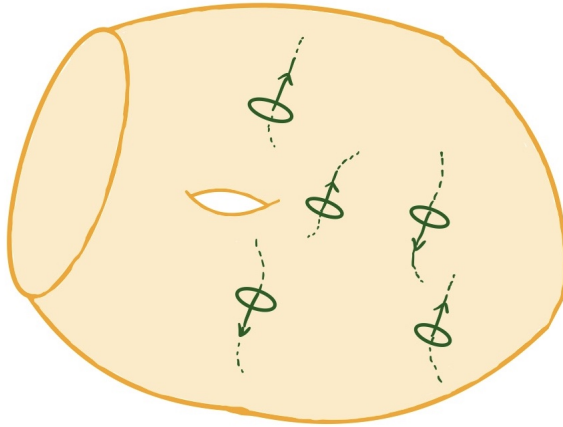


Figura 3.7: Cobordismo tra L_1 e una unione di meridiani delle altre componenti

la tesi segue subito dall'ipotesi induttiva e dal caso base già visto. Senza ledere la generalità del problema supponiamo che L_2 intersechi F , cioè $lk(L_1, L_2) \neq 0$.

Fatto: [5] Se $h : \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{S}^1$ ha grado 0, allora si può estendere a una mappa $\Sigma \rightarrow \mathbb{S}^1$.

Usando il fatto citato sopra, possiamo convertire Σ in un cobordismo con framing tra L e $\tilde{L} = L_2 \cup \dots \cup L_n \cup m_1 \cup \dots \cup m_k$, mettendo dei framing opportuni sui meridiani. Inoltre tra le possibili scelte possiamo fare in modo che al più un meridiano \tilde{m} di L_2 abbia framing non banale e il segno di $lk(L_1, L_2)$ sia lo stesso di $lk(\tilde{m}, L_2)$. Se $lk(L_1, L_2) > 0$, poniamo $fr(\tilde{m}) = fr(L_1)$, altrimenti lo prendiamo di segno negativo.

Con la mossa locale illustrata nel passo base, uniamo le coppie di meridiani di L_j orientati in modo discorde, senza coinvolgere \tilde{m} , in modo che alla fine rimangano solo meridiani orientati in modo concorde con $\tilde{m} \quad \forall j = 2 \dots n$.

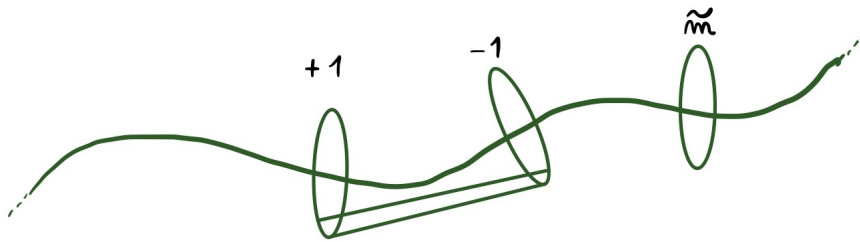


Figura 3.8: Cancellazione di due meridiani

Poichè $A(L) = A(L')$, possiamo fare la stessa costruzione su L' , ottenendo in particolare un meridiano \tilde{m}' di L'_2 con framing $fr(L_1) = fr(L'_1)$ (l'unico con framing non banale) e dopo le fusioni ricondursi allo stesso numero $lk(L_1, L_j) = lk(L'_1, L'_j)$ di meridiani della componente j -esima, da entrambe le parti. A questo punto per ipotesi induttiva esistono dei cobordismi con framing C_2, \dots, C_n tra le rispettive componenti. Dunque per concludere è sufficiente costruire dei cammini di dischi trasversi in $\mathbb{S}^3 \times [0, 1]$ che congiungano i meridiani in $\mathbb{S}^3 \times 0$ ai rispettivi meridiani in $\mathbb{S}^3 \times 1$, come mostra la figura 3.9 □

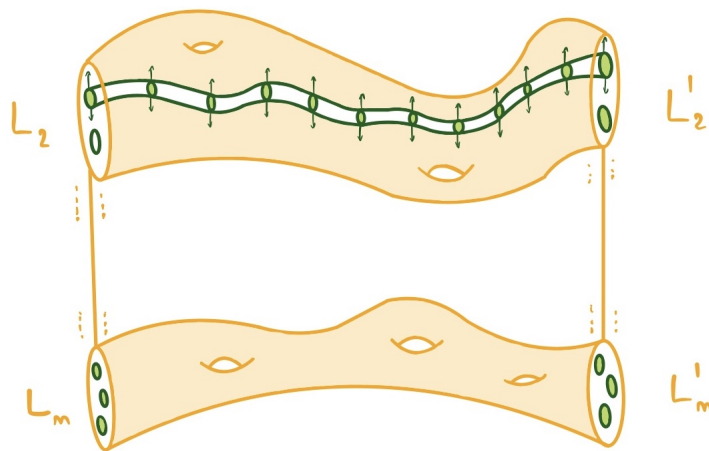


Figura 3.9: Cobordismo con framing tra i meridiani

Per concludere basta provare che la mappa $\Gamma : \pi_3(\mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2) \rightarrow \Omega_{1,n}^{framed}(\mathbb{S}^3)$ è iniettiva. Proponiamo prima la dimostrazione della surgettività di Γ , anche se non necessaria ai fini della dimostrazione del teorema, in quanto contiene alcune idee che si ripeteranno in seguito, ed è quindi utile per capire meglio le argomentazioni successive.

Proposizione 3.3.4. Γ è surgettiva.

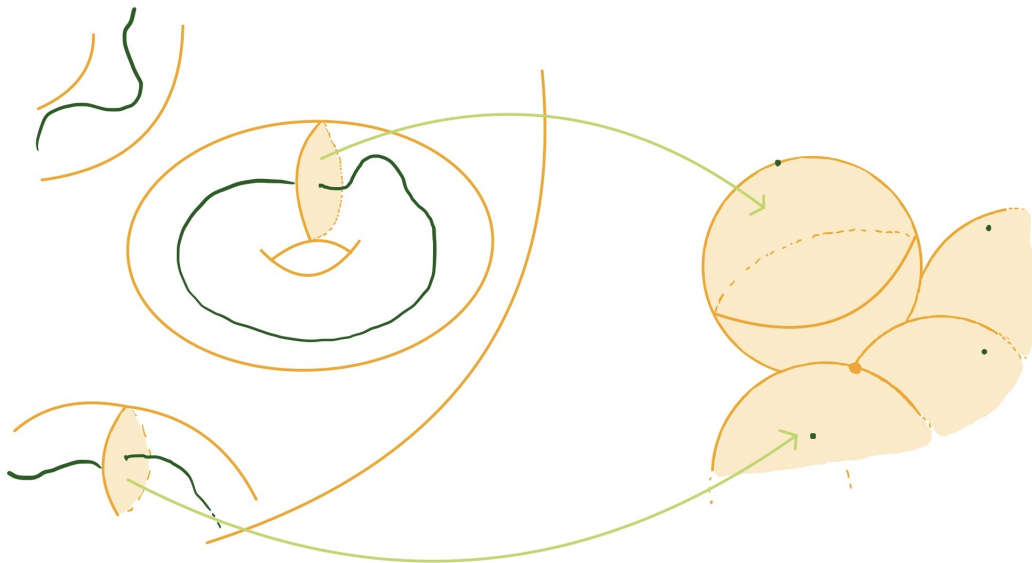
Dimostrazione. Sia $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ un link in \mathbb{S}^3 e siano $W_1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2 \dots W_n = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ le parti interne degli n tori solidi dati dai framing delle componenti di L . Il bouquet di \mathbb{S}^2 privato del punto base è omeomorfo all'unione disgiunta di n copie di \mathbb{B}^2 . Scegliamo un omeomorfismo γ di $\mathbb{B}^2 \cup \dots \cup \mathbb{B}^2$ che mandi i punti p_i selezionati all'inizio della costruzione nel centro dei dischi. Consideriamo la mappa

$$\gamma^{-1} \circ \pi : W_1 \cup \dots \cup W_n \rightarrow \mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2$$

dove π indica la proiezione sulla seconda componente. Estendiamola a una mappa

$$\phi_L : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2$$

mandando $\mathbb{S}^3 \setminus (W_1 \cup \dots \cup W_n)$ nel punto base del bouquet. Notiamo che $\phi^{-1}(p_i)$ è l'immagine di $\mathbb{S}^1 \times 0$ tramite il framing cioè L_i . Dunque $\Gamma([\phi]) = [L]$. \square



Teorema 3.3.5. (Thom, Pontryagin) Se $[L_\phi] = [L_{\phi'}]$, allora ϕ è omotopa in modo liscio a ϕ' .

Dimostrazione. Sia $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$ un cobordismo con framing da L_ϕ a $L_{\phi'}$. Innanzitutto costruiamo una omotopia

$$H : \mathbb{S}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2$$

tale che $H^{-1}(p_1) = C_1, \dots, H^{-1}(p_n) = C_n$ e il framing portato indietro dall' i -esima copia di \mathbb{S}^2 coincidono con il framing sul corrispondente cobordismo C_i .

Siano

$$h_i : C_i \times \mathbb{R}^2 \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{S}^3 \times [0, 1]$$

le mappe date dai framing sui C_i . Siano inoltre $\gamma_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus b_0$ (dove b_0 è il punto base del wedge) un omeomorfismo che manda l'origine in p_i .

Definiamo H come segue : se $y = (x, t) \in V_i$ per qualche i , poniamo $H(x, t) = \gamma_i \circ \pi \circ h_i^{-1}$ dove π indica la proiezione su \mathbb{R}^2 , mentre se $y \in \mathbb{S}^3 \times [0, 1] \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_n)$ poniamo $H(y) = b_0$. Osserviamo che C_1, \dots, C_n vengono collassati ai punti p_1, \dots, p_n e H è l'omotopia cercata.

Adesso notiamo che, ponendo $H_t(x) = H(t, x)$, le fibre $\phi^{-1}(p_i) = L_i = H_0^{-1}(p_i) \quad i = 1 \dots n$ coincidono come varietà con framing.

Il prossimo passo è provare la seguente :

Asserzione 3.3.6. ϕ è omotopa in modo liscio a H_0

Dimostrazione. Poichè i framing su $\phi^{-1}(p_i)$ e $H_0^{-1}(p_i)$ coincidono, allora $d\phi_x = dH_{0x} \quad \forall x \in L$.

Supponiamo dapprima che ϕ coincida con H_0 sulla unione delle parti interne dei tori solidi $W = W_1 \dots W_n$ dati dai framing. Allora in questo caso, se indichiamo con $h : (\mathbb{S}^2 \setminus p_1) \cup \dots \cup (\mathbb{S}^2 \setminus p_n) \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \dots \cup \mathbb{R}^2$ la mappa ottenuta incollando le proiezioni stereografiche, è sufficiente considerare la seguente omotopia liscia tra ϕ e H_0 :

$$F(x, t) = \phi(x) \quad \text{se } x \in W$$

$$F(x, t) = h^{-1}(t \cdot h(\phi(x)) + (1 - t) \cdot h(H_0(x))) \quad \text{altrimenti}$$

Quindi basta deformare ϕ con una piccola omotopia in modo che coincida con H_0 in W . Sia h come sopra e identifichiamo ogni W_i con $L_i \times \mathbb{R}^2$; consideriamo $f, g : (L_1 \times \mathbb{R}^2) \cup \dots \cup (L_n \times \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \dots \cup \mathbb{R}^2$ le mappe date rispettivamente da $h \circ \phi$ e $h \circ H_0$ con $df_{(x,0)} = dg_{(x,0)}$ uguali alla proiezione su \mathbb{R}^2 .

Sia c una costante per cui

$$f(x, y) \cdot y > 0 \quad g(x, y) \cdot y > 0$$

se $0 < \|y\| < c$. Possiamo trovarla grazie alle disuguaglianze che seguono. Dallo sviluppo di Taylor si perviene a

$$\|f(x, y) - y\| \leq c_1 \|y\|^2 \quad \text{se} \quad \|y\| \leq 1$$

Da cui

$$|(f(x, y) - y) \cdot y| \leq c_1 \|y\|^3$$

e quindi

$$f(x, y) \cdot y \geq \|y\|^2 - c_1 \|y\|^3 > 0 \quad \text{per} \quad 0 < \|y\| < \min(c_1^{-1}, 1).$$

Analogamente per g . Sia inoltre $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una mappa liscia tale che

$$\lambda(y) = 1 \quad \text{per} \quad \|y\| \leq \frac{c}{2}$$

$$\lambda(y) = 0 \quad \text{per} \quad \|y\| \geq c.$$

Ora l'omotopia

$$(1 - \lambda(y)t)f(x, y) + \lambda(y)tg(x, y)$$

deforma f in una mappa che coincide con g se $\|y\| < \frac{c}{2}$, e se $\|y\| \geq c$ coincide con f . Da cui la tesi essendo h un omeomorfismo. \square

Per l'asserzione H_0 è omotopa a ϕ e H_1 è omotopa a ϕ' , da cui ϕ è omotopa a ϕ' . \square

Analogamente se consideriamo l'insieme costituito dalle classi di link in \mathbb{S}^3 a meno di framed cobordismo, che denotiamo con $\Omega_1^{\text{framed}}(\mathbb{S}^3)$ ⁹, si dimostra il caso classico del Teorema di Thòm-Pontryagin.

Teorema 3.3.7. (Thom-Pontryagin, caso classico [8])

$$\pi_3(\mathbb{S}^3) \cong \Omega_1^{\text{framed}}(\mathbb{S}^3)$$

Alla luce del Teorema di Thòm-Pontryagin possiamo infine discutere il caso lasciato aperto all'inizio, in cui alcune fibre $\phi^{-1}(p_i)$ sono sconnesse.

Supponiamo che la fibra i -esima sia sconnessa. Utilizzando la mossa locale illustrata nel Teorema 3.3.3, possiamo unire le componenti connesse di $\phi^{-1}(p_i)$ ottenendo un nodo K framed cobordante a $\phi^{-1}(p_i)$, da cui per il Teorema 3.3.7 esiste ϕ' omotopa a ϕ tale che $\phi'^{-1}(p_i) = K$.

Ciò conclude la dimostrazione del teorema di Whitehead.

⁹La differenza è che in questo caso non vi è la restrizione sul numero di componenti fissato

Esempio

Sia $\varphi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ la fibrazione di Hopf. La fibra di un punto è il nodo banale con coefficiente di framing $+1$, quindi $A(L) = [+1]$ e per quanto visto è anche la forma di intersezione di $\mathbb{S}^2 \cup_{\varphi} \mathbb{D}^4$. Dunque per Whitehead, avendo calcolato in precedenza $Q_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} = [+1]$, si deduce che $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ è ottenuto, a meno di equivalenza omotopica, incollando una 4 cella su \mathbb{S}^2 tramite la mappa di Hopf.

Il metodo dimostrativo utilizzato ha una interessante conseguenza topologica.

Corollario 3.3.8.

$$\pi_3(\mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Dimostrazione. E' immediato verificare che la mappa $[L] \rightarrow A(L)$ è surgettiva, quindi la mappa $\Psi : \pi_3(\mathbb{S}^2 \vee \dots \vee \mathbb{S}^2) \rightarrow S(n, \mathbb{Z})$ è bigettiva. Da cui la tesi essendo Ψ un omomorfismo di gruppi additivi. \square

Bibliografia

- [1] J. M. Bloom. *The local structure of smooth maps of manifolds*. PhD thesis, Harvard University, 2004.
- [2] A. Feragen. *A topological manifold is homotopy equivalent to some CW-complex*. PhD thesis, 2004.
- [3] A. Fomenko. *Homotopical Topology*. Moscow university press, 1969.
- [4] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. 2002.
- [5] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer verlag New York Heidelberg Berlin, 1976.
- [6] D. Husemoller J. Milnor. *Symmetric Bilinear forms*. Springer verlag New York Heidelberg Berlin, 1970.
- [7] J. Milnor. On simply connected 4 manifolds. page 128, 1940.
- [8] J. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. University press of Virginia, 1965.
- [9] L. Tu R. Bott. *Differential forms in algebraic topology*. Springer Verlag New York Inc., 1982.
- [10] A. Scorpan. *The Wild World of 4-Manifolds*. American Mathematical society, Rhode island, 2005.
- [11] Renè Thom. *Sous-variétés et classes d'homologie des variétés différentiables*. Accademie scentifque de Paris, 1951.
- [12] J. H Whitehead. *On simply connected 4 dimensional polyhedra*. Oxford University press, 1948.

Elenco delle figure

2.1	A sinistra il link di Hopf, a destra la banda di Hopf	6
3.1	Il segno a un incrocio	14
3.2	Modifiche da apportare	14
3.3	Algoritmo per il nodo a trifoglio	15
3.4	Portare indietro il framing	18
3.5	Mossa locale	21
3.6	Banalizzazione di un nodo a trifoglio	22
3.7	Cobordismo tra L_1 e una unione di meridiani delle altre componenti	23
3.8	Cancellazione di due meridiani	24
3.9	Cobordismo con framing tra i meridiani	24