Algebre di Clifford e gruppo Spin

Marco Sanna, Alessio Siniscalchi

1 Giugno 2023

Indice

Introduzione

Il primo obiettivo di questa lezione è costruire esplicitamente il gruppo $\mathrm{Spin}(n)$, che è già stato definito come il gruppo di Lie semplicemente connesso con algebra di Lie $\mathfrak{so}(n)$; vediamo che $\mathrm{Spin}(n)$ si costruisce esplicitamente come sottogruppo moltiplicativo del gruppo delle unità dell'*algebra di Clifford* C di una forma quadratica q non degenere, e costruiamo esplicitamente il rivestimento doppio $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$, e l'algebra di Lie $\mathfrak{so}(n)$ come sottoalgebra dell'algebra di Lie di C. Nella seconda parte, vediamo come l'algebra di Clifford complessa ha una struttura di algebra di matrici su un certo spazio vettoriale, detto *spazio degli spinori*; tramite questa struttura, costruiamo le *rappresentazioni spin* di $\mathfrak{so}(n)$. Facciamo poi dei cenni all'irriducibilità delle rappresentazioni spin, e le utilizziamo per ricavare in un nuovo modo gli isomorfismi noti per $n \leq 6$.

1 Algebre di Clifford

Siano K un campo, che supponiamo di caratteristica diversa da 2, V un K-spazio vettoriale, b una forma bilineare simmetrica su V, e q la forma quadratica associata a b. Saremo generalmente interessati al caso $K = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$.

Osservazione 1. Ricordiamo che b e q si possono determinare l'una dall'altra tramite le relazioni:

$$q(v) = b(v, v), \quad v \in V,$$

$$b(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w)), \quad v, w \in V;$$

la seconda di queste relazioni è detta *identità di polarizzazione*.

1.1 Proprietà universale

Definizione 1. L'**algebra di Clifford** della coppia (V, q) è una coppia (C, j), dove C è una K-algebra associativa e $j : V \to C$ è una mappa K-lineare che soddisfa la proprietà:

$$j(v)^2 = q(v), \quad v \in V;$$

richiediamo inoltre che (C, v) soddisfi la seguente proprietà universale: per ogni coppia (A, u), dove A è una K-algebra associativa e $u : V \to A$ è una mappa K-lineare con $u(v)^2 = q(v)$ per $v \in V$, si ha un unico $\bar{u} : C \to A$, omomorfismo di K-algebre che faccia commutare il diagramma:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\bar{u}"] & A \\ V \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

Osservazione 2. Essendo definita da una proprietà universale, abbiamo che l'algebra di Clifford C è unica nel seguente senso: se (C, j) e (C', j') sono algebre di Clifford di (V, q), allora esiste un unico isomorfismo di K-algebre che faccia commutare il diagramma:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\sim"] & C' \\ V \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "j'"'] & \end{tikzcd}$$

Denotiamo con $C(V, q)$ l'algebra di Clifford della coppia (V, q).

1.2 Costruzione tramite l'algebra tensoriale

Consideriamo l'algebra tensoriale $\mathcal{T}(V)$ di V, e il suo ideale bilatero:

$$\mathcal{I} := \mathcal{I}_q := \langle v \otimes v - q(v) : v \in V \rangle.$$

Consideriamo la mappa $J : V \to \mathcal{T}(V)/\mathcal{I}$ data dalla composizione dell'inclusione di V in $\mathcal{T}(V)$ e dalla proiezione al quoziente.

Osservazione 3. La coppia $(\mathcal{T}(V)/\mathcal{I}, J)$ è un'algebra di Clifford per (V, q). Osserviamo che nell'algebra di Clifford si ha, utilizzando la formula di polarizzazione, la relazione:

$$v \cdot w + w \cdot v = 2b(v, w), \quad v, w \in V;$$

in particolare, se v, w sono ortogonali, anticommutano.

Proposizione 1. *Sia $\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n$ una base di V. Allora gli elementi:*

$$\mathsf{e}_I := \mathsf{e}_{i_1} \cdot \cdots \cdot \mathsf{e}_{i_k},$$

al variare del multi-indice $I = (i_1, \ldots, i_k)$ con $0 \leq k \leq n, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, formano una K-base di $C(V, q)$. In particolare, la mappa J è iniettiva, da cui $V \subseteq C$ canonicamente, e $\dim(C(V, q)) = 2^{\dim(V)}$.

Dimostrazione. È facile vedere che questi elementi generano C, utilizzando le relazioni che la definiscono. Per vedere che sono indipendenti, ci basta mostrare che $\dim(C) = 2^n$; consideriamo i sottospazî:

$$F_k := \operatorname{Span}\{\mathsf{e}_{i_1} \cdot \cdots \cdot \mathsf{e}_{i_l}, \quad l \leq k\},$$

e sia:

$$G_k := \bigoplus_{j=0}^{k} V^{\otimes j};$$

abbiamo una mappa naturale $\varphi : G_k \to F_k$ data dalla restrizione della mappa $\mathcal{T}(V) \to C$; inoltre φ è surgettiva, e ha nucleo:

$$\ker(\varphi) = \mathcal{I} \cap G_k.$$

Osserviamo che si ha:

$$\varphi^{-1}(F_{k-1}) = \operatorname{Span}(G_{k-1} \cup (\mathcal{I} \cap G_k)) = \operatorname{Span}(G_{k-1} \cup (\mathcal{J} \cap G_k)),$$

dove $\mathcal{J}$ è l'ideale dell'algebra tensoriale generato da elementi della forma $v \otimes w + w \otimes v$, ovvero le relazioni che definiscono l'algebra esterna. Abbiamo quindi che φ definisce un isomorfismo:

$$\textstyle\bigwedge^k V = G_k / \operatorname{Span}(G_{k-1} \cup (\mathcal{J} \cap G_k)) \simeq F_k/F_{k-1},$$

da cui $\dim(F_k/F_{k-1}) = \binom{n}{k}$; siccome gli F_k formano una filtrazione crescente di C, con $F_n = C$, abbiamo:

$$\dim(C) = \sum_{i=0}^{n} \dim(F_k/F_{k-1}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

come voluto. □

1.3 Gradazione

Osservazione 4.

- L'algebra $\mathcal{T}(V)$ ha una $\mathbb{Z}/2$-gradazione:

  $$\mathcal{T}(V) = \mathcal{T}(V)^+ \oplus \mathcal{T}(V)^-,$$

  dove:

  $$\mathcal{T}(V)^+ = \bigoplus_{i \text{ pari}} V^{\otimes i}, \qquad \mathcal{T}(V)^- = \bigoplus_{i \text{ dispari}} V^{\otimes i}.$$

- Osserviamo che l'ideale $\mathcal{I}$ è omogeneo rispetto a questa gradazione in quanto generato da elementi in $\mathcal{T}(V)^+$, da cui abbiamo che $C(V, q)$ eredita in maniera naturale una $\mathbb{Z}/2$ gradazione:

  $$C(V, q) = C(V, q)^+ \oplus C(V, q)^-;$$

  chiamiamo *pari* gli elementi di C^+ e *dispari* gli elementi di C^-.

- Scriviamo anche la $\mathbb{Z}/2$-gradazione dell'algebra esterna:

  $$\bigwedge^k V = \bigwedge^+ V \oplus \bigwedge^- V,$$

  dove:
  $$\bigwedge^+ V = \bigoplus_{i \text{ pari}} \bigwedge^i V, \qquad \bigwedge^- V = \bigoplus_{i \text{ dispari}} \bigwedge^i V;$$

  osserviamo che l'algebra esterna è semplicemente l'algebra di Clifford $C(V, 0)$ data dalla forma bilineare identicamente nulla, e questa gradazione coincide a quella data dalla sua struttura di algebra di Clifford.

Evidenziamo un importante automorfismo di C:

Definizione 2. L'**antiautomorfismo di coniugio** su C è definito da:

$$\overline{v_1 \cdot \cdots \cdot v_r} = (-1)^r v_r \cdot \cdots \cdot v_1 \quad \forall v_1 \dots v_r \in V;$$

poichè V genera C come algebra, si estende ad un antiautomorfismo di algebre.

2 Costruzione del gruppo Spin

Per questo capitolo, sia $K = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$.

2.1 Definizione e prime proprietà

Curiosità. Il nome "gruppo Pin" è un gioco di parole di Serre. Infatti il nome Spin proviene da un contesto fisico riferendosi allo spin delle particelle elementari, mentre Serre voleva far intendere che significasse "special Pin" esattamente come SO vuol dire "special orthogonal".

Sia $n \geq 3$, e fissiamo la forma quadratica $q(x) = -|x|^2$.

Definizione 3.

$$\mathrm{Pin}(n) = \{a \in C, \quad a \cdot \overline{a} = 1, \quad a \cdot V \cdot \overline{a} \subseteq V, \quad a \in C^+ \text{ opp. } a \in C^-\}$$
$$\mathrm{Spin}(n) = \mathrm{Pin}(n) \cap C^+$$

In seguito analizzeremo le dimostrazioni nel caso reale, il caso complesso è molto simile, con risultati identici. Sia C^* il sottogruppo degli invertibili di C.

Proposizione 2.

i) $\mathrm{Pin}(n)$ *è un sottogruppo di Lie di* C^* *di dimensione* $n(n-1)/2$

ii) $\mathrm{Spin}(n)$ *è un sottogruppo di Lie di* $\mathrm{Pin}(n)$ *di indice 2 di dimensione* $n(n-1)/2$

Dimostrazione.

i) C^* è un aperto di $C \cong \mathbb{R}^{2^n}$, inoltre dalla scrittura esplicita della moltiplicazione, segue subito che C^* è un gruppo di Lie. Poichè le condizioni che definiscono Pin sono chiuse, Pin è un sottogruppo chiuso di C^*, dunque è un sottogruppo di Lie per un ben noto teorema. Calcoleremo più tardi la dimensione.

ii) Consideriamo l'omomorfismo "segno" $\sigma : \mathrm{Pin} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ che manda un elemento in 1 se è pari, in -1 se è dispari. Notiamo che è surgettivo e $\ker(\sigma) = \mathrm{Spin}$, Spin è un sottogruppo di indice 2. Osserviamo anche che Spin è sia aperto che chiuso in Pin, essendo quest'ultimo e il suo complementare intersezioni di Pin con dei chiusi : C^+ e C^-. Dunque Spin è un sottogruppo di Lie di Pin, e sappiamo anche che hanno la stessa dimensione.

□

2.2 Esempio: $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R})$ e $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{C})$

Studiamo il caso $n = 3$. Sia nel caso reale che complesso si ha che $\dim C^+ = 4$. Sia $e_1 \dots e_n$ una base ortogonale di V, allora una base di C^+ è data da $1, v_1 = e_1e_2, v_2 = e_2e_3, v_3 = e_3e_1$. Inoltre, dall'osservazione 3 discendono le relazioni $v_iv_j = -v_jv_i \quad v_i^2 = -1$ e il coniugio si scrive come :

$$\overline{a + bv_1 + cv_2 + dv_3} = a - bv_1 - cv_2 - dv_3.$$

Dunque:

$$(a + bv_1 + cv_2 + dv_3)(\overline{a + bv_1 + cv_2 + dv_3}) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Quindi $\mathrm{Spin}(3, \mathbb{R}) = \mathbb{S}^3$ con la struttura di gruppo data dai quaternioni.

Sia ora $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Identifichiamo

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $w \in \mathrm{Spin}(3, \mathbb{C})$ si scrive come

$$w = a + bv_1 + cv_2 + dv_3 = \begin{bmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{bmatrix}$$

che ha determinante $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = w\overline{w} = 1$. Ne segue che $\mathrm{Spin}(3, \mathbb{C}) \cong SL(2, \mathbb{C})$.

2.3 Il rivestimento $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$

Definizione 4. Introduciamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Pin}(n) &\longrightarrow O(n) \\ a &\longmapsto \psi_a \end{aligned}$$

dove $\psi_a(v) = \sigma(a)a \cdot v \cdot \overline{a} \quad v \in V$.

Verifichiamo che ψ è ben definita. Sia $v \in V$, ricordando la relazione $q(v) = v \cdot v$ si ottiene:

$$|\psi_a(v)|^2 = -q(a \cdot v \cdot \overline{a}) = -(a \cdot v \cdot \overline{a})^2 =$$

$$= -a \cdot v \cdot \overline{a} \cdot a \cdot v \cdot \overline{a} = -a \cdot v \cdot v \cdot \overline{a} = -aq(v)\overline{a} = |v|^2$$

Conviene osservare adesso che Pin contiene tutti i vettori normalizzati di V. Sia infatti $w \in V$ con $q(w) = -1$. Infatti

$$w \cdot \overline{w} = w \cdot (-w) = -q(w, w) = 1$$

e quindi

$$\psi_w(w) = -w \cdot w \cdot \overline{w} = -w$$

Se invece v è ortogonale a w, usando l'osservazione 3 si ha :

$$\psi_w(v) = -w \cdot v \cdot \overline{w} = v \cdot w \cdot \overline{w} = v$$

Dunque $w \cdot v \cdot \overline{w} \in V \quad \forall v \in V$, come desiderato. Questo mostra anche che, dato w come sopra, ψ_w è la riflessione rispetto all'iperpiano ortogonale ad w. Sia ora φ la restrizione di ψ a Spin.

Proposizione 3. $\varphi(a) = \varphi_a \in \mathrm{SO}(n)$.

Dimostrazione. Sia $a \in \mathrm{Spin}$. Assumiamo dapprima il seguente fatto: ogni elemento di Pin si scrive come $v_1 \cdot \dots \cdot v_k$ con $v_i \in V$. Da quest'ultimo e dalle condizioni che definiscono Spin, possiamo scrivere $a = v_1 \cdot \dots \cdot v_s$ con $v_i \in V$ normalizzati e s pari. Quindi $\varphi(a) = \varphi(v_1) \dots \varphi(v_s)$ è composizione di un numero pari di riflessioni. Quindi $\det \varphi_a = 1$. Da cui la tesi. □

Teorema 4. *Le seguenti sono successioni esatte di gruppi di Lie :*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{Pin}(n) \xrightarrow{\psi} \mathrm{O}(n) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(n) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{SO}(n) \longrightarrow 0.$$

Quindi, per un teorema noto, ψ e φ sono rivestimenti lisci a due fogli; inoltre, si ha che Spin *è connesso; quindi dato che $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) \cong \mathbb{Z}/2$, si ha che* $\mathrm{Spin}(n)$ *è il rivestimento universale di* $\mathrm{SO}(n)$*.*

Osservazione 5. Dal teorema si ricavano anche le dimensioni:

$$\dim(\mathrm{Spin}(n)) = \dim(\mathrm{Pin}(n)) = \dim(\mathrm{O}(n)) = n(n-1)/2.$$

Dimostrazione.

i) Per cominciare osserviamo che ψ è liscia, essendo polinomiali nelle coordinate. Poichè ogni elemento di $\mathrm{O}(n)$ si scrive come prodotto di riflessioni, e se $w \in V, q(w) = -1$ ψ_w è la riflessione rispetto all'ortogonale a w, ψ è surgettiva. Dimostriamo che $\ker(\psi) = \{+1, -1\}$. Una inclusione è ovvia. Sia $a \in \ker(\psi)$; supponiamo prima che a sia dispari: abbiamo che $a \cdot v = -v \cdot a$, per ogni $v \in V$; dunque a anticommuta con ogni elemento dispari $b \in C^-$; in particolare anticommuta con sé stesso, da cui si ha che $a^2 = 0$, da cui $a = 0$ perché a è invertibile; questo è assurdo, dunque a era pari. Supponiamo ora a pari. Allora $a \cdot v \cdot a^{-1} = v \quad \forall v \in V$, quindi $a \in Z(C)$, dove Z indica il centro. Dunque per la proposizione 8, dimostrata nel seguito, si ha $a \in \mathbb{C}$; ma $a \cdot \overline{a} = a^2 = 1$ su $\mathbb{C}$, da cui $a = 1$ o -1, come voluto. Adesso possiamo dimostrare il fatto lasciato in sospeso nella asserzione sopra. Sia $a \in \mathrm{Pin}$, $\psi(a) \in \mathrm{O}(n)$ è prodotto di riflessioni, quindi per quanto visto esistono $v_1 \dots v_k \in V$ tali che $\psi(a) = \psi(v_1 \cdot \dots \cdot v_k)$. Ma $\ker(\psi) = \{1, -1\}$, da cui $a = \pm v_1 \cdot \dots \cdot v_k$. Infine poichè un elemento di $SO(n)$ si scrive come prodotto di un numero pari di riflessioni, anche φ è surgettiva.

ii) Per dimostrare la connessione di Spin, è sufficiente mostrare che esiste un cammino dentro Spin che connette i punti della fibra, cioè 1 con

-1. Sia $\{e_1, \dots e_n\}$ una base ortonormale di V. Consideriamo $A = \{a + be_1e_2 | a^2 + b^2 = 1\}$ e verifichiamo che $A \subseteq \text{Spin}$:

$$(a + be_1e_2)(\overline{a + be_1e_2}) = (a + be_1e_2)(a - be_1e_2) = a^2 + b^2 = 1$$

se $i \neq 1, 2$

$$(a + be_1e_2)e_i(a - be_1e_2) = a^2e_i - b^2e_1e_2e_ie_1e_2 + abe_1e_2e_i - abe_ie_1e_2 =$$

$$a^2e_i + b^2e_1^2e_2^2e_i = e_i \in V$$

I casi $i = 1, 2$ sono analoghi. E' evidente che $A \cong \mathbb{S}^1$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $A \cong \mathbb{C}^*$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ed entrambi sono spazi connessi per archi. Da cui la tesi essendo $1, -1 \in A$.

$\square$

2.4 Algebra di Lie di Spin

Osservazione 6. Siccome φ è un diffeomorfismo locale, abbiamo che l'algebra di Lie di Spin è un'algebra di Lie isomorfa a $\mathfrak{so}_n$. Osserviamo che C è un'algebra associativa, dunque ha una struttura di algebra di Lie con il bracket dato dal commutatore. Poiché Spin è un sottogruppo di Lie di C^*, la sua algebra di Lie è una sottoalgebra di C.

Proposizione 5. *L'algebra di Lie di* Spin *è:*

$$\text{Span}(v \cdot w - w \cdot v : v, w \in V).$$

Dimostrazione. Sia T il tangente a Spin nell'identità, e sia

$$W := \text{Span}(v \cdot w - w \cdot v : v, w \in V).$$

Osserviamo che W ha dimensione $\frac{n(n-1)}{2} = \dim(T)$, con una base data da $\mathsf{e}_i\mathsf{e}_j - \mathsf{e}_j\mathsf{e}_i$, per $1 \leq i < j \leq n$. Abbiamo quindi che è sufficiente mostrare $W \subseteq T$. Gli elementi di W sono ovviamente pari, quindi appartengono a $T_1C^+ = C^+$. Ricordiamo che per una varietà embedded che localmente è luogo di zeri di una mappa liscia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, il tangente si può calcolare come kernel del differenziale di f. Consideriamo la mappa $h : a \to a \cdot \overline{a} - 1$, si ha che $d(h)_1 = a + \overline{a}$ ed è immediato verificare che $\forall a \in W$ vale $a + \overline{a} = 0$. Differenziando la condizione $a \cdot v \cdot \overline{a} \subseteq V \quad \forall v \in V$ nell'identità, si ottiene

$av + v\bar{a} \in V \quad \forall v \in V$ che si riscrive come $av - va \in V \quad \forall v \in V$. Quindi dobbiamo verificare che $(vw-wv)u-u(vw-wv) = vwu-uvw+uwv-wvu \in V \quad \forall u, v, w \in V$. Usando l'osservazione 3, si ha che:

$$\begin{aligned} vwu - uvw &= vwu - (-vuw + 2b(v,u)w) = \\ &= vwu + v(-wu + 2b(u,w)) - 2b(v,u)w = \\ &= 2b(u,w)v - 2b(v,u)w \in V, \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

2.5 Sottogruppo dei commutatori

Ci sarà utile in seguito calcolare il sottogruppo dei commutatori di Spin:

Proposizione 6.

$$[\mathrm{Spin}(n), \mathrm{Spin}(n)] = \mathrm{Spin}(n), \quad \forall n \geq 3.$$

Dimostrazione. Un calcolo esplicito che si trova in [2], pagina 34, mostra che Spin è generato dai commutatori della forma $[v, w]$, con $v, w \in V$ di norma 1. Quindi è sufficiente provare che $\forall v, w$ come sopra, esistono $a, b \in$ Spin tali che $[a, b] = [v, w]$. Sia $z \in V$ ortogonale a v e a w con $q(w) = -1$. Allora vz e wz appartengono a Spin, inoltre si ha che :

$$\begin{aligned} [vz, wz] &= vzwz(vz)^{-1}(wz)^{-1} = vzwzzvzw = \\ &= -vzwvzw = -vzzwvw = vwvw = [v, w] \end{aligned}$$

come al solito abbiamo usato il fatto che z anticommuta con v e con w per ortogonalità. Da cui quanto desiderato. □

3 Rappresentazioni spin di $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$

Sia, da qui in avanti, $K = \mathbb{C}$, da cui $V \simeq \mathbb{C}^n$.

3.1 Spazio degli spinori

Osservazione 7.

- Se $n = \dim(V) = 2m$ è pari, possiamo trovare una base $\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n$ di V tramite cui la forma bilineare simmetrica b si rappresenti con la matrice:
$$\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id}_m \\ \mathrm{Id}_m & 0 \end{bmatrix};$$
possiamo scrivere:
$$V = W \oplus W',$$
dove $W = \mathrm{span}(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_m)$ e $W' = \mathrm{span}(\mathsf{e}_{m+1}, \ldots, \mathsf{e}_n)$ sono due sottospazî isotropi (cioè, b ristretta ad essi è la forma nulla).

- Se $n = \dim(V) = 2m+1$ è dispari, possiamo trovare una base $\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n$ di V tramite cui la forma bilineare simmetrica b si rappresenti con la matrice:
$$\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id}_m & 0 \\ \mathrm{Id}_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$
possiamo scrivere:
$$V = W \oplus W' \oplus U,$$
dove $W = \mathrm{span}(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_m)$ e $W' = \mathrm{span}(\mathsf{e}_{m+1}, \ldots, \mathsf{e}_{2m})$ sono due sottospazî isotropi, e $U = \mathrm{span}(\mathsf{e}_n)$ è una retta ortogonale a W e W'.

Definizione 5. Definiamo lo **spazio degli spinori**:
$$S := \bigwedge{}^{*} W;$$
definiamo inoltre:
$$S^+ := \bigwedge{}^{+} W, \quad S^- := \bigwedge{}^{-} W.$$

Osserviamo che si ha una decomposizione $S = S^+ \oplus S^-$. In questa sezione dimostriamo la seguente proposizione, in cui costruiamo una struttura di C-modulo sugli spazî degli spinori, e vediamo come questa struttura induce degli isomorfismi espliciti per C e C^+ con degli spazî di matrici.

Proposizione 7.

- *Lo spazio degli spinori ha una naturale struttura di C-modulo, dove $C = C(V, q)$ è l'algebra di Clifford;*

- *Se $n = 2m$ è pari, questa struttura induce un isomorfismo:*
$$C \simeq \mathrm{End}(S),$$
ed inoltre si ha:
$$C^+ \simeq \mathrm{End}(S^+) \oplus \mathrm{End}(S^-);$$

- *Se $n = 2m+1$ è dispari, queste strutture inducono un isomorfismo:*

$$C \simeq \mathrm{End}(S) \oplus \mathrm{End}(S),$$

ed inoltre si ha:

$$C^+ \simeq \mathrm{End}(S).$$

Osservazione 8. Prima di dimostrare questo risultato, convinciamoci che abbia senso dimensionalmente: si ha che $\dim(S) = 2^m$, da cui $\dim(\mathrm{End}(S)) = 2^{2m}$; se $n = 2m$ è pari, abbiamo:

$$\dim(C) = 2^n = 2^{2m} = \dim(\mathrm{End}(S)),$$

mentre se $n = 2m+1$ è dispari, abbiamo:

$$\dim(C) = 2^n = 2^{2m+1} = 2^{2m} + 2^{2m} = \dim(\mathrm{End}(S) \oplus \mathrm{End}(S')).$$

Dimostrazione. Per prima cosa, costruiamo una struttura di C-modulo sullo spazio degli spinori; essa è data da un omomorfismo di algebre:

$$\Phi : C \to \mathrm{End}(S);$$

osserviamo che, per la proprietà universale dell'algebra di Clifford, è sufficiente costruire:

$$\Psi : V \to \mathrm{End}(S),$$

lineare, che soddisfi:

$$\Psi(v)^2 = q(v)\mathrm{Id}_S, \quad v \in V. \tag{1}$$

Definiamo, per $v \in W$, $L_v \in \mathrm{End}(S)$, definito da $L_v(\xi) = v \wedge \xi$, per $\xi \in S$; osserviamo che si ha $(L_v)^2 = 0$; inoltre, $L_v(\bigwedge^k W) \subseteq \bigwedge^{k+1} W$. Definiamo, per $w \in W'$, $D_w \in \mathrm{End}(S)$, definito da:

$$D_w(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} 2b(v_i, w)(v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_k),$$

per $v_1, \dots, v_k \in W$, ed estendendolo per linearità a tutto S. Osserviamo che si ha, per $v^k \in \bigwedge^k W$:

$$D_w(v^0) = 0, \quad D_w(v^1) = 2b(v^1, w),$$
$$D_w(v^h \wedge v^k) = D_w(v^h) \wedge v^k + (-1)^h v^h \wedge D_w(v^k),$$

da cui possiamo verificare che $(D_w)^2 = 0$ su S; inoltre, si ha $D_w(\bigwedge^k W) \subseteq \bigwedge^{k+1} W$. Definiamo infine $F \in \mathrm{End}(S)$, definito da $F(v^k) = (-1)^k v^k$, per $v^k \in \bigwedge^k W$; osserviamo che F anticommuta con L_v e anche con D_w; osserviamo inoltre che $F^2 = \mathrm{Id}$.

Vediamo prima il caso $n = 2m$ pari. Ricordando la decomposizione $V = W \oplus W'$, definiamo:

$$\Psi(v + w) = L_v + D_w, \quad v \in W,\, w \in W'.$$

Osserviamo che si ha, per $\xi \in S$:

$$\begin{aligned}\Psi(v + w)^2(\xi) &= (L_v)^2(\xi) + (L_v \circ D_w)(\xi) + (D_w \circ L_v)(\xi) + (D_w)^2(\xi) = \\ &= v \wedge D_w(\xi) + D_w(v \wedge \xi) = \\ &= v \wedge D_w(\xi) + D_w(v) \wedge \xi - v \wedge D_w(\xi) = \\ &= 2b(v, w)\xi = q(v + w)\xi,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato le proprietà di L_v e D_w viste sopra, e l'identità di polarizzazione; abbiamo dunque che Ψ verifica la proprietà 1 e si può dunque estendere a $\Phi : C \to \mathrm{End}(S)$ come voluto.

Vediamo ora il caso $n = 2m + 1$ dispari. Ricordando la decomposizione $V = W \oplus W' \oplus U$, possiamo definire due morfismi $\Psi^+, \Psi^- \in \mathrm{End}(S)$ come:

$$\Psi^{\pm}(v + w + \lambda \mathsf{e}_n) = L_v + D_w \pm \lambda F, \quad v \in W,\, w \in W',\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Osserviamo che si ha, per $\xi \in S$:

$$\begin{aligned}\Psi^{\pm}(v + w + \lambda \mathsf{e}_n)^2(\xi) =& (L_v)^2(\xi) + (L_v \circ D_w)(\xi) \pm \lambda (L_v \circ F)(\xi) + \\ &+ (D_w \circ L_v)(\xi) + (D_w)^2(\xi) \pm \lambda (D_w \circ F)(\xi) + \\ &\pm \lambda [(F \circ L_v) + (F \circ D_w)](\xi) + \lambda^2 F^2(\xi) = \\ =& v \wedge D_w(\xi) + D_w(v \wedge \xi) + \lambda^2 \xi = \\ =& v \wedge D_w(\xi) + D_w(v) \wedge \xi - v \wedge D_w(\xi) + \lambda^2 \xi = \\ =& [2b(v, w) + \lambda^2]\xi = q(v + w + \lambda \mathsf{e}_n)\xi,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato le proprietà di L_v, D_w e F viste sopra, l'identità di polarizzazione, e l'ortogonalità di U con $W \oplus W'$; abbiamo dunque che $\Psi^{\pm}$ verificano la proprietà 1 e si possono dunque estendere a $\Phi^{\pm} : C \to \mathrm{End}(S)$ come voluto.

Vogliamo poi verificare che nel caso pari Φ è un isomorfismo, mentre nel caso dispari $\Phi^+ \times \Phi^-$ lo è. Siccome abbiamo già verificato che le dimensioni del dominio e del codominio coincidono, basta verificarne la surgettività. Questo è visto in [2], nei teoremi 8.6 e 8.13, utilizzando il teorema di Wedderburn.

Per concludere, vogliamo vedere come questo isomorfismo si comporta su C^+. Osserviamo che abbiamo una $\mathbb{Z}/2$-gradazione su $\mathrm{End}(S)$ in cui la parte pari è data dagli omomorfismi che preservano S^+ ed S^-, ed è dunque isomorfa a $\mathrm{End}(S^+) \oplus \mathrm{End}(S^-)$, e la parte dispari è data dagli omomorfismi che scambiano questi due spazi. Osserviamo che, nel caso pari, Φ rispetta questa gradazione, infatti: Ψ manda un vettore $v + w$ nell'elemento $L_v + D_w$, che è dispari; abbiamo quindi che Φ si restringe ad un isomorfismo:

$$C^+ \simeq \mathrm{End}(S^+) \oplus \mathrm{End}(S^-),$$

come voluto. Nel caso dispari, invece, possiamo considerare la $\mathbb{Z}/2$-gradazione su

$$\mathrm{End}(S) \oplus \mathrm{End}(S)$$

in cui:

$$\text{elementi pari:}(f^+ + f^-, f^+ - f^-), \quad \text{elementi dispari:}(f^+ + f^-, -f^+ + f^-);$$

osserviamo che $\Phi^+ \oplus \Phi^-$ rispetta questa gradazione, infatti: $\Psi^+ \oplus \Psi^-$ manda un vettore $v + w + \lambda \mathsf{e}_n$ nell'elemento

$$(L_v + D_w + \lambda F, L_v + D_w - \lambda F),$$

che è dispari; abbiamo quindi che $\Phi^+ \oplus \Phi^-$ si restringe ad un isomorfismo:

$$C^+ \simeq [\mathrm{End}(S) \oplus \mathrm{End}(S)]^+ \simeq \mathrm{End}(S),$$

come voluto, dove il secondo isomorfismo è semplicemente dato dalla proiezione sul primo fattore. □

Osservazione 9. Possiamo calcolare esplicitamente come questa azione si comporta su una base; per prima cosa modifichiamo la base $\{\mathsf{e}_i\}$ di V, sostituendo e_i con $\frac{1}{4}\mathsf{e}_i$ per $i = 1, \ldots, 2m$, in modo da avere $b(\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_{m+j}) = \frac{1}{2}\delta_{i,j}$; nel caso n dispari, lasciamo e_n invariato. Una base di C è data da:

$$\mathsf{e}_I := \mathsf{e}_{i_1} \cdot \cdots \cdot \mathsf{e}_{i_k}, \quad I = \{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\};$$

una base di S è data da:

$$\xi_I := \mathsf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{e}_{i_k}, \quad I = \{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m\}.$$

Possiamo calcolare, per $i = 1, \dots, m$:

$$\mathsf{e}_i.\xi_I = \mathsf{e}_i \wedge \xi_I = \begin{cases} 0 & i \in I, \\ \pm\xi_{I\cup\{i\}} & i \notin I; \end{cases}$$

$$\mathsf{e}_{m+i}.\xi_I = \sum_{j\in I} (-1)^{j-1} 2b(\mathsf{e}_j, \mathsf{e}_{m+1})\xi_{I\smallsetminus\{j\}} =$$

$$= \begin{cases} 0 & i \notin I, \\ \pm\xi_{I\smallsetminus\{j\}} & i \in I. \end{cases}$$

Da cui abbiamo, per $I, J \subseteq \{1, \dots, m\}$:

$$\mathsf{e}_I.\xi_J = \begin{cases} 0 & I \cap J \neq \varnothing, \\ \pm\xi_{I\cup J} & I \cap J = \varnothing; \end{cases}$$

$$\mathsf{e}_{m+I}.\xi_J = \begin{cases} 0 & I \not\subseteq J, \\ \pm\xi_{J\smallsetminus I} & I \subseteq J. \end{cases}$$

3.2 Prime conseguenze

Osservazione 10. In una lezione precedente, è stato citato ed utilizzato il fatto che *i gruppi di Lie complessi, semplicemente connessi e con algebra di Lie semisemplice ammettono una rappresentazione fedele*; questo fatto è chiaro per i gruppi SL e Sp, che sono già immersi in un'algebra di matrici; con la proposizione precedente abbiamo mostrato questo risultato anche per il gruppo Spin.

Proposizione 8. *$Z(C) \cap C^+ = \mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Se $n = 2m$ è pari, allora $Z(C) = Z(\mathrm{End}(S)) = \mathbb{C}$ è contenuto in C^+, da cui concludiamo. Se $n = 2m + 1$ è dispari, allora $Z(C) = Z(\mathrm{End}(S) \oplus \mathrm{End}(S)) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$; osserviamo che gli scalari sono sempre elementi pari, da cui per la definizione della gradazione di $\mathrm{End}(S) \oplus \mathrm{End}(S)$, concludiamo. □

3.3 Rappresentazioni spin

Definizione 6. Restringendo l'azione di C su S a $\mathfrak{so}_n$, abbiamo una rappresentazione di $\mathfrak{so}_n$ che chiamiamo la **rappresentazione spin**. Se n è pari, chiamiamo S^+ e S^- le **rappresentazioni semi-spin**.

Facciamo dei richiami alla teoria delle rappresentazioni irriducibili di $\mathfrak{so}_n$:

Osservazione 11. Chiamiamo h_i la matrice $E_{i,i} - E_{m+i,m+i}$, $i = 1, \ldots, m$. Le matrici h_i formano una base dell'algebra torale massimale di $\mathfrak{so}_n$, e chiamiamo la sua base duale $\{l_i\}$.

Per $n = 2m$ pari, abbiamo:

Sistema di radici $\Phi = \{\pm l_i \pm l_j\} \simeq D_m$;

Base $\Delta = \{\alpha_1 := l_1 - l_2, \ldots, \alpha_{m-1} := l_{m-1} - l_m, \alpha_m := l_{m-1} + l_m\}$;

Reticolo delle radici $\Lambda_R = \mathbb{Z}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$;

Reticolo dei pesi $\Lambda_W = \mathbb{Z}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \frac{1}{2}(l_1 + \cdots + l_m)\}$;

Si ha $[\Lambda_W : \Lambda_R] = 4$. Sappiamo che le rappresentazioni irriducibili di $\mathfrak{so}_n$ sono parametrizzate dall'intersezione di Λ_W con la camera di Weyl $\mathcal{W}$; in questo caso abbiamo che essa è il semigruppo generato da:

$$l_1,\, l_1 + l_2,\, \ldots,\, l_1 + \cdots + l_{m-2},$$

$$\theta_1 := \frac{1}{2}(l_1 + \cdots + l_m),\, \theta_2 := \frac{1}{2}(l_1 + \cdots + l_{m-1} - l_m).$$

Per $n = 2m + 1$ dispari, abbiamo:

Sistema di radici $\Phi = \{\pm l_i \pm l_j, \pm l_i\} \simeq B_m$;

Base $\Delta = \{\alpha_1 := l_1 - l_2, \ldots, \alpha_{m-1} := l_{m-1} - l_m, \alpha_m := l_m\}$;

Reticolo delle radici $\Lambda_R = \mathbb{Z}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$;

Reticolo dei pesi $\Lambda_W = \mathbb{Z}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \frac{1}{2}(l_1 + \cdots + l_m)\}$;

Si ha $[\Lambda_W : \Lambda_R] = 2$. In questo caso l'intersezione $\Lambda_W \cap \mathcal{W}$ è il semigruppo generato da:

$$l_1,\, l_1 + l_2,\, \ldots,\, l_1 + \cdots + l_{m-1},\, \theta := \frac{1}{2}(l_1 + \cdots + l_m).$$

Ci chiediamo: quali di queste rappresentazioni irriducibili provengono da rappresentazioni di SO_n? La teoria della lezione del 25 maggio ci permette di rispondere a questa domanda:

Proposizione 9. *Sia $\lambda \in \Lambda_W \cap \mathcal{W}$, che scriviamo $\lambda = \lambda_1 l_1 + \cdots + \lambda_m l_m$; allora la rappresentazione $V(\lambda)$ proviene da una rappresentazione di SO_n se e solo se tutti i λ_i sono interi.*

Dimostrazione. Il nucleo della mappa $\mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SO}_n$ è $\{+1, -1\}$. Per il criterio visto nella lezione del 25 maggio, basta dunque verificare che $\lambda(X) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ per X per cui si abbia $\exp(X) = -1$. Osserviamo che si ha $\exp(2\pi i h_i) = -1 \in \mathrm{Spin}_n$ (vedi lemma 23.9 in [1]). Da questo abbiamo che $V(\lambda)$ viene da una rappresentazione irriducibile se e solo se $\lambda(2\pi i h_i) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, che avviene se e solo se $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, come voluto. □

In particolare, le rappresentazioni $V(\theta_1)$, $V(\theta_2)$ per il caso pari e $V(\theta)$ per il caso dispari *non* sono indotte da rappresentazioni di SO_n. Però possiamo vedere che queste sono proprio le rappresentazioni semi-spin e spin:

Proposizione 10.

- *Se $n = 2m$ con m pari, si ha $S^+ = V(\theta_1)$ e $S^- = V(\theta_2)$;*
- *Se $n = 2m$ con m dispari, si ha $S^+ = V(\theta_2)$ e $S^- = V(\theta_1)$;*
- *Se $n = 2m + 1$ è dispari, si ha $S = V(\theta)$.*

Una dimostrazione di questa proposizione si trova in [1], proposizioni 20.15 e 20.20; si tratta di calcolare esplicitamente l'azione sugli elementi di $\mathfrak{so}_n$, calcolare i pesi, vedere che sono congruenti per l'azione del gruppo di Weyl e calcolare il peso massimale. Qua ci limitiamo a considerare il caso $n = 6$. In questo caso, la base del sistema di radici è data da:

$$\alpha_1 = l_1 - l_2,\ \alpha_2 = l_2 - l_3,\ \alpha_3 = l_2 + l_3;$$

si possono calcolare i pesi della rappresentazione spin, e vedere come le radici di base agiscono su essi:

$$\begin{array}{ccc}
\frac{1}{2}(-l_1 - l_2 - l_3) & \quad & \frac{1}{2}(-l_1 - l_2 + l_3) \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_3} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} \\
\frac{1}{2}(-l_1 + l_2 + l_3) & & \frac{1}{2}(-l_1 + l_2 - l_3) \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} \\
\frac{1}{2}(l_1 - l_2 + l_3) & & \frac{1}{2}(l_1 - l_2 - l_3) \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_3} \\
\frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) & & \frac{1}{2}(l_1 + l_2 + l_3) \\
 & & \\
(S^+) & & (S^-)
\end{array}$$

4 Isomorfismi in dimensione bassa

In questa sezione utilizziamo le rappresentazioni spin per dimostrare gli isomorfismi:

$$\mathrm{Spin}_3 \simeq \mathrm{SL}_2, \quad \mathrm{Spin}_4 \simeq \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2,$$
$$\mathrm{Spin}_5 \simeq \mathrm{Sp}_4, \quad \mathrm{Spin}_6 \simeq \mathrm{SL}_4;$$

osserviamo che questi isomorfismi sono già stati dimostrati a livello di algebre di Lie, e dalla teoria dei gruppi di Lie semplicemente connessi sappiamo quindi che valgono anche a livello di gruppi di Lie; qua ne forniamo una nuova dimostrazione come applicazione della rappresentazione spin.

Ricordiamo un enunciato visto al corso di Istituzioni di Geometria:

Proposizione 11. *Sia $\phi : M \to N$ un embedding tra varietà della stessa dimensione. Supponiamo inoltre che M sia compatta e N connessa, allora ϕ è un diffeomorfismo.*

Osserviamo inoltre che si ha:

Proposizione 12. *Le rappresentazioni spin e semi-spin di* $\mathrm{Spin}(n)$ *fattorizzano ad una mappa:*

$$\mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SL}(S), \mathrm{SL}(S^+), \mathrm{SL}(S^-).$$

Dimostrazione. Per la proposizione 6 un elemento di Spin è un prodotto di commutatori; usando la formula di Binet, abbiamo che la sua immagine tramite la rappresentazione ha determinante 1. ☐

4.1 Spin(3) e Spin(4)

La rappresentazione spin di Spin_3 e le rappresentazioni semi-spin di Spin_4 danno un embedding:

$$\mathrm{Spin}(3) \subseteq \mathrm{GL}(S), \quad \mathrm{Spin}(4) \subseteq \mathrm{GL}(S^+) \times \mathrm{GL}(S^-);$$

per la proposizione 12, questo fattorizza ad embedding:

$$\mathrm{Spin}(3) \subseteq \mathrm{SL}(S) = \mathrm{SL}(2), \quad \mathrm{Spin}(4) \subseteq \mathrm{SL}(S^+) \times \mathrm{SL}(S^-) = \mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2);$$

osserviamo che questi sono embedding tra gruppi di Lie della stessa dimensione:

$$\dim(\mathrm{Spin}(3)) = \dim(\mathrm{SL}(2)) = 3, \quad \dim(\mathrm{Spin}(4)) = \dim(\mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2)) = 6,$$

da cui applicando la proposizione 11, abbiamo che sono isomorfismi.

4.2 Forma canonica sullo spazio degli spinori

Definizione 7. Definiamo l'**antiautomorfismo di trasposizione** τ su S tramite la formula:

$$\tau : v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \mapsto v_k \wedge \cdots \wedge v_1.$$

Definizione 8. La **forma bilineare canonica** β su S è definita tramite la composizione:

$$\begin{aligned} S \times S &\longrightarrow S \xrightarrow{\pi} \textstyle\bigwedge^m W \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \\ (\xi, \eta) &\mapsto \tau(\xi) \wedge \eta \end{aligned}$$

dove l'ultimo isomorfismo è fissato da una scelta di $\omega \in \bigwedge^m W$; abbiamo quindi che β è definita a meno di moltiplicazione per uno scalare.

Osservazione 12. 1) Abbiamo:

$$\tau(\xi) \wedge \eta = \tau(\tau(\xi) \wedge \eta) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \tau(\eta) \wedge \xi,$$

da cui:

$$\beta(\xi, \eta) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \beta(\eta, \xi),$$

ovvero β è:

- *simmetrica*, se $m \equiv 0, 1\,(4)$,
- *antisimmetrica*, se $m \equiv 2, 3\,(4)$.

2) β è non degenere: per vederlo possiamo verificare il suo comportamento sulla base definita nell'osservazione 9:

$$\beta(\xi_I, \xi_J) = \begin{cases} \pm 1 & I = J^c \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Possiamo vedere ora come β si comporta rispetto all'azione di C su S:

Proposizione 13. *Se $n \equiv 0, 1, 2\,(4)$, si ha:*

1. *$\beta(v.\xi) = \beta(\xi, v.\eta)$ per ogni $v \in V$;*
2. *$\beta(v.\xi, v.\eta) = q(v)\beta(\xi, \eta)$ per ogni $v \in V$;*
3. *β è invariante per l'azione di* Spin.

Dimostrazione. Dimostriamo il punto 1). Se $v \in W$:

$$\begin{aligned}\tau(v.\xi) \wedge \eta &= \tau(v \wedge \xi) \wedge \eta = \\ &= \tau(\xi) \wedge \tau(v) \wedge \eta = \\ &= \tau(\xi) \wedge (v.\eta).\end{aligned}$$

Se $v = w \in W'$: possiamo supporre $\xi \in \bigwedge^h W$, $\eta \in \bigwedge^k W$. Affinché $\beta(w.\xi, \eta)$ sia non nulla, si deve avere $h + k - 1 = m$. In particolare, abbiamo dunque:

$$\tau(\xi) \wedge \eta = 0.$$

Possiamo dunque scrivere:

$$\begin{aligned}0 &= D_w(\tau(\xi) \wedge \eta) = \\ &= D_w(\tau(\xi)) \wedge \eta + (-1)^h \tau(\xi) \wedge D_w(\eta) = \\ &= (-1)^{h-1}(\tau(D_w(\xi)) \wedge \eta - \tau(\xi) \wedge D_w(\eta)),\end{aligned}$$

da cui $\tau(D_w(\xi)) \wedge \eta = \tau(\xi) \wedge D_w(\eta)$, come voluto. Se n è pari, questo conclude il punto 1), altrimenti resta da verificare:

$$\begin{aligned}\tau(F\xi) \wedge \eta &= F(\tau(\xi)) \wedge \eta = \\ &= (-1)^h \tau(\xi) \wedge \eta = \\ &= (-1)^m (-1)^k \tau(\xi) \wedge \eta = \\ &= (-1)^m \tau(\xi) \wedge F(\eta) = \tau(\xi) \wedge F(\eta),\end{aligned}$$

dove abbiamo usato $\xi \in \bigwedge^h W, \eta \in \bigwedge^k W$, il fatto che $\beta(\xi, \eta) = 0$ a meno che $h + k = m$, e il fatto che m è pari perché $n = 2m + 1 \equiv 0(4)$.

Osserviamo ora che il punto 2) segue dal punto 1):

$$\beta(v.\xi, v.\eta) = \beta(\xi, v^2.\eta) = q(v)\beta(\xi, \eta).$$

Il punto 3) segue dal punto 2) usando il fatto che gli elementi di Spin si scrivono come prodotto di un numero pari di vettori con $q = -1$. □

Osservazione 13. Nel caso $n \equiv 3\,(4)$, non possiamo dedurre che β è invariante rispetto all'azione di Spin; in questo caso bisogna definire un'altra forma bilineare che sia invariante, si veda [2].

Osservazione 14. Possiamo considerare i seguenti tre casi:

1) Se n è pari con $n \equiv 0\,(4)$, possiamo osservare che in questo caso β è la forma identicamente nulla su $S^+ \times S^-$ e $S^- \times S^+$, e si restringe ad una forma bilineare non degenere su S^+ ed S^-. Per il punto 1) dell'osservazione 12 abbiamo che se $n \equiv 0\,(8)$, questa forma sarà simmetrica, mentre se $n \equiv 4\,(8)$ sarà antisimmetrica. Dunque abbiamo che l'embedding:

$$\mathrm{Spin}_n \subseteq \mathrm{GL}(S^+) \times \mathrm{GL}(S^-),$$

si restringe ad un embedding:

$$\mathrm{Spin}_n \subseteq \mathrm{SO}(S^+) \times \mathrm{SO}(S^-) = \mathrm{SO}_{2^{m-1}} \times \mathrm{SO}_{2^{m-1}},$$

se $n \equiv 0\,(8)$, o se $n \equiv 4\,(8)$ ad un embedding:

$$\mathrm{Spin}_n \subseteq \mathrm{Sp}(S^+) \times \mathrm{Sp}(S^-) = \mathrm{Sp}_{2^{m-1}} \times \mathrm{Sp}_{2^{m-1}}\,.$$

2) Se n è pari con $n \equiv 2\,(4)$, possiamo osservare che in questo caso β è la forma identicamente nulla su S^+ e S^-, ma si restringe ad una dualità:

$$S^+ \times S^- \longrightarrow \mathbb{C};$$

abbiamo dunque che in questo caso le due rappresentazioni semispin sono duali; siccome esse hanno lo stesso nucleo, possiamo concludere che sono entrambe fedeli. In particolare, ciascuna delle due rappresentazioni spin induce un embedding:

$$\mathrm{Spin}_n \subseteq \mathrm{SL}_{2^{m-1}}\,.$$

3) Se $n \equiv 1\,(4)$ possiamo osservare che β è simmetrica se $n \equiv 1\,(8)$, e antisimmetrica se $n \equiv 5\,(8)$; in particolare, la rappresentazione spin induce un embedding:

$$\mathrm{Spin}_n \subseteq \mathrm{SO}(S) = \mathrm{SO}_{2^m},$$

se $n \equiv 1\,(8)$, o se $n \equiv 5\,(8)$ un embedding:

$$\mathrm{Spin}_n \subseteq \mathrm{Sp}(S) = \mathrm{Sp}_{2^m}\,.$$

4.3 Spin(4), Spin(5), Spin(6) e Spin(8)

- Per il punto 1) dell'osservazione precedente, le rappresentazioni semi-spin inducono un embedding:

  $$\mathrm{Spin}_4 \subseteq \mathrm{Sp}_2 \times \mathrm{Sp}_2;$$

  ricordiamo che $\mathrm{Sp}_2 = \mathrm{SL}_2$, da cui questo argomento riproduce il noto isomorfismo $\mathrm{Spin}_4 \simeq \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$.

- Per il punto 3) dell'osservazione precedente, la rappresentazione spin induce un embedding:

  $$\mathrm{Spin}_5 \subseteq \mathrm{Sp}_4;$$

  osserviamo che questo è un embedding tra gruppi di Lie compatti e connessi di dimensione 10, quindi è un isomorfismo.

- Per il punto 2) dell'osservazione precedente, ciascuna delle due rappresentazioni semi-spin induce un embedding:

  $$\mathrm{Spin}_6 \subseteq \mathrm{SL}_4;$$

  osserviamo che questo è un embedding tra gruppi di Lie compatti e connessi di dimensione 15, quindi è un isomorfismo.

- Per il punto 1) dell'osservazione precedente, le rappresentazioni semi-spin inducono un embedding:

  $$\mathrm{Spin}_8 \subseteq \mathrm{SO}_8 \times \mathrm{SO}_8;$$

  osserviamo che questo non può essere un isomorfismo per questioni di dimensione, ma le due proiezioni al quoziente inducono due omomorfismi $\mathrm{Spin}_8 \to \mathrm{SO}_8$; osserviamo che noi conosciamo già un omomorfismo $\mathrm{Spin}_8 \to \mathrm{SO}_8$, dato dal rivestimento. Si può osservare che esiste un'azione di $\mathfrak{S}_3$ che permuta queste tre mappe, ed essa è indotta dall'azione di $\mathfrak{S}_3$ sul diagramma di Dynkin D_4. Una trattazione di questo argomento (*trialità*) va oltre lo scopo di queste note, ma si rimanda il lettore interessato a [2] e [1] per approfondimenti.

Riferimenti bibliografici

[1] William Fulton e Joe Harris. *Representation Theory.* Vol. 129. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer New York, 2004. ISBN: 978-3-540-00539-1.

[2] Angelo Vistoli. *Notes on Clifford Algebras, Spin Groups and Triality.* URL: `http://homepage.sns.it/vistoli/clifford.pdf`.