Appunti di Spazi di Sobolev

Appunti dalle Lezioni di B. Velichkov

Rocca Andrea

Aggiornati al: 17 novembre 2023

Prefazione

Com'è che si dice? Il lupo perde il pelo, ma non il vizio? Penso che ormai si sia capito che mi sono appassionato a quel meraviglioso mondo che è l'Analisi Matematica. Nel seguito troverete una mia personale reinterpretazione delle lezioni del corso svoltosi nell'anno accademico 2022-2023. Qualsiasi tipo di correzione e/o consiglio è il benvenuto, potete contattarmi a a.rocca2@studenti.unipi.it.

Vi auguro una buona lettura e un buono studio.

Andrea Rocca

Indice

Capitolo 1

Richiami generali

1.1 Spazio duale

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ misurabile. In questo corso considereremo

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |f|^p < +\infty\}.$$

Ricordiamo che $L^p(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma $\|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ con $p \in [1, +\infty)$. Le cose che vedremo saranno facilmente generalizzabili.

Definizione 1.1.1 – Funzionale lineare continuo

Sia $T : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ una funzione, diciamo che T è un *funzionale lineare continuo* se valgono:

1. $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$ $\forall u, v \in L^p(\Omega)$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. T è una funzione continua rispetto alla topologia in $L^p(\Omega)$:

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow T(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(f)$$

Osservazione 1.1.1
È un risultato noto che la seconda condizione sia equivalente a richiedere la limitatezza di T, ossia[1]:

$$\|T\| := \sup\{T(f) : f \in L^p(\Omega), \|f\|_{L^p(\Omega)} = 1\} < +\infty$$

Definizione 1.1.2 – Spazio duale

Dato $\mathcal{B}$ spazio di Banach, definiamo lo *spazio duale*, che indicheremo con $\mathcal{B}^*$, come lo spazio di tutte le applicazioni lineari continue su $\mathcal{B}$.

Teorema 1.1.3

Lo spazio $\mathcal{B}^*$ è uno spazio di Banach con norma

$$\|T\|_{\mathcal{B}^*} = \sup\{T(f) : f \in \mathcal{B}, \|f\|_{\mathcal{B}} = 1\}.$$

[1] Nel contesto dei funzionali lineari possiamo omettere i moduli, poichè è sempre possibile ricondursi a quantità positive.

Dimostrazione. Il fatto che $\mathcal{B}^*$ sia uno spazio vettoriale è ovvio: infatti se $S, T \in \mathcal{B}^*$ allora anche $\alpha S + \beta T \in \mathcal{B}^*$.
Mostriamo che $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^*}$ è una norma. L'unica verifica non banale è la sub-additività:

$$(S+T)(f) = S(f) + T(f) \leq \|S\| \|f\|_B + \|T\| \|f\|_B = \|S\| + \|T\| < +\infty \ \forall f \in \mathcal{B}$$

Mostriamo ora che $\mathcal{B}^*$ è completo. Sia T_n una successione di Cauchy: $\forall \varepsilon \ \exists N : \|T_n - T_m\|_{\mathcal{B}^*} < \varepsilon \ \forall n, m > N$. In particolare, per ogni $x \in \mathcal{B}$, la successione $T_n(x)$ è di Cauchy, infatti

$$|T_n(x) - T_m(x)| \leq \|T_n - T_m\|_{\mathcal{B}^*} \|x\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon \|x\|_{\mathcal{B}}.$$

Quindi esiste il limite (in $\mathbb{R}$) $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n(x) = T(x)$. Possiamo dunque definire $T : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ come

$$T(x) := \lim_{n \to \infty} T_n(x).$$

Bisogna verificare che:

- T è lineare, chiaro.
- T è limitato: Vale che

  $$|T(x)| = \lim_{n \to +\infty} |T_n(x)| \leq \limsup_{n \to +\infty} \|T_n\|_{\mathcal{B}^*} \|x\|_{\mathcal{B}}.$$

  Quindi basta dimostrare che $\limsup\limits_{n \to +\infty} \|T_n\|_{\mathcal{B}^*} < +\infty$. Ma questo vale perchè la successione delle norme $\|T_n\|_{\mathcal{B}^*}$ è di Cauchy, infatti

  $$\big| \|T_n\|_{\mathcal{B}^*} - \|T_m\|_{\mathcal{B}^*} \big| \leq \|T_n - T_m\|_{\mathcal{B}^*} < \varepsilon.$$

Mostriamo ora che T è effettivamente il limite, ossia che $\|T_n - T\|_{\mathcal{B}^*} \to 0$. Visto che la disuguaglianza passa al limite puntuale notiamo che

$$\begin{aligned} |T_n(x) - T_m(x)| &\leq \|T_n - T_m\|_{\mathcal{B}^*} \|x\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon \|x\|_{\mathcal{B}} \forall n, m \geq N \\ &\Rightarrow |T_n(x) - T(x)| \leq \varepsilon \|x\|_{\mathcal{B}} \quad \forall x \in B, \forall n \geq N \\ &\Rightarrow \|T_n - T\|_{\mathcal{B}^*} \leq \varepsilon \ \forall n \geq N \end{aligned}$$

□

Osservazione 1.1.2
Visto che $\mathcal{B}^*$ è di Banach, possiamo considerare il suo duale $\mathcal{B}^{**}$ che chiameremo il biduale di $\mathcal{B}$. Chiaramente vale che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^{**}$, infatti per ogni $x \in \mathcal{B}$ possiamo considerare la mappa tale che $T \to T(x)$. Questa è lineare e limitata. In generale questa inclusione è stretta. Gli spazi in cui questa è un'uguaglianza sono importanti.

Definizione 1.1.4 – Spazio riflessivo

$\mathcal{B}$ è *riflessivo* se $\mathcal{B}^{**} = \mathcal{B}$.

1.1.1 Il duale degli spazi $L^p(\Omega)$

In questo paragrafo arriveremo a dimostrare che, per $p \in (1, +\infty)$, $L^p(\Omega)$ è riflessivo. Notiamo subito che ciò è falso per $p = 1$: è possibile mostrare che $(L^1)^* = L^\infty$, mentre la caratterizzazione di $(L^\infty)^*$ non è per niente banale ed esula dagli scopi di questo corso. Ciò che è importante è che $(L^\infty)^*$ è strettamente più grande di L^1.

Esempio 1.1.5. Se $p \in (1, +\infty)$ e se $g \in L^q(\Omega)$ fissata, dove q è l'esponente duale $q = \frac{p}{p-1}$, allora possiamo definire l'operatore $T_g : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ come

$$T_g(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

Vale che T_g è un operatore lineare continuo su $L^p(\Omega)$, infatti:

$$|T_g(f_n) - T_g(f)| = \int_\Omega g(f_n - f) \leq \|g\|_{L^q} \|f_n - f\|_{L^p}$$

In particolare vale che $\|T\| = \|g\|_{L^q(\Omega)}$:

$$\left| \int_\Omega f(x)g(x)dx \right| \leq \|g\|_{L^q(\Omega)} \|f\|_{L^p(\Omega)} = \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Vediamo che esiste $f \in L^p(\Omega)$ tale che: $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 1$ e $\int_\Omega fg = \|g\|_{L^q(\Omega)}$.

Idea Intuitivamente fg deve essere g^q, quindi basta considerare

$$g|g|^{q-2} = \begin{cases} g^{q-1} & se\ g \geq 0 \\ -(-g)^{q-1} & se\ g < 0 \end{cases}$$

e scegliere $f = g|g|^{q-2} \frac{1}{\|g\|_{L^q}^{q-1}}$. ⌟

Osserviamo infatti che:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |f|^p = \frac{1}{\|g\|_{L^q}^{(q-1)p}} \int_\Omega |g|^{(q-1)p} = 1$$

$$T_g(f) = \frac{1}{\|g\|_{L^q}^{(q-1)}} \int_\Omega |g|^q = \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

□

Osservazione 1.1.3
Notiamo che T_g è un'isometria tra $L^p(\Omega)$ e $(L^q(\Omega))^*$. Segue che $T(L^p(\Omega)) \subseteq (L^q(\Omega))^*$ è un chiuso[2]. Vediamo che in realtà vale proprio $L^p(\Omega) = (L^q(\Omega))^*$.

Teorema 1.1.6 – Teorema di Riesz

Siano $p \in (1, +\infty)$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ misurabile. Allora per ogni operatore lineare continuo $T : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ esiste un'unica $g \in L^q(\Omega)$ tale che

$$T(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Vale inoltre che $\|T\|_{(L^p)^*} = \|g\|_{L^q}$.

Prima di vedere la dimostrazione di questo teorema è necessario richiamare le seguenti:

[2] Ricordiamo che se E spazio di Banach e $F \subseteq E$ allora F chiuso se e solo se F è di Banach.

Lemma 1.1.7 – Disuguaglianze di Clarkson

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

- Se $p \in [2, +\infty)$ vale $\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{|a|^p}{2} + \frac{|b|^p}{2}$
- Se $p \in (1, 2]$ vale $|a+b|^p + |a-b|^p \leq 2|a|^p + 2|b|^p$

Se chiamiamo $x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2}$ e $a + b = x', a - b = y'$ otteniamo altre due disuguaglianze.

Dimostrazione del Lemma. Facciamo prima il caso $p \in [2, +\infty)$: consideriamo la seguente funzione $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$:

$$F(t) = (1+t^2)^{\frac{p}{2}} - t^p - 1$$

Notiamo che $F(0) = 0$ e che $F'(t) \geq 0$ infatti:

$$F'(t) = pt(1+t^2)^{\frac{p-2}{2}} - pt^{p-1} = pt(1+t^2)^{\frac{p-2}{2}} - ptt^{\frac{p-2}{2}} \geq 0$$

Possiamo concludere che $F(t) \geq 0$ per $t \geq 0$ e quindi $(1+t^2)^{\frac{p}{2}} \geq 1 + t^p$ per $t \geq 0$. Per ogni $x, y \geq 0$ consideriamo $t = \frac{x}{y}$ allora abbiamo

$$\left(\frac{x^2+y^2}{y^p}\right)^{\frac{p}{2}} \geq \frac{x^p}{y^p} + 1 \Rightarrow (x^2+y^2)^{\frac{p}{2}} \geq x^p + y^p.$$

A questo punto poniamo, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $x = \frac{|a+b|}{2}$ e $y = \frac{|a-b|}{2}$ e abbiamo

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}}{2^{\frac{p}{2}}} \leq \frac{|a|^p + |b|^p}{2}$$

per la convessità di $x \to x^{\frac{p}{2}}$.
Vediamo ora il caso $p \in (1, 2]$: consideriamo $G : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$:

$$G(t) = t^p + 1 - (1+t^2)^{\frac{p}{2}} = -F(t)$$

Segue che $G(t) \leq 0$ e che $t^p + 1 \leq (1+t^2)^{\frac{p}{2}}$. Come prima considerando $t = \frac{x}{y}$ abbiamo

$$x^p + y^p \geq (x^2+y^2)^{\frac{p}{2}}.$$

e ponendo $\forall u, v \in \mathbb{R}$ $x = \frac{|u+v|}{2}, y = \frac{|u-v|}{2}$, per la concavità di $x \to x^{\frac{p}{2}}$, vale che

$$x^p + y^p \geq \frac{|u|^p + |v|^p}{2}$$

Si ha la tesi considerando $u = \frac{a+b}{2}$ e $v = \frac{a-b}{2}$.

$\square$

Dimostrazione del Teorema. Caso $p \in (1, 2]$: Sia $\Omega = [-R, R]^d, R > 0$. Per ogni $n \geq 1$ consideriamo la partizione di Ω in 2^{nd} cubi uguali $\mathcal{Q}_j$ è di lato $\frac{R}{2^n}$

$$\mathcal{P}_n = \{\mathcal{Q}_j : j = 1, \ldots, 2^{nd}\}.$$

Definiamo lo spazio V_n come segue:

$$V_n := \left\{ u \in L^p(\Omega) : u = \sum_{j=1}^{2^{nd}} a_j \mathbb{1}_{\mathcal{Q}_j} \right\}$$

Visto che $\mathcal{P}_{n+1}$ è più fine di $\mathcal{P}_n$, si ha che $V_n \subseteq V_{n+1}$. Osserviamo inoltre che V_n è un sottospazio chiuso di dimensione finita di $L^p(\Omega)$ tale che $\forall u \in V_n$

$$T(u) = \sum_{j=1}^{2^{nd}} a_j T(\mathbb{1}_{\mathcal{Q}_j})$$

Definiamo la seguente funzione:

$$g_n := \sum_{j=1}^{2^{nd}} \frac{T(\mathbb{1}_{\mathcal{Q}_j})}{|\mathcal{Q}_j|} \mathbb{1}_{\mathcal{Q}_j}(x)$$

Allora, per costruzione

$$T(u) := \int_\Omega g_n(x)u(x)dx \quad \forall u \in V_n$$

e inoltre $\|g_n\|_{L^q(\Omega)} = \sup\{\int_\Omega g_n(x)u(x)dx : u \in V_n, \|u\|_{L^p} \leq 1\} \leq \|T\|$.

Idea Stiamo considerando l'operatore T applicato ad un sottospazio di $L^p(\Omega)$. È chiaro che, al più, il sup potrà abbassarsi. ⌟

Vediamo che l'estremo superiore è raggiunto in $f_n \in V_n$ definita come

$$f_n = \frac{1}{\|g_n\|_{L^q}^{q-1}} \sum_{j=1}^{2^{nd}} \left(\frac{T(\mathbb{1}_{\mathcal{Q}_j})}{|\mathcal{Q}_j|} \right)^{q-1} \mathbb{1}_{\mathcal{Q}_j}(x).$$

Vediamo che $\|f_n\|_{L^p} = 1$:

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_{L^p} &= \frac{1}{\|g_n\|_{L^q(\Omega)}^{q-1}} \left(\sum_{j=1}^{2^{nd}} \left(\frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|} \right)^{p(q-1)} |Q_j| \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{\|g_n\|_{L^q(\Omega)}^{q-1}} \left(\sum_{j=1}^{2^{nd}} \left(\frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|} \right)^{q} |Q_j| \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\|g_n\|_{L^q(\Omega)}^{q-1}} \left(\|g_n\|_{L^q(\Omega)}^q \right)^{\frac{1}{p}} = 1.
\end{aligned}$$

Segue che:

$$\begin{aligned}
\|g_n\|_{L^q} &= \left(\sum_{j=1}^{2^{nd}} \left(\frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|} \right)^{q} |Q_j| \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{2^{nd}} \left(\frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|} \right)^{q} |Q_j| \right)^{\frac{1}{q}-1} \sum_{j=1}^{2^{nd}} \left(\frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|} \right)^{q} |Q_j| \\
&= \left(\sum_{j=1}^{2^{nd}} \left(\frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|} \right)^{q} |Q_j| \right)^{\frac{1}{q}-1} \sum_{j=1}^{2^{nd}} T(\mathbb{1}_{Q_j}) \left(\frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|} \right)^{q-1} \\
&= \int_\Omega g_n(n) f_n(x)\, dx = T(f_n) \leq \|T\| \|f_n\|_{L^p} = \|T\|
\end{aligned}$$

Osserviamo che $\|g_n\|_{L^q} \leq \|g_{n+1}\|_{L^q}$, infatti:

$$\|g_n\|_{L^q} = \int_\Omega f_n(x)g_n(x) = T(f_n) = \int_\Omega f_n(x)g_{n+1}(x) \leq \|f_n\|_{L^p}\|g_{n+1}\|_{L^q} = \|g_{n+1}\|_{L^q}$$

Quindi la successione delle norme è crescente ed è limitata da $\|T\| \Rightarrow$ esiste il limite

$$L := \lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_{L^p(\Omega)}$$

e poichè $V = \bigcup_n V_n$ è denso in L^p, vale che $L = \|T\|$.

Idea Vogliamo ora dimostrare che g_n è convergente ad una certa $g \in L^q(\Omega)$. Mostreremo poi che g *rappresenta* F. ⌟

Vediamo che g_n è una successione di Cauchy. Siano $m \geq n$, usando la disugugaglianza di Clarkson per $q \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{g_m - g_n}{2}\right\|_{L^q}^q &\leq \frac{1}{2}\|g_m\|_{L^q}^q + \frac{1}{2}\|g_n\|_{L^q}^q - \left\|\frac{g_m + g_n}{2}\right\|_{L^q}^q \\
&\leq \frac{1}{2}\|g_n\|_{L^q}^q + \frac{1}{2}\|g_n\|_{L^q}^q - \left|\int_\Omega \left(\frac{g_m(x) + g_n(x)}{2}\right) f_n(x)dx\right|^q \\
&= \frac{1}{2}\|g_m\|_{L^q}^q + \frac{1}{2}\|g_n\|_{L^q}^q - \left|\int_\Omega g_n(x)f_n(x)\right|^q \\
&= \frac{1}{2}\|g_m\|_{L^q}^q + \frac{1}{2}\|g_n\|_{L^q}^q - \|g_n\|_{L^q}^q \\
&= \frac{1}{2}\|g_m\|_{L^q}^q - \frac{1}{2}\|g_n\|_{L^q}^q
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che:

$$\int_\Omega \frac{g_n(x) + g_m(x)}{2} f_n(x) \leq \|f_n\|_{L^p}\left\|\frac{g_m + g_n}{2}\right\|_{L^q}$$

$$\left|\int_\Omega \left(\frac{g_m(x) + g_n(x)}{2}\right) f_n(x)dx\right|^q = \frac{1}{2}\int_\Omega f_n g_n + \frac{1}{2}\int_\Omega f_n g_m = \frac{1}{2}2T(f_n)$$

Quindi g_n è di Cauchy in $L^q(\Omega)$ e sia $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ in $L^q(\Omega)$.
Vediamo ora che g *rappresenta* T: come osservato in precedenza $V = \bigcup_{k\geq 1} V_k$ è un denso in $L^p(\Omega)$ e dunque, per ogni $f \in L^p(\Omega)$, esiste $f_n \in L^p(\Omega)$ tale che $f_n \in V_n$ e

$$f = \lim_{n\to+\infty} f_n.$$

Allora

$$T(f) = \lim_{n\to+\infty} T(f_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n f_n = \int g f.$$

Si conclude la dimostrazione osservando che, per passare da $[-R, R]^d$ a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ qualsiasi, è sufficiente considerare gli spazi

$$W_n = \{f \in L^p(\mathbb{R}^d) : f = 0 \text{ quasi ovunque al di fuori di } [-n, n]^d\}.$$

Per ognuno di questi W_n si ottiene g_n e poi si conclude passando al limite come nel caso precedente.

Caso $p \geq 2$: Dato $T \not\equiv 0$ consideriamo lo spazio $K = \ker T = \{f \in L^p(\Omega) : T(f) = 0\}$. K è un sottospazio lineare chiuso di $L^p(\Omega)$. Sia ora $u \in L^p(\Omega)$, tale che[3] $T(u) = 1$.
Claim 1: esiste $v \in K$ tale che[4]

$$\|u - v\|_{L^p} = \inf\{\|u - w\|_{L^p} : w \in K\}.$$

Sia w_n una successione minimizzante, ovvero che realizza l'estremo inferiore. Vediamo che w_n è convergente. Notiamo subito che w_n è limitata infatti $\|u - w_n\| \leq \|u - 0\|$ e quindi $\|w_n\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|u - w_n\|_{L^p} \leq 2\|u\|_{L^p}$.

Idea Vorremmo ora estrarre una sottosuccessione convergente, ma non è possibile visto che non si ha alcun tipo di compattezza. Tuttavia è possibile usare la disuguaglianza di Clarkson. ⌟

Dimostriamo che w_m è di Cauchy in $L^p(\Omega)$. Dato $\varepsilon > 0$ possiamo scegliere $N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq N$ $|\|w_n - u\|_{L^p}^p - \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \|w_n - u\|_{L^p}^p}_{:=L}| < \varepsilon$, con $L \leq \left\|u - \frac{w_n+w_m}{2}\right\|_{L^p}^p$. Quindi

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{w_m - w_n}{2}\right\|_{L^p}^p &\leq \frac{1}{2}\|w_m - u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\|w_n - u\|_{L^p}^p - \left\|\frac{u - w_n}{2} + \frac{u - w_n}{2}\right\|_{L^p}^p \\
&\leq \frac{1}{2}(L + \varepsilon) + \frac{1}{2}(L + \varepsilon) - L \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N
\end{aligned}$$

Sia[5] $v = \lim_{n\to+\infty} w_n$ in $L^p(\Omega)$. Siccome K chiuso, $v \in K$. Chiaramente $u \neq v$ perchè $T(u) = 1$ e $T(v) = 0$. Notiamo infatti che $\forall\varphi \in K$

$$\int_\Omega \varphi(x)(u - v)|u - v|^{p-2} dx = 0.$$

Questo segue poichè la funzione $t \to \int_\Omega |u - v + t\varphi|^p$ ha minimo in $t = 0$. Di conseguenza

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_\Omega (|u - v|^2 + 2t\varphi(u - v) + t^2\varphi^2)^{\frac{p}{2}} = p \int_\Omega \varphi(u - v)(|u - v|^2)^{\frac{p-2}{2}}.$$

Scegliamo ora $w = u - v$ e $g = \frac{w|w|^{p-2}}{\|w\|_{L^p}^p} \in L^q(\Omega)$. Segue che $\int_\Omega wg = 1$ e per ogni $f \in L^p(\Omega)$, $T(f) = \int_\Omega fg$. Infatti, visto che $f - T(f)w \in K$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_\Omega gf = \int_\Omega g(f - T(f)w + T(f)w)) &= \int_\Omega g(f - T(f)w) + \int_\Omega gT(f)w \\
&= T(f) \int_\Omega gw = T(f).
\end{aligned}$$

□

Corollario 1.1.8

Gli spazi $L^p(\Omega)$ per $p \in (1, +\infty)$ sono riflessivi.

[3]Data u tale che $T(u) \neq 0$, allora $\tilde{u} := \frac{u}{T(u)}$ è tale che $T(\tilde{u}) = 1$.

[4]v è la proiezione di u su K e lo mostriamo esattamente come faremmo se fossimo in uno spazio di Hilbert.

[5]La stessa disuguaglianza, sempre per Clarkson, ci dice che la proiezione v è unica

1.2 Convergenza debole

Vogliamo ora introdurre la nozione di *convergenza debole* per gli spazi L^p e, più in generale, per gli spazi di Banach. Per poter dimostrare una serie di risultati è necessario introdurre inizialmente il seguente teorema:

Teorema 1.2.1 – Teorema di Hahn-Banach

Siano $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach, $V \subseteq \mathcal{B}$ un sottospazio vettoriale e $F : V \to \mathbb{R}$ un funzionale limitato[a]. Allora esiste $S : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ tale che $S \equiv T$ su V e $|S(x)| \leq C\|x\|_{\mathcal{B}}$ $\forall x \in \mathcal{B}$.

[a] ossia: esiste $C > 0$ tale che $|T(x)| \leq C\|x\|_{\mathcal{B}}$ $\forall x \in V$.

Corollario 1.2.2

Dato $x \in \mathcal{B}, x \neq 0$, esiste un funzionale lineare $T : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ tale che: $\|T\| = 1$ e $T(x) = \|x\|_{\mathcal{B}}$.

Osservazione 1.2.1
In realtà per gli spazi $L^p(\Omega)$ per questo fatto non è necessario passare per Hahn-Banach: basta considerare $T(f) = \int_\Omega gf$ dove $g = \frac{f|f|^{p-1}}{\|f\|_{L^p}^{p-1}}$.

Il lemma principale che serve per la dimostrazione del teorema è il seguente:

Lemma 1.2.3

Sia $\mathcal{B}$ spazio di Banach, $V \subseteq \mathcal{B}$ e $T : V \to \mathbb{R}$ funzionale lineare tale che $|T(x)| \leq C\|x\|_{\mathcal{B}}$ $\forall x \in V$. Allora, dato $z \in \mathcal{B}\backslash V$, possiamo trovare $S : W \to \mathbb{R}$ dove

$$W = \{x + tz : x \in V, t \in \mathbb{R}\} = span(V, z)$$

tale che $S \equiv T$ su V e $|S(y)| \leq C\|y\|_{\mathcal{B}}$ $\forall y \in W$.

Dimostrazione del Lemma. Vediamo che chiaramente S dovrà essere del tipo $S(x + tz) = T(x) + tS(z)$. L'unica cosa non ovvia è la limitazione di S. Per ogni $x, y \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{>0}$, vale che:

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &\leq C\|\alpha x + \beta y\|_{\mathcal{B}} \leq C\|\alpha(x - \beta z) + \beta(y + \alpha z)\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq C\|\alpha(x - \beta z)\|_{\mathcal{B}} + C\|\beta(y + \alpha z)\|_{\mathcal{B}} \\ &= \alpha C\|x - \beta z\|_{\mathcal{B}} + \beta C\|y + \alpha z\|_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

ma questo è equivalente a, $\forall \alpha, \beta > 0$

$$\begin{aligned} \alpha(T(x) - C\|x - \beta z\|_{\mathcal{B}}) &\leq -\beta(T(y) - C\|y + \alpha z\|_{\mathcal{B}}) \\ \frac{1}{\beta}(T(x) - C\|x - \beta z\|_{\mathcal{B}}) &\leq -\frac{1}{\alpha}(T(y) - C\|y + \alpha z\|_{\mathcal{B}}) \end{aligned}$$

Notiamo che il membro di sinistra dipende solo da $\beta, x \in V$, mentre quello di destra da $\alpha, y \in V$. Quindi esiste un *elemento separatore*, ossia $\exists s \in \mathbb{R}$ tale che

$$\sup_{\substack{\beta>0 \\ x\in V}} \left\{ \frac{1}{\beta}(T(x) - C\|x - \beta z\|_{\mathcal{B}}) \right\} \leq s \leq \inf_{\substack{\alpha>0 \\ y\in V}} \left\{ \frac{1}{\alpha}(T(y) + C\|y + \alpha z\|_{\mathcal{B}}) \right\}$$

Definiamo quindi $S(z) = s$. Allora per costruzione per ogni $x, y \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{>0}$ si ha:

$$T(\alpha x + \beta y) \leq \alpha C\|x - \beta z\|_{\mathcal{B}} + \beta C\|y + \alpha z\|_{\mathcal{B}}$$

che implica:

$$S(x + \alpha z) = T(x) + \alpha s \leq T(x) + (-T(x) + C\|x + \alpha z\|_{\mathcal{B}})$$

$$S(x - \beta z) = T(x) - \beta s \leq T(x) - (T(x) - C\|x - \beta z\|_{\mathcal{B}})$$

dove, rispettivamente, abbiamo stimato dal basso α e dall'alto β. $\square$

Dimostrazione del Teorema. Dividiamola in casi:
Caso $\mathcal{B}$ separabile: Se $\mathcal{B}$ è separabile vuol dire che $\exists\{\phi_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ che è denso. Poniamo $V_0 = V$ e $T_0 : V_0 \to \mathbb{R}$ (quindi $T_0 = T$). Costruiamo per passi:

1. Definiamo $V_1 = span(V_0, \phi_1)$. Se $\phi_1 \in V_0, V_1 = V_0$ e $T_1 = T_0$ altrimenti consideriamo la mappa $T_1 : V_1 \to \mathbb{R}$ data dal lemma.

2. Passo n: $V_n = span(V_{n-1}, \phi_n)$ e $T_n \to \mathbb{R}$ la mappa del lemma.

Consideriamo infine il limite $V_\infty = \bigcup_n V_n$ e la mappa $T_\infty : V_\infty \to T$ definita come $T_\infty(x) = T_n(x)$ se $x \in V_n$. Questa è ben definita poichè V_{n+1} estende V_n e così anche le funzioni. Segue anche che

$$|T_\infty(x)| \leq C\|x\|_{\mathcal{B}} \quad \forall x \in V_\infty$$

Visto che V_∞ è denso in $\mathcal{B}$, dato un qualsiasi $x \in \mathcal{B}$ definiamo

$$T(x) := \lim_{n\to+\infty} T_\infty(x_n)$$

dove x_n è una qualsiasi successione $x_n \to x$ in $\mathcal{B}$. Chiaramente T è lineare, continua e limitata.
Caso $\mathcal{B}$ generale: La dimostrazione è pressochè uguale ma va usato il *lemma di Zorn*. Consideriamo le coppie (W, S) con

$$\begin{cases} V \subseteq W \subseteq \mathcal{B} \\ S : W \to \mathbb{R} \text{ è una mappa tale che } S \equiv T \text{ su } V \\ |S(w)| \leq C\|w\|_{\mathcal{B}} \; \forall w \in W \end{cases}$$

Consideriamo la relazione d'ordine $(W_1, S_1) \leq (W_2, S_2)$ se $W_1 \subseteq W_2$ e $S_2 \equiv S_1$ su W_1. Data $\mathcal{C}$ catena, consideriamo

$$\begin{cases} W_\infty := \bigcup_{(W,S)\in\mathcal{C}} W \\ S_\infty(w) := S(w) \text{ per ogni } w \in W_\infty \end{cases}$$

Chiaramente (W_∞, S_∞) è un maggiorante per $\mathcal{C}$. Per il lemma di Zorn allora esiste un elemento massimale (W_{max}, S_{max}) che, per il lemma iniziale, è tale che $W_{max} = \mathcal{B}$. $\square$

Definizione 1.2.4 – Convergenza debole in L^p

Sia $p \in (1, +\infty), \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ insieme misurabile, diciamo che $f_n \in L^p(\Omega)$ *converge* *debolmente* (in L^p) ad una funzione $f \in L^p(\Omega)$ se $\forall g \in L^q(\Omega)$ abbiamo che

$$\int_\Omega f_n(x)g(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

Si indica $f_n \rightharpoonup f$.

Osservazione 1.2.2 - Unicità del limite
Se $f_n \rightharpoonup f$ e $f_n \rightharpoonup \tilde{f}$, allora $f = \tilde{f}$. Infatti si ha

$$\int_\Omega (f(x) - \tilde{f}(x))g(x)dx = 0 \quad \forall g \in L^q(\Omega)$$

e prendendo $g = (f - \tilde{f})|f - \tilde{f}|^{p-2}$ abbiamo la tesi.

Definizione 1.2.5 – Convergenza debole

Dato $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach, diciamo che una successione $u_n \in \mathcal{B}$ converge debolmente a $u \in \mathcal{B}$ se $T(u_n) \to T(u)$, $\forall T \in \mathcal{B}^*$.

Osservazione 1.2.3
L'unicità del limite, in questo caso, resta vera ma è meno immediata da dimostrare. Serve infatti il teorema di Hahn-Banach: se per assurdo avessimo $u_n \rightharpoonup u$ e $u_n \rightharpoonup v$ con $u \neq v$ allora si avrebbe che per ogni $T \in \mathcal{B}^*$ vale

$$T(u) = \lim_{n\to+\infty} T(u_n) = T(v) \Rightarrow T(u - v) = 0$$

Ma per il teorema di Hahn-Banach, visto che $u - v \neq 0$, sappiamo che esiste $T \in \mathcal{B}^*$ tale che $T(u - v) = 1$, assurdo.

Definizione 1.2.6 – Convergenza forte

Dato $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach diciamo che u_n *converge fortemente* a $u \in \mathcal{B}$ se $\|u - u_n\|_\mathcal{B} \to 0$.

Osservazione 1.2.4
Se $u_n \to u$ fortemente in $\mathcal{B}$, allora $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $\mathcal{B}$. Infatti, $\forall T \in \mathcal{B}^*$

$$|T(u_n) - T(u)| \leq \|T\|_{\mathcal{B}^*}\|u_n - u\|_\mathcal{B}$$

In generale convergenza debole $\not\Rightarrow$ convergenza forte.

Idea Modi standard per cercare controesempi sono da cercare in funzioni che oscillano tanto o che scappano all'infinito. ⌟

Esempio 1.2.7. Se $\mathcal{B} = L^2(0, \pi)$ e $\phi_n = \sin(nx)$ allora $\phi_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(0, \pi)$ ma

$\phi_n \not\to 0$ fortemente in L^2. Infatti

$$\|\phi_n\|_{L^2} = \int_0^\pi \sin^2(nx)dx = c \neq 0$$

$\forall u \in L^2(0,\pi)$

$$\|u\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\left(u(x)\phi_n(x)dx\right)$$

In particolare $\int_0^\pi \phi_n(x)u(x) \to 0 \ \forall u \in L^2$ per il lemma di Riemann-Lebesgue.

Esempio 1.2.8. Sia $\phi \in L^p(\mathbb{R}^d), p \in (1,+\infty)$. Data $\{x_n\}$ tale che $|x_n| \to +\infty$, consideriamo $\phi_n(x) = \phi(x - x_n)$. Allora $\|\phi_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$, quindi $\phi_n \not\to 0$, ma $\phi_n \rightharpoonup 0$ debolmente su $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. Osserviamo che se $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ allora

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\phi_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-x_n)g(x)dx = (g * \check{\phi})(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

dove $\check{\phi}(x) = -\phi(x)$. □

Idea La nozione di convergenza debole è bella perchè ogni successione limitata è compatta, ossia ammette una sottosuccessione convergente. ⌟

Teorema 1.2.9 – Compattezza debole delle successioni limitate

Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach separabile e sia $T_n \in \mathcal{B}^*$ una successione limitata in $\mathcal{B}^*$. Allora esiste una sottosuccessione $T_{n_k} \in \mathcal{B}^*$ e $T \in \mathcal{B}^*$ tale che

$$T_{n_k}(x) \to T(x) \ \forall x \in \mathcal{B}.$$

Dimostrazione.

Idea L'ipotesi di separabilità gioca un ruolo importante. ⌟

Sia $C = \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ un sottoinsieme denso di $\mathcal{B}$. Dato x_1 vale che $T_n(x_1)$ è una successione limitata in $\mathbb{R}$, infatti:

$$|T_n(x_1)| \leq \|T_n\|_{\mathcal{B}^*}\|x_1\|$$

È dunque possibile estrarre una sottosuccessione convergente $T_{n_k^{(1)}}(x_1)$. Consideriamo ora x_2 e ripetiamo il ragionamento precedente con $T_{n_k^{(1)}}$ al posto di T_n. Abbiamo quindi la sottosuccessione $T_{n_k^{(2)}}$. Iterando il ragionamento, per ogni $j \in \mathbb{N}$ troviamo la sottosuccessione $T_{n_k^{(j)}}$. Allora, per processo diagonale, possiamo estrarre T_{n_k} come $T_{n_k^{(k)}}$ così si ha che $T_{n_k}(x_j)$ è convergente per ogni $x_j \in C$. Poniamo $T(x_j) = \lim T_{n_k}(x_j)$. In seguito indicheremo T_{n_k} con T_n per alleggerire la notazione.

Per concludere dobbiamo vedere che $T_n(x)$ è di Cauchy $\forall x \in \mathcal{B}$. Ricordando che esiste $C > 0$ tale che $\|T_n\|_{\mathcal{B}^*} \leq C$ allora

$$\begin{aligned}|T_n(x) - T_m(x)| &\leq |T_n(x) - T_n(x_j)| + |T_n(x_j) - T_m(x_j)| + |T_m(x) - T_m(x_j)| \\ &\leq \|T_n\|_{\mathcal{B}^*}\|x - x_j\|_{\mathcal{B}} + |T_n(x_j) - T_m(x_j)| + \|T_n\|_{\mathcal{B}^*}\|x - x_j\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq 2C\|x - x_j\|_{\mathcal{B}} + |T_n(x_j) - T_m(x_j)|\end{aligned}$$

Dato ε, scegliamo x_j tale che $2C\|x-x_j\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e N tale che $|T_n(x_j)-T_m(x_j) \leq \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n, m \geq N$. Abbiamo dunque che

$$T_n(x) - T_m(x) < \varepsilon \ \forall n, m \geq N.$$

Si conclude definendo $T(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x)$. Per costruzione abbiamo che T è lineare e limitato infatti $|T(x)| = \lim |T_n(x)| \leq C\|x\|_{\mathcal{B}}$. $\square$

Corollario 1.2.10

Siano $p \in (1, +\infty)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ misurabile e $f_n \in L^p(\Omega)$ successione limitata. Allora f_n ammette una sottosuccessione debolmente convergente in $L^p(\Omega)$.

Dimostrazione. Segue[6] perchè f_n è un operatore lineare continuo su $L^q(\Omega)$ con norma $\|f_n\|_{L^p(\Omega)}$. Quindi $\exists f \in L^p(\Omega)$ tale che $\int_\Omega f_n g \to \int_\Omega fg,\ \forall g \in L^q$. $\square$

Idea Il bello di avere uno spazio riflessivo e di poter vedere elementi di un Banach come elementi del duale. ⌟

Corollario 1.2.11

Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert separabile, allora ogni successione limitata ammette una sottosuccessione debolmente convergente.

Teorema 1.2.12

Sia $p \in (1, +\infty), \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ insieme misurabile e $f_n \overset{L^p(\Omega)}{\rightharpoonup} f \in L^p(\Omega)$. Allora

$$\|f\|_{L^p} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^p}.$$

Dimostrazione. Sia $g \in L^q$ con $g = \frac{f|f|^{p-2}}{\|f\|_{L^p}^{p-1}}$. Per costruzione $\|g\|_{L^q} = 1$ e $\int_\Omega fg = \|f\|_{L^p}$. Si ha quindi che

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)g(x)dx &\leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \\ &= \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^p}.\end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 1.2.5
A priori potremmo avere che $\liminf \|f_n\| = +\infty$, ma ciò non può succedere per il prossimo teorema:

[6] Usiamo implicitamente che L^q sono separabili.

Teorema 1.2.13

In uno spazio di Banach $\mathcal{B}$ ogni successione debolmente convergente è limitata.

Osservazione 1.2.6
La dimostrazione in $L^p(\Omega)$ non ha bisogno del teorema di Hahn-Banach, basta infatti usare la disuguaglianza di Minkowski.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $x_n \rightharpoonup x$ con $\|x_n\| \to +\infty$. Di conseguenza

$$\begin{cases} \|x_n - x\| \geq \|x_n\| - \|x\| \to +\infty \\ x_n - x \rightharpoonup 0 \end{cases}.$$

Possiamo dunque supporre senza perdità di generalità che $x_n \rightharpoonup 0$.

Idea L'osservazione chiave è la seguente: *se una successione scoppia è possibile controllare dal basso la velocità di convergenza.* Quindi è sempre possibile trovare qualcosa che vada a $+\infty$ molto velocemente.
Un'altra osservazione è che per Hahn-Banach, la successione è limitata nello spazio duale infatti: $\forall n\ \exists T_n : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ tale che $\begin{cases} T_n(x_n) = \|x_n\| \\ \|T_n\| = 1 \end{cases}$. ⌟

Esiste quindi una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tale che:

1. $\|x_{n_{k+1}}\| \geq \|x_{n_k}\|^2$, $\|x_{n_1}\| \geq 4$
2. $|T_{n_k}(x_{n_j})| < 1\ \forall j > k$

Osserviamo che per la prima condizione basterebbe avere $\|x_{n_1}\| > 1$, mentre la seconda è motivata dal fatto che, visto che lavoriamo con la coda di una successione convergente, la norma deve diminuire e, poichè $T_{n_k}(x_j) \to 0$, se $|T_{n_k}(x_{n_j})| \geq 1$ prendiamo un coefficiente successivo.

D'ora in poi, per alleggerire la notazione, chiamiamo $x_{n_k} = x_k$ e $T_k = T_{n_k}$.

Idea La contraddizione sarà nel trovare operatore T tale che $T(x_k) \not\to 0$ ⌟

Costruiamo T a partire da T_k: sia $A_k^2 := \|x_k\|$ (quindi $A_{k+1} \geq A_k^2$ e $A_1 \geq 2$). Definiamo $T := \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{A_j} T_j$. È ben definito perchè $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{A_j} T_j$ è di Cauchy, dunque converge assolutamente. Vediamo cosa succede quando applichiamo T a x_k.

$$T(x_k) = \sum_{j<k} \frac{1}{A_j} T_j(x_k) + \frac{1}{A_k} T_k(x_k) + \sum_{j>k} \frac{1}{A_j} T_j(x_k)$$

Idea Sappiamo che $\frac{1}{A_k} T_k(x_k) = A_k$, quindi esplode velocemente. È sufficiente dire che gli altri due membri sono in norma molto più piccoli di A_k così $T(x_k)$ esplode. ⌟

Osserviamo che $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{T_j(x_k)}{A_j} < +\infty$ infatti:

1.
$$\left|\sum_{j<k}\frac{1}{A_j}T_j(x_k)\right| \le \sum_{j<k}\frac{1}{A_j}|T_j(x_k)| \le \sum_{j<k}\frac{1}{A_j} < +\infty$$
(abbiamo usato che T_j applicato a x_k con $k>j$ è in norma <1)

2.
$$\left|\sum_{j>k}\frac{1}{A_j}T_j(x_k)\right| \le \sum_{j>k}\frac{1}{A_j}|T_j(x_k)| \le \sum_{j>k}\frac{1}{A_j}\|x_k\| = A_k^2\sum_{j>k}\frac{1}{A_j}$$
poichè $A_{k+1}\ge A_k^2$ allora $A_{k+n}\ge (A_k^2)^n$. Questo ci dice che
$$\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{A_j} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{A_{k+n}} \ge \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(A_k^2)^n} = \frac{1}{A_k^2}\frac{1}{1-\frac{1}{A_k^2}} \le 2.$$

□

Osservazione 1.2.7
Il teorema che segue, che non è stato dimostrato a lezione, può essere visto come una generalizzazione del risultato precedente.

Teorema 1.2.14 – Teorema di Banach-Steinhaus

Siano X, Y spazi di Banach e $T_n : X \to Y$ una successione di operatori lineari con la seguente proprietà:

Per ogni $x \in X$, la successione $T_n(x)$ è limitata in Y.

Allora la successione di norme
$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup\{\|T_n(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X = 1\}$$
è limitata.

Teorema 1.2.15 – Teorema di Radon-Riesz

Sia $p \in (1,+\infty)$ e sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ misurabile. Sia $f_n \in L^p(\Omega)$ successione e sia $f \in L^p(\Omega)$ una funzione. Allora sono equivalenti:

1. $f_n \rightharpoonup f$ debolmente e $\|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$
2. $f_n \to f$ fortemente in L^p.

Osservazione 1.2.8
Questo teorema, con la stessa dimostrazione, vale anche per un qualsiasi spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

Osservazione 1.2.9
Nei controesempi fatti in precedenza abbiamo sempre lavorato con una sorta di *"perdita di massa"* della norma.

Dimostrazione. La 2) $\Rightarrow$ 1) è chiara, infatti se $f_n \to f$ fortemente allora $f_n \rightharpoonup f$ per un risultato già visto. Inoltre, visto che $\|f_n\|_{L^p} - \|f\|_{L^p} \leq \|f_n - f\|_{L^p}$ e che $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$ abbiamo la seconda condizione.
Vediamo ora 1) $\Rightarrow$ 2): supponiamo[7] $p \geq 2$ e usiamo le disuguaglianze di Clarkson: notiamo che $f_n \rightharpoonup f \Rightarrow \frac{f_n+f}{2} \rightharpoonup f$ infatti $\forall g \in L^q(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{f_n + f}{2} g = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega f_n g + \int_\Omega fg\right) \to \int_\Omega fg$$

ma allora
$$\left\|\frac{f_n - f}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|f_n\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\|f\|^p_{L^p(\Omega)} - \left\|\frac{f_n + f}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega)}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \left\|\frac{f_n - f}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega)} &\leq \limsup_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\|f_n\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\|f\|^p_{L^p(\Omega)} - \left\|\frac{f_n + f}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\|f\|^p_{L^p} + \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|f_n\|_{L^p(\Omega)} - \frac{1}{2}\|f_n + f\|^p_{L^p(\Omega)}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\|f\|^p_{L^p(\Omega)} - \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|f_n + f\|^p_{L^p(\Omega)}\right) \\
&\leq \|f\|^p_{L^p(\Omega)} - \|f\|^p_{L^p(\Omega)} = 0
\end{aligned}$$

□

Proposizione 1.2.16

Se $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$ e $g_n \to g$ fortemente in $L^q(\Omega)$ allora[a]

$$\int_\Omega f_n(x)g_n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\to} \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

[a]Sostanzialmente stiamo dicendo che la convergenza forte per debole passa al limite.

Dimostrazione. La tesi segue subito osservando che

$$\int_\Omega (f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x))dx = \int_\Omega (f_n(x) - f(x))g(x)dx + \int_\Omega (g_n(x) - g(x))f_n(x)dx$$

Vale che

- $\int_\Omega (f_n(x) - f(x))g(x)dx \to 0$ poichè $f_n \rightharpoonup f$ e g è fissa.
- $\int_\Omega (g_n(x) - g(x))f_n(x)dx \leq \|g_n - g\|_{L^q}\|f_n\|_{L^p} \to 0$ visto che $\|f_n\|_{L^p} < +\infty$.

□

Esempio 1.2.17. Non è vero che la convergenza debole per debole passa al limite. Basta considerare $f_n, g_n \in L^2$ dove $f_n = \sin(nx)$ e $g_n = \sin(nx)$. Entrambe convergono debolmente a 0 ma il loro prodotto va a 1.

[7]Nel caso $p = 2$ abbiamo tutte uguaglianze.

Teorema 1.2.18

Sia $\mathcal{B}$ spazio di Banach[a] e $V \subseteq \mathcal{B}$ sottospazio chiuso. Se $v_n \in V$ converge debolmente (in $\mathcal{B}$) a $b \in \mathcal{B}$, allora $b \in V$, ossia un sottospazio chiuso di un Banach, resta chiuso per la convergenza debole.

[a] Il risultato resta valido se si suppone di avere uno spazio convesso.

Dimostrazione. Se per assurdo $b \notin V$ allora, essendo V chiuso, si ha che

$$\inf \left\{ \|b - v\|_{\mathcal{B}} : v \in V \right\} > 0.$$

Consideriamo lo spazio $W = span\langle V, b\rangle$. Definiamo $T : W \to \mathbb{R}$ come

$$T(V + \alpha b) = \alpha, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Basta dimostrare che T sia limitato su W:

$$\begin{aligned} |T(v + \alpha b)| = |\alpha| &= \frac{\alpha}{\|v + \alpha b\|_{\mathcal{B}}} \|v + \alpha b\|_{\mathcal{B}} \\ &= \frac{1}{\|\frac{v}{\alpha} + b\|_{\mathcal{B}}} \|v + \alpha b\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \frac{1}{\inf\limits_{\varphi \in V} \|b - \varphi\|} \|v + \alpha b\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Allora per il teorema di Hahn-Banach esiste $S : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ tale che $S(b) = 1$ e $S(v) = 0$ per ogni $v \in V$. Troviamo l'assurdo poichè

$$1 = S(b) = \lim_{n \to +\infty} S(v_n) = 0.$$

$\square$

1.3 Teoria spettrale

1.3.1 Spazi di Hilbert

Ricordiamo le seguenti definizioni:

Definizione 1.3.1

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert con prodotto scalare

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}\,,$$

con le seguenti proprietà:

- simmetria $\forall u, v \in \mathcal{H}$:
$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$$
- bilinearità $\forall u, v, w \in \mathcal{H}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$\langle \alpha u + \beta v, W\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$$
- positività $\forall u \in \mathcal{H}$:
$$\langle u, u\rangle \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \langle u, u\rangle = 0 \quad \text{se e solo se} \quad u = 0\,.$$

Sia $\|\cdot\|$ la norma associata al prodotto scalare, ovvero:

$$\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \qquad \text{per ogni} \qquad \in \mathcal{H}\,.$$

Lo spazio $\mathcal{H}$ dotato della norma $\|\cdot\|$ è completo, ovvero se u_n è una successione di Cauchy in $\mathcal{H}$, allora esiste $u \in \mathcal{H}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\| = 0\,.$$

Definizione 1.3.2

Diremo che una successione u_n in $\mathcal{H}$ converge fortemente ad $u \in \mathcal{H}$, se

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\| = 0\,.$$

Diremo che una successione $u_n \in \mathcal{H}$ converge debolmente ad $u \in \mathcal{H}$, se

$$\langle u, v\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle u_n, v\rangle \qquad \text{per ogni} \qquad v \in \mathcal{H}\,.$$

Scriveremo $u_n \to u$ per indicare che u_n converge fortemente ad u e $u_n \rightharpoonup u$ per indicare che u_n converge debolmente a u.

Ricordiamo che vale il seguente teorema.

Teorema 1.3.3

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile. Sia $u_n \in \mathcal{H}$ una successione che converge debolmente ad $u \in \mathcal{H}$. Allora, sono equivalenti:

1. u_n converge ad u fortemente.

2. $\|u\| = \lim_{n\to+\infty} \|u_n\|$.

Definizione 1.3.4

Diciamo che una mappa $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è un operatore lineare limitato, se:

- T è lineare:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) \quad \text{per ogni} \quad u, v \in \mathcal{H} \quad \text{ed ogni} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,;$$

- T è limitato, ovvero

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} := \sup\Big\{\|T(u)\| \;:\; u \in \mathcal{H}\,,\ \|u\| = 1\Big\} < +\infty\,.$$

Indichiamo con $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ lo spazio degli operatori lineari limitati su $\mathcal{H}$.

Esercizio 1.3.1
Mostrare che la somma di due operatori lineari limitati

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \qquad \text{e} \qquad S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\,,$$

è un operatore lineare limitato e

$$\|T + S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \le \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} + \|S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\,.$$

Esercizio 1.3.2
Dimostrare che lo spazio $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dotato della norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$, è completo.

Esercizio 1.3.3
Dati due operatori lmineari limitati

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \qquad \text{e} \qquad S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\,,$$

la loro composizione

$$T \circ S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\,, \qquad (T \circ S)(u) = T(S(u))\,,$$

è un operatore lineare limitato e

$$\|T \circ S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \le \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\,.$$

Teorema 1.3.5

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e sia $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operatore lineare.
Allora, sono equivalenti:

1. T è limitato;
2. per ogni successione debolmente convergente $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathcal{H}$, si ha che $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ in $\mathcal{H}$.

Dimostrazione. Dimostriamo che (1) implica (2). Dato un elemento $v \in \mathcal{H}$, consideriamo la mappa:

$$\ell_v : \mathcal{H} \to \mathbb{R}\,, \qquad \ell_v(u) := \langle T(u), v\rangle\,.$$

Osserviamo che $\ell_v : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ è un operatore continuo e limitato. Infatti,

$$|\ell_v(u)| = |\langle T(u), v\rangle| \le \|T(u)\|\,\|v\| \le \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|u\|\,\|v\|\,.$$

Quindi, per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste $w \in \mathcal{H}$ tale per cui:

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, w\rangle \qquad \text{per ogni} \qquad u \in \mathcal{H}\,.$$

Ora, usando la convergenza debole $u_n \rightharpoonup u$, abbiamo che:

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, w\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle u_n, w\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle T(u_n), v\rangle.$$

Siccome v è arbitrario, otteniamo che $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$.

Dimostriamo ora che (2) implica (1). Sia u_n una successione di vettori di norma 1 che realizza l'estremo superiore

$$s := \sup\Big\{\|T(u)\| \;:\; u \in \mathcal{H}\,,\ \|u\| = 1\Big\}\,,$$

ovvero la successione $\|T(u_n)\|$ è crescente e

$$\lim_{n\to+\infty}|T(u_n)| = s.$$

Siccome u_n è limitata, esiste una sottosuccessione u_{n_k} che converge debolmente in $\mathcal{H}$ ad un certo $u \in \mathcal{H}$. Quindi, per (2),

$$T(u_{n_k}) \rightharpoonup T(u).$$

Ma allora, la successione $\|T(u_{n_k})\|$ è limitata e quindi $s < +\infty$. □

Esercizio 1.3.4
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert con prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Mostrare che se $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è un operatore lineare continuo, allora esiste un unico operatore lineare $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tale che

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle \qquad \text{per ogni} \qquad u, v \in \mathcal{H}\,.$$

Inoltre, mostrare che:

- T^* è limitato e $\|T^*\| \le \|T\|$;
- $T^{**} = T$;
- $\|T^*\| = \|T\|$.

Definizione 1.3.6 – Operatore aggiunto

L'operatore T^* è detto *operatore aggiunto* di T.

Definizione 1.3.7 – Operatore autoaggiunto

Un operatore lineare continuo $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è detto *autoaggiunto*, se $T = T^*$. Osserviamo che T è autoaggiunto se e solo se

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle \qquad \text{per ogni} \qquad u, v \in \mathcal{H}\,.$$

Definizione 1.3.8 – Operatore compatto

Un operatore lineare continuo $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è detto *compatto* se manda successione limitate in successioni precompatte, o equivalentemente, se manda successioni che convergono debolmente in successioni che convergono fortemente.

Teorema 1.3.9

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e sia

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\,,$$

un operatore lineare. Allora, sono equivalenti:

1. Se u_n converge debolmente ad un certo $u \in \mathcal{H}$, allora $T(u_n)$ converge fortemente a $T(u)$.

2. Ogni successione limitata $u_n \in \mathcal{H}$ ammette una sottosuccessione u_{n_k} tale che $T(u_{n_k})$ sia fortemente convergente in $\mathcal{H}$.

Dimostrazione. La dimostrazione dell'implicazione (1) $\Rightarrow$ (2) è immediata. Infatti, siccome u_n è una successione limitata, essa ammette una sottosuccessione u_{n_k} debolmente convergente ad un certo u. Quindi, per (1), abbiamo che $T(u_{n_k}) \to T(u)$ fortemente in $\mathcal{H}$.

Dimostriamo ora che (2) $\Rightarrow$ (1). Supponiamo per assurdo che esistano $\delta > 0$ ed una successione $u_n \rightharpoonup 0$ tale che $\|T(u_n)\| \geq \delta$. Siccome u_n converge debolmente, abbiamo che $\|u_n\|$ è limitata. Esistono quindi una sottosuccessione u_{n_k} ed $w \in \mathcal{H}$ tali che

$$T(u_{n_k}) \to w.$$

In particolare,

$$\|w\| \geq \delta.$$

D'altra parte, per la convergenza debole $u_{n_k} \rightharpoonup 0$, abbiamo

$$0 = \lim_{k\to+\infty} \langle u_{n_k}, T^*(w)\rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle T(u_{n_k}), w\rangle = \langle w, w\rangle = \|w\|^2\,,$$

il che è un assurdo. □

Corollario 1.3.10

Su uno spazio di Hilbert separabile, ogni operatore compatto è limitato.

Esercizio 1.3.5

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile. Siano

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

un operatore lineare limitato ed

$$S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

un operatore lineare compatto. Mostrare che $S \circ T$ e $T \circ S$ sono compatti.

Esercizio 1.3.6
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile. Siano

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \qquad \text{e} \qquad S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

due operatore lineari compatti. Mostrare che anche l'operarore $T + S$ è compatto.

Esercizio 1.3.7
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile. Se $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è un operatore lineare compatto, allora anche il suo aggiunto $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è compatto.

Esercizio 1.3.8
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert seprabile e sia $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ una base hilbertiana. Data una successione $\alpha_n \in \mathbb{R}$ con

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0\,,$$

definiamo l'operatore

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\ , \qquad T(u) := \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \langle u, \phi_n\rangle \phi_n\,.$$

Mostrare che T è un operatore compatto.

Soluzione. Basta dimostrare che data una successione $u_k \rightharpoonup 0$, abbiamo che $T(u_k) \to 0$ fortemente in $\mathcal{H}$. Infatti, osserviamo che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|u_k\| \leq C \quad \text{per ogni} \quad k \geq 1.$$

Fissiamo ora $\epsilon > 0$ ed osserviamo che esiste $N \geq 1$ tale che

$$|\alpha_n| \leq \epsilon \quad \text{per ogni} \quad n \geq N\,.$$

Quindi, per ogni k,

$$\left\| \sum_{n=N}^{+\infty} \alpha_n \langle u_k, \phi_n\rangle \phi_n \right\| \leq \epsilon\|u_k\| \leq \epsilon C.$$

D'altra parte, siccome $u_k \rightharpoonup 0$, abbiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle u_k, \phi_n\rangle \phi_n = 0\,.$$

Quindi, per k abbastanza grande $\|T(u_k)\| \leq (1 + C)\epsilon\,.$ $\square$

1.3.2 Teorema spettrale

Definizione 1.3.11 – Operatore (semi)-definito positivo

Siano $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operatore lineare.
Diremo che T è semi-definito positivo, se

$$\langle T(u), u\rangle \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad u \in \mathcal{H}\,.$$

Diremo che T è definito positivo, se

$$\langle T(u), u\rangle > 0 \quad \text{per ogni} \quad u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}\,.$$

Definizione 1.3.12

Siano $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operatore lineare. Se

$$\phi \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \qquad \text{e} \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

sono tali che

$$T(\phi) = \lambda\phi$$

allora diremo che λ è un autovalore di T e che ϕ è il corrispondente autovettore.

Teorema 1.3.13 – Teorema spettrale

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile. Sia

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

un operatore lineare, compatto, autoaggiunto e semi-definito positivo.
Allora, vale una delle seguenti alternative:

1. Esistono un numero finito di autovettori $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ corrispondenti agli autovalori
$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N > 0\,,$$
tali che
$$T(u) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \langle \phi_j, u\rangle \phi_j \qquad \text{per ogni} \qquad u \in \mathcal{H}\,.$$

2. Esiste una successione di autovettori $\{\phi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ con corrispondenti autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^{+\infty}$ con le seguenti proprietà:
   - $\lambda_1 \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$;
   - λ_n è una successione monotona decrescente;
   - $\lambda_n > 0$ per ogni $n \geq 1$;
   - $\lambda_n \to 0$;
   - per ogni $u \in \mathcal{H}$, abbiamo
   $$T(u) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \langle \phi_j, u\rangle \phi_j\,.$$

   Inoltre, se T è definito positivo, allora $\{\phi_i\}_{i=1}^{+\infty}$ è una base hilbertiana.

Osservazione 1.3.1
Nel caso 1. del teorema si ha che $rnk(T) < +\infty$- In generale si può vedere che se un operatore ha rango finito, allora questo sicuramente è compatto.

In generale invece segue che ogni operatore compatto può essere approssimato con operatori compatti di rango finito. Il primo caso è ovvio, nel secondo invece si considerano le somme parziali.

Lemma 1.3.14

Sia $\mathcal{H}$ Hilbert separabile e $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ compatto, autoaggiunto. Consideriamo V sottospazio chiuso invariante[a] per T. Sia

$$\lambda = \sup\{\langle T(u), u\rangle : u \in V, \|u\| = 1\}.$$

Se $\lambda > 0$, allora esiste $\phi \in V$ tale che $\|\phi\| = 1, \langle T(\phi), \phi\rangle = \lambda$. Inoltre $T(\phi) = \lambda\phi$.

[a] ossia per ogni $\phi \in V$ vale $T(\phi) \in V$.

Dimostrazione. Esiste una successione $u_n \in V$, $\|u_n\| = 1$ e tale che $\lim_{n\to+\infty} \langle T(u_n), u_n\rangle = \lambda$. Estraiamo una sottosuccessione u_{n_k} convergente debolmente a $u \in H$. Poichè V è chiuso, $u \in V$. Per la compattezza di T si ha $T(u_{n_k}) \to T(u)$. Segue che

$$\lambda = \langle T(u_{n_k}), u_{n_k}\rangle \to \langle T(u), u\rangle.$$

Visto che $\lambda \neq 0$ si ha che $u \neq 0$. Per la convergenza debole

$$\|u\| \leq \liminf_{k\to+\infty} \|u_{n_k}\| = 1.$$

Possiamo dunque considerare $\phi = \frac{u}{\|u\|}$. Si ha che

$$\langle T(\phi), \phi\rangle = \frac{\lambda}{\|u\|^2} \geq \lambda$$

Per definizione di estremo superiore abbiamo che $\langle T(\phi), \phi\rangle = \lambda$ e dunque $\|u\| = 1$. Vediamo ora che è un autovettore: visto che u è un massimo si ha[8]

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{\langle T(\phi + tw), \phi + tw\rangle}{\|\phi + tw\|^2} \\
&= \frac{(\langle T(\phi + tw), \phi + tw\rangle)'\|\phi + tw\| - (\langle T(\phi + tw), \phi + tw\rangle)(\langle \phi + tw, \phi + tw\rangle'}{\|\phi + tw\|^4}\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{\langle T(\phi), w\rangle + \langle \phi, T(w)\rangle - \langle T(\phi), \phi\rangle\langle \phi, w\rangle}{\|\phi\|^4} \\
&= 2(\langle T(\phi), w\rangle + \langle \phi, T(w)\rangle - \lambda\langle \phi, w\rangle)
\end{aligned}$$

Segue quindi che per ogni $w \in V$ si ha

$$\langle T(\phi), w\rangle = \lambda\langle \phi, w\rangle.$$

Si conclude considerado $w = T(\phi) - \lambda\phi$, infatti

$$0 = \langle T(\phi) - \lambda\phi, u\rangle = \|T(\phi) - \lambda\phi\|^2.$$

□

[8] in generale si avrebbe che $\langle T(\phi) + T^*(\phi), u\rangle = 2\lambda\langle \phi, u\rangle$.

Lemma 1.3.15

Siano $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operatore compatto e autoaggiunto. Sia V un sottospazio lineare chiuso di $\mathcal{H}$ e invariante rispetto a T, ovvero:

$$T(v) \in V \quad \text{per ogni} \quad v \in V\,.$$

Se

$$\langle T(u), u\rangle = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad u \in V\,,$$

allora

$$T(u) = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad u \in V\,.$$

Dimostrazione. Fissiamo un vettore $u \in V$. Siccome V è invariante per T, abbiamo che per ogni vettore $\psi \perp V$, si ha che

$$\langle T(u), \psi\rangle = 0\,.$$

D'altra parte, se $\psi \in V$, allora

$$\langle T(u+\psi), u+\psi\rangle = \langle T(u), u\rangle + \langle T(\psi), \psi\rangle + 2\langle T(u), \psi\rangle\,,$$

e quindi

$$\langle T(u), \psi\rangle = 0.$$

Quindi $T(u) = 0$. □

Dimostrazione del Teorema. Applicando Lemma 1.3.2 con $V_1 = \mathcal{H}$, otteniamo un vettore $\phi_1 \in \mathcal{H}$ tale che

$$\|\phi_1\| = 1 \qquad \text{e} \qquad T(\phi_1) = \lambda_1\phi_1\,,$$

dove

$$\lambda_1 = \max\Big\{\langle T(u), u\rangle \;:\; u \in \mathcal{H},\; \|u\| = 1\Big\}.$$

Se $\lambda_1 = 0$, allora l'operatore T è identicamente nullo (per Lemma 1.3.2). Se invece $\lambda_1 > 0$, allora consideriamo lo spazio

$$V_2 := \Big\{u \in \mathcal{H} \;:\; u \perp \phi_1\Big\}.$$

Osserviamo che V_2 è uno spazio invariante per l'operatore T. Infatti, se $u \in V_2$, allora

$$\langle T(u), \phi_1\rangle = \langle u, T(\phi_1)\rangle = \langle u, \lambda_1\phi_1\rangle = 0\,,$$

e quindi $T(u) \in V_2$. Esiste quindi un autovettore ϕ_2 tale che

$$\|\phi_2\| = 1\,, \quad \langle \phi_1, \phi_2\rangle = 0\,, \quad T(\phi_2) = \lambda_2\phi_2\,,$$

dove

$$\lambda_2 = \max\Big\{\langle T(u), u\rangle \;:\; u \in \mathcal{H},\; \|u\| = 1,\; \langle u, \phi_1\rangle = 0\Big\}.$$

Consideriamo di nuovo due casi. Se $\lambda_2 = 0$, allora T è identicamente nullo su V_2. Quindi, in questo caso, T è della forma

$$T(u) = \lambda_1\langle \phi_1, u\rangle\phi_1.$$

Se invece $\lambda_2 > 0$, allora continuiamo la costruzione considerando lo spazio

$$V_3 := \Big\{ u \in \mathcal{H} \ : \ u \perp \phi_1, \ u \perp \phi_2 \Big\} .$$

In generale, al passo n, abbiamo $n-1$ autofunzioni $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ relative ad $n-1$ autovalori

$$0 < \lambda_{n-1} \le \dots \le \lambda_2 \le \lambda_1 ,$$

tali che

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij} \qquad \text{e} \qquad T(\phi_j) = \lambda_j \phi_j \ ,$$

e dove per ogni $1 \le k \le n-1$

$$\lambda_k := \max \Big\{ \langle T(u), u \rangle \ : \ u \in \mathcal{H}, \ \|u\| = 1, \ \langle \phi_j, u \rangle = 0 \quad \text{per ogni} \quad j = 1, \dots, k-1 \Big\} .$$

Definiamo quindi

$$V_n := \Big\{ u \in \mathcal{H} \ : \ u \perp \phi_1, \ u \perp \phi_2, \dots, \ u \perp \phi_{n-1} \Big\} ,$$

e

$$\lambda_n = \max \Big\{ \langle T(u), u \rangle \ : \ u \in V_n, \ \|u\| = 1 \Big\} .$$

Consideriamo quindi due casi:
Caso 1. Esiste $N \ge 1$ tale che

$$\lambda_N = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_k > 0 \quad \text{per} \quad k \le N-1.$$

In questo caso,

$$T(u) = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j \langle u, \phi_j \rangle \phi_j .$$

Caso 2. Il processo non termina mai, ovvero esiste una successione $\{\phi_n\}_{n \ge 1}$ di autofunzioni tali che:

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij} \qquad \text{e} \qquad T(\phi_k) = \lambda_k \phi_k \ ,$$

e dove per ogni $k \ge 2$

$$\lambda_k := \max \Big\{ \langle T(u), u \rangle \ : \ u \in \mathcal{H}, \ \|u\| = 1, \ \langle \phi_j, u \rangle = 0 \quad \text{per ogni} \quad j = 1, \dots, k-1 \Big\} > 0 .$$

Per costruzione, abbiamo che:

- $\lambda_1 \le \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$;
- λ_n è una successione monotona decrescente;
- siccome T è semi-definito, positivo, $\lambda_n \ge 0$ per ogni $n \ge 1$.

Dimostriamo ora che $\lambda_n \to 0$. Supponiamo per assurdo che $\lambda_n \ge \delta > 0$ per ogni n. Siccome ϕ_n è una successione limitata, esiste una sottosuccessione ϕ_{n_k} che converge debolmente ad un certo $\psi \in \mathcal{H}$. Ora, da un lato ψ è nella chiusura dello spazio generato dalla famiglia $\{\phi_{n_k}\}_{k \ge 1}$, mentre dall'altro lato,

$$0 = \lim_{k \to +\infty} \langle \phi_{n_j}, \phi_{n_k} \rangle = \langle \phi_{n_j}, \psi \rangle \qquad \text{per ogni} \qquad j ,$$

e quindi abbiamo che necessariamente $\psi = 0$. Di conseguenza, siccome T è compatto, abbiamo che $T(\phi_{n_k}) \to 0$ fortemente in $\mathcal{H}$ e quindi

$$\delta \leq \lim_{k\to+\infty} \langle T(\phi_{n_k}), \phi_{n_k}\rangle = 0\,,$$

il che è un assurdo. In conclusione,

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0\,.$$

Sia ora W la chiusura dello spazio generato da $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ e sia V_∞ il suo ortogonale. Definiamo

$$\lambda_\infty := \max\Big\{\langle T(u), u\rangle \ : \ u \in V_\infty,\ \|u\| = 1\Big\}\,.$$

Siccome

$$\lambda_n \geq \lambda_\infty \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1\,,$$

abbiamo che $\lambda_\infty = 0$. Per Lemma 1.3.2, abbiamo quindi che

$$T(v) = 0 \quad \text{per ogni} \qquad v \in V_\infty\,.$$

Si ha quindi che

$$T(u) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \langle \phi_j, u\rangle \phi_j\,,$$

per ogni $u \in \mathcal{H}$. Infine, osserviamo che se T è definito positivo allora necessariamente $V_\infty = \{0\}$. In questo caso, $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ è una base hilbertiana di $\mathcal{H}$. $\square$

Capitolo 2

Spazi di Sobolev in una variabile

2.1 Spazi di Sobolev su $\mathbb{R}$

In generale $I \subseteq \mathbb{R}$ sarà un intervallo qualsiasi[1], $I = [a,b], [0,+\infty), \mathbb{R}$ e in generale $p \in [1,+\infty]$.

Definizione 2.1.1 – Spazio di Sobolev su $\mathbb{R}$

Consideriamo lo spazio di tutte le funzioni $u \in L^p(I)$ tali che esiste una funzione $v \in L^p(I)$ con la seguente proprietà: $\forall \varphi \in C^1_C(I)$, le φ sono dette *funzioni test*,

$$\int_I u(x)\varphi'(x)dx = -\int_I v(x)\varphi(x)dx$$

Diremo che $u \in W^{1,p}(I)$ dove $W^{1,p}(I)$ si chiama *Spazio di Sobolev*; v è detta *derivata debole* di u (e si indica con u').
Dato $m \geq 2$ possiamo inoltre definire $W^{m,p}(I)$ come segue:

$$W^{m,p}(I) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(I); u' \in W^{m-1,p}(I) \right\}.$$

Osservazione 2.1.1
v è unica: infatti se esistono $v, w \in L^p(I)$ tali che

$$-\int v\phi = \int u\varphi' = -\int w\varphi \quad \forall \varphi \in C^1_C(I)$$

allora $\int_I (v-w)\varphi = 0 \; \forall \varphi \in C^1_C(I) \Rightarrow v = w$.

Osservazione 2.1.2
Vediamo che il concetto di derivata in senso classico e di derivata debole coincidono. Infatti se $\varphi \in C^1(I)$ e $\varphi \in L^p(I), \varphi' \in L^p(I)$, allora $\varphi \in W^{1,p}(I)$ e φ' è esattamente la sua derivata debole. Infatti:

$$\int_I \varphi(x)\psi'(x)dx = -\int \varphi'(x)\psi(x)dx \quad \forall \psi \in C^1_C(I)$$

Idea La nozione di spazio di Sobolev ci permette di derivare cose che non sono C^1. ⌟

[1] vedremo che è uguale a prendere estremi o meno

Esempio 2.1.2. Consideriamo $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.
Vediamo che $f \in W^{1,p}([-1,1])$ $\forall p \in [1,+\infty]$ e $f'(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. L'unica verifica da fare è che effettivamente f' sia la derivata debole di f: se $\varphi \in C_C^1([-1,1])$ allora

$$\int_{-1}^{1} \varphi'(x)f(x)dx = \int_0^1 \varphi'(x)xdx = [\varphi(x)x]_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)dx = -\int_{-1}^{1} \varphi\mathbb{1}_{[0,1]}$$

Osservazione 2.1.3
Precisazione: d'ora in poi "*funzione a supporto compatto*" vuol dire supportata in sottointervallo compatto visto che in generale lavoriamo su $W^{1,p}(I)$ con I aperto.

Esempio 2.1.3. Se consideriamo $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$, allora $f \notin W^{1,p}([-1,1])$ per nessun $p \in [1,+\infty]$. Infatti sia $\varphi \in C_C^1(I)$ allora

$$\int_{-1}^{1} \varphi'(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)dx = \int_0^1 \varphi'(x)dx = -\varphi(0).$$

Vediamo che non esiste $g \in L^p([-1,1])$ tale che $\int_I g\varphi = -\varphi(0)$ $\forall \varphi$.

Idea Prendiamo una successione che approssima. Stiamo dicendo che la *delta di Dirac* non è una distribuzione. ⌟

Supponiamo che $|\{g > 0\}| \neq 0$. Allora esiste una successione $\varphi_n \in C_C^1([-1,1])$ tali che $0 \leq \varphi_n \leq 1$ tali che $\varphi_n \to \mathbb{1}_{\{g>0\}}$ puntualmente. Inoltre posso supporre che $\varphi_n(0) = 0$ $\forall n$. Quindi

$$\int g_+ \underset{n\to+\infty}{\leftarrow} \int \varphi_n g = -\varphi_n(0) = 0$$

Ripetendo il ragionamento per la parte negativa abbiamo $g \equiv 0$, assurdo.

Definizione 2.1.4

Possiamo definire $W_{loc}^{1,p}(I)$ come lo spazio di funzioni $u \in L_{loc}^p(I)$ tale che esiste $v \in L_{loc}^p(I)$

$$\int_I u(x)\varphi'(x)dx = -\int_I v(x)\varphi(x)dx \ \forall \varphi \in C_C^1(I)$$

Teorema 2.1.5

$W^{1,p}(I)$ è uno spazio di Banach con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)}$$

Dimostrazione. Vediamo innanzitutto che $W^{1,p}(I)$ è uno spazio vettoriale. Infatti se $u, v \in W^{1,p}(I), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora $\alpha u + \beta v \in L^p, \alpha u' + \beta v' \in L^p$. Quindi basta osservare che

$(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v'$, ossia che $\forall \varphi \in C^1_C(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\int_I \varphi'(\alpha u + \beta v) = \alpha \int_I \varphi' u + \beta \int_I \varphi' v = -\alpha \int_I \varphi u' - \beta \int \varphi v' \\ = -\int_I \varphi(\alpha u' + \beta v')\end{aligned}$$

Quindi $\alpha u + \beta v \in W^{1,p}(I)$ e $\alpha u' + \beta v'$ è la sua derivata debole.
Chiaramente $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}$ è una norma. Per verificare che $(W^{1,p}(I), \|\cdot\|_{W^{1,p}(I)})$ è completo, prendiamo una successione di Cauchy $u_n \in W^{1,p}(I)$ e vediamo che converge.
Poichè $\{u_n\}$ è di Cauchy in $W^{1,p}(I)$ e

$$\|u_n - u_m\|_{L^p} + \|u'_n - u'_m\|_{L^p} = \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(I)}$$

allora u_n è di Cauchy in $L^p(I)$ e u'_n è di Cauchy in $L^p(I)$. Esistono dunque i seguenti limiti forti in $L^p(I)$: $u_n \to u$ e $u'_n \to v$. Verifichiamo ora che v sia la derivata debole di u: data $\varphi \in C^1_C(I)$, allora

$$\int_I u\varphi' = \lim_{n\to+\infty} \int_I u_n \varphi' = -\lim_{n\to+\infty} \int_I u'_n \varphi = -\int_I v\varphi$$

Quindi $u \in W^{1,p}(I)$ e $u' = v$. □

Osservazione 2.1.4
Il caso $p = 2$ è speciale. $H^1(I) := W^{1,2}(I)$ è uno spazio di Hilbert (sui reali) con prodotto scalare dato da: $u, v \in W^{1,2}$

$$\langle u, v\rangle = \int_I u(x)v(x)dx + \int_I u'(x)v'(x)dx$$

Il prodotto scalare così definito non ci restituisce la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}$ definita prima, ma ce ne dà una ad essa equivalente.

Osservazione 2.1.5
Visto che

$$W^{1,p}(I) = \{(u, v) : u \in L^p, v \in L^p | v = u'\}$$

possiamo pensare a $W^{1,p}(I)$ come ad uno sottospazio chiuso[2] di $L^p(I) \times L^p(I)$. Segue quindi che $W^{1,p}(I)$ è separabile per $1 \le p < +\infty$.

2.1.1 Lo spazio duale di $W^{1,p}(I)$

Osservazione 2.1.6
Dato $p \in [1, +\infty]$ e $q = \frac{p}{p-1}$ se consideriamo $T : L^p(I) \times L^p(I) \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare[3] continuo allora esistono $f \in L^q(I), g \in L^q(I)$ tali che

$$T(u, v) = \int_I u(x)f(x)dx + \int_I v(x)g(x)dx \quad \forall (u, v) \in L^p \times L^p$$

Allora se consideriamo $v = u'$ abbiamo che $T : W^{1,p}(I) \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare continuo. Quando $p \in (1, +\infty)$ vale anche il viceversa.

[2] essendo uno spazio di Banach.
[3] per visualizzare meglio conviene pensare alle restrizioni $L^p \times \{0\}$ e $\{0\} \times L^p$

Teorema 2.1.6

Se $p \in (1, +\infty)$ e $T : W^{1,p}(I) \to \mathbb{R}$ funzionale lineare continuo, allora esistono $f, g \in L^q(I)$ tali che

$$T(u) = \int_I f(x)u(x) + \int_I g(x)u'(x) \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$$

Dimostrazione. Per Hahn-Banach, esiste $S : L^p(I) \times L^p(I) \to \mathbb{R}$ tale che $S \equiv T$ su $W^{1,p}(I)$. S è della forma detta sopra, e quindi abbiamo la tesi. □

Osservazione 2.1.7
La rappresentazione dei $T : L^q(I) \times L^q(I) \to \mathbb{R}$ è unica (segue da unicità di funzionali $L^q(I) \to \mathbb{R}$) mentre quella dei funzionali di $W^{1,p}(I)$ non lo è. Infatti, fissata $\varphi \in C^1_C(I)$ vale che il funzionale

$$T_\varphi(u) = \int u(x)\varphi'(x) + \int \varphi(x)u'(x)dx$$

è il funzionale nullo su $W^{1,p}(I)$.

Idea Moralmente il duale di $W^{1,p}$ è quoziente di $L^p \times L^p$. Ricordando che un sottospazio chiuso di uno spazio riflessivo è riflessivo, segue che $W^{1,p}(I)$ è riflessivo in quanto sottospazio chiuso di $L^p(I) \times L^p(I)$. ⌟

2.1.2 Caratterizzazione della convergenza debole in $W^{1,p}(I)$

Teorema 2.1.7

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $p \in (1, +\infty)$. Sia u_n una successione in $W^{1,p}(I)$. Allora sono equivalenti:

1. u_n converge debolmente in $W^{1,p}(I)$ ad una qualche funzione $u \in W^{1,p}(I)$.
2. $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in L^p e $u'_n \rightharpoonup u'$ debolmente in $L^p(I)$ per una qualche $u \in W^{1,p}(I)$.
3. $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(I)$ e per una qualche $u \in L^p(I)$ e $u'_n \rightharpoonup v$ in $L^p(I)$ per una qualche $v \in L^p(I)$.

Idea Sostanzialmente il teorema traduce la nozione di convergenza debole nello spazio di Banach $W^{1,p}(I)$ a una coppia di convergenze deboli in $L^p(I)$. ⌟

Dimostrazione. 1) ⇒ 2): basta osservare che i funzionali $T : W^{1,p}(I) \to \mathbb{R}$ e $S : W^{1,p}(I) \to \mathbb{R}$, definiti come

$$T(u) = \int_I f(x)u(x)dx$$
$$S(u) = \int_I g(x)u'(x)dx$$

con $f \in L^q(I)$ e con $g \in L^q(I)$, sono funzionali continui in $W^{1,p}(I)$. La linearità è ovvia, è sufficiente vedere che sono limitati, ma anche questo è immediato. Si conclude perchè la convergenza debole passa per funzionali continui.

2) $\Rightarrow$ 3): ovvio.
3) $\Rightarrow$ 1): Siano $u_n \overset{L^p}{\rightharpoonup} u, u'_n \overset{L^p}{\rightharpoonup} v$ allora $\forall \varphi \in C^1_C$

$$\begin{aligned}\int_I v(x)\varphi(x)dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_I u'_n(x)\varphi(x)dx \\ &= -\lim_{n\to\infty} \int_I u_n(x)\varphi'(x)dx = -\int_I u(x)\varphi'(x)dx\end{aligned}$$

quindi $u \in W^{1,p}(I)$ e $v = u'$. Per ogni funzionale T della forma

$$T(u) = \int_I f(x)u(x)dx + \int_I g(x)u'(x)dx$$

con $f, g \in L^q(I)$ abbiamo che

$$T(u_n) = \int_I u_n(x)f(x)dx + \int_I u'_n(x)g(x)dx \longrightarrow \int_I u(x)f(x) + u'(x)g(x) = T(u).$$

Poichè tutti i funzionali su $W^{1,p}$ sono di questa forma, allora $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(I)$. □

Corollario 2.1.8

Se $p \in (1, +\infty)$, ogni successione limitata in $W^{1,p}(I)$ ammette una sottosuccessione debolmente convergente in $W^{1,p}(I)$.

Corollario 2.1.9

Se $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}$ per $p \in (1, +\infty)$ allora $\|u_n\|_{W^{1,p}}$ è limitata e

$$\|u\|_{L^p} \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^p}$$
$$\|u'\|_{L^p} \le \liminf_{n\to\infty} \|u'_n\|_{L^p}$$

Idea Questi due lemmi sono i risultati principali che ci permetteranno di dimostrare esistenza di soluzioni in equazioni a derivate parziali e si possono generalizzare abbastanza facilmente per spazi di Sobolev su $\mathbb{R}^d$. ⌟

2.1.3 Teoremi di rappresentazione in $W^{1,p}(I)$

I prossimi risultati sfrutteranno il fatto di essere in dimensione 1 e non sono validi in più dimensioni. Il teorema fondamentale del calcolo integrale che presentiamo ora è un teorema di rappresentazione per gli spazi $W^{1,p}(I)$ che sta alla base dei risultati che si ottengono negli spazi di Sobolev in dimensione 1 e l'idea principale che presenta è che ogni funzione $u \in W^{1,p}(I)$ ammette uno e uno soltanto[4] *rappresentante continuo* su I.

Lemma 2.1.10

Sia $I = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $p \in [1, +\infty]$. Se $g \in L^p(I)$, definiamo $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Allora G è continua su $[a, b]$ e, se I è limitato, allora $G \in W^{1,p}(I)$ e $G' = g$.

[4]Achtung: dire che una funzione u è continua quasi ovunque o dire che ammette un rappresentante continuo sono cose diverse.

Dimostrazione. La continuità e la limitatezza di G sono ovvie. Per concludere $G' = g$ basta che $G \in L^p(I)$: Sia[5] $\varphi \in C_C^\infty$, allora

$$\begin{aligned}\int_I G(x)\varphi'(x)dx &= \int_a^b \int_a^x g(t)dt\varphi'(x)dx = \int_a^b \int_a^x g(t)\varphi'(x)dtdx \\ &= \int_a^b \int_a^b \mathbb{1}_{[a,x]}(t)g(t)\varphi'(x)dtdx \\ &= \int_a^b \int_a^b \mathbb{1}_{[t,b]}(x)g(t)\varphi'(x)dtdx \\ &= \int_a^b \int_t^b \varphi'(x)dxg(t)dt = \int_I -\varphi(t)g(t)dt\end{aligned}$$

□

Lemma 2.1.11

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $u \in L^p(I)$. Se $\int_I u(x)\varphi'(x)dx = 0 \ \forall \varphi \in C_C^1(I)$, allora esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $u \equiv C$ su I.

Dimostrazione. Data una qualsiasi funzione $\psi \in C_C(I)$, consideriamo

$$\phi(x) = \psi(x) - \left(\int_I \psi(t)dt\right)\eta(x)$$

dove $\eta \in C_C^\infty(I)$ è una funzione con $\int_I \eta(t)dt = 1$. Ponendo

$$\Phi(x) := \int_a^x \phi(y)dy$$

segue che $\Phi \in C_C^1(I)$ e $\Phi'(x) = \phi(x)$. Quindi

$$\begin{aligned}0 = \int_I u\Phi' &= \int_I u(t)\psi(t)dt - \int_I \psi(t)dt \int_I u(x)\eta(x)dx \\ &= \int_I \phi(t)[u(t) - \int_I u(x)\eta(x)dx]dt\end{aligned}$$

siccome ϕ è arbitraria e u è fissata vale che $u \equiv \int_I u(x)\eta(x)dx$ su I. □

Teorema 2.1.12 – Teorema fondamentale del calcolo integrale in $W^{1,p}(I)$

Sia I intervallo, $p \in [1, +\infty]$. Se $u \in W^{1,p}(I)$, allora esiste $\tilde{u} : I \to \mathbb{R}$ continua tale che $\tilde{u} = u + C$ quasi ovunque[a] in I e

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt, \ \forall x, y \in I.$$

[a]Ossia u ammette un rappresentante continuo.

[5]essendo $\varphi \in C_C^\infty$ abbiamo che $\varphi(b) = 0$

Dimostrazione. Fissato $x_0 \in I$ consideriamo

$$v(x) = \int_{x_0}^{x} u'(t)dt$$

che è una funzione continua tale che

$$\int_I (u(x) - v(x))\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_C^1(I).$$

Allora esiste C tale che, per quasi ogni $x \in I$

$$u(x) = v(x) + C.$$

□

Corollario 2.1.13

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e $p \in [1, +\infty]$. Se $u \in W^{1,p}(I)$ e u' è una funzione continua su I, allora $u \in C^1(I)$.

Dimostrazione. Ovvia conseguenza del teorema precedente. □

Lemma 2.1.14

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e $u \in L^p(I)$ con $1 < p \leq +\infty$. Allora sono equivalenti:

1. $u \in W^{1,p}(I)$

2. esiste una costante $C > 0$ tale che:

$$\left| \int_I u(x)\varphi'(x)dx \right| \leq C\|\varphi\|_{L^q(I)} \quad \forall \varphi \in C_C^1(I)$$

   dove $q = \frac{p}{p-1}$. A posteriori possiamo considerare $C = \|u'\|_{L^p(I)}$.

Dimostrazione. Chiaramente (1) $\Rightarrow$ 2). Vediamo che 2) $\Rightarrow$ 1: consideriamo il funzionale $T : C_C^1(I) \to \mathbb{R}$ dato da

$$T(\varphi) = \int_I u(x)\varphi'(x)dx$$

Visto che T è definito su $C_C^1(I) \subseteq L^q(I)$ ed è limitato per ipotesi, per il teorema di Hahn-Banach sappiamo che esiste $S : L^q(I) \to \mathbb{R}$ tale che $S|_{C_C^1(I)} \equiv T$ e $|S(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_{L^q(I)}$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz[6] esiste $v \in L^p(I)$ tale che

$$S(\varphi) = \int_I v(x)\varphi(x)dx.$$

Concludiamo osservando che $\forall \varphi \in C_C^1(I)$ si ha

$$\int_I u(x)\varphi'(x)dx = T(\varphi) = S(\varphi) = \int_I v(x)\varphi(x)dx$$

e dunque $u \in W^{1,p}(I)$ con $u' = -v$. □

[6] L'utilizzo del teorema è possibile visto che $q \in [1, +\infty)$.

Teorema 2.1.15

Sia $u \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in (1, +\infty)$. Allora sono equivalenti:

1. $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$
2. Esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{L^p_x(\mathbb{R})} \leq C|h|, \ \forall h \in \mathbb{R}$$

A posteriori possiamo prendere[a] $C = \|u'\|_{L^p(\mathbb{R})}$.

[a] Simile al teorema di Lagrange classico.

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2): Questa implicazione vale anche per $p = 1$. Per il Teorema (2.1.3):

$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t)dt = h \int_0^1 u'(x+sh)ds$$

dove $s = \frac{t-x}{h}$. Questo vuol dire che

$$|u(x+h) - u(x)| \leq |h| \int_0^1 |u'(x+sh)|ds$$

ma quindi

$$|u(x+h) - u(x)|^p \leq |h|^p \left(\int_0^1 |u'(x+sh)|ds \right)^p \leq |h|^p \int_0^1 |u'(x+h)|^p ds$$

e integrando in x su $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}} |h|^p \int_0^1 |u'(x+h)|^p ds dx \\
&= |h|^p \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}} |u'(x+sh)|^p dx \\
&= |h|^p \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^p dx = |h|^p \int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^p dx.
\end{aligned}$$

2) $\Rightarrow$ 1): Il punto di partenza è: $\forall \varphi \in C^1_C(\mathbb{R})$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} (u(x+h) - u(x))\varphi(x)dx = \int u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]dx.$$

Vale quindi che

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u(x)(\varphi(x-h) - \varphi(x))dx \right| \leq C||h|\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

Allora dividendo tutto per $|h|$ e facendo il limite per $|h| \to 0$:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)dx \right| = \lim_{|h|\to 0} \left| \int_{\mathbb{R}} u(x) \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x))}{h} dx \right| \leq C\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

Concludiamo per il lemma precedente. $\square$

Corollario 2.1.16

Data $u \in L^p(I)$ con $p \in (1, +\infty)$. Allora sono equivalenti:

1. $u \in W^{1,p}(I)$
2. esiste $C > 0$ tale che per ogni intervallo compatto $I' \subset I$ si ha

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{L^p_x(I')} \leq C|h|$$

per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $|h| < dist(\partial I, \partial I')$. Si può prendere $C = \|u'\|_{L^p(I)}$.

Osservazione 2.1.8

Il caso $p = +\infty$ va visto separatamente. Possiamo infatti dire che $u \in L^\infty(I)$ è in $W^{1,\infty}(I)$ se e solo se esiste $C > 0$ tale che quasi ogni $x, y \in I$ valga

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|.$$

Dimostrazione. Come prima se $u \in W^{1,\infty}(I)$ basta utilizzare il Teorema 2.1.3. Per l'altra implicazione invece, se $h \in \mathbb{R}$ con $|h|$ abbastanza piccolo, vale che

$$\int_I [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx = \int_I u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]dx$$

$\forall \varphi \in C^1_C(I)$, ma allora otteniamo subito che

$$\left| \int_I u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]dx \right| \leq C|h|\|\varphi\|_{L^1}.$$

La tesi segue per il lemma precedente, osservando che

$$\left| \int_I u(x)\varphi'(x)dx \right| = \lim_{|h| \to 0} \frac{1}{|h|} \left| \int_I u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]dx \right| \leq C\|\varphi\|_{L^1}.$$

□

2.2 Teoremi di estensione, approssimazione e compattezza

2.2.1 Teoremi di estensione da $W^{1,p}(I)$ a $W^{1,p}(\mathbb{R})$

Nel seguito vorremo considerare alcuni operatori, come la convoluzione o la trasformata di Fourier, che però sono definiti per funzioni che hanno come dominio tutto $\mathbb{R}$. Al momento abbiamo considerato principalmente funzioni $u \in W^{1,p}(I)$ con $I \subset \mathbb{R}$. Vogliamo costruire metodi per essere in grado di passare da $u \in W^{1,p}(I)$ a $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Esempio 2.2.1. Osserviamo immediatamente che, data $u \in W^{1,p}(I)$, estendere u a 0 fuori da I non garantisce che $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, sia infatti: $u(x) = \mathbb{1}_I(x)$. Chiaramente $u \in W^{1,p}(I)$, ma $\tilde{u} \notin W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Osservazione 2.2.1

Se $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ con derivata debole $u' \in L^p(\mathbb{R})$, allora $u \in W^{1,p}(I)$ e $u' \in L^p(I)$ è la sua derivata debole.

Dimostrazione. Infatti $u \in L^p(I)$, $u' \in L^p(I)$. Quindi basta verificare che $\forall \varphi \in C^1_C(I)$

$$\int_I \varphi'(x)u(x)dx = -\int_I \varphi(x)u'(x)dx$$

ma questo è ovvio perchè è vero $\forall \psi \in C^1_C(\mathbb{R})$ e $C^1_C(I) \subseteq C^1_C(\mathbb{R})$. □

La cosa che vogliamo dimostrare è il viceversa.

Teorema 2.2.2 – Teorema di estensione

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $p \in [1, +\infty]$ allora esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ (C dipende da I e da p) tale che: $\forall u \in W^{1,p}(I)$ esiste $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ con $u \equiv \tilde{u}$ su I e

1. se I è illimitato, allora $\begin{cases} \|\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R})} = 2\|u\|_{L^p(I)} \\ \|\tilde{u}'\|_{L^p(\mathbb{R})} = 2\|u\|_{L^p(I)} \end{cases}$
2. se I è limitato, allora[a] $\begin{cases} \|\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)} \\ \|\tilde{u}'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u'\|_{L^p(I)} \end{cases}$

[a] la costante non è piccola, si può vedere che $C = 4(1 + \frac{1}{|I|})$. Più bordo c'è più si fa fatica ad estendere.

Dimostrazione di 1.) *in Teorema 2.2.1.* Sia $u \in W^{1,p}(0, b)$ con $b \in (0, +\infty)$. Sicuramente $\forall x \geq 0$

$$u(x) = C + \int_0^x u'(t)dt.$$

Idea Per estendere la cosa più semplice è considerare una riflessione di u. ⌟

Definiamo quindi

$$v : (-b, b) \to \mathbb{R} \qquad v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \geq 0 \\ u(-x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$w : (-b, b) \to \mathbb{R} \qquad w(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{se } x \geq 0 \\ -u'(-x)) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Segue che $v, w \in L^p((-b, b))$ e chiaramente

$$\|v\|_{L^p(-b,b)} = 2\|u\|_{L^p(0,b)} \qquad \|w\|_{L^p(-b,b)} = 2\|u'\|_{L^p(0,b)}.$$

Per costruzione vale

$$\int_0^x w(t)dt = v(x) - v(0)$$

abbiamo quindi che $v \in W^{1,p}(-b, b)$ e $v' = w$.

Osservazione 2.2.2
Questa dimostrazione non funziona nel caso di un dominio I limitato perchè, come visto, se $u \in W^{1,p}(I)$, allora estendere 0 fuori da I non assicura che $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. I seguenti lemmi ci consentiranno di estendere nella maniera corretta.

La dimostrazione di 2.) segue usando i prossimi lemmi. □

Lemma 2.2.3

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e $p \in [1, +\infty]$, $u \in W^{1,p}(I)$ e $\eta \in C^1_C(I)$. Allora

$$\eta u \in W^{1,p}(I) \text{ e } (\eta u)' = \eta' u + \eta u'$$

Vale inoltre:

$$\begin{gathered}\|\eta u\|_{L^p(I)} \leq \|\eta\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{L^p(I)} \\ \|(\eta u)'\|_{L^p(I)} \leq (\|\eta\|_{L^\infty(I)} + \|\eta'\|_{L^\infty(I)}) \|u\|_{W^{1,p}(I)}\end{gathered}$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\eta u \in L^p(I)$ con $\|\eta u\|_{L^p(I)} \leq \|\eta\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{L^p(I)}$ e che $u'\eta + \eta' u \in L^p(I)$ con

$$\begin{aligned}\|u'\eta + \eta' u\|_{L^p} &\leq \|u'\eta\|_{L^p} + \|u\eta'\|_{L^p} \\ &\leq \|\eta\|_{L^\infty} \|u'\|_{L^p} + \|\eta'\|_{L^\infty} \|u\|_{L^p} \\ &\leq \|\eta\|_{W^{1,p}} \|u\|_{W^{1,p}}.\end{aligned}$$

Quindi basta verificare che effettivamente $u'\eta + \eta' u$ sia la derivata debole di ηu. Sia $\varphi \in C^1_C(I)$, allora

$$\begin{aligned}\int_I (\eta u)\varphi' dx &= \int_I u(\eta\varphi') dx = \int_I u[(\eta\varphi)' - \eta'\varphi] dx \\ &= \int_I u(\eta\varphi)' dx - \int_I u\eta'\varphi dx \\ &\overset{(*)}{=} - \int_I u'\eta\varphi dx - \int_I u\eta'\varphi dx \\ &= - \int_I (u\eta' + u'\eta)\varphi dx\end{aligned}$$

dove $(*)$ segue perchè u è una funzione di Sobolev e $\eta\varphi \in C^1_C(I)$. □

Lemma 2.2.4

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto, per $p \in [1, +\infty]$ e $K \subseteq I$ compatto. Se $u \in W^{1,p}(I)$ è tale che

$$u = 0 \quad \text{e} \quad u' = 0 \text{ quasi ovunque su } I \backslash K$$

allora, definendo

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in I \\ 0 & \text{se } x \notin I \end{cases} \quad \text{e } \tilde{u}'(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{se } x \in I \\ 0 & \text{se } x \notin I \end{cases}$$

si ha che $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $\tilde{u}'(x)$ è la sua derivata debole.

Esempio 2.2.5. Se il supporto di u fosse tutto I il risultato non sarebbe più vero. Si consideri infatti $u(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

Dimostrazione. Consideriamo $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che abbia supporto compatto contenuto in I e $\eta \equiv 1$ su K.

Allora per ogni $\varphi \in C^1_C(\mathbb{R})$ abbiamo che $\varphi\eta \in C^1_C(I)$ e $(1-\eta)\varphi \in C^1_C(\mathbb{R}\backslash K)$. Quindi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\tilde{u}'(x)dx &= \int_K \varphi(x)u'(x)dx \\ &= \int_K \Big(\varphi\eta + (1-\eta)\varphi\Big)u'(x)dx \\ &= \int_K (\varphi\eta)u'(x)dx \\ &= -\int_K (\varphi\eta)'u(x)dx = -\int_K \varphi'(x)u(x)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\widetilde{u}(x)dx\end{aligned}$$

□

2.2.2 Teoremi di approssimazione

Da corsi precedenti è emerso l'importanza della densità delle funzioni continue a supporto compatto. Infatti per $p \in [1, +\infty)$ data $u \in L^p(I)$, esiste $\{u_n\} \subseteq C^\infty_C(I)$ tale che $u_n \to u$ in $L^p(I)$. La validità di quanto segue sarà più chiara con l'introduzione degli spazi $W^{1,p}_0(I)$, tuttavia in generale vale che non esiste $\{u_n\} \subseteq C^\infty_C(I)$ tale che $u_n \to u$ in $W^{1,p}(I)$. Facendo maggiore attenzione otteniamo i seguenti risultati:

Teorema 2.2.6 – Teorema di approssimazione in $W^{1,p}(\mathbb{R})$

Presa $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ con $p \in [1, +\infty)$ allora esiste una successione $u_n \in C^\infty_C(\mathbb{R})$ tale che $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Dimostrazione.

Idea Vogliamo usare il Teorema fondamentale del calcolo integrale. Concettualmente stiamo considerando 3 step:

1. Data $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ la vogliamo rendere a supporto compatto.
2. Data $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ a supporto compatto sappiamo che $v(y) - v(x) = \int_x^y v'(t)dt$ e possiamo quindi approssimare[7] v' in $L^p(\mathbb{R})$. Tuttavia se $v_n \to v'$ non è detto che $\int v_n \to \int v'$, potremmo avere delle code il cui integrale non è zero.
3. Tronchiamo le v_n in modo che l'integrale delle code sia 0.

Nella dimostrazione il secondo e il terzo step saranno svolti insieme considerando fin dal principio la corretta scelta delle v_n. ⌟

Step 1: Sia $(\eta_k)_{k\geq 1}$ una successione di funzioni $C^\infty_C(\mathbb{R})$ tale che:

- $\eta_k \equiv 1$ su $[-k, k]$
- $\eta_k \equiv 0$ su $\mathbb{R}\backslash[-k-1, k+1]$

[7] È qui che fallisce la dimostrazione per $p = +\infty$. In quel caso ricordiamo infatti che le C^∞_C **non** sono dense in L^∞.

- $\|\eta_k'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M$. Questa condizione ci garantisce che η cresca/decresca in maniera continua.

Osserviamo che $\eta_k \nearrow 1$. Quindi per il teorema di convergenza dominata $u\eta_k \to u$ in L^p. Per concludere basta dimostrare che $(u\eta_k)' \to u'$ in $L^p(\mathbb{R})$. Questo segue immediatamente osservando che, poichè $\eta_k \in C^1_C$, si ha che $u\eta_k \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e dunque, per il teorema di convergenza dominata:

$$\begin{aligned}\|u' - (u\eta_k)'\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \|u'(1-\eta_k) - \eta_k' u\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \|u'(1-\eta_k)\|_{L^p} + \|\eta_k' u\|_{L^p} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Step 2: possiamo supporre che u abbiamo supporto compatto, $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}\backslash[-k,k]$. Sia $\varphi_n \in C^\infty_C(\mathbb{R})$ una successione supportata in $(-k-1, k+1)$ e definiamo $\Phi_n(x) := \int_{-k-1}^x \varphi_n(t)dt$.

Idea Visto che u è supportata in $(-k,k)$ sappiamo che $u(x) = \int_{-k-1}^x u'(t)dt = 0$ se $x \geq k$. Invece non è detto che $\Phi_n(x) = \int_{-k-1}^x \varphi_n(t)dt = 0$ per $x \geq k$. Aggiustiamo il tiro. ⌟

Data $\eta \in C^\infty_C(\mathbb{R})$, $\int \eta = 1$ e $\eta \equiv 0$ in $\mathbb{R}\backslash[k+2,k+3]$, la successione di funzioni che approssima sarà

$$u_n'(x) = \varphi_n(x) - \eta(x)\int_{\mathbb{R}}(\varphi_n(t) - u'(t))dt$$

Visto che $u_n(x) = \int_{-k-1}^x u_n'(t)dt$, $u_n \in C^\infty_C(\mathbb{R})$, ma inoltre *supp* $u_n \subset [-k, k+3]$: sia infatti $y \geq k+3$ allora

$$\begin{aligned}u_n(y) &= \int_{-k-1}^y \varphi_n(x)dx - \int_{-k-1}^y \eta(x)dx\int_{\mathbb{R}}(\varphi_n(t) - u'(t))dt \\ &= \int_{-k-1}^y \varphi_n(x)dx - \int_{-k-1}^y (\varphi_n(x) - u'(x))dx \\ &= 0\end{aligned}$$

Si ha la tesi se $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\|u_n' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \lim_{n\to+\infty}\left\|\varphi_n(x) - \eta(x)\left(\int_{\mathbb{R}}(\varphi_n(t) - u'(t))dt\right) - u'(x)\right\|_{L^p} \\ &\leq \lim_{n\to+\infty}\|\varphi_n - u'\|_{L^p} + \|\eta\|_{L^p}\|\varphi_n - u'\|_{L^1} = 0\end{aligned}$$

Visto che

$$u_n(x) - u(x) = \int_{-k-1}^x (u_n'(t) - u'(t))dt$$

allora $\|u_n - u\|_{L^\infty(-k-1,k+3)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Dunque $u_n \to u$ uniformemente. Visto che I è di misura finita abbiamo che $u_n \to u$ in L^p. □

Teorema 2.2.7

Se $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto, $p \in [1, +\infty)$, $u \in W^{1,p}$ allora esiste $u_n \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$ tale che $u_n \to u$ in $W^{1,p}(I)$.

Osservazione 2.2.3
Attenzione: non è detto che u_n sia a supporto compatto in I. È possibile infatti che non siano 0 sul bordo!

Dimostrazione. Data $u \in W^{1,p}(I)$ basta considerare $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Allora esiste $\tilde{u}_n$ che approssima $\tilde{u}$. Si ha la tesi considerando $u_n = \tilde{u}_n|_I$. □

2.2.3 Immersione compatta di $W^{1,p}(I)$ in $L^\infty(I)$

Presentiamo ora la prima *disuguaglianza di Sobolev* che permetterà di vedere l'inclusione dello spazio $W^{1,p}(I)$ in $L^\infty(I)$. Con alcune ipotesi aggiuntive vedremo che questa immersione sarà *compatta*.

Teorema 2.2.8

Sia I intervallo aperto e $p \in [1, +\infty]$. Allora $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ ed esiste una costante[a] $C > 0$ tale che per ogni $u \in W^{1,p}(I)$ si ha che

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

[a]che dipende da intervallo I e p. In seguito scriveremo $C = C(I, p)$.

Idea L'approccio generale che seguiremo ora, e nel futuro, è che se riusciamo a mostrare la tesi per le C^∞, allora questa, grazie al teorema di approssimazione, sarà valida per ogni $u \in W^{1,p}$. ⌟

Lemma 2.2.9

Sia I intervallo aperto e $p \in [1, +\infty)$. Se esiste $C > 0$ tale che

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

per ogni $u \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$ allora la stessa disuguaglianza vale per ogni $u \in W^{1,p}(I)$.

Dimostrazione. Data $u \in W^{1,p}(I)$ esiste $u_n \in W^{1,p}(I) \cap C^\infty(I)$ con $u_n \to u$ in $W^{1,p}(I)$. In particolare u_n è di Cauchy in $W^{1,p}(I)$. Visto che

$$\|u_n - u_m\|_{L^\infty} \leq C\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}}$$

si ha che u_n è di Cauchy in $L^\infty(I)$. Ma quindi $\begin{cases} u_n \to u & \text{in } L^p \\ u_n \to v & \text{in } L^\infty \end{cases}$. Segue che[8] $u = v$, in particolare $u \in L^\infty$. Quindi, passando al limite per $n \to \infty$ in $\|u_n\|_{L^\infty} \leq C\|u_n\|_{W^{1,p}}$ abbiamo la tesi. □

Dimostrazione del teorema. Caso 1: $p = +\infty$. Chiaramente $\forall u \in W^{1,\infty}(I)$

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty} + \|u'\|_{L^\infty} = \|u\|_{W^{1,\infty}}.$$

[8]se $u_n \to u$ in L^p allora esiste u_{n_k} tale che $u_{n_k} \to u$ in L^p e puntualmente. Analogamente per $u \to v$ in L^∞. Quindi abbiamo due sottosuccessioni che convergono puntualmente $\Rightarrow$ il limite puntuale deve essere lo stesso.

Idea Avendo $p \neq +\infty$ potremo usare il teorema di approssimazione e dunque supporre $u \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$. ⌟

Caso 2: Supponiamo $p > 1$ e I illimitato.
Data $u \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$ sappiamo[9] che $u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)dt$ e che $\int_I |u(x)|^p dx < +\infty$. Esiste quindi, $\forall \varepsilon > 0$, $x_\varepsilon \in I$ tale che $|u(x_\varepsilon)| < \varepsilon$. Segue che[10]:

$$\begin{aligned}
|u(x)|^p = |u^p(x)| &= |u^p(x) - u^p(x_\varepsilon + u^p(x_\varepsilon)| \\
&\leq |u^p(x) - u^p(x_\varepsilon| + |u^p(x_\varepsilon)| \\
&\leq p \int_{x_\varepsilon}^x u'(t)|u(t)|^{p-1} dt + |u(x_\varepsilon)|^p \\
&\leq p\|u'\|_p \|u^{p-1}\|_q + \varepsilon^p \\
&\leq p\|u'\|_p \|u\|_p^{p-1} + \varepsilon^p \\
&\leq \|u'\|_{L^p}^p + \frac{p}{q}\|u\|_{L^p}^{q(p-1)} + \varepsilon^p \\
&\leq \|u\|_{W^{1,p}(I)}^p + \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

Visto che ε è arbitrario abbiamo che $|u(x)|^p \leq \|u\|_{W^{1,p}}^p \Rightarrow \|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{W^{1,p}}$.
Caso 3: Supponiamo $p > 1$ e I limitato:
Bisogna cambiare il punto di partenza: data $u \in W^{1,p}(I) \cap C^\infty(I)$, esiste $x_0 \in I$ tale che

$$|u(x_0)|^p \leq \frac{1}{|I|} \int_I |u(x)|^p dx.$$

Si procede ora con una stima analoga alla precedente:

$$\begin{aligned}
|u(x)|^p &\leq |u(x)^p - u(x_0)|^p + |u(x_0)|^p \\
&\leq p\|u'\|_{L^p}\|u\|_{L^p}^{p-1} + \frac{1}{|I|}\|u\|_{L^p}^p \\
&\leq (1 + |I|^{-1})\|u\|_{W^{1,p}}^p.
\end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq (1 + |I|^{-1})\|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

I casi in cui $p = 1$ e I limitato/illimitato seguono come sopra, senza dover passare per la disuguaglianza di Young. □

Corollario 2.2.10

Dato $p \in [1, +\infty]$ la convergenza forte $W^{1,p}(I)$ implica la convergenza $L^\infty(I)$, ossia: se $u_n \to u$ fortemente in $W^{1,p}(I)$ allora $u_n \to u$ in $L^\infty(I)$.

Teorema 2.2.11 – Inclusione compatta di $W^{1,p}(I)$ in $L^\infty(I)$

Sia I intervallo limitato e sia $p \in (1, +\infty)$. Allora ogni successione limitata in $W^{1,p}(I)$ ammette una sottosuccessione che converge in $L^\infty(I)$.

Dimostrazione. Sia u_n successione in $W^{1,p}(I)$ con $\|u_n\|_{W^{1,p}} \leq M$ $\forall n$, allora:

[9] Ricordiamo che questo ci dice che nei punti in cui u non è nulla, è molto piccola.
[10] Ricordiamo la *disuguaglianza di Young: dati A, B positivi e p, q coniugati vale che* $AB \leq \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q$.

1. u_n è equilimitata[11]: infatti $\|u\|_{L^\infty} \leq CM$.

2. u_n è equicontinua: infatti dal Teorema 2.1.3

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \int_y^x |u_n'(t)|dt \leq |x-y|^{\frac{p-1}{p}} \||u_n'\|_{L^p}.$$

La tesi segue per il teorema[12] di Ascoli-Arzelà. □

Corollario 2.2.12

Sia I intervallo limitato e $p \in (1, +\infty)$. La palla unitaria in $W^{1,p}(I)$, ossia

$$\left\{u \in W^{1,p}(I) : \|u\|_{W^{1,p}} \leq 1\right\}$$

è un sottoinsieme compatto di $L^p(I)$.

Vediamo ora la necessarietà dell'ipotesi $p \neq 1$ e I limitato con due esempi:

Esempio 2.2.13. Mostriamo $u_n \in W^{1,1}(-1,1)$ limitata che non ammette sottosuccessioni convergenti in $L^\infty(-1,1)$. Sia $\varphi \in C_C^\infty(-1,1)$. Consideriamo $\varphi_n = n\varphi(xn)$ e $\Phi_n(x) = \int_{-1}^1 \varphi_n(t)dt$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} n\varphi(nx)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy$$

Visto che[a] $\varphi_n(x) \to \delta_x$, si ha $\Phi_n(x) \to \mathbb{1}_{[0,1)}(x)$ puntualmente, tuttavia $\Phi_n(x)$ non ammette sottosuccessioni convergenti in $L^\infty(-1,1)$. Se convergesse, visto che il limite uniforme di continue è continua, il limite puntuale dovrebbe essere continuo.

[a] Con δ_x indichiamo la *delta di Dirac*.

Esempio 2.2.14. Sia considerassimo $I = \mathbb{R}$ potremmo traslare all'infinito: $u_n(x) = u(x-n)$. Visto che la traslazione non varia norma si ha che u_n non converge in $L^p(I)$.

Corollario 2.2.15

Se I limitato e $p \in (1, +\infty)$. Se $u_n \in W^{1,p} \rightharpoonup u \in W^{1,p}$, allora $u_n \to u$ in L^∞, ossia la convergenza debole $W^{1,p}$ implica la convergenza L^∞.

Osservazione 2.2.4
Visto che I limitato, la convergenza in L^∞ implica la convergenza forte in L^p. Abbiamo quindi che la convergenza debole in $W^{1,p}$ implica la convergenza forte in L^p.

[11] vale anche per $p = 1$.

[12] Per chi ne conosce una versione diversa riportiamo l'enunciato *classico* del teorema: Sia $\{f_n\}$ una famiglia di funzioni equilimitate ed equicontinue da un compatto in $\mathbb{R}^n$. Allora f_n ha una sottosuccessione che converge uniformemente.

Dimostrazione. Visto che una successione debolmente convergente è limitata, si consideri in particolare una sottosuccessione u_{n_k}. Per il teorema precedente esiste una sotto-sottosuccessione $u_{n_{k_j}}$ convergente in L^∞. Sia v il limite uniforme. Vale che $\forall\varphi \in L^q(I)$

$$\int_I u_{n_{k_j}}(x)\varphi(x)dx \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \int v(x)\varphi(x)dx.$$

Se consideriamo il funzionale limitato $T : W^{1,p}(I) \to \mathbb{R}$ definito come

$$T(u) = \int_I u(x)\varphi(x)dx$$

segue che, per la convergenza debole di u_n,

$$\int_I u_n(x)\varphi(x)dx = T(u_n) \longrightarrow T(u) = \int_I u(x)\varphi(x)dx.$$

Visto che

$$\int_I u(x)\varphi(x)dx = \int_I v(x)\varphi(x)\ \forall\varphi \in L^q(I)$$

si ha che $v = u$. Quindi[13] $u_n \to u$ in $L^\infty(I)$. □

Esempio 2.2.16. Se consideriamo I illimitato esistono successioni limitate in $W^{1,p}(I)$ che convergono debolmente, ma non uniformemente. Un esempio sono le traslate considerate in precedenza: $u_n(x) = u(x - n)$. Questa converge debolmente a zero[a], ma come visto non converge in L^p.

[a] L'idea è che presa u a supporto compatto K esiste $\bar{n}$ tale che $u_{\bar{n}}$ abbia supporto disgiunto da K.

Corollario 2.2.17

Sia I intervallo illimitato e $p \in [1, +\infty)$. Se $u \in W^{1,p}(I)$, allora $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dimostrazione. Visto che u ha un rappresentate continuo, la tesi segue perchè lo spazio $C_0^0 \subset C_0$ è un chiuso. □

2.3 Operazioni elementari in spazi di Sobolev

2.3.1 Prodotto di funzioni di Sobolev

A differenza degli spazi L^p, vediamo che il prodotto di due funzioni di Sobolev è ancora di Sobolev. Abbiamo anche ulteriori proprietà di chiusura.

Lemma 2.3.1

Sia I intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e $p \in [1, +\infty)$. Se $u \in W^{1,p}(I)$ e $v \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$ allora $uv \in W^{1,p}(I)$ con $(uv)' = u'v + uv'$. Esiste inoltre $C = C(I, p)$ tale che

$$\|uv\|_{W^{1,p}(I)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(I)}\|v\|_{W^{1,p}(I)}.$$

[13] u_n converge in L^∞ se ogni sottosuccessione ammette una sotto-sottosuccessione convergente.

Dimostrazione. Dal teorema di immersione sappiamo che $u, v \in L^\infty$. Dunque si ha $uv \in L^p$ visto che
$$\|uv\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^p}\|v\|_{W^{1,p}(I)}.$$
Vediamo che $u'v + uv' \in L^p(I)$ infatti:
$$\begin{aligned}
\|u'v + uv'\|_{L^p} &\leq \|u'v\|_{L^p} + \|uv'\|_{L^p} \\
&\leq \|u'\|_{L^p}\|v\|_{L^\infty} + \|v'\|_{L^p}\|u\|_{L^\infty} \\
&\leq C\|u'\|_{L^p}\|v\|_{W^{1,p}} + C\|v'\|_{L^p}\|u\|_{W^{1,p}} \\
&\leq 2C\|u\|_{W^{1,p}}\|v\|_{W^{1,p}}
\end{aligned}$$
Resta da vedere che $u'v + uv'$ è la derivata debole di uv. Visto che $v \in C^\infty$ si ha che $\forall \varphi \in C_C^\infty(I), v\varphi \in C_C^\infty(I)$, allora:
$$\begin{aligned}
\int_I uv\varphi' dx &= \int_I u((v\varphi)' - v'\varphi)dx \\
&= \int_I u(v\varphi)'dx - \int_I v'\varphi)dx \\
&= -\int_I u'v\varphi dx - \int_I v'\varphi dx \\
&= -\int_I \varphi(u'v + uv')dx
\end{aligned}$$
□

Teorema 2.3.2 – $W^{1,p}(I)$ è un'algebra

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $p \in [1, +\infty)$. Se $u, v \in W^{1,p}(I)$, allora

1. $uv \in W^{1,p}(I)$
2. $(uv)' = u'v + v'u$
3. $\|uv\|_{W^{1,p}} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}\|v\|_{W^{1,p}}$

per una costante $C = C(I, p)$.
Segue che $W^{1,p}(I)$ è un'algebra con la norma di Banach.

Dimostrazione. Siano $u, v \in W^{1,p}(I)$. Siano $u_n \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$ con $u_n \to u$ in $W^{1,p}(I)$. Per il lemma precedente si ha che $u_n v \in W^{1,p}(I)$ e $(u_n v)' = u_n'v + u_n v'$. Segue inoltre che $u_n v \to uv$ fortemente in L^p infatti:
$$\|u_n v - uv\|_{L^p} \leq \|u_n - u\|_{L^p}\|v\|_{L^\infty} \longrightarrow 0.$$
Allora concludiamo mostrando che $(u_n v)'$ è di Cauchy in $L^p(I)$:
$$\begin{aligned}
\|(u_n v)' - (u_m v)'\|_{L^p(I)} &= \|(u_n'v + u_n v') - (u_m'v + u_m v')\|_{L^p(I)} \\
&\leq \|(u_n' - u_m')v\|_{L^p(I)} + \|(u_n - u_m)v'\|_{L^p(I)} \\
&\leq \|v\|_{L^\infty}\|u_n' - u_m'\|_{L^p(I)} + \|u_n - u_m\|_{L^\infty}\|v'\|_{L^p(I)} \\
&\leq \|v\|_{L^\infty}\|u_n' - u_m'\|_{L^p(I)} + C\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(I)}\|v'\|_{L^p(I)}
\end{aligned}$$
Quindi $uv \in W^{1,p}$ e $(uv)' = u'v + v'u$. □

2.3.2 Composizione con funzioni C^1

I seguenti risultati ci porteranno a vedere che, data u funzione di Sobolev, la sua parte positiva è sempre una funzione di Sobolev.

Teorema 2.3.3

Data $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e tale che $G(0) = 0$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $p \in [1, +\infty]$ e $u \in W^{1,p}(I)$. Allora $G(u) \in W^{1,p}(I)$ e $(G(u))' = G'(u)u'$.

Osservazione 2.3.1
È importante notare che le costanti non possono essere ammesse solo se I illimitato, infatti $G(u)$ non starebbe neanche in L^p!! Se I limitato non ci sono problemi.

Dimostrazione. Sappiamo che $u \in L^\infty(I)$ dunque esiste R tale che $\|u\|_{L^\infty(I)} \le R$. Se consideriamo l'intervallo $[-R, R]$, allora G' e G sono limitate. In particolare consideriamo

$$L := \max_{[-R,R]} |G'(x)|.$$

Quindi $G(u(x)) \in L^p$ e $G'(u)u' \in L^p(I)$. Consideriamo $u_n \in W^{1,p}(I) \cap C^\infty(I)$ con $u_n \to u$ in $W^{1,p}(I)$. Visto che G è continua vale che

$$|G(u_n) - G(u)| \le L|u_n - u|$$

dunque $G(u_n) \to G(u)$ in $L^p(I)$. Similmente[14] facciamo per $(G(u_n))' \to (G(u))'$: visto che $G'(u_n) \to G'(u)$ uniformemente allora

$$\begin{aligned} |G'(u_n)u_n' - G'(u)u'| &\le |G'(u_n)||u_n' - u'| + |G'(u_n) - G'(u)||u'| \\ &\le L|u_n' - u'| + |G'(u_n) - G'(u)||u'|. \end{aligned}$$

□

Proposizione 2.3.4

Sia $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $G(0) = 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto e $p \in (1, +\infty)$. Se $u_n \to u$ fortemente in $W^{1,p}(I)$ allora $G(u_n) \to G(u)$ fortemente in $W^{1,p}(I)$.

Dimostrazione. Per il teorema precedente le quantità che consideriaamo appartengono tutte a $W^{1,p}(I)$ e sono dunque ben definite. Dobbiamo vedere che

- $G(u_n) \to G(u)$ in L^p
- $u_n' G'(u_n) \to u' G'(u)$ in L^p

Vediamo 1): Sicuramente, detto $L = \max_{[-R,R]} G'$, dove $R = \max_n \|u_n\|_{L^\infty(I)}$, vale

$$|G(u_n) - G(u)| \le L|u_n - u|$$

Vediamo 2): Visto che $u_n' \to u'$ fortemente in L^p e $G'(u_n) \to G'(u)$ uniformemente[15] in I, ma allora abbiamo una convergenza L^p per convergenza uniforme che è L^p e segue dunque la tesi. □

[14] Ricordiamo che convergenza forte per uniforme è forte.
[15] perchè u_n tende uniformemente e G è uniformemente continua.

Proposizione 2.3.5

Siano $G_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni C^1 e $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sempre C^1, tale che

1. $G(0) = 0$ e $G_k(0) = 0$ $\forall k \geq 1$.
2. $G_k \to G$ puntualmente e $G_k' \to G'$ puntualmente.
3. esiste una costante $L > 0$ tale che

$$\|G'\|_{L^\infty} \leq L \quad \text{ e } \|G_k'\|_{L^\infty} \leq L \;\; \forall k.$$

Allora $\forall u \in W^{1,p}(I)$ si ha $G_k(u) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} G(u)$ fortemente in $W^{1,p}(I)$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

1. $G_k(u) \xrightarrow{L^p} G(u)$
2. $u'G_k'(u) \xrightarrow{L^p} u'G'(u)$

Dimostrazione di 2): Notiamo che $|u'G_k'(u)| \leq u'L$. Otteniamo la tesi per il teorema di convergenza dominata.(convergenza puntuale è ovvia)
Dimostrazione di 1): anche qui abbiamo la convergenza puntuale, serve quella dominata, che però segue poichè:

$$|G_k(u)| = |G_k(u) - G_k(0)| \leq L|u|$$

□

2.3.3 Parte positiva e modulo di una funzione di Sobolev

Per gli utilizzi che vedremo in seguito, sarà molto utile sapere che, se $u \in W^{1,p}(I)$ allora anche u_+ e $|u|$ sono $W^{1,p}(I)$.

Idea Il seguente risultato ci dice che la derivata debole è un *concetto locale*, il che non è affatto ovvio dalla definizione. In particolare vedremo che se u funzione di Sobolev è nulla su un insieme misurabile allora anche la sua derivata è nulla sullo stesso insieme. ⌟

Teorema 2.3.6

Sia I intervallo aperto e $p \in [1, +\infty]$ e $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni C^∞ tale che[a]:

1. $0 \leq g_n \leq 1$ $\forall n$.
2. $g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$.
3. $\{g_n\}$ e crescente, in particolare $g_n \nearrow \mathbb{1}_{(0,\infty)}$.

Definiamo $G_n(x) = \int_{-\infty}^x g_n(t)dt$. Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(I)$ si ha che $G_n(u) \in W^{1,p}(I)$ e converge fortemente in $W^{1,p}(I)$ alla funzione $u_+(x) = \max(u(x), 0)$. In particolare $u_+ \in W^{1,p}(I)$ e

$$u_+' = u'\mathbb{1}_{\{u>0\}}.$$

[a] le g_n saranno la derivata di qualche cosa

Dimostrazione. Osserviamo che la successione di funzioni $G_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha le proprietà seguenti:

- $G_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ per ogni n ;
- $|G_n'| \leq 1$ su $\mathbb{R}$ per ogni n;
- la successione G_n' è crescente e
$$\lim_{n\to\infty} G_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0; \\ 1 & \text{se} \quad x > 0; \end{cases}$$
- $G_n(x) = 0$ per ogni $x \leq \frac{1}{n}$ e per ogni n;
- $0 \leq G_n(x) \leq x$ per ogni $x \geq 0$;
- $0 \leq x - G_n(x) \leq \frac{2}{n}$ per ogni $x \geq 0$ e per ogni n.

Ora fissata, $u \in W^{1,p}(I)$, osserviamo che:

1. Per ogni funzione $u \in W^{1,p}(I)$,
$$G_n(u) \to u_+ \quad \text{puntualmente su} \quad I.$$
Siccome,
$$|G_n(u)| \leq u_+ \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1,$$
per il teorema della convergenza dominata
$$G_n(u) \to u_+ \quad \text{fortemente in} \quad L^p(I).$$

2. Infine, osserviamo che per costruzione
$$G_n'(u) \to \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(u) \quad \text{puntualmente su} \quad I.$$
Quindi, anche
$$G_n'(u)u' \to \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(u)u' \quad \text{puntualmente su} \quad I.$$
Siccome $|G_n'| \leq 1$, abbiamo che
$$|G_n'(u)u'| \leq |u'| \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1,$$
per il teorema della convergenza dominata, abbiamo:
$$G_n'(u)u' \to \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(u)u' \quad \text{fortemente in} \quad L^p(I).$$

In conclusione,
$$G_n(u) \to u_+ \quad \text{fortemente in} \quad W^{1,p}(I),$$
e, siccome $\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(u(x)) = \mathbb{1}_{\{u>0\}}(x)$, abbiamo
$$(u_+)' = \mathbb{1}_{\{u>0\}}u'.$$

□

Corollario 2.3.7

Data $u \in W^{1,p}(I)$, allora[a] $u_-(x) = \max\{-u(x), 0\}$ è in $W^{1,p}(I)$ e

$$(u_-)' = -u'\mathbb{1}_{\{u<0\}}.$$

Segue che anche $|u| \in W^{1,p}(I)$ e

$$(|u|)' = (u_+ + u_-)' = u'\mathbb{1}_{\{u>0\}} - u'\mathbb{1}_{\{u<0\}}$$

Invece

$$u' = (u_+ - u_-)' = u'\mathbb{1}_{\{u>0\}} + u'\mathbb{1}_{\{u<0\}}$$

[a] Attenzione: per questo corso considereremo la parte negativa di una funzione come una funzione *positiva*. Dobbiamo quindi invertire il segno.

Dimostrazione. Ovvio perchè $u_- = (-u)_+$ □

Corollario 2.3.8

Se u è nulla quasi ovunque su $A \subset I$ allora u' è nulla quasi ovunque su A.

Dimostrazione. Segue da $u' = (u_+ - u_-)' = u'\mathbb{1}_{\{u>0\}} + u'\mathbb{1}_{\{u<0\}}$. □

2.4 Gli spazi $W_0^{1,p}(I)$

Definizione 2.4.1

$W_0^{1,p}(I)$ è la chiusura di $C_C^\infty(I)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}$. Quindi, data $u \in W^{1,p}(I)$ diciamo che $u \in W_0^{1,p}(I)$ se esiste una successione $\varphi_n \in C_C^\infty(I)$ tale che $\varphi_n \to u$ in $W^{1,p}(I)$.

Osservazione 2.4.1
Non definiamo $W_0^{1,p}$ per $p = +\infty$.

Osservazione 2.4.2
Dalla definizione emerge immediatamente un'ambiguità: poichè $C_C^\infty(I) \subseteq C_C^\infty(\mathbb{R})$ se $\varphi_n \in C_C^\infty(I)$ tale che $\varphi_n \to u$, allora $\varphi_n \in C_C^\infty(\mathbb{R})$. Tuttavia nel primo caso abbiamo $u \in W_0^{1,p}(I)$ per definizione, mentre nel secondo $u \in W^{1,p}(I)$. Si ha quindi che $W_0^{1,p}(I) \subset W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $W_0^{1,p}(I) \subset W^{1,p}(I)$ senza che ci sia relazione tra i due spazi. Quando parleremo $W_0^{1,p}(I)$ lo staremo, moralmente, considerando come spazio nell'intersezione.

Osservazione 2.4.3
Se $I = \mathbb{R}$, per la densità delle funzioni $C_C^\infty(\mathbb{R})$, abbiamo che $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Osservazione 2.4.4
Con il seguente risultato vedremo che se $u \in W_0^{1,p}$ allora è proprio nulla al bordo. Capiamo immediatamente che questo spazio avrà un ruolo chiave nella risoluzione di equazioni differenziali dove spesso abbiamo condizioni al bordo.

Teorema 2.4.2

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto e $p \in [1, +\infty)$ e $u \in W^{1,p}(I)$. Sono equivalenti:

1. $u \in W_0^{1,p}(I)$.
2. $u = 0$ su ∂I.

Dimostrazione. $1 \Rightarrow 2$): se $W_0^{1,p}(I)$ allora esiste $\{u_n\} \in C_C^\infty(I)$ tali che $u_n \to u$ fortemente in $W^{1,p}$. Allora $u_n \to u$ uniformemente su $\bar{I}$ e quindi $u = 0$ su ∂I.
$2 \Rightarrow 1$): Sia $G_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni con le seguenti proprietà:

- $G_k(x) \to x$ uniformemente su $\mathbb{R}$ per $k \to +\infty$.
- Per ogni k, $G_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ è tale che
$$G_k \equiv 0 \text{ su } \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right].$$

Consideriamo una successione $\varphi_n \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$ tale che $\varphi_n \xrightarrow{W^{1,p}} u$ fortemente e consideriamo $G_k(\varphi_n)$. Fissato k vale

$$G_k(\varphi_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} G_k(u) \quad \text{fortemente } W^{1,p}(I).$$

Tuttavia, visto che $\varphi_n \to u$ uniformemente e $|u| \leq \frac{1}{k}$ vicino a ∂I, allora per n abbastanza grandi si ha $G_k(\varphi_n)$ è a supporto compatto in I, dunque $G_k(\varphi_n) \in W_0^{1,p}(I)$. Concludiamo poichè per $k \to +\infty$

$$G_k(u) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} u \in W_0^{1,p}$$

□

Teorema 2.4.3

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto e $p \in [1, +\infty)$ e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Sono equivalenti:

1. $u \in W_0^{1,p}(I)$.
2. $u = 0$ su $\mathbb{R} \backslash I$.

Vediamo ora un caso specifico del Teorema 1.2 visto in precedenza:

Teorema 2.4.4

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $p \in (1, +\infty)$. Se $u_n \in W_0^{1,p}(I)$ converge debolmente a $u \in W^{1,p}(I)$, allora $u \in W_0^{1,p}(I)$, ossia gli spazi $W_0^{1,p}$ sono chiusi rispetto la convergenza debole.

Dimostrazione. Se I è un intervallo limitato e $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(I)$ allora sappiamo che esiste $u_{n_k} \to u$ uniformemente. Visto che u_{n_k} è zero al bordo, $u = 0$ su $\partial I \Rightarrow u \in W_0^{1,p}(I)$. Nel caso in cui $I = [a, +\infty)$, possiamo limitarci a considerare un qualsiasi sottointervallo limitato $[a, b]$, stimare per approssimazione e vedere che $u(a) = 0$, quindi $u = 0$ al bordo. □

2.5 Legame spazi di Sobolev e serie di Fourier

In questa sezione vediamo come sono legati gli spazi di Sobolev con gli sviluppi in serie di Fourier. Scopriremo una cosa soprendente: alcune serie di Fourier sono meglio di altre.

2.5.1 Due basi di Fourier in $L^2(I)$

Dato $L > 0$ consideriamo l'intervallo aperto $I = (0, L)$. Su questo intervallo possiamo considerare due famiglie di funzioni diverse:

1. $\Phi = \{\phi_k : k \geq 1\}$ con $\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{\pi}{L} kx)$.
2. $\Psi = \{\psi_k : k \geq 0\}$ con $\psi_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{L}}$ e $\psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\frac{\pi}{L} kx)$.

Chiaramente si ha che

$$\int_I \phi_i \phi_j = \delta_{ij} = \int_I \psi_i \psi_j dx.$$

Proposizione 2.5.1

Le famiglie Φ e Ψ sono due sistemi ortonormali completi su $L^2(I)$. In particolare, per ogni $u \in L^2(I)$:

- Detti $c_j := \int_I u(x)\phi_j(x)dx$ vale che

$$\|u\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j^2 \quad \text{e } u = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j\phi_j$$

dove la seconda serie converge fortemente in $L^2(I)$.

- Detti $d_j := \int_I u(x)\psi_j(x)dx$ vale che

$$\|u\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} d_j^2 \quad \text{e } u = \sum_{j=1}^{+\infty} d_j\psi_j$$

dove la seconda serie converge fortemente in $L^2(I)$.

Idea Ciascuna di queste è metà della classica basi di Hilbert. ⌟

$$u_{pari} = \sum_{k,j} c_k\phi_j + d_j\psi_j = \sum d_j\psi_j$$
$$u_{dispari} = \sum_{k,j} \tilde{c}_k\phi_k + \tilde{d}_k\psi_k = \sum \tilde{c}_k\phi_k$$

□

Teorema 2.5.2

Sia $u \in L^2(I)$. Siano $c_k = \int_I u\phi_k$, $u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_k$. Allora sono equivalenti:

1. $u \in H_0^1(I)$
2. $\sum_{k\geq 1} c_k^2 k^2 < +\infty$

Inoltre, se u' è la derivata debole di u, si ha

$$\|u'\|_{L^2}^2 = \frac{\pi^2}{L^2}\sum_{k\geq 1} k^2 c_k^2 \quad \text{e } u'(x) = \frac{\pi}{L}\sum_{k\geq 1} kc_k\psi_k(x).$$

Dimostrazione. 2) $\Rightarrow$ 1): Consideriamo le somme parziali $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k$ e $S_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{L}kc_k\psi_k(x)$. Siccome la $\sum c_k^2$ converge allora S_n, S_n' sono di Cauchy, infatti

$$\|S_n' - S_m'\|_{L^2}^2 = \sum_{m+1}^{n} \frac{\pi^2}{L^2}c_k^2k^2 < +\infty$$

Esiste quindi il limite forte in L^2

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{L}kc_k\psi_k(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n'.$$

Segue che $u \in H^1(I)$ e v è la sua derivata debole. Poichè S_n è nulla agli estremi, $S_n \in H_0^1(I)$ $\forall n$ e quindi $u \in H_0^1(I)$.
1) $\Rightarrow$ 2): Sappiamo che $u \in H_0^1(I)$, in particolare $u' \in L^2(I)$. Scriviamo $u'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k \psi_k(x)$, dove $d_k = \int_I \psi_k(x) u'(x) dx$. Osserviamo che in realtà $k = 0$ non c'è infatti

$$d_0 = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{L}} u'(x) = [u]_0^L = 0 \text{ poichè } u \in H_0^1(I)$$

Quindi $u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \psi_k(x)$. Osserviamo che

$$d_k = \int_0^L u'(x)\psi_k(x)dx = -\int_0^L u(x)\psi_k'(x)dx = \frac{\pi}{L}k \int_0^L u(x)\phi_k(x)dx = \frac{\pi}{L}kc_k$$

e per l'identità di Bessel $\|u'\|_2^2 = \sum d_k^2 = \sum c_k^2 k^2 < +\infty$. □

Osservazione 2.5.1
Nel conto precedente abbiamo usato che se $u \in H_0^1(I)$ e $v \in H^1(I)$ allora

$$\int_I u'v = -\int_I uv'$$

Questo è vero perchè, visto che $\overline{C_C^\infty}(I) = W_0^{1,p}(I)$, possiamo usare $H_0^{1,p}(I)$ come spazio per le funzioni test.

Teorema 2.5.3

Sia $u \in L^2(I)$. Siano $d_k = \int_I u\psi_k$, $u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\psi_k$. Allora sono equivalenti:

1. $u \in H^1(I)$.
2. $\sum_{k\geq 1} d_k^2 k^2 < +\infty$.

Inoltre, se u' è la derivata debole di u, si ha

$$\|u'\|_{L^2}^2 = \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{k\geq 1} k^2 d_k^2 \quad \text{e } u'(x) = -\frac{\pi}{L}\sum_{k\geq 1} k d_k \phi_k(x).$$

Dimostrazione. Omessa in quanto identica a quella precedente. □

Osservazione 2.5.2
Con i risultati precedenti abbiamo visto che, in dimensione 1, le funzioni in H^1 sono tutte e sole le funzioni in cui vi è sommabilità di $c_k^2 k^2 / d_k^2 k^2$. Osserviamo tuttavia che, sviluppando la stessa funzione nelle due basi, capitiamo una volta in H_0^1, l'altra in H^1. Capiamo quindi che non tutte le basi di Fourier sono uguali.

Esempio 2.5.4. Consideriamo $\phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{\pi}{L}x)$ e proviamo a svilupparlo nella base[a] Ψ:

$$\begin{aligned}
d_k &= \int_0^L \psi_k(x)\phi_1(x)dx \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{L}kx\right)dx \\
&= \frac{1}{L}\int_0^L \left[\sin\left((k+1)\frac{\pi}{L}x\right) - \sin\left((k-1)\frac{\pi}{L}x)\right)\right] \\
&= \frac{1}{L}\left[-\frac{1}{k+1}\cos\left((k+1)\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{1}{k-1}\cos\left((k-1)\frac{\pi}{L}x\right)\right]_{x=0}^{L} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{4}{k^2-1}\delta_k
\end{aligned}$$

dove $\delta_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ 1 & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$. Ma allora $\phi_1(x) \in H^1$ visto che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k^2 k^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{(k^2-1)^2} < +\infty.$$

[a] ricordiamo $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

Esempio 2.5.5. Consideriamo $\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\frac{\pi}{L}x)$ e proviamo a sviluppare nella base Φ:

$$\begin{aligned}
c_k &= \int_0^L \psi_1(x)\phi_k(x)dx \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{L}kx\right)\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)dx \\
&= \frac{1}{L}\int_0^L \left[\sin\left((k+1)\frac{\pi}{L}x\right) + \sin\left((k-1)\frac{\pi}{L}x)\right)\right] \\
&= \frac{1}{L}\left[-\frac{1}{k+1}\cos\left((k+1)\frac{\pi}{L}x\right) - \frac{1}{k-1}\cos\left((k-1)\frac{\pi}{L}x\right)\right]_{x=0}^{L} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{4k}{k^2-1}\delta_k
\end{aligned}$$

Ma allora $\psi_1(x) \notin H_0^1(I)$ visto che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 k^2 = +\infty.$$

Capitolo 3

Equazioni ellittiche in una dimensione

3.1 Soluzioni forti e soluzioni deboli

Nel seguito considereremo I intervallo aperto limitato in $\mathbb{R}$ e, per semplicità, indicheremo $H^1(I)$ e $H_0^1(I)$ gli spazi $W^{1,2}(I)$ e $W_0^{1,2}(I)$ rispettivamente. Ricordiamo inoltre la definizione dello spazio $H^2(I)$:

$$H^2(I) = \left\{ u \in H^1(I) : u' \in H^1(I) \right\}.$$

Data $V \in L^1(I), V \geq 0$ (V è un potenziale[1]) e $f \in L^2(I)$ considereremo il problema

$$\begin{cases} -u'' + Vu = f & \text{su } I \\ u = 0 & \text{su } \partial I \end{cases} \tag{1}$$

Definizione 3.1.1 – Soluzione debole

Diciamo che u è *soluzione debole* di (1) se $u \in H_0^1(I)$ e per ogni $\varphi \in H_0^1(I)$ si[a] ha

$$\int_I u'(x)\varphi'(x)dx + \int_I u(x)\varphi(x)V(x)dx = \int_I \varphi(x)f(x).$$

[a] Possiamo anche verificare la condizione $\forall \varphi \in C_C^\infty(I)$.

Definizione 3.1.2 – Soluzione forte

Diciamo che u è *soluzione forte* di (1) se $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ e se la derivata debole di u' è tale che

$$u'' = Vu - f.$$

Osservazione 3.1.1
Chiaramente se u è una soluzione forte è anche una soluzione debole.

Dimostrazione. Se u soluzione forte allora per ogni $\varphi \in C_C^\infty(I)$ si ha

$$\int_I u'\varphi' = -\int u''\varphi = -\int_I Vu\varphi + \int_I f\varphi.$$

[1] Visto che $W^{1,p} \subseteq L^\infty$ possiamo lavorare con misura finita che è la meno restrittiva e considerare $V \in L^1$.

Si conclude visto che $\overline{C_C^\infty} = H_0^1$. ☐

Proposizione 3.1.3

Se $V \in L^2(I)$ e $u \in H_0^1(I)$ è soluzione debole di (1) allora u è anche soluzione forte.

Dimostrazione. Se $u \in H_0^1(I)$ è soluzione debole abbiamo che

$$\int_I u'(x)\varphi'(x)dx + \int_I u(x)\varphi(x)V(x)dx = \int_I \varphi(x)f(x)$$

con $f - uV \in L^2(I)$. Allora $u' \in H^1(I)$ con derivata debole $u'' = Vu - f$. Quindi $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ ed è soluzione forte. ☐

Proposizione 3.1.4 – Regolarità soluzioni forti

Sia $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ soluzione forte del problema (1) con $V, f \in C(I) \cap L^2(I)$. Allora $u \in C^2(I)$.

Dimostrazione. Segue dal Corollario 2.1.3. Ritroviamo dunque una soluzione in senso classico. ☐

Lemma 3.1.5 – Disuguaglianza di Poincarè

Sia $I = (a, b)$ intervallo limitato in $\mathbb{R}$, $u \in H^1(a, b)$ con $u(a) = 0$. Allora[a]

$$\int_I u^2 dx \leq 4|I|^2 \int_I (u')^2 dx.$$

In particolare, se $u \in H_0^1(I)$, allora

$$\int_I u^2 dx \leq |I|^2 \int_I (u')^2 dx.$$

[a]Vedremo che 4 non è la costante ottimale.

Dimostrazione. Visto che il prodotto di funzioni di Sobolev è ancora di Sobolev[2], per ogni $x \in (a, b)$ abbiamo che

$$\begin{aligned} u^2(x) = u^2(x) - u^2(a) &= 2\int_a^x u(t)u'(t)dt \\ &\leq 2\left(\int_a^x u^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^x (u')^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\left(\int_I u^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I (u')^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

[2]Avremmo potuto anche ragionare con $u \in C^\infty \cap H_0^1$ e finire per densità. Questo sarà il modo in cui procederemo in più dimensioni.

Integrando in x abbiamo

$$\int_I u^2 dx \leq 2|I| \left(\int_I u^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I (u')^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

da cui segue che

$$\left(\int_I u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2|I| \left(\int_I (u')^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\int_I u^2 dx \leq 4|I|^2 \int_I (u')^2 dt.$$

□

È **molto importante** avere $|I|^2$ perchè la disuguaglianza deve essere invariante per riscalamento di intervallo.

Osservazione 3.1.2
Consideriamo $u \in H_0^1(I)$, allora $u_r(x) = u\left(\frac{x}{r}\right)$ è in $H_0^1(rI)$ e valgono

$$\int_{rI} u_r^2(t)dt = \int_{ar}^{br} u^2\left(\frac{t}{r}\right) \overset{x=\frac{t}{r}}{=} r\int_a^b u^2(x)dx$$
$$\int_{rI} (u_r')^2(t)dt = \int_{ar}^{br} \frac{1}{r^2} u'\left(\frac{t}{r}\right)^2 dt = \frac{1}{r}\int_a^b u'(x)^2 dx$$

Quindi

$$\int_{I_r} u_r^2 dx \leq 4|I_r|^2 \int_{I_r} (u_r')^2 dx \iff \int_I u^2 dx \leq 4|I|^2 \int_I (u')^2 dx.$$

Idea In generale quando si hanno disuguaglianze che coinvolgono funzioni e loro derivate è comodo vedere che sono invarianti per riscalamenti. ⌟

3.1.1 Formulazione variazionale

Vediamo ora che è possibile risolvere il problema (1) in termini di minimizzazione di un funzionale appropriato.

Proposizione 3.1.6

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto, $V \in L^1(I)$ non-negativa e $f \in L^2(I)$. Allora sono equivalenti

1. u è soluzione debole di (1).
2. u minimizza il funzionale $\mathcal{F}$ fra tutte le $\varphi \in H_0^1(I)$ dove

$$\mathcal{F}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_I |\varphi'(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_I V(x)\varphi^2(x)dx - \int_I \varphi(x)f(x)dx.$$

Dimostrazione. Notiamo preliminarmente che se $\varphi \in H_0^1(I)$ allora

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u+\varphi) &= \frac{1}{2}\int_I (u'+\varphi')^2 + \int_I V(u+\varphi)^2 - \int_I f(u+\varphi)\\ &= \mathcal{F}(u) + \int_I u'\varphi' + \int_I Vu\varphi - \int_I f\varphi + \frac{1}{2}\int_I (\varphi')^2 + \frac{1}{2}\int_I V\varphi^2\end{aligned}$$

1) $\Rightarrow$ 2): se u soluzione debole allora

$$\mathcal{F}(u+\varphi) = \mathcal{F}(u) + \frac{1}{2}\int_I (\varphi') + \frac{1}{2}\int V\varphi^2 \geq \mathcal{F}(u).$$

Visto che questo vale per ogni $\varphi \in H_0^1(I)$ allora u minimizza $\mathcal{F}$ in $H_0^1(I)$.
2) $\Rightarrow$ 1): Se u minimizza $\mathcal{F}$ in $H_0^1(I)$, allora $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in H_0^1(I)$ vale

$$\mathcal{F}(u+t\varphi) \geq \mathcal{F}(u)$$

ossia:

$$0 \leq \mathcal{F}(u+t\varphi) - \mathcal{F}(u) = t\left[\int_I \varphi' u' + \int_I V\varphi u - \int_I f\varphi\right] + t^2\left[\frac{1}{2}\int_I (\varphi')^2 + \frac{1}{2}\int_I V\varphi^2\right].$$

Deve quindi necessariamente valere

$$\int \varphi' u' + \int V u\varphi - \int f\varphi = 0.$$

Visto che questo vale $\forall \varphi \in H_0^1(I)$ si ha che u è soluzione debole. □

Osservazione 3.1.3
A volte viene utilizzata la seguente notazione per indicare la variazione di $\mathcal{F}$ calcolata nel punto u lungo la direzione φ:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{F}(u+t\varphi) = \delta\mathcal{F}(u)[\varphi] = \int_I \varphi' u' - \int_I (Vu - f)\varphi$$

Idea Questa equivalenza è molto comoda, perchè di solito è molto più facile mostrare che un funzionale ammette minimo, piuttosto che soluzione debole. ⌟

Proposizione 3.1.7 – Esistenza e unicità di soluzioni deboli

Sia I intervallo limitato, $V \in L^1(I), V \geq 0, f \in L^2(I)$. Allora esiste unico in $H_0^1(I)$ il minimo di $\mathcal{F}$ dove

$$\mathcal{F}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_I |\varphi'(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_I V(x)\varphi^2(x)dx - \int_I \varphi(x)f(x)dx.$$

Dimostrazione. Esistenza: Sia $u_n \in H_0^1(I)$ una successione minimizzante[3] per $\mathcal{F}$, ossia $\{u_n\}$ è tale che $\mathcal{F}(u_n)$ sia decrescente[4] e

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{F}(u_n) = \inf\{\mathcal{F}(u) : u \in H_0^1(I)\}$$

[3] Visto che l'estremo inferiore esiste sempre perchè stiamo parlando di insieme di numeri reali, questa successione minimizzante esiste sempre.

[4] così vale che $\inf \mathcal{F}(u_n) = \liminf \mathcal{F}(u_{n_k})$.

Siccome $0 \in H_0^1(I)$ e $\mathcal{F}(0) = 0$, possiamo supporre che $\mathcal{F}(u_n) \leq 0 \ \forall n$. Vale allora[5]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_I (u_n')^2 &\leq \frac{1}{2}\int_I (u_n')^2 dx + \frac{1}{2}\int_I V u_n^2 dx \\
&\leq \int_I f u_n dx \\
&\leq \left(\int_I f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I u_n^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |I| \left(\int_I f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I (u_n')^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Segue che

$$\|u_n'\|_{L^2(I)} \leq 2|I|\|f\|_{L^2(I)}$$

e quindi

$$\|u_n\|_{L^2(I)} \leq 2|I|^2\|f\|_{L^2(I)}.$$

Abbiamo quindi che u_n è limitata in $H_0^1(I)$. Di conseguenza esistono $u \in H_0^1(I)$ e una sottosuccessione u_{n_k} tali che:

- $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in $H_0^1(I)$.
- $u_{n_k} \longrightarrow u$ in $L^\infty(I)$.

Vediamo che

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{k\to+\infty} \mathcal{F}(u_{n_k})$$

quindi u è un minimo in $H_0^1(I)$. Questo segue dalle seguenti:

$$\int_I (u')^2 \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_I (u_{n_k}')^2.$$

$$\int u^2 = \lim_{k\to+\infty} \int V u_{n_k}^2.$$

$$\int_I uf = \lim_{k\to+\infty} \int_I u_{n_k} f.$$

__*Unicità*__: se u, v minimi di $\mathcal{F}$ tali che $\mathcal{F}(u) \neq \mathcal{F}(w)$, allora posto $\varphi = w - u$, si ha

$$\mathcal{F}(w) = \mathcal{F}(u+\varphi) = \mathcal{F}(u) + \frac{1}{2}\int_I (\varphi')^2 + \frac{1}{2}\int V\varphi^2.$$

Visto che $\mathcal{F}(w)$ minimo deve valere che $\int_I (\varphi')^2 dx = 0$ ossia $\varphi = 0$. □

Esercizio 3.1.1 - Ottimizzazione disuguaglianza di Poincarè
Trovare la più piccola costante $C > 0$ per cui valga la disuguaglianza di Poincarè, ossia tale che per ogni $u \in H_0^1(I)$ si ha:

$$\int_I u^2 \leq C|I|^2 \int_I (u')^2.$$

[5] usiamo la disuguaglianza di Poincarè.

Idea Visto che la disuguaglianza è invariante per riscalamenti, la costante non dipenderà da intervallo. ⌟

Risoluzione: basta trovare C per $I = (0,1)$. Osserviamo che

$$\frac{1}{C} = \inf \left\{ |I|^2 \int (u')^2 dx : \int_0^1 u^2 = 1, u \in H_0^1(I) \right\}.$$

Prendiamo u_n successione minimizzante $\Rightarrow u_n$ è automaticamente limitata in $H_0^1(I)$. Quindi esiste u_{n_k} convergente debolmente in $H_0^1(I)$ e uniformemente su I a $u \in H_0^1(I)$. Siccome converge uniformemente

$$\int_I u^2 = \lim_{n\to\infty} \int_I u_{n_k}^2 = 1$$

$$\int_I (u')^2 \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_I (u'_{n_k})^2$$

quindi u realizza il minimo. Allora $\forall \varphi \in H_0^1(I), \forall t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{\int (u' + t\varphi')^2}{\int (u+t\varphi)^2} \geq \frac{1}{C} = \frac{\int (u')^2}{\int u^2}$$

Derivando in t abbiamo che

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \frac{\int (u')^2 + 2t \int u'\varphi' + t^2 \int (\varphi')^2}{\int u^2 + 2t \int u'\varphi + t^2 \int \varphi^2} = 2\int_I u'\varphi' - \frac{2}{C}\int u\varphi$$

Segue che

$$f'(t) = 0 \iff \int u'\varphi' - \frac{1}{C}\int u\varphi = 0$$

Quindi $u \in H_0^1(I)$ è la soluzione debole di $-u'' = \frac{1}{C}u$ in I. In particolare $u' \in H^1(I)$ e $u'' = -\frac{1}{C}u$. Visto che sia u che u' sono di Sobolev si ha che per ogni $x \in (0,1)$

$$u(x) = \int_0^x u'(t)dt \quad u'(x) = u'(0) - \int_0^x u''(t)dt = u'(0) - \frac{1}{C}\int_0^x u(t)dt$$

Visto che u è continua su $[0,1]$ abbiamo che $u' \in C^1([0,1])$. Ma allora $u \in C^2([0,1])$ e quindi $u' \in C^3([0,1])$. Iterando questo ragionamento, che prende il nome di *bootstrap*, si ha che $u \in C^\infty([0,1])$.
Osserviamo ora che se u realizza il minimo, allora anche $|u|$ lo realizza, infatti:

$$\int |u|^2 = \int u^2 = 1 \quad \text{e} \quad \int (|u|')^2 = \int (u')^2 = \frac{1}{C}.$$

Vale quindi che il minimo è realizzato da una funzione positiva. Inoltre, visto che la soluzione u appartiene a $H_0^1(I)$, questa si annulla negli estremi e, non essendo identicamente nulla, si ha che $u > 0$ su I. Viste le condizioni si vede che la soluzione deve essere

$$u(x) = \sqrt{2}\sin(\pi x).$$

Vale quindi che $C = \frac{1}{\pi^2}$. □

3.1.2 Principio del massimo debole

Proposizione 3.1.8 – Principio massimo - prima variante

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo limitato e $V \in L^1(I), V \geq 0$. Se $f \in L^2(I)$ e non-negativa su I, allora $u \geq 0$ su I dove u è la soluzione di $-u'' + Vu = f$ in I e $u \in H_0^1(I)$.
In particolare, se $f_1 \geq f_2$ con $f_1, f_2 \in L^2(I)$, allora $u_1 \geq u_2$ dove u_i è la soluzione di $-u_i'' + Vu_i = f_i$ su I e $u_i \in H_0^1(I)$

Dimostrazione. Step 1: Osserviamo che se $u \in H_0^1(I)$, allora $u_+ \in H_0^1(I)$. Infatti $u \in H_0^1(I) \Rightarrow u \in H^1(I)$ e $u = 0$ su ∂I. Allora $u_+ \in H^1(I)$ e $u_+ = 0$ su ∂I. Quindi $u_+ \in H_0^1(I)$.
Step 2: u è soluzione debole di $-u'' + Vu = f$, quindi u minimizza $\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_I (u')^2 + \frac{1}{2}\int_I Vu^2 - \int_I fu$. In particolare $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u_+)$. Ricordando che $(u_+)' = u' \mathbb{1}_{\{u \geq 0\}}$, possiamo riscrivere

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u) &= \frac{1}{2}\int_I (u_+)^2 + \frac{1}{2}\int_I (u_-)^2 + \frac{1}{2}\int Vu_+^2 + \frac{1}{2}\int Vu_-^2 - \int fu_+ + \int fu_- \\
&= \mathcal{F}(u_+) + \underbrace{\frac{1}{2}\int_I (u_-')^2 + \frac{1}{2}\int Vu_-^2 + \int fu_-}_{\geq 0} \leq \mathcal{F}(u_+)
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue perchè $\mathcal{F}(u)$ minimizza [6]. Ma allora abbiamo che $u_-^+ \equiv 0 \Rightarrow u_- \equiv 0$ in I e $u_- = c$ su ∂I. Dunque $u_- \equiv 0$ su I. □

Idea Il precedente è un ragionamento universale, valido anche in più dimensioni. Se vogliamo mostrare (principio alla base del calcolo delle variazioni) che un minimo ha una certa proprietà lo dobbiamo confrontare con una funzione che ha questa proprietà che chiameremo *competitore naturale*. Nel caso precedente, volendo u positiva, la abbiamo confrontata con la sua parte positiva. L'idea è che il confronto darà informazioni che ci servono. ⌟

Osservazione 3.1.4
Con questa prima variante abbiamo che se f aumenta, u aumenta. Cosa succede se aumentano I o V?

Esempio 3.1.9. Se $I = (-L, L)$ e consideriamo $-u'' = 1$ su I e $u = 0$ su ∂I. La soluzione è $u(x) = \frac{1}{2}(L^2 - x^2)$. Più grande è L, più grande è $u(x)$.

Proposizione 3.1.10 – Principio massimo - seconda variante

Siano $I \subseteq J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli limitati aperti. Siano $V \in L^1(I)$ e $v \in L^1(J)$ con $V \geq v \geq 0$ su I. Sia $f \in L^2(J), f \geq 0$, allora $U \geq u$ dove U e u sono, rispettivamente, le soluzioni deboli di

$$\begin{cases} -U'' + vU = f & \text{su } J,\ U \in H_0^1(J) \\ -u'' + Vu = f & \text{su } I,\ u \in H_0^1(I) \end{cases}$$

Idea Il potenziale gioca contro. A differenza del caso precedente *non* abbiamo più un competitore naturale ovvio. L'idea sarà quella di scontrare U con $\max(V, v)$ e u con $\min(V, v)$. ⌟

[6] importante ricordare che la parte negativa è positiva, quindi va messo un meno

Dimostrazione. Consideriamo le funzioni $U \vee u$ e $U \wedge u$. Poichè $u \in H_0^1(I) = \{\varphi \in H^1(\mathbb{R}) | \varphi \equiv 0 \text{ su } \mathbb{R}\backslash I\}$, in particolare $H_0^1(I) \subseteq H_0^1(J)$. Quindi $u \in H_0^1(J)$. Ma allora $U \vee u \in H_0^1(J)$, visto che $U \vee u = u + (U-u)_+$. Poichè U minimo si ha

$$\frac{1}{2}\int_J |U'|^2 + \frac{1}{2}\int_J vU^2 - \int_J fU \leq \frac{1}{2}\int |(U\vee u)'|^2 + \frac{1}{2}\int_J |U \vee u|^2 - \int_J fU \vee u \tag{3.1}$$

Consideriamo $U \wedge u \in H_0^1(J)$ e siccome $u \equiv 0$ su $\mathbb{R}\backslash I$ abbiamo che $U \wedge u \equiv 0$ su $\mathbb{R}\backslash I \Rightarrow U \wedge u \in H_0^1(I)$. Quindi per minimalità di u, abbiamo

$$\frac{1}{2}\int_I |u'|^2 + \frac{1}{2}\int_I Vu^2 - \int_I fu \leq \frac{1}{2}\int_I |(u\wedge U)'|^2 + \frac{1}{2}\int_I V(u \wedge U)^2 - \int_I f(u \wedge U) \tag{3.2}$$

Notiamo che $\frac{1}{2}\int_J |U'|^2 - \frac{1}{2}\int_J |(U\vee u)'|^2 = \frac{1}{2}\int_I |u'|^2 - \frac{1}{2}\int_I |(u \wedge U)'|^2$, infatti

$$\begin{aligned} |U'|^2 + |u'|^2 &= |U'|^2 \mathbb{1}_{U>u} + |U'|^2 \mathbb{1}_{U\leq u} + |u'|^2 \mathbb{1}_{U>u} + |u'|^2 \inf_{U\leq u} \\ &= (|U'|^2 \mathbb{1}_{\{U>u\}} + |u'|^2 \mathbb{1}_{\{U\leq u\}}) + (|U'|^2 \mathbb{1}_{\{U\leq u\}} + |u'|^2 \mathbb{1}_{\{U>u\}}) \\ &= |(U\vee u)'|^2 + |(U \wedge u)'|^2 \end{aligned}$$

infatti

$$\begin{aligned} (U \vee u)' &= (u + (U-u)_+)' = u' + (U-u)'_+ = u' + \mathbb{1}_{\{U>u\}}(U-u)' \\ &= U'\mathbb{1}_{\{U>u\}} + u' \underbrace{(1 - \mathbb{1}_{\{U>u\}})}_{\{\mathbb{1}_{U\leq u}\}} \end{aligned}$$

Quindi se facciamo 3.1+3.2, abbiamo

$$\int_I Vu^2 + \int_J vU^2 \leq \int_I V(u\wedge U)^2 + \int_J v(u \vee U)^2$$

possiamo scegliere di considerare sia I che J, quindi

$$\int_I Vu^2 + \int_I vU^2 \leq \int_I V(u\wedge U)^2 + \int_I v(u \vee U)^2$$

e questa vale poichè in generale se abbiamo $A \geq a \geq 0, X \geq x \geq 0$ allora

$$aX + Ax \leq AX + ax \text{ perchè } \iff (A-a)(X-x) \geq 0$$

Nella nostra disuguaglianza si ha che, puntualmente, $u \vee U \geq u \wedge U$. Abbiamo quindi un'uguaglianza, ma allora $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U \vee u) \Rightarrow U = U \vee u$. □

Osservazione 3.1.5
Questo fatto, con questa stessa dimostrazione, vale in tutte le dimensioni.

3.2 Convergenza di soluzioni

Proposizione 3.2.1

Sia I intervallo limitato, $V_n \rightharpoonup V$ in L^2 con $V_n \geq 0$ e $f_n \rightharpoonup f$ in $L^2(I)$. Allora $u_n \to u$ fortemente in $H_0^1(I)$, dove u_n e u sono le soluzioni deboli di $-u_n'' + V_n u_n = f_n$ su I e $u_n \in H_0^1(I)$ e $-u'' + Vu = f$ su I e $u \in H_0^1(I)$.

Osservazione 3.2.1
La proprietà di essere limitata dal basso/alto è stabile per convergenza debole. Quindi $V_n \geq 0, V_n \in L^2(I), V_n \rightharpoonup V$ in $L^2 \Rightarrow V \geq 0$. Infatti

$$0 \leq \int_I V_n \mathbb{1}_{\{V<0\}} \to \int_I V \mathbb{1}_{\{V<0\}} < 0$$

assurdo[7].

Dimostrazione. Il minimo u esiste perchè è il minimo di $\mathcal{F}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_I |\varphi'|^2 + \frac{1}{2}\int_I V\varphi^2 - \int_I f\varphi$.
Step 1: Dimostriamo che u_n è limitata in $H_0^1(I)$. Siccome u_n minimizza $\mathcal{F}_n(\varphi) = \frac{1}{2}\int_I |\varphi'|^2 + \frac{1}{2}\int_I V_n\varphi^2 - \int_I f_n\varphi$ allora $\mathcal{F}(u_n) \leq \mathcal{F}_n(0) = 0$. Ma quindi

$$\frac{1}{2}\int_I (u_n')^2 + \frac{1}{2}\int_I V_n u_n^2 \leq \int f_n u_n \leq \|f_n\|_{L^2}\|u_n\|_{L^2} \leq c\|u_n\|_{L^2} \leq cC_p\|u_n'\|_{L^2}$$

dove $\|f_n\|_{L^2} \leq c$ perchè convergono debolmente, quindi limitate e C_p è la costante di Poincarè. Quindi

$$\|u_n'\|_{L^2} \leq 2cC_p$$

ossia u_n è limitata in $H_0^1(I)$. Esiste quindi $w \in H_0^1(I)$ tale che $u_{n_k} \rightharpoonup w$ in $H_0^1(I)$ e, grazie all'immersione compatta, $u_{n_k} \to w$ fortemente in $L^2(I)$ e $u_{n_k}' \to w'$ in $L^2(I)$). Quindi w è soluzione debole di $-w'' + Vw = f$ in I con $w \in H_0^1(I)$. Infatti, passando al limite[8], $\forall \varphi \in H_0^1(I)$

$$\int \varphi' u_{n_k}' + \int \varphi V_{n_k} u_{n_k} = \int \varphi f_{n_k} \longrightarrow \int \varphi' w' + \int \varphi V w = \int \varphi f.$$

Siccome la soluzione debole è unica, abbiamo che $u \equiv w$.
Step 2. Vediamo che $u_n \to u$ fortemente. Osserviamo che $u_n \to u$ in $H_0^1(I) \iff u_n' \to u'$ in $L^2(I)$. Osserviamo anche che

$$u_n' \to u' \text{ in } W^{1,p}(I) \iff \begin{cases} u_n \rightharpoonup u' \text{ in } L^2(I) \\ \|u_n'\|_{L^2} \to \|u'\|_{L^2} \end{cases}$$

Idea Usiamo un bieco trucco: siccome $-u'' + Vu = f$ usando come funzione test $\varphi = u$ abbiamo

$$\int |u'|^2 + \int Vu^2 = \int fu.$$

⌟

Visto che abbiamo una convergenza forte per una debole, segue che

$$\int_i |u'|^2 = \int_I fu - \int_I Vu^2 = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n u_n - \int_I V_n u_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \int |u_n'|^2.$$

Abbiamo quindi la convergenza in norma. Concludiamo visto che ogni sottosuccessione ammette sotto-sottosuccessione convergente, allora la successione è convergente. □

[7] Altro modo sarebbe vedere che le funzioni positive sono un chiuso per la convergenza in L^2 e sono un convesso. Dunque è un chiuso anche per la convergenza debole

[8] Si ha una convergenza debole per forte che passa al limite.

Esercizio 3.2.1
Mostrare che per uno spazio separabile la topologia indotta da convergenza debole è metrizzabile. Ricordiamo che per spazi metrici se ogni sottosuccessione ammette una sotto-sottosuccessione convergente, allora la successione è convergente.

Abbiamo visto le seguenti cose:

- Se $V \in L^1(I), V \geq 0, f \in L^2$ allora esiste un'unica soluzione debole di $-u'' + Vu = f$.
- Se $V \in L^2(I), V \geq 0, f \in L^2$ allora u è soluzione forte di $-u'' + Vu = f$. (la soluzione debole in realtà è forte, ossia $u' \in H^1$).

Per ottenere u soluzione forte abbiamo supposto $V \in L^2$. Con i prossimi esempi vediamo che questa è una condizione necessaria:

Esempio 3.2.2 (Esempio di soluzione debole, ma non forte). $I = (-1, 1), f \equiv 1; V_n \geq 0, V_n \in L^1 \backslash L^2$. $V_n \to 0$ in L^1 e $V_n \equiv 0$ su $(-1, 1) \backslash (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Infatti: $\forall n$ considero $-u_n'' + V_n u_n = 1$ su I e $u_n \in H_0^1(I)$. Se ripetiamo lo stesso ragionamento di prima, $u_n \to u$ in $H^1(I) \cap L^\infty(I)$ alla soluzione[a] di $-u'' = 1$ su I che ha soluzione $u(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$. Poichè $V_n \to 0$ fortemente in L^1 e $u_n \to u$ forte in L^∞ allora convergenza forte per forte passa al limite.

Quindi $u_n \geq \frac{1}{4}$ su $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ma allora $V_n u_n \notin L^2$, se lo fosse anche V_n sarebbe in L^2. Quindi $V_n u_n \in L^1 \backslash L^2$. Ma quindi $u_n'' = V_n u_n - 1 \notin L^2$, ossia u_n *non* è soluzione forte.

[a]la cosa importante è che ci tenda in L^∞.

3.3 Equazione del calore

Dato il nuovo linguaggio che abbiamo introdotto, vediamo ora di riottenere alcuni risultati riguardanti l'*equazione del calore*. Vedremo che l'esistenza e l'unicità dell'equazione del calore sono riconducibili all'uso di funzioni e norme di Sobolev. Si ricorda che:

Definizione 3.3.1 – Continuità e derivabilità in uno spazio di Banach

Sia $\mathcal{B}$ spazio di Banach con norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Dati un intervallo I e $u : I \to \mathcal{B}$ diciamo che:

- $u \in C(I, \mathcal{B})$ se la funzione u è continua su I, ossia:
$$\lim_{s \to 0} \|u(t+s) - u(t)\|_{\mathcal{B}} = 0 \quad \text{per ogni } t \in I.$$
- $u \in C^1(I, \mathcal{B})$ se esiste una funzione $v \in C(I, \mathcal{B})$ tale che
$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{|s|} \|u(t+s) - u(t) - sv(t)\|_{\mathcal{B}} = 0 \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Siano $L > 0$ e $I = (0, L)$. Consideriamo la base di Fourier $\Phi = \left\{ \phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L} kx\right) \right\}$.

Data $u_0 \in L^2(I)$ scriviamo $u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \phi_k(x)$. Nel seguito considereremo, per ogni $t > 0$, la seguente:

$$u_t = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-\lambda_k t} \phi_k.$$

dove $\lambda_k = \frac{\pi^2}{L^2} k^2$ e la serie converge fortemente in $L^2(I)$. Chiaramente $u_t \in L^2(I)$, ma in particolare:

- $u_t \in C^\infty(I)$, infatti è convoluzione con il *nucleo del calore*, funzione C^∞.
- Per la caratterizzazione dei coefficienti di Fourier si ha che $u_t \in H_0^1(I)$ e la sua derivata debole è
$$\partial_x u_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\pi}{L} c_k e^{-\lambda t} k \psi_k(t).$$
Sempre per la caratterizzazione con i coefficienti segue che $\partial_x u_t \in H^1(I)$ e
$$\partial_{xx} u_t = -\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 k^2 c_k e^{-\lambda_k t} \phi_k(x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k c_k e^{-\lambda_k t} \phi_k(x)$$
Quindi[9] si ha che $u_t \in H_0^1(I) \cap H^2(I)$.

Definizione 3.3.2 – Soluzione dell'equazione del calore

Diciamo che, data $u_0 \in L^2(I)$, la funzione u, dove

$$u \in C\big([0,+\infty), L^2(I)\big) \cap C^1\big((0,+\infty), L^2(I)\big) \cap C\big((0,+\infty), H_0^1(I) \cap H^2(I)\big)$$

è la soluzione dell'equazione del calore con condizioni di Dirichlet e con dato iniziale u_0 se

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} u_t = u_0 & \text{fortemente in } L^2(I) \\ u_t = H_0^1(I) \cap H^2(I) & \forall t > 0 \\ \partial_t u_t = \partial_{xx} u_t & \text{in } I \ \forall t > 0 \end{cases}.$$

Teorema 3.3.3

Dati $I = (0, L)$ e $u_0 \in L^2(I)$, si ha che:

1. u_t converge a u_0 fortemente in $L^2(I)$ per $t \to 0$. Dunque $u_0 \in C([0,+\infty), L^2(I))$.
2. Per ogni $t > 0$ definiamo $v_t \in L^2(I)$ come
$$v_t := \sum_{k=1}^{+\infty} (-\lambda_k) c_k e^{-t\lambda_k} \phi_k$$
dove la serie converge fortemente in $L^2(I)$. Allora
$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \|u_{t+s} - u_t - s v_t\|_{L^2(I)} = 0.$$
Segue quindi che $u_0 \in C^1(I, L^2(I))$ con $\partial_t u_t = v_t$.

[9] Iterando questo ragionamento è in realtà possibile vedere che $u_t \in H^k(I)$ per ogni k.

3. La funzione u_t è soluzione forte del problema

$$\partial_{xx} u_t = v_t \text{ in } I, u_t \in H_0^1(I).$$

Dimostrazione. Dimostriamo 1). Per il teorema di convergenza dominata nel caso discreto si ha:

$$\int_I |u_t - u|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 (e^{-\lambda_k t} - 1)^2 \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dimostriamo 2) e 3). Esplicitando le quantità vediamo che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s^2} \|u_{t+s} - u_t - s\partial_t u_t\|_{L^2}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \left(\frac{e^{-\lambda_k(t+s)} - e^{\lambda_k t} + s\lambda_k e^{-\lambda_k t}}{s} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 e^{-2\lambda_k t} \left(\frac{e^{-s\lambda_k} - 1 + \lambda_k s}{s} \right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 e^{-2\lambda_k t} \lambda_k^4 s^2 \left(\frac{e^{-s\lambda_k} - 1 + \lambda_k s}{s^2 \lambda_k^2} \right)^2
\end{aligned}$$

e questa chiaramente converge puntualmente. Essendo anche limitata abbiamo la tesi. Abbiamo visto che $u_t \in H_0^1 \cap H_2$, dunque è soluzione forte. $\square$

Proposizione 3.3.4

Data u soluzione dell'equazione del calore con dato iniziale $u_0 \in L^2$ su I intervallo aperto e limitato, la funzione $M : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita come

$$M(t) := \int_I |u_t(x)|^2 dx$$

è decrescente e

$$M(t) \leq e^{-kt} \|u_0\|_{L^2(I)}^2 \text{ per ogni } t \geq 0$$

dove k è una costante universale. In particolare la soluzione dell'equazione del calore è unica.

Dimostrazione. Come prima cosa vediamo che M è derivabile su $(0, +\infty)$ e che

$$M'(t) = \int_I 2\partial_t u_t(x) u_t(x) dx.$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s} \left(M(t+s) - M(t) \right) &= \frac{1}{s} \int_I (u_{t+s}^2 - u_t^2) dx \\
&= \frac{1}{s} \int_I (u_{t+s} - u_t)(u_{t+s} + u_t) dx \\
&= \int_I \frac{u_{t+s} - u_t}{s} 2u_t dx + \int_I \frac{u_{t+s} - u_t}{s} (u_{t+s} - u_t) dx.
\end{aligned}$$

Siccome abbiamo i seguenti limiti forti in $L^2(I)$

$$\lim_{s\to 0} \frac{u_{t+s} - u_t}{s} = \partial_t u_t \text{ e } \lim_{s\to 0}(u_{t+s} - u_t) = 0$$

abbiamo che

$$M'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(M(t+s) - M(t)) = 2\int_I \partial_t u_t(x) u_t(x) dx.$$

Usando l'equazione $\partial_t u_t = \partial_{xx} u_t$ abbiamo

$$M'(t) = 2\int_I \partial_{xx} u_t(x) u_t(x) dx.$$

Siccome[10] $u_t \in H_0^1(I)$ e $\partial_x u_t \in H^1(I)$ segue che

$$M'(t) = 2\int_I \partial_{xx} u_t(x) u_t(x) dx = -2\int_I (\partial_x u_t(x))^2 dx.$$

Per la disuguaglianza di Poincaré, esiste $C > 0$ tale che

$$-M(t) = -\int_I u_t^2(x) dx \geq -C\int_I (\partial_x u_t(x))^2 dx = \frac{C}{2} M'(t).$$

Segue quindi

$$M(t) \leq e^{-\frac{2}{C}} M(0) = e^{-\frac{2}{C}} \|u_0\|_{L^2(I)}.$$

Ora se u, v sono soluzioni dell'equazione del calore, possiamo considerare l'equazione del calore con dato iniziale nullo la cui soluzione è $u - v$. Ma allora, per la disuguaglianza, queste devono coincidere. $\square$

[10] Nella definizione di funzione di Sobolev possiamo usare come funzione test anche le H_0^1

Capitolo 4

Spazi di Sobolev in più variabili

4.1 Spazi di Sobolev su $\mathbb{R}^d$

Definizione 4.1.1 – Spazio di Sobolev su $\mathbb{R}^d$

Dato un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty]$, definiamo lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ come lo spazio delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ tali per cui esistono d funzioni

$$v_1, v_2, \dots, v_d \in L^p(\Omega),$$

tali che per ogni $j = 1, \dots, d$ e per ogni[a] $\varphi \in C^1_C(\Omega)$

$$\int_\Omega u(x)\partial_j\phi(x)\,dx = -\int_\Omega v_j(x)\phi(x)\,dx.$$

La funzioni $v_1, \dots, v_d$ sono le *derivate parziali deboli* di u.

[a] Alcuni autori considerano $\varphi \in C^\infty_C(\Omega)$. Vedremo che, grazie ai teoremi di approssimazione, le due definizioni sono equivalenti.

Osservazione 4.1.1
Equivalentemente, usando la notazione

$$V := (v_1, \dots, v_d) \in \Big(L^p(\Omega)\Big)^d$$

abbiamo che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se per ogni

$$\Phi = \big(\phi_1, \dots, \phi_d\big) \in C^1_C(\Omega; \mathbb{R}^d)$$

si ha

$$\int_I u(x)\,\mathrm{div}\Phi(x)\,dx = -\int_I V(x)\cdot\Phi(x)\,dx\,,$$

dove

$$\mathrm{div}\Phi(x) := \sum_{j=1}^d \partial_j\phi_j(x) \qquad \text{e} \qquad V(x)\cdot\Phi(x) := \sum_{j=1}^d v_j(x)\phi_j(x)\,.$$

La funzione V è il *gradiente debole* di u.

Osservazione 4.1.2 - Unicità delle derivata e del gradiente deboli
Supponiamo che, data $u \in L^p(\Omega)$, esistono due funzioni $v_j, w_j \in L^p(\Omega)$ tali che:

$$\int_I u(x)\partial_j\phi(x)\,dx = -\int_I v_j(x)\phi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad \phi \in C^1_C(I).$$

$$\int_I u(x)\partial_j\phi(x)\,dx = -\int_I w_j(x)\phi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad \phi \in C^1_C(I).$$

Allora,

$$\int_I \Big(v_j(x) - w_j(x)\Big)\phi(x)\,dx = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad \phi \in C^1_C(\Omega).$$

Di conseguenza,

$$v_j = w_j \quad \text{in} \quad \Omega.$$

D'ora in poi useremo le notazioni $\partial_1 u, \partial_2 u, \ldots, \partial_d u$ e

$$\nabla u := (\partial_1 u, \ldots, \partial_d u)\,,$$

per indicare la derivata debole di una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Primi esempi Vediamo ora i primi risultati che ci permetteranno di trovare i primi esempi di funzioni di Sobolev in più dimensioni.

Lemma 4.1.2

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 su Ω tale che:

$$\|F\|_{L^p(\Omega)} < +\infty \qquad \text{e} \qquad \|\nabla F\|_{L^p(\Omega)} < +\infty\ .$$

Allora $F \in W^{1,p}(\Omega)$ ed il suo gradiente debole è esattamente ∇F.

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni campo vettoriale $\Phi \in C^1_C(\Omega;\mathbb{R}^d)$

$$\int_\Omega F(x)\,\mathrm{div}\Phi(x)\,dx + \int_\Omega \nabla F(x)\cdot\Phi(x) = \int_\Omega \mathrm{div}\,\big(F(x)\Phi(x)\big)'\,dx = 0.$$

□

Osservazione 4.1.3
La regolarità della funzione F non è una condizione necessaria. Vale infatti la seguente:

Proposizione 4.1.3

Sia $B_1 \subset \mathbb{R}^d$ ed $F : B_1 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 in $B_1 \setminus \{0\}$ e tale che

$$F \in L^p(B_1) \qquad \text{e} \qquad |\nabla F| \in L^p(B_1)\,,$$

per un qualche $p \in [1, +\infty)$. Se

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial B_r} |F| = 0\,,$$

allora la funzione F è in $W^{1,p}(B_1)$ ed il suo gradiente debole è precisamente ∇F.

Dimostrazione. Sia $\Phi \in C^1_C(B_1)$. Siccome

$$F \in L^p(B_1) \qquad \text{e} \qquad |\nabla F| \in L^p(B_1)\,,$$

abbiamo che

$$\lim_{r\to 0}\int_{B_1\setminus B_r} F(x)\,\mathrm{div}\,\Phi(x)\,dx = \int_{B_1} F(x)\,\mathrm{div}\,\Phi(x)\,dx\,;$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{B_1\setminus B_r} \nabla F(x)\cdot\Phi(x)\,dx = \int_{B_1} \nabla F(x)\cdot\Phi(x)\,dx\,.$$

D'altra parte, per ogni $r > 0$, abbiamo che

$$\int_{B_1\setminus B_r} F(x)\,\mathrm{div}\,\Phi(x)\,dx + \int_{B_1\setminus B_r} \nabla F(x)\cdot\Phi(x)\,dx = -\int_{\partial B_r} F(x)\Phi(x)\cdot\frac{x}{|x|}\,d\sigma(x)\,.$$

Siccome, per ipotesi

$$\int_{\partial B_r} F(x)\Phi(x)\cdot\frac{x}{r} \to 0\,,$$

otteniamo che

$$\int_{B_1} F(x)\,\mathrm{div}\,\Phi(x)\,dx = -\int_{B_1} \nabla F(x)\cdot\Phi(x)\,dx.$$

□

Esempio 4.1.4 (Una funzione di Sobolev con discontinuità in $(0,0)$). Consideriamo la funzione

$$F : B_1 \setminus \{(0,0)\}\ , \quad F(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\ .$$

Allora, $F \in W^{1,p}(B_1)$ per ogni $p \in [1,2)$.

Idea Notiamo quindi che **non** tutte le $F \in W^{1,p}(\Omega)$ ammettono rappresentante continuo. Questo fatto rappresenta una differenza cruciale con il caso unidimensionale. ⌟

Esempio 4.1.5 (Una funzione di Sobolev non limitata). Dati $\alpha > 0$, $p \geq 1$ e $d \geq 2$, consideriamo la funzione

$$F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\ , \quad F(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}\ .$$

Se

$$d - p(\alpha+1) > 0\,,$$

allora $F \in W^{1,p}(B_1)$ ed il suo gradiente debole è dato da

$$\nabla F(x) = -\alpha\frac{x}{|x|^{\alpha+2}}\ .$$

Definizione 4.1.6 – La norma su $W^{1,p}(\Omega)$

Per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definiamo

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dimostrazione. È immediato verificare che se $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0$, allora $u \equiv 0$ e che

$$\|\alpha u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = |\alpha| \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \text{per ogni} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ soddisfa la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \|u+v\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u + \partial_j v\|_{L^p(\Omega)} \\
&\le \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \Big(\|\partial_j u\|_{L^p(\Omega)} + \|\partial_j v\|_{L^p(\Omega)}\Big) \\
&= \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j v\|_{L^p(\Omega)} \\
&= \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Quindi, $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ è una norma su $W^{1,p}(\Omega)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$. □

Teorema 4.1.7

$W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Dimostrazione. Vediamo che $W^{1,p}(\Omega)$ è una spazio vettoriale. Date due funzioni $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, e due numeri reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, abbiamo che

$$\alpha u + \beta v \in W^{1,p}(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha \nabla u + \beta \nabla v\,.$$

Siccome $\alpha\nabla u + \beta\nabla v \in L^p(\Omega)$, abbiamo che

$$\alpha u + \beta v \in L^p(\Omega).$$

Quindi, basta verificare che per ogni campo vettoriale $\Phi \in C^1_c(\Omega; \mathbb{R}^d)$ si ha:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Big(\alpha u + \beta v\Big) \operatorname{div}\Phi \, dx &= \alpha \int_\Omega u \operatorname{div}\Phi \, dx + \beta \int_\Omega v \operatorname{div}\Phi \, dx \\
&= -\alpha \int_\Omega \nabla u \cdot \Phi \, dx - \beta \int_\Omega \nabla u \cdot \Phi \, dx \\
&= -\int_\Omega (\alpha\nabla u + \beta\nabla v) \cdot \Phi \, dx.
\end{aligned}$$

Dimostriamo che lo spazio normato $\Big(W^{1,p}(\Omega)\,,\, \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}\Big)$ è uno spazio di Banach. Sia $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ una successione di Cauchy. Siccome

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u_n - \partial_j u_m\|_{L^p(\Omega)},$$

abbiamo che le successioni

$$u_n \in L^p(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \partial_j u_n \in L^p(\Omega)\ , \quad j = 1, \ldots, n\,,$$

sono di Cauchy in $L^p(\Omega)$. Siccome, lo spazio $L^p(\Omega)$ è completo, esistono i limiti forti in $L^p(\Omega)$:

$$u := \lim_{n\to+\infty} u_n \qquad \text{e} \qquad v_j := \lim_{n\to+\infty} \partial_j u_n\,.$$

Rimane da dimostrare che

$$V = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$$

sia il gradiente debole di u. Data un campo vettoriale $\Phi \in C^1_c(\Omega : \mathbb{R}^d)$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)\,\mathrm{div}\,\Phi(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n(x)\,\mathrm{div}\,\Phi(x)\,dx\\ &= -\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \nabla u_n(x)\cdot\Phi(x)\,dx = -\int_\Omega V(x)\cdot\Phi(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

Osservazione 4.1.4
Il caso $p = 2$ è speciale. $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert.

Dimostrazione. Per ogni $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ definiamo:

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega u(x)v(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx.$$

Allora,

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : W^{1,2}(\Omega)\times W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

è una forma bilineare simmetrica e definita positiva su $W^{1,2}(\Omega)$. La norma associata è:

$$\langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \;=\; \left(\int_\Omega u^2(x)\,dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

ed è equivalente alla norma

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^d \|\partial_j u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Il prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ rende lo spazio $W^{1,2}(\Omega)$ uno spazio di Hilbert. □

Osservazione 4.1.5
Visto che

$$W^{1,p}(\Omega) = \{(u, v_1, v_2, \ldots, v_d) : u \in L^p(\Omega), v_i \in L^p(\Omega) | v_i = \partial_i u\}$$

possiamo pensare a $W^{1,p}(\Omega)$ come ad uno sottospazio chiuso dello spazio di Banach $\Big(L^p(\Omega)\Big)^{d+1}$. Segue che $W^{1,p}(\Omega)$ è separabile per $p \in [1, +\infty)$.

4.1.1 Lo spazio duale di $W^{1,p}(\Omega)$

Osservazione 4.1.6
Siano $p \in [1, +\infty]$ e $q := \frac{p}{p-1}$. Date una funzione $\varphi \in L^q(\Omega)$ ed un vettore $\Psi \in \big(L^q(\Omega)\big)^d$, definiamo:

$$T(u) := \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \Psi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Allora

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}\,,$$

è un funzionale lineare continuo su $W^{1,p}(\Omega)$. Quando $p \in (1, +\infty)$ vale anche il viceversa.

Teorema 4.1.8

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $p \in (1, +\infty)$. Dato un funzionale lineare continuo

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}\,,$$

esistono una funzioni $\varphi \in L^q(\Omega)$ ed un campo vettoriale $\Psi \in \big(L^q(\Omega)\big)^d$, con $q := \frac{p}{p-1}$, tali che:

$$T(u) = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \Psi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad u \in W^{1,p}(\Omega)\,.$$

Dimostrazione. Per il teorema di Hahn-Banach, T può essere esteso ad un funzionale lineare continuo su $\big(L^p(\Omega)\big)^{d+1}$. La conclusione segue dal fatto che il duale di $L^p(\Omega)$ è esattamente $L^q(\Omega)$. □

4.1.2 Caratterizzazione della convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega)$

Teorema 4.1.9

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $p \in (1, +\infty)$. Data una successione $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$, sono equivalenti:

1. esiste $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$.

2. esiste $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che: $\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{debolmente in } L^p(\Omega) \\ \partial_j u_n \rightharpoonup \partial_j u & \text{debolmente in } L^p(\Omega) \end{cases}.$

3. esistono $u \in L^p(\Omega)$ e $v_j \in L^p(\Omega)$ tali che $\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{debolmente in } L^p(\Omega) \\ \partial_j u_n \rightharpoonup v_j & \text{debolmente in } L^p(\Omega) \end{cases}.$

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2): Consideriamo il funzionale $T(u) = \int_\Omega g\partial_j u$ dove $g \in L^q(\Omega)$. Visto che T è continuo abbiamo che

$$\int_\Omega g\partial_j u_n = T(u_n) \longrightarrow T(u) = \int_\Omega g\partial_j u.$$

Siccome g è arbitraria abbiamo che $\partial_j u_n \rightharpoonup \partial_j u$ in $L^p(\Omega)$.
2) $\Rightarrow$ 3): ovvio.
3) $\Rightarrow$ 1): Siano $u_n \overset{L^p}{\rightharpoonup} u, \partial_j u_n \overset{L^p}{\rightharpoonup} v_j$, allora $\forall \varphi \in C^1_C(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n\partial_j\varphi \\ &= -\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \partial_j u_n\varphi = \int_\Omega v_j\varphi.\end{aligned}$$

Quindi $u \in W^{1,p}$ e $\partial_j u = v_j$. Abbiamo che $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ poichè tutti i funzionali su $W^{1,p}(\Omega)$ sono della forma

$$T(u) = \int_\Omega f(x)u(x)dx + \int_\Omega g(x)\nabla u(x)dx.$$

$\square$

Corollario 4.1.10

Se $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ limitata, esiste u_{n_k} debolmente convergente in $W^{1,p}(\Omega)$.

Corollario 4.1.11

Se $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ allora u_n è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty}\|u_n\|_{L^p(\Omega)}$$
$$\|\partial_j u\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty}\|\partial_j u_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

4.1.3 Convoluzione e teoremi di approssimazione

I primi risultati che abbiamo visto $W^{1,p}(\Omega)$ sono stati dimostrati come nel caso unidimensionale. La teoria che andremo ora a sviluppare è simile a quella vista, tuttavia le dimostrazioni si svolgono in maniera diversa, visto che **manca** il teorema fondamentale del calcolo integrale.

4.1.3.1 Convoluzione e spazi di Sobolev

Sia $d \geq 1$ e $\phi \in C^\infty_C(\mathbb{R}^d)$ tale che:

- $\phi \geq 0$ in $\mathbb{R}^d$
- il supporto di ϕ è contenuto in B_1
- $\int_{B_1}\phi(x)dx = 1$
- $\phi(x) = \phi(-x)$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Questa funzione è tale che: $\phi_\varepsilon \in C^\infty_C(\mathbb{R}^d), \phi_\varepsilon \geq 0,\ \mathrm{supp}\phi_\varepsilon \subset B_\varepsilon, \int \phi_\varepsilon = 1$ e $\phi_\varepsilon(x) = \phi_\varepsilon(-x)$.

Lemma 4.1.12

Se $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p \in [1, +\infty]$, allora $u * \phi_\varepsilon \in L^p$ e $\|u * \phi_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p}$

Dimostrazione. Ricordando che

$$u * \phi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)\phi_\varepsilon(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy$$

Allora, per $p \in [1, +\infty)$, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)\phi_\varepsilon(y)dy \right|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x-y)|^p \phi_\varepsilon(y)dydx \\ &= \|u\|_{L^p}^p \int_{\mathbb{R}^d} \phi_\varepsilon(y)dy = \|u\|_{L^p}^p.\end{aligned}$$

Se $p = +\infty$ allora

$$|u * \phi_\varepsilon(y)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(y-x)\phi_\varepsilon(x)dx \right| \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_\varepsilon(x)dx = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

□

Lemma 4.1.13

Se $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $\phi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ allora $u * \phi \in C^\infty$ e $\forall j = 1, \dots, d$

$$\partial_j(u * \phi) = u * (\partial_j \phi).$$

Valgono inoltre le seguenti:

$$\|u * \phi\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^p}\|\phi\|_{L^q} \text{ e } \|\nabla(u * \phi)\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^p}\|\nabla\phi\|_{L^\infty}.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che

$$u * \nabla\phi(x) = ((u * \partial_1\phi)(x), \dots, (u * \partial_d\phi)(x)).$$

Vogliamo mostrare che la segunete è un $o(h)$

$$\begin{aligned}&(u * \phi)(x+h) - (u * \phi)(x) - h \cdot (u * \nabla\phi)(x) \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)[\phi(x+h-y] - \phi(x-y) - h \cdot \nabla\phi(x-y)]dy.\end{aligned}$$

Poichè $\forall t \in (0,1)$ e $\forall s \in (0,1)$ vale che

$$\phi(x+h-y) - \phi(x-y) = h \cdot \nabla\phi(x+th-y)$$
$$h \cdot \nabla\phi(x+th-y) - h \cdot \nabla\phi(x-y) = h \cdot \nabla^2(x+sh-y)h$$

abbiamo che[1]

$$|\phi(x+h-y) - \phi(x-h) - h \cdot \nabla\phi(x-y)| \leq |h|^2 \|\nabla^2\phi\| \mathbb{1}_{B_2}(x-y)$$

[1]Ricordiamo la stima: $|h \cdot Ah| \leq |h|^2\|A\|_2$ dove $|\cdot|$ è una norma vettoriale, mentre $\|\cdot\|$ è una norma matriciale.

con $\phi \in C_C^\infty(B_1)$. Concludiamo osservando che, essendo $\int |u(y)|\mathbb{1}_{B_2}(x-y) \leq \|u\|_{L^p}$:

$$|(u*\phi)(x+h) - (u*\phi)(x) - h(u*\nabla\phi)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u(y)|\mathbb{1}_{B_2}(x-y)dy|h|^2\|\nabla^2\phi\| \\ = O(|h|^2).$$

Le disuguaglianze seguono dalla disuguaglianza di Hölder. □

Proposizione 4.1.14

Per $p \in [1, +\infty)$ vale $\|u * \phi_\varepsilon - u\|_{L^p} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \; \forall u \in L^p(\mathbb{R}^d)$

Dimostrazione. Possiamo vederla in due modi:

1. Dopo aver mostrare che le C_C^∞ sono dense in L^p, consideriamo $u_n \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ con $u_n \to u$ in L^p. Allora

   $$\|u*\phi_\varepsilon - u\| \leq \|u*\phi_\varepsilon - u_n*\phi_\varepsilon\|_p + \|u_n*\phi_\varepsilon - u_n\|_p + \|u_n - u\|_p \\ \leq 2\|u_n - u\|_{L^p} + \|u_n * \phi_\varepsilon - u_n\|_{L^p}$$

   Ma allora visto che le u_n sono a supporto compatto, sono quindi uniformemente continue, e vale che:

   $$u_n * \phi_\varepsilon(x) - u_n(x) = \int (u_n(x-y) - u_n))\phi_\varepsilon(y)dy$$

   allora $\|u*\phi_\varepsilon - u_n\|_{L^p} \to 0$.

2. Possiamo sfruttare la convergenza debole: Se sappiamo che $u*\phi_\varepsilon \in L^p$ e $\|u*\phi_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|u\|_p$ allora, se $u * \phi_\varepsilon \overset{L^p}{\rightharpoonup} u$, allora $u*\phi_\varepsilon \overset{L^p}{\to} u$ (dimostrazione che funziona per $p \in (1,+\infty)$). Infatti, se $u*\phi_\varepsilon \rightharpoonup u$ allora $\|u\|_{L^p} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \|u*\phi_\varepsilon\| \leq \|u\|_{L^p}$. Ma questo vuol dire che il limite e il limite inferiore coincifono. Abbiamo quindi che

   $$\|u\|_{L^p} = \lim_{\varepsilon\to 0} \|u*\phi_\varepsilon\|_{L^p}$$

   e, per il teorema di Radon-Riesz, si ha la convergenza forte.
   Dobbiamo ora dimostrare che $\phi_\varepsilon \rightharpoonup u$: basta considerare $\phi \in C_C(\mathbb{R}^d)$ e dimostrare che[2] $\int (u*\phi_\varepsilon)\psi \to \int u\psi$.

   $$\int_{\mathbb{R}^d} (u*\phi_\varepsilon)(x)\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} u(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy\psi(x)dx \\ = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)(\psi*\phi_\varepsilon)(y)dy \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\mathbb{R}^d} u\psi.$$

□

[2] Anche qui usiamo la densità delle funzioni continue a supporto compatto in L^p.

Lemma 4.1.15

Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1,+\infty]$. Allora $u * \phi_\varepsilon \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e

$$\partial_j(u * \phi_\varepsilon) = \partial_j u * \phi_\varepsilon = u * \partial_j \phi_\varepsilon$$

Dimostrazione. Poichè $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ è immediato che $u*\phi_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $(\partial_j u)*\phi_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Per concludere ci basta dire che $(\partial_j u) * \phi_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^d)$ è la derivata debole di $u * \phi_\varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} (u * \phi_\varepsilon(x))\partial_j \Psi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} u(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy \right) \partial_j \Psi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \left((\partial_j \Psi) * \phi_\varepsilon(y) \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \partial_j [\Psi * \phi_\varepsilon(y)] dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u(y) (\Psi * \phi_\varepsilon)(y) dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u(y) \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x)\phi_\varepsilon(y-x) dx dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_j u * \phi_\varepsilon)(y)\Psi(y) dy
\end{aligned}$$

□

Corollario 4.1.16

Per $p \in [1,+\infty)$, $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ è denso in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

4.1.3.2 Teoremi di approssimazione

Lemma 4.1.17

Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ con $p \in [1,+\infty]$ e $\Psi \in C^\infty_C(\mathbb{R}^d)$. Allora $u\Psi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e $\nabla(u\Psi) = u\nabla\Psi + \Psi\nabla u$.

Dimostrazione. Chiaramente $u\Psi$ e $u\nabla\Psi + \Psi\nabla u$ appartengono a $L^p(\mathbb{R}^d)$. È dunque sufficiente vedere che $u\nabla\Psi + \Psi\nabla u$ è il gradiente debole di $u\Psi$. Sia[3] $\Phi \in C^1_C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} u\Psi \mathrm{div}\Phi &= \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathrm{div}(\Psi\Phi) - \nabla\Psi \cdot \Phi) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathrm{div}(\Psi\Phi) - \nabla\Psi \cdot \Phi) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot (\Psi\Phi) - \int_{\mathbb{R}^d} u\nabla\Psi \cdot \Phi \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \Phi \cdot (\Psi\nabla u + u\nabla\psi).
\end{aligned}$$

□

[3] Si ricorda che $\mathrm{div}(\Psi\Phi) = \sum_j \partial_j(\Psi\varphi_j) = \sum_j \partial_j\psi\varphi_j + \sum \Psi\partial_j\varphi_j$.

Osservazione 4.1.7
Abbiamo quindi che vale una regola di tipo Leibnitz per le coppie in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \times C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Vediamo che **non** è possibile ottenerla per le coppie in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \times W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, visto che **non** è detto che il prodotto di due funzioni di Sobolev sia ancora di Sobolev. A differenza del caso unidimensionale, $W^{1,p}(\Omega)$ **non** è un'algebra.

Esempio 4.1.18. Data $B_1 \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ la funzione $f(x) = \frac{1}{|x|}$ è tale che:

- $f \in W^{1,p}(B_1)$ se $p < \frac{d}{2}$.
- $f^d \in W^{1,p}(B_1)$ se $p < \frac{d}{d+1}$.

Ricordiamo infatti che $\frac{1}{|x|^\alpha} \in W^{1,p}(B_1) \iff d-p(\alpha+1) > 0$. Allora se consideriamo $d = 2$ si ha che $\sqrt{f} \in W^{1,p}(B_1)$, mentre $f \notin W^{1,p}(B_1)$.

Teorema 4.1.19 – Densità delle funzioni $C_C^\infty(\mathbb{R})$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

Sia $\Psi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ con $supp\Psi \subseteq B_1, 0 \leq \Psi \leq 1, \Psi \equiv 1$ su $B_{\frac{1}{2}}$. Consideriamo $\Psi_R(x) = \psi(\frac{x}{R})$. Allora, se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ con $p \in [1, +\infty)$,abbiamo che

$$\|u\Psi_R - u\|_{W^{1,p}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

In particolare C_C^∞ è denso in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

Osservazione 4.1.8
La dimostrazione di questo fatto nel caso unidimensionale ha sfruttato il teorema fondamentale del calcolo integrale. Era tuttavia possibile, come vedremo ora, usare la convoluzione.

Dimostrazione. Mostriamo che valgono le seguenti convergenze:

1. $u\Psi_R \to u$ in L^p, infatti
$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)(\Psi_R(x) - 1)|^p \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
per convergenza dominata.

2. $\forall j = 1, \ldots d$ vale $\partial_j u\Psi_R + \partial_j \Psi_R u \to \partial_j u$ in L^p. Poichè $\partial_j u\Psi_R \to \partial_j u$, ci basta dimostrare che $u\partial_j\Psi_R \to 0$ in L^p. Questo segue perchè
$$\left|\partial_{x_j}\left(\Psi\left(\frac{x}{R}\right)\right)\right| = \left|\frac{1}{R}\partial_j\Psi\left(\frac{x}{R}\right)\right| \leq \frac{1}{R}\|\partial_j\Psi\|_\infty \mathbb{1}_{B_R \setminus B_{\frac{R}{2}}} \leq \frac{c}{R}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus B_{\frac{R}{2}}}$$
così abbiamo
$$\|\partial_j\Psi_R u\|_{L^p}^p \leq \frac{c^p}{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_{\frac{R}{2}}} |u(x)|^p dx \to 0$$

□

Caso $W^{1,p}(\Omega)$ Per ora abbiamo lavorato con $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Cosa succede invece per $W^{1,p}(\Omega)$? Vediamo che $C^\infty(\Omega)$ è un denso di $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposizione 4.1.20

Data $u \in W^{1,p}(\Omega)$ allora posta

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases} \text{ e } \tilde{u}_j(x) = \begin{cases} \partial_j u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}.$$

si ha che $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e $\nabla \tilde{u}$ è la sua derivata debole.

Dimostrazione. Allora $\tilde{u} * \phi_\varepsilon \to \tilde{u}$ in L^p e $\tilde{u}_j * \phi_\varepsilon \to \tilde{u}_j$ in $L^p(\Omega)$. Queste due successioni separatamente convergono senza problemi, però potrebbe succedere che la seconda non è la derivata debole della prima. Come facciamo a verificare se effettivamente succede o meno? Si fa un test con una funzione $\Psi \in C^1_C(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \int (\tilde{u} * \phi_\varepsilon)(x)\partial_j \Psi(x) &= \int \tilde{u}(y)(\partial_j \Psi * \phi_\varepsilon)(y) \\ &= \int \tilde{u}(y)\partial_j(\Psi * \phi_\varepsilon)(y) \\ &\overset{!}{=} -\int \partial_j u(\Psi * \phi_\varepsilon)(y) = -\int ((\partial_j u) * \phi_\varepsilon))\Psi \end{aligned}$$

dove il passaggio ! si può fare per gli $x \in \Omega_\delta$ con, dato $\delta > 0$,

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \delta\}.$$

Per $\varepsilon < \delta$ si ha $u * \phi_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega_\delta)$ e $\partial_j(u * \phi_\varepsilon) = (\partial_j u) * \phi_\varepsilon$. □

Corollario 4.1.21

Vale anche che $\lim \|u_n - u\|_{W^{1,p}(D)} = 0$ per ogni $D \Subset \Omega$.

Teorema 4.1.22

Se $u \in W^{1,p}(\Omega), p \in [1, +\infty)$, esiste $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ tale che

1. $\|u_n - u\|_{L^p} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
2. $\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega_\delta)} \to 0 \ \forall \delta > 0$

4.1.4 Teorema di rappresentazione

4.1.4.1 Traslazioni di funzioni di Sobolev

Lemma 4.1.23

Siano $p \in (1, +\infty)$ e $d \geq 2$. Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ed ogni $y \in \mathbb{R}^d$, si ha

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^p_x} \leq |y| \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Dimostrazione. Data una funzione $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, con $p \in (1, +\infty]$ abbiamo che

$$\|f\|_{L^p} = \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\psi(x)\,dx \;:\; \psi \in L^q(\mathbb{R}^d),\ \|\psi\|_{L^q} = 1\Big\}.$$

Siccome, per $q \in [1, +\infty)$, abbiamo che $C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ è denso in $L^q(\mathbb{R}^d)$, otteniamo

$$\|f\|_{L^p} = \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\psi(x)\,dx \;:\; \psi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d),\ \|\psi\|_{L^q} = 1\Big\}.$$

In particolare,

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^p_x} = \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^d} \big(u(x+y) - u(x)\big)\psi(x)\,dx \;:\; \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),\ \|\psi\|_{L^q} = 1\Big\}.$$

Prendendo una funzione $\psi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ e tale che $\|\psi\|_{L^q} = 1$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \big(u(x+y) - u(x)\big)\psi(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\big(\psi(x-y) - \psi(x)\big)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\Big(\int_0^1 (-y)\cdot\nabla\psi(x-ty)\,dt\Big)\,dx \\
&= -\sum_{j=1}^d \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} y_j u(x)\partial_j\psi(x-ty)\,dx\,dt \\
&= \sum_{j=1}^d \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} y_j \partial_j u(x)\psi(x-ty)\,dx\,dt \\
&\leq \sum_{j=1}^d |y_j|\|\partial_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.24 – Teorema di rappresentazione in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Siano $p \in (1, +\infty)$ e $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Allora, sono equivalenti:

1. $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$;
2. esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^p_x} \leq C\,|y| \qquad \text{per ogni} \qquad y \in \mathbb{R}^d\,.$$

Dimostrazione. L'implicazione (1) $\Rightarrow$ (2) segue dal lemma precedente. Dimostriamo (2) $\Rightarrow$ (1).
Per ogni funzione $\psi \in C_C^1(\mathbb{R}^d)$ abbiamo che per ogni $y \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\big(u(x+y) - u(x)\big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \big(\psi(x-y) - \psi(x)\big)u(x)\,dx\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\partial_j\psi(x)u(x)\,dx &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\psi(x+te_j)-\psi(x)}{t}u(x)\,dx\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^d}\psi(x)\big(u(x-te_j)-u(x)\big)\,dx\\ &\le \|\psi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\left\|\frac{u(x-te_j)-u(x)}{t}\right\|_{L^p_x(\mathbb{R}^d)}\\ &\le C\|\psi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\,.\end{aligned}$$

Quindi, il funzionale

$$T : L^q(\mathbb{R}^d)\cap C^1_C(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}\,,\qquad T(\psi)=\int_{\mathbb{R}^d}\partial_j\psi(x)u(x)\,dx\,,$$

è un funzionale lineare limitato su $L^q(\mathbb{R}^d)\cap C^1_C(\mathbb{R}^d)$. Quindi, può essere esteso ad un funzionale lineare limitato

$$\widetilde{T} : L^q(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}\quad\text{tale che}\quad \widetilde{T}\equiv T\quad\text{su}\quad L^q(\mathbb{R}^d)\cap C^1_C(\mathbb{R}^d)\,.$$

In particolare, esiste una funzione $v_j\in L^p(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^d}\partial_j\psi(x)u(x)\,dx=-\int_{\mathbb{R}^d}v_j(x)\psi(x)\,dx\quad\text{per ogni}\quad \psi\in C^1_C(\mathbb{R}^d).$$

□

Proposizione 4.1.25 – Traslazioni e convoluzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Siano $p\in(1,+\infty)$ e $d\ge 2$. Allora, esiste una costante

$$C=C(d,p)>0\,,$$

tale che per ogni $u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

$$\|u*\phi_\epsilon-u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\le C\epsilon\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,,$$

dove $\phi_\epsilon:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ è una funzione tale che

$$\int_{\mathbb{R}^d}\phi_\epsilon(x)\,dx\le 1\,,\qquad \phi_\epsilon\ge 0\quad\text{su}\quad\mathbb{R}^d\qquad\text{e}\qquad\phi_\epsilon\equiv 0\quad\text{in}\quad\mathbb{R}^d\setminus B_\epsilon\,.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\big|(u*\phi_\epsilon)(x)-u(x)\big|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}u(x-y)\phi_\epsilon(y)\,dy-u(x)\right|^p\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\Big(u(x-y)-u(x)\Big)\phi_\epsilon(y)\,dy\right|^p\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|u(x-y)-u(x)\Big|^p\phi_\epsilon(y)\,dy\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|u(x-y)-u(x)\Big|^p\,dx\,\phi_\epsilon(y)\,dy\le C\epsilon^p\|\nabla u\|^p_{L^p}.\end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.26 – Teorema di Rellich

Siano $p \in (1, +\infty)$ e B_R una palla in $\mathbb{R}^d$. Sia u_n una successione limitata di $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e tale che, per ogni $n \geq 1$,

$$u_n \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_R\,.$$

Allora esistono una funzione $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ed una sottosuccessione di u_{n_k} tali che:

- u_{n_k} converge a u debolmente in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$;
- u_{n_k} converge a u fortemente in $L^p(\mathbb{R}^d)$;
- $u_{n_k}(x)$ converge a $u(x)$ per quasi-ogni $x \in \mathbb{R}^d$.

Dimostrazione. Per ogni $\epsilon > 0$ fissato, consideriamo la successione $u_n * \phi_\epsilon$.

$$\|u_n * \phi_\epsilon\|_{L^p} \leq \|u_n\|_{L^p}$$
$$\|\nabla(u_n * \phi_\epsilon)\|_{L^p} = \|(\nabla u_n) * \phi_\epsilon\|_{L^p} \leq \|\nabla u_n\|_{L^p}$$

e quindi $u_n * \phi_\epsilon$ è limitata in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. D'altra parte,

$$\|u_n * \phi_\epsilon\|_{L^\infty} \leq \|u_n\|_{L^p}\|\phi_\epsilon\|_{L^q}.$$
$$|\nabla(u_n * \phi_\epsilon)\|_{L^\infty} = \|u_n * (\nabla\phi_\epsilon)\|_{L^\infty} \leq \|u_n\|_{L^p}\|\nabla\phi_\epsilon\|_{L^q}.$$

In particolare, la successione $u_n * \phi_\epsilon$ è equicontinua ed equilimitata in B_{2R}. Possiamo quindi estrarre una sottosuccessione di Cauchy in L^∞ (e quindi anche in $L^p(B_{2R})$) tale che

$$\|u_n * \phi_\epsilon - u_m * \phi_\epsilon\|_{L^p} \leq \epsilon$$

per ogni m, n. Ora, usando la stima

$$\|u_n * \phi_\epsilon - u_n\|_{L^p} \leq \epsilon\|\nabla u_n\|_{L^p},$$

la disuguaglianza triangolare ed il fatto che

$$\|\nabla u_n\|_{L^p} \leq C \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1\,,$$

per una costante universale C (che non dipende da n), otteniamo che

$$\|u_n - u_m\|_{L^p} \leq (1 + 2C)\epsilon.$$

Ora, estraendo una successione diagonale, otteniamo una sottosuccessione di Cauchy in $L^p(\mathbb{R}^d)$ e limitata in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Da questa possiamo estrarre una successione di u_n che converge debolmente in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ed un'altra sottosuccessione che converge puntualmente quasi-ovunque. □

4.2 Teoremi di approssimazione, estensione e compattezza

4.2.1 Il caso $\Omega = B_R$

Teorema 4.2.1 – Teorema di approssimazione

Sia $B_R = B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^d$, $p \in (1,+\infty)$ e $u \in W^{1,p}(B_R)$. Per ogni $t > 0$ consideriamo la funzione

$$u_t(x) = u\left(\frac{x}{t}\right) \quad x \in B_{tR}$$

Allora:

1. $u_t \in W^{1,p}(B_{tR})$ e $\nabla u_t(x) = \frac{1}{t}\nabla u(\frac{x}{t})$.
2. u_t converge a u fortemente in $W^{1,p}(B_R)$ per $t \to 1^+$.

Dimostrazione.

Idea L'idea è che se consideriamo t in modo che B_{tR} sia più grande di B_R, allora la restrizione di u_t a B_R converge fortemente a u quando $t \to 1^+$. ⌟

Vediamo (1): sicuramente $u_t \in L^p(B_{tR})$, infatti

$$\int_{B_{tR}} |u_t(y)|^p dy = \int_{B_{tR}} \left|u\left(\frac{y}{t}\right)\right|^p dy = t^d \int_{B_R} |u(x)|^p dx < +\infty.$$

Allo stesso modo segue anche che $\nabla u_t \in L^p(B_{tR})$:

$$\int_{B_{tR}} |\nabla u_t(x)|^p dx = \int_{B_{tR}} \frac{1}{t}\left|\nabla u\left(\frac{x}{t}\right)\right|^p dx = \frac{t^d}{t^p}\int_{B_R} |\nabla u|^p < +\infty.$$

Quindi basta verificare che ∇u_t sia il gradiente debole di u_t: data $\Phi \in C^1_C(B_{tR}, \mathbb{R}^d)$ osserviamo preliminarmente che, detta $\Phi_t(x) = \Phi(tx)$:

$$\Phi(y) = \Phi_t\left(\frac{y}{t}\right) \text{ e } \mathrm{div}\Phi(y) = \frac{1}{t}(\mathrm{div}\Phi_t)\left(\frac{y}{t}\right).$$

$$\begin{aligned}
\int_{B_{tR}} \Phi(x)\nabla u_t(x)dx &= \int_{B_{tR}} \Phi(x)\frac{1}{t}\nabla u\left(\frac{x}{t}\right)dx = \int_{B_{tR}} \Phi_t\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}\nabla u\left(\frac{x}{t}\right)dx \\
&= t^d\int_{B_R}\frac{1}{t}\Phi_t(y)\nabla u(y)dy = -t^d\int_{B_R}\frac{1}{t}\mathrm{div}\Phi_t(y)u(y)dy \\
&= -t^d\int_{B_R}(\mathrm{div}\Phi)\left(\frac{y}{t}\right)u(y)dy = -\int_{B_{tR}}\frac{1}{t}\mathrm{div}\Phi(x)u\left(\frac{x}{t}\right)dx \\
&= -\int_{B_R}\mathrm{div}\Phi(x)u_t(x)dx.
\end{aligned}$$

Quindi $u_t \in W^{1,p}(B_{tR})$ e $\nabla u_t(x) = \frac{1}{t}\nabla u(\frac{x}{t})$.
Vediamo (2): per ogni $\varphi \in C^\infty_C(B_R)$ vale

$$\int_{B_R} u_t(x)\varphi(x)dx = \int_{\frac{B}{t}} u(y)\varphi(ty)dy.$$

Poichè φ è a supporto compatto abbiamo che

$$\lim_{t\to 1^+}\int_{B_R} u_t(x)\varphi(x)dx = \int_{B_R} u(x)\varphi(x)dx$$

e dunque $u_t \rightharpoonup u$ debolmente in $L^p(B_R)$. Vale inoltre che:

$$\int_{B_R} |u_t(x)|^p = \int_{B_R} \left| u\left(\frac{x}{t}\right)\right|^p dx = t^d \int_{B_{\frac{R}{t}}} |u(y)|^p dy \underset{t\to 1^+}{\longrightarrow} \int_{B_R} |u|^p$$

$$\int_{B_R} |\nabla u_t(x)|^p dx = \int_{B_R} \left|\frac{1}{t}\nabla u\left(\frac{x}{t}\right)\right|^p dx = t^{d-p}\int_{B_{\frac{R}{t}}} |\nabla u|^p \underset{t\to 1^+}{\longrightarrow} \int_{B_R} |\nabla u|^p.$$

Segue che $u_t \xrightarrow{t\to 1^+} u$ fortemente in $W^{1,p}(B_R)$. □

Corollario 4.2.2

Sia $p \in (1,+\infty), B_R \subseteq \mathbb{R}^d$. Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, allora esiste una successione di funzioni $u_n \in C^\infty(\overline{B}_R)$ tali che $u_n \to u$ fortemente in $W^{1,p}(B_R)$.

Idea Ciascuna delle u_n è definita sulla chiusura di B_R (quindi è definita su un insieme un po' più grande) e la sua restrizione su B_R converge in $W^{1,p}(B_R)$. ⌟

Lemma 4.2.3

Siano $\varphi : \overline{B}_R \to \mathbb{R}$ e $\psi : \overline{B}_{2R} \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1 fino al bordo tali che $\varphi \equiv \psi$ su ∂B_R. Allora per ogni $p \in [1,+\infty]$, la funzione $w : B_{2R} \to \mathbb{R}$

$$w(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in B_R \\ \psi(x) & \text{se } x \in B_{2R}\setminus B_R \end{cases}$$

è in $W^{1,p}(B_{2R})$ e il suo gradiente debole è

$$\nabla w(x) = \begin{cases} \nabla\varphi(x) & \text{se } x \in B_R \\ \nabla\psi(x) & \text{se } x \in B_{2R}\setminus B_R \end{cases}.$$

Dimostrazione. Verifichiamo che ∇w sia effettivamente il gradiente debole di w. Vediamo che per ogni $\Phi \in C^1_C(B_{2R}, \mathbb{R}^d)$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2R}} (\Phi\cdot\nabla w + w\text{div}\Phi) &= \int_{B_R} (\Phi\cdot\nabla\varphi + \text{div}\Phi\varphi) + \int_{B_{2R}\setminus B_R} (\Phi\nabla\psi + \text{div}\Phi\psi) \\
&= \int_{B_R} \text{div}(\varphi\Phi) + \int_{B_{2R}\setminus B_R} \text{div}(\psi\Phi) \\
&= \int_{\partial B_R} \varphi\Phi\cdot\nu_+ \int_{\partial(B_{2R}\setminus B_R)} \psi\Phi\cdot\nu \\
&= \int_{\partial B_R} \varphi\Phi\nu_+ + \int_{\partial B_R} \psi\Phi\nu_- = 0
\end{aligned}$$

dove $\nu_+ = \frac{x}{R}$ è la normale uscente dalla palla di raggio R e $\nu_-(x) = -\frac{x}{R}$. □

Corollario 4.2.4

Se $p \in (1, +\infty)$, per ogni $u \in W^{1,p}(B_R)$ esiste una funzione $v \in W^{1,p}(B_{2R})$ tale che:

- $v \equiv u$ su B_R.
- Esiste $C = C(d)$ tale che

$$\|\nabla v\|_{L^p(B_R)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(B_R)}.$$

Dimostrazione. Per il teorema di approssimazione possiamo limitarci al caso $u \in C^1(\overline{B}_R)$. Consideriamo la funzione

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in B_R \\ u(\frac{Rx}{|x|}) & \text{se } x \in B_{2R} \backslash B_R \end{cases}$$

Per il lemma precedente $v \in W^{1,p}(B_{2R})$ e poichè

$$\int_{B_{2R}\backslash B_R} \left|\nabla u \left(\frac{Rx}{|x|}\right)\right|^p dx \leq C \int_{B_R} |\nabla u|^p dx$$

abbiamo la tesi. □

Teorema 4.2.5 – Teorema di estensione

Sia $B_R \subseteq \mathbb{R}^d$, $p \in (1, +\infty), u \in W^{1,p}(B_R)$. Esiste una funzione $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ tale che:

1. $\tilde{u} \equiv 0$ in $\mathbb{R}^d \backslash B_{2R}$
2. $\tilde{u} \equiv u$ in B_R
3. Esiste $C = C(d, R)$ tale che

$$\|\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{L^p(B_R)}$$
$$\|\nabla\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \left(\|u\|_{L^p(B_R)} + \|\nabla u\|_{L^p(B_R)}\right).$$

Dimostrazione. Per il teorema di approssimazione basta verificare la tesi per $u \in C^\infty(\overline{B}_R)$, infatti se $u \in W^{1,p}(B_R)$, consideriamo $u_n \in C^\infty(\overline{B}_R)$ tali che $u_n \to u$ in $W^{1,p}(B_R)$. Esistono $\tilde{u}_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ con le proprietà $(1), (2), (3)$ e allora

$$\|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u_n - u_m\|_{L^p(B_R)}$$
$$\|\nabla\tilde{u}_n - \nabla\tilde{u}_m\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(B_R)}.$$

Quindi $\tilde{u}_n$ è di Cauchy in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Posto $\tilde{u} = \lim_{n\to+\infty} \tilde{u}_n$, si ha che $\tilde{u}$ è la funzione cercata.

Sia $\varphi \in C^\infty(\overline{B}_R)$. Presa $w \in W^{1,p}(B_R)$ come nel lemma precedente, possiamo definire $\tilde{u}(x) = w(x)\eta(x)$, dove $\eta \in C^\infty_C(\mathbb{R}^d)$ è tale che

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B_R \\ 0 & \text{se } x \in B_{2R} \backslash B_R \end{cases}$$

Si ha dunque che $\nabla\tilde{u} = \nabla\eta w + \eta\nabla w$, e quindi $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. □

Corollario 4.2.6 – Immersione compatta di $W^{1,p}(B_R)$ in $L^p(B_R)$

Siano $B_R \subseteq \mathbb{R}^d, p \in (1, +\infty)$. Data una successione limitata $u_n \in W^{1,p}(B_R)$, allora esistono una $u \in W^{1,p}(B_R)$ ed una sottosuccessione u_{n_k} tali che

$$u_{n_k} \to u \text{ fortemente in } L^p(B_R).$$

Dimostrazione. Conseguenza del teorema di estensione e del teorema di Rellich per domini. □

Teorema 4.2.7 – Cambio di variabile

Siano Ω e Ω' due aperti su $\mathbb{R}^d$ e sia $H : \Omega' \to \Omega$ una mappa bigettiva, con $x = H(y)$ tale che $H \in C^1(\Omega')$, $H^{-1} \in C^1(\Omega)$, $|\nabla H| \in L^\infty(\Omega')$ e $|\nabla H^{-1}| \in L^\infty(\Omega)$. Allora per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si ha che $u(H) \in W^{1,p}(\Omega')$ e

$$\frac{\partial}{\partial y_j} u(H(y)) = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y)) \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y).$$

Dimostrazione. Se[4] $p \in [1, +\infty)$ allora esiste $\{u_n\} \subset C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\forall \omega \Subset \Omega$

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow{L^p(\omega)} u \\ \nabla u_n \xrightarrow{L^p(\omega)} \nabla u \end{cases}.$$

Allora $u_n \circ H \to u \circ H$ in $L^p(\Omega')$ e

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \circ H\right) \frac{\partial H_i}{\partial y_i} \xrightarrow{L^p(\omega)} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \circ H\right) \frac{\partial H_i}{\partial y_i}.$$

Allora per ogni $\Psi \in C_C^1(\Omega')$ si ha

$$\int_{\Omega'} (u_n \circ H) \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} dy = -\int_{\Omega'} \sum_i \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \circ H\right) \Psi dy.$$

□

[4] L'enunciato e la dimostrazione di questo risultato sono presi da *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* di Brezis H.

4.2.2 Il caso Ω dominio qualsiasi

La trattazione vista fino ad ora è stata fatta su B_R. Vediamo ora che valgono gli stessi risultati per Ω dominio qualsiasi. L'estensione dei risultati visti non fornisce grandi novità concettuali, ma presenta un problema tecnico.

Definizione 4.2.8 – Partizione dell'unità

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, limitato e di classe C^1. Allora esistono N funzioni $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ tali che:

- Per ogni $k = 1, \dots, N$ $\varphi_i \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\varphi_i \geq 0$
- *supp*$(\varphi_i) \subseteq \Omega$ oppure *supp*$(\varphi_i) \subseteq C_i$, dove a meno di rotazioni e traslazioni, C_i è dato da
$$C_i = B'_{r_i} \times (-\delta_i, \delta_i)$$
ed ha la proprietà che esiste una funzione $\eta_i : B'_{2r_i} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 a valori in $(-\delta_i, \delta_i)$ tale che
$$\Omega \cap \left(B'_{2r} \cap (-2\delta_i, 2\delta_i)\right) = \{(x', x_d) \in B'_{2r} \times (-2\delta_i, 2\delta_i) : \eta_i(x') > x_d\}.$$
- $\sum\limits_{i=1}^N \varphi_i(x) = 1$ per ogni $x \in \Omega$.

Osservazione 4.2.1
Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ limitato esiste sempre una partizione dell'unità associata ad Ω.

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme $\{\psi_x : x \in \bar{\Omega}\}$. Notiamo che$\{\{\psi_x > 0\} : x \in \bar{\Omega}\}$ è un ricoprimento aperto di $\bar{\Omega}$, che è compatto. Esiste quindi un sottoricoprimento finito $\{\psi_{x_i}, i = 1, \dots, N\}$, che verifica tutte le condizioni richieste, meno quella di normalizzazione. Dal momento che
$$\sum_{j=1}^N \psi_{x_j}(x) > 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$
possiamo rinormalizzare. Definiamo $\varphi_j = \frac{\psi_j}{\sum_k \psi_{x_k}}$. Questa risulta essere una partizione dell'unità. □

Osservazione 4.2.2
Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ limitato, $\{\varphi_j\}$ partizione dell'unità di Ω e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, se chiamiamo $u_j = u\varphi_j$ con $j = 1, \dots, N$, si ha che $u_j \in W^{1,p}(\Omega)$ e
$$u = \sum_{j=1}^N u_j.$$
Nel seguito, quando considereremo Ω, lo faremo sempre associato alla sua partizione $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$.

Teorema 4.2.9 – Teorema di approssimazione

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ è un aperto, limitato con bordo C^1 e se $p \in (1, +\infty)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, allora esiste una successione $u_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tale che $u_n \to u$ fortemente in $W^{1,p}(\Omega)$

Dimostrazione. Data $u \in W^{1,p}(\Omega)$, scriviamo $u = \sum_{j=1}^{N} u_j$. È sufficiente quindi mostrare la tesi per le funzioni u_j. Per $t > 0$ abbastanza piccolo consideriamo

$$u_j^t(x) = u_j(x - te_d).$$

Chiaramente $u_j^t \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla u_j^t(x) = \nabla u_j(x - te_d)$. Inoltre

$$u_j^t \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} u_j \text{ fortemente in } W^{1,p}(\Omega).$$

Siccome[5] $u_j^t * \phi_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} u_j^t$ fortemente in $W^{1,p}(\Omega)$, abbiamo la tesi. □

Definizione 4.2.10 – Bordo Lipschitz

Dato un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, diciamo che $\partial\Omega$ è Lipschitz (C^1, C^k, C^∞), se $\forall x_0 \in \partial\Omega$ $\exists$ una direzione ν (prendiamo per semplicità $\nu = e_d$) ed un raggio $r > 0$, $\delta > 0$, tali che

$$\Omega \cap \big(B'(x_0, r) \times (-\delta, \delta)\big) = \{(x', x_d) \in B'_r \cap (-\delta, \delta) : x_d < \eta(x)\}$$

dove con B'_r intendiamo la palla di raggio r centrata in 0 in $\mathbb{R}^{d-1}$ e $\eta : B'_r \to \mathbb{R}$ è una funzione Lipschitz (C^1, C^k, C^∞).

Osservazione 4.2.3

La condizione del teorema "con bordo C^1", può essere indebolita: possiamo infatti considerare $\partial\Omega$ Lipschitz.

Lemma 4.2.11

Siano D un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto di classe C^1. Date $\varphi : D \cap \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ e $\psi : D \backslash \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1, limitate, con gradienti limitati e tali che $\varphi \equiv \psi$ su $D \cap \partial\Omega$, allora per ogni $p \in [1, +\infty]$ la funzione $u : D \to \mathbb{R}$

$$u(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in D \cap \overline{\Omega} \\ \psi(x) & \text{se } x \in D \backslash \Omega \end{cases}$$

appartiene a $W^{1,p}(D)$ e il suo gradiente debole è

$$\nabla u(x) = \begin{cases} \nabla\varphi(x) & \text{se } x \in D \cap \Omega \\ \nabla\psi(x) & \text{se } x \in D \backslash \overline{\Omega} \end{cases}.$$

Teorema 4.2.12 – Teorema di estensione

Sia Ω un aperto limitato di classe C^1 (qui C^1 è importante, non si può sostituire) in $\mathbb{R}^d$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora, esiste $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ tale che:

$$\begin{cases} u = \tilde{u} & su\ \Omega \\ \tilde{u} \equiv 0 & \text{al di fuori di una qualche palla} \\ \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \end{cases}$$

[5] Quest'approssimazione è possibile perchè il supporto di u_j^t contiene strettamente $\bar{\Omega}$.

dove C è una funzione che dipende solo da Ω e $p \in (1, +\infty)$.

Dimostrazione.

Idea È sufficiente estenderla su un dominio $\tilde{\Omega}$ più grande e poi usare una funzione cut-off.

Data $u \in W^{1,p}(\Omega)$, scriviamo $u = \sum u\varphi_i$, con $u\varphi_i \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\|u\varphi_i\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)} \text{ e } \|\nabla(u\varphi)\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}).$$

È quindi sufficiente mostrare la tesi per u_j. Ci sono due casi:

1. è supportata dentro a Ω (ma allora la sua estensione è lei stessa: fa 0 fuori
2. u_i si trova un po' sul bordo, come in disegno di prima.

Definiamo[6]:

$$\tilde{u}_i(x', x_d) = \begin{cases} u_i(x', x_d) & \text{se } x_d \leq \eta_i(x') \\ u_i(x', 2\eta_i(x') - x_d) & \text{se } x_d \geq \eta_i(x')) \end{cases}.$$

Visto che $\eta_i \in C^1$, allora sia il pezzo sopra che sotto sono C^1 e coincidono lungo $\eta_i(x')$. Per il lemma precedente $\tilde{u}_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e

$$\|\tilde{u}_j\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

□

Osservazione 4.2.4

In questo caso In realtà il teorema varrebbe anche per funzioni *Lipschitz*, ma dovresti sviluppare tuttli gli strumenti usati, come la formula della divergenza, per funzioni lipschitz. Lo si fa a teoria geometrica della misura

Corollario 4.2.13

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, limitato C^1 e $p \in (1, +\infty)$, allora, ogni successione u_n limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ ammette una sottosuccessione convergente in $L^p(\Omega)$.

[6] come fatto in dimensione 1 solo che si fa sezione per sezione.

4.3 Gli spazi $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definizione 4.3.1

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty)$. Definiamo lo spazio di Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ come la chiusura delle funzioni $C_C^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $W^{1,p}$.

Osservazione 4.3.1
Siccome, abbiamo che allo stesso tempo

$$C_C^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{e} \qquad C_C^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)\,,$$

otteniamo che valgono le inclusioni

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{e} \qquad W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)\,.$$

In particolare, per ogni funzione $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha che

$$u = 0 \quad \text{quasi-ovunque in} \quad \mathbb{R}^d \setminus \Omega.$$

Infine, osserviamo che siccome $C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ è denso in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, abbiamo che

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d) = W^{1,p}(\mathbb{R}^d).$$

Esempio 4.3.2. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty)$. Dato $\delta > 0$, definiamo

$$\Omega_\delta := \Big\{x \in \Omega \ : \ \text{dist}\,(x, \partial\Omega) > \delta\Big\}.$$

Se la funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ è tale che

$$u = 0 \quad \text{quasi-ovunque su} \quad \Omega \setminus \Omega_\delta\,,$$

allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Infatti, per $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo, le convoluzioni $u{*}\phi_\epsilon$ hanno supporto compatto in Ω e convergono fortemente in $W^{1,p}(\Omega)$ alla funzione u.

Osservazione 4.3.2
Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, con $d \geq 2$, e $p \in [1, d)$. **Non è vero** che se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, allora $u = 0$ su $\partial\Omega$.

Esempio 4.3.3. Consideriamo l'insieme $\Omega := B_1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^d$. Allora, per ogni $p < d$,

$$W_0^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,p}(B_1).$$

Dimostrazione. Prendiamo una funzione $\varphi \in C_C^\infty(B_1)$ tale che $\varphi \equiv 1$ on $B_{\frac{1}{2}}$ e consideriamo i riscalamenti

$$\phi_\epsilon(x) := \varphi(\frac{x}{\epsilon}).$$

Per ogni funzione $u \in C_C^\infty(B_1)$ consideriamo la famiglia di funzioni

$$u(1 - \phi_\epsilon) \in C_C^\infty(B_1 \setminus \{0\}).$$

Per il teorema della convergenza dominata, abbiamo

$$\lim_{\epsilon\to 0} u(1-\phi_\epsilon) = u$$

fortemente in $L^p(\Omega)$. D'altra parte

$$\begin{aligned}\|\nabla(u(1-\phi_\epsilon)) - \nabla u\|_{L^p} &= \|(1-\phi_\epsilon)\nabla u - \nabla\phi_\epsilon u - \nabla u\|_{L^p}\\ &\le \|\phi_\epsilon \nabla u\|_{L^p} + \|u\nabla\phi_\epsilon\|_{L^p}\,.\end{aligned}$$

Ora, osserviamo che per il teorema della convergenza dominata

$$\lim_{\epsilon\to 0}\|\phi_\epsilon\nabla u\|_{L^p} = 0\,.$$

Per studiare la convergenza di $\|u\nabla\phi_\epsilon\|_{L^p}$, calcoliamo

$$\nabla\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\nabla\varphi(\frac{x}{\epsilon}).$$

Quindi

$$\|\nabla\phi_\epsilon\|_{L^\infty} \le \frac{1}{\epsilon}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\,.$$

Ora, siccome

$$\int_{\mathbb{R}^d}|u\nabla\phi_\epsilon|^p\,dx = \int_{B_\epsilon}|u\nabla\phi_\epsilon|^p\,dx \le \frac{|B_\epsilon|}{\epsilon^p}\|u\|^p_{L^\infty}\|\nabla\varphi\|^p_{L^\infty}\,.$$

Quindi,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\|\nabla(u(1-\phi_\epsilon)) - \nabla u\|_{L^p} = 0\,,$$

e quindi

$$C_c^\infty(B_1) \subset W_0^{1,p}(B_1\setminus\{0\}).$$

□

Esempio 4.3.4. Consideriamo l'insieme $\Omega := B_1\backslash\{0\} \subset \mathbb{R}^d$. Allora per $p = d$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,p}(B_1).$$

Dimostrazione. Data una funzione $u \in C_C^\infty(B_1)$ consideriamo la famiglia di funzioni $u(1-\phi_\delta)$. Per costruzione $u(1-\phi_\delta) \in C(\overline{B}_1)\cap W^{1,p}(B_1)$ e il suo supporto è contenuto in $B_1\backslash\{0\}$. Quindi $u(1-\phi_\delta) \in W_0^{1,p}(B_1\backslash\{0\})$. Vale che

$$\begin{aligned}\|\phi_\delta u\|_{L^d} &\le \|u\|_{L^\infty}\|\phi_\delta\|_{L^d}\\ \|\nabla(\phi_\delta u)\|_{L^d} &= \|\phi_\delta\nabla u + u\nabla\phi_\delta\|_{L^d}\\ &\le \|u\|_{L^\infty}\|\nabla\phi_\delta\|_{L^d} + \|\nabla u\|_{L^\infty}\|\phi_\delta\|_{L^d}.\end{aligned}$$

Quindi $\lim_{\delta\to 0} u(1-\phi_\delta) = u$ fortemente in $W^{1,p}(B_1)$ e di conseguenza $C_C^\infty(B_1) \subset W_0^{1,p}(B_1\backslash\{0\})$. □

4.3.1 Convergenza debole in $W_0^{1,p}(\Omega)$

Proposizione 4.3.5

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty)$. Sia $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ una successione che converge debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$ ad una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Se

$$u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1\,,$$

allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposizione 4.3.6

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty)$. Sia $u_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ una successione che converge debolmente in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ad una funzione $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Se

$$u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1\,,$$

allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposizione 4.3.7

Se $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Immediata conseguenza del Teorema 1.2. □

Teorema 4.3.8 – Teorema di Rellich in domini limitati

Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty)$. Se u_n è una successione limitata di $W_0^{1,p}(\Omega)$, allora esistono una funzione $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ed una sottosuccessione u_{n_k} tali che:

- $u_{n_k} \rightharpoonup u$ debolmente in $W^{1,p}$;
- $u_{n_k} \to u$ fortemente in L^p;
- $u_{n_k}(x) \to u(x)$ per quasi-ogni $x \in \mathbb{R}^d$.

Dimostrazione. Abbiamo mostrato in precedenza che esiste $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ con queste proprietà. Si conclude visto che $W_0^{1,p}(\Omega)$ è chiuso per la convergenza debole. □

4.3.2 La disuguaglianza di Poincaré

Osservazione 4.3.3
Nel proseguo useremo la seguente notazione:

$$\|\nabla u\|_{L^p} = \left(\int |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int \left(\sum (\partial_j u)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

dove $|\nabla u|$ è la norma euclidea di ∇u.

Teorema 4.3.9 – Disuguaglianza di Poincarè

Sia Ω aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e $p \in (1, +\infty)$. Allora, esiste una costante[a] $C = C(\Omega, d, p)$ tale che $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

[a]Si può prendere $C = C(d,p) diam(\Omega)$

Osservazione 4.3.4
Allora la norma $\|\nabla u\|_{L^p}$ è equivalente a $\|u\|_{W^{1,p}}$.

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato che

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^p} \leq |y| \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u\| \quad \forall y \in \mathbb{R}^d, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$$

Idea Se consideriamo y abbastanza grande, più precisamente $|y| > diam(\Omega)$, si ha che $u(x+y)$ e $u(x)$ hanno supporti disgiunti. Segue che $\|u(x+y) - u(x)\|_{L^p} = 2^{\frac{1}{p}}\|u\|_{L^p}$. ⌟

$$2^{\frac{1}{p}}\|u\|_{L^p} \leq |y| \sum_{j} \|\partial_j u\|_{L^p} \quad \forall |y| \geq diam(\Omega).$$

□

Corollario 4.3.10

Siano Ω aperto limitato connesso[a] in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H_0^1(\Omega)$. Se $\nabla u \equiv 0$ su Ω allora $u \equiv 0$ su Ω.

[a]Se Ω non è connesso, il risultato è valido sulle componenti connesse di Ω.

Dimostrazione. Sia $\{\rho_\varepsilon\}$ una famiglia di mollificatori, allora:

$$\nabla(u * \rho_\varepsilon) = \nabla u * \rho_\varepsilon = 0.$$

Allora $u * \rho_\varepsilon \to c_\varepsilon \in \overline{\Omega}$. Visto che però $u * \rho_\varepsilon \to u$, per unicità del limite, si ha $u = c_\varepsilon$ sulla componente connessa di Ω. □

4.4 Il teorema della traccia

In questa sezione introduciamo, data una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$, la sua *traccia* $T(u)$. Storicamente si è iniziato a parlare di tracce per scrivere le soluzioni del problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{su } B_R \\ u = g & \text{su } \partial B_R \end{cases}.$$

La seconda condizione può essere espressa in due modi:

1. $u - g \in H_0^1(\Omega)$.
2. $T(u) = g$ in $L^2(\partial\Omega)$.

Uno dei vantaggi della seconda formulazione è che non è necessario definire g all'interno di Ω.

4.4.1 Il caso $\Omega = B_R$

In questo caso limiteremo la discussione di quanto vedremo al caso $p = 2$. Vedremo che è possibile estendere i risultati per ogni p quando studieremo il caso di Ω qualsiasi.

Lemma 4.4.1 – Disuguaglianza della traccia in B_r

Sia $\varphi \in C(\overline{B}_1) \cap C^1(B_1)$, $B_1 \subseteq \mathbb{R}^d$. Allora

$$\int_{\partial B_1} \varphi d\mathcal{H}^{d-1} \leq d \left(\int_{B_1} \varphi dx + \int_{B_1} |\nabla \varphi| dx \right)$$

Dimostrazione. Sia $\theta \in \partial B_1$ allora

$$\varphi(\theta) - \varphi(r\theta) = \int_r^1 \theta \cdot \nabla \varphi(t\theta) dt.$$

Moltiplicando per r^{d-1} e integrando abbiamo

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 r^{d-1} \varphi(\theta) - \int_0^1 r^{d-1} \varphi(r\theta) dr \right| &\leq \left| \int_0^1 r^{d-1} \int_r^1 \theta \nabla \varphi(t\theta) dt dr \right| \\
&\leq \int_0^1 r^{d-1} \int_r^1 |\theta| |\nabla \varphi|(t\theta) dt dr \\
&\overset{*}{\leq} \int_0^1 \left(\int_r^1 t^{d-1} |\nabla \varphi|(t\theta) dt \right) dr \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 t^{d-1} |\nabla \varphi|(t\theta) dt dr \\
&= \int_0^1 t^{d-1} |\nabla \varphi|(t\theta) dt
\end{aligned}$$

dove $(*)$ poichè $r \leq t \leq 1$. Integrando ora in θ su ∂B_1 si ha

$$\left| \int_{\partial B_1} d\theta \int_0^1 r^{d-1} \varphi(\theta) dr - \int_{\partial B_1} d\theta \int_0^1 r^{d-1} \varphi(r\theta) dr \right| \leq \int_{\partial B_1} d\theta \int_0^1 t^{d-1} |\nabla \varphi|(t\theta) dt.$$

Da questo segue

$$\left| \frac{1}{d} \int_{\partial B_1} \varphi d\mathcal{H}^{d-1} - \int_{B_1} \varphi dx \right| \leq \int_{B_1} |\nabla \varphi| dx.$$

□

Lemma 4.4.2

Sia $\varphi \in C(\overline{B}_1) \cap C^1(B_1)$, $B_1 \subseteq \mathbb{R}^d$. Allora

$$\frac{1}{d} \int_{\partial B_1} \varphi^2 d\mathcal{H}^{d-1} \leq 2 \int_{B_1} \varphi^2 dx + \int_{B_1} |\nabla \varphi|^2 dx.$$

Dimostrazione. Usiamo il lemma precedente con[7] $u = \varphi^2$.

$$\frac{1}{d}\int_{\partial B_1} \varphi^2 \leq \int_{B_1} \varphi^2 + \int_{B_1} 2|\varphi||\nabla\varphi| \leq 2\int_{B_1} \varphi^2 + \int_{B_1} |\nabla\varphi|^2$$

□

Lemma 4.4.3

Sia $\varphi \in C(\overline{B}_R) \cap C^1(B_R)$, $B_R \subseteq \mathbb{R}^d$. Allora

$$\frac{1}{d}\int_{\partial B_R} \varphi^2 \leq \frac{2}{R}\int_{B_R} \varphi^2 + R\int_{B_R} |\nabla\varphi|^2$$

Idea Per ricordarsi le diverse costanti, bisogna ricordarsi che devono essere tutte dello stesso ordine e, per trovarle, è sufficiente fare una prova con la constanti o le lineari. ⌟

Definizione 4.4.4 – Traccia

Data una funzione $u \in H^1(B_R)$ definiamo la *traccia di u su ∂B_R*, $T(u)$, come la funzione in $L^2(\partial B_R)$ ottenuta come limite forte (in $L^2(\partial B_R)$) di una qualsiasi successione $\varphi_n \in C(\overline{B}_R) \cap C^1(B_R)$ che converge fortemente in $H^1(B_R)$ a u.

Vediamo che $T(u)$ è ben definita. Sia $\varphi_n \to u$ in $H^1(B_R)$. Allora

$$\|\varphi_n - u\|_{H^1(B_R)} \to 0.$$

Questo, in particolare, implica che $\{\varphi_n\}$ è di Cauchy in $H^1(B_R)$, ossia: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$:

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{L^2(B_R)} + \|\nabla\varphi_n - \nabla\varphi_m\|_{L^2(B_R)} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Per i lemmi precedenti abbiamo $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{L^2(\partial B_1)} \leq C(d, R)\|\varphi_n - \varphi_m\|_{H^1(B_R)}$. Quindi $\{\varphi_n\}_n$ è di Cauchy in $L^2(\partial B_R)$, esiste quindi $T(u)$ tale che $\varphi_n \to T(u)$ in $L^2(\partial B_R)$. Vediamo che $T(u)$ non dipende dalla successione scelta: se $\varphi_n \overset{H^1}{\to} u$ e $\psi_n \overset{H^1}{\to} u$ allora

$$\|\varphi_n - \psi_n\|_{L^2(\partial B_R)} \leq C(d, R)\|\varphi_n - \psi_n\|_{H^1}.$$

Idea Sostanzialmente la traccia di u è la restrizione di u al bordo ∂B_R: $T(u) = u|_{\partial B_R}$. Non possiamo considerare la restrizione vera e propria poichè, se $u \in H^1$, non è vero in generale che u sia continua. Un approccio possibile, volendo considerare la restrizione vera e propria, sarebbe sfruttare i *punti di Lebesgue*. Noi ci limiteremo a vederlo con un approccio più funzionale, sfruttando la densità delle C^∞. Scriveremo spesso u in luogo di $T(u)$. ⌟

Teorema 4.4.5 – Teorema della traccia

Sia $B_R \subseteq \mathbb{R}^d$, allora $\forall u \in H^1(B_R)$ vale

$$\int_{\partial B_R} u^2 \leq \frac{2d}{R}\int_{B_R} u^2 + dR\int_{B_R} |\nabla u|^2$$

[7] Sfrutteremo che $\nabla u = 2\varphi\nabla\varphi$ e la disuguaglianza di Young.

Osservazione 4.4.1
Se $u \in H^1(\Omega), B_R \subseteq \Omega$, allora

$$\int_r^R \left(\int_{\partial B_s} u \right) ds = \int_{B_R \setminus B_r} u(x) dx$$

La si vede poichè vale per le u_n che sono approssimazioni di u, e passa al limite per teorema di lebesgue (ho funzioni limitata). Visto che vale per ogni r, posso mandarlo a 0 e quindi ho

$$\int_0^R \left(\int_{\partial B_s} u \right) ds = \int_{B_R} u(x) dx$$

Proposizione 4.4.6

Sia $u \in H^1(B_\rho), B_\rho \subseteq \mathbb{R}^d$, allora[a] $\forall \varepsilon > 0$ la funzione $M : [\varepsilon, \rho) \to \mathbb{R}$

$$M(r) = \frac{1}{r^{d-1}} \int_{\partial B_r} u$$

è $\frac{1}{2}$–Hölder.

[a] Se il risultato fosse vero anche in 0, avremmo che 0 sarebbe un punto di Lebesgue, che non è sempre vero.

Dimostrazione. Siano $0 < r < R \leq \rho$, dobbiamo stimare la seguente quantità.

$$\begin{aligned} M(R) - M(r) &= \frac{1}{R^{d-1}} \int_{\partial B_R} u(x) dx - \frac{1}{r^{d-1}} \int_{\partial B_r} u(x) dx \\ &= \int_{\partial B_1} u(R\theta) d\theta - \int_{\partial B_1} u(r\theta) d\theta \end{aligned}$$

Esplicitando il conto:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_1} u(R\theta) - \int_{\partial B_1} u(r\theta) \right| &\leq \int_{\partial B_1} d\theta \left| \int_r^R \theta \cdot \nabla u(s\theta) ds \right| \\ &\leq \int_{\partial B_1} d\theta \int_r^R |\nabla u|(s\theta) ds \\ &\leq \int_{\partial B_1} d\theta (R-r)^{\frac{1}{2}} \left(\int_r^R |\nabla u|^2(s\theta) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (R-r)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial B_1} d\theta \int_r^R |\nabla u|^2(s\theta) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{(*)}{\leq} (R-r)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r^{\frac{d-1}{2}}} \left(\int_{\partial B_1} d\theta \int_r^R s^{d-1} |\nabla u|^2(s\theta) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{r^{\frac{d-1}{2}}} (R-r)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(B_R \setminus B_r)} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^{\frac{d-1}{2}}} (R-r)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

dove $(*)$ segue perchè $t \geq r$. □

Teorema 4.4.7

Sia $u \in H^1(B_R)$ con $B_R \subseteq \mathbb{R}^d$. Allora sono equivalenti:

1. $u \in H_0^1(B_R)$
2. $T(u) = 0$ su ∂B_R

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2): Se $u \in H_0^1(B_R)$ esiste una successione $\varphi_n \in C_C^\infty(B_R)$ tale che $\varphi_n \to u$ fortemente in $H^1(B_R)$. Poichè la traccia di u è il limite delle tracce di φ_n e $\varphi_n = 0$ su ∂B_R, abbiamo che $T(u) = 0$ su ∂B_R.
(2) $\Rightarrow$ (1): Sia $T(u) = 0$. Per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo $\varphi_\varepsilon : B_R \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi_\varepsilon \in C_C^\infty(B_R)$, $\varphi_\varepsilon \equiv 1$ su $B_{R-\varepsilon}$ e $|\nabla \varphi| \leq \frac{2}{\varepsilon}$. Vale che $u\varphi_\varepsilon \in H^1(B_R)$. Vale anche che

$$u\varphi_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} u \quad \text{in} \quad L^2(B_R)$$

Se dimostriamo che questa convergenza è forte in $H_0^1(B_R)$ abbiamo finito essendo lo spazio chiuso. Basta quindi vedere che $\nabla(u\varphi_\varepsilon) \xrightarrow{L^2} \nabla u$. Osserviamo preliminarmente che:

$$\begin{aligned} u(s\theta) - u(R\theta) &\leq \int_s^R |\nabla u|(t\theta)dt \\ &\Rightarrow |u(s\theta)|^2 \leq 2|u(R\theta)|^2 + 2\left(\int_s^R |\nabla u|(t\theta)dt\right)^2 \end{aligned}$$

e integrando[8] in θ

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1} u^2(s\theta) &\leq 2\int_{\partial B_1}\left(\int_s^R |\nabla u|(t\theta)dt\right)^2 \\ &\leq 2(R-s)\int_{\partial B_1}\int_s^R |\nabla u|^2(t\theta)dt \leq (R-s)C\int_{B_R\setminus B_{R-\varepsilon}} |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Vediamo ora che:

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |\nabla(u - u\varphi_\varepsilon)|^2 &= \int_{B_R} |\nabla((1-\varphi_\varepsilon)u)|^2 \\ &= \int_{B_R} |(1-\varphi_\varepsilon)\nabla u - \nabla\varphi_\varepsilon u|^2 \\ &\leq 2\int_{B_R} (1-\varphi_\varepsilon)^2|\nabla u|^2 + 2\int_{B_R} |\nabla\varphi_\varepsilon|^2 u^2 \\ &\leq 2\int_{B_R\setminus B_{R-\varepsilon}} (1-\varphi_\varepsilon)^2|\nabla u|^2 + 2\int_{B_R} |\nabla\varphi_\varepsilon|^2 u^2 \\ &= O(1) + \frac{8}{\varepsilon^2}\int_{B_R\setminus B_{R-\varepsilon}} u^2 \\ &= O(1) + \frac{8}{\varepsilon^2}\int_{R-\varepsilon}^R \left(\int_{\partial B_s} u^2\right) ds \\ &\leq O(1) + \frac{8}{\varepsilon^2}\int_{R-\varepsilon}^R C(R-s)\int_{B_R\setminus B_{R-\varepsilon}} |\nabla u|^2 ds. \end{aligned}$$

[8] Osserviamo che $|u(R\theta)| = 0$ essendo $T(u) = 0$ e quindi $\int |u(R\theta)| = 0$.

Ossia:

$$\int_{B_R} |\nabla(u - u\varphi_\varepsilon)|^2 \le O(1) + \frac{8}{\varepsilon^2}\int_{R-\varepsilon}^{R} C(R-s)ds \int_{B_R\setminus B_{R-\varepsilon}} |\nabla u|^2$$
$$\le O(1) + C\int_{B_R\setminus B_{R-\varepsilon}} |\nabla u|^2 = o(1)$$

e quindi $u \in H_0^1(B_R)$. □

4.4.2 Il caso Ω dominio regolare

Estendiamo ora i risultati visti per le tracce di funzioni di Sobolev al caso Ω aperto qualsiasi. Vediamo inoltre che è possibile estendere la definizione di traccia al caso p qualsiasi.

Lemma 4.4.8

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto limitato e C^1. Allora esiste una costante $C(d,\Omega) > 0$ tale che

$$\int_{\partial\Omega} |\varphi| \le C\left(\int_\Omega |\varphi| + \int_\Omega |\nabla\varphi|\right)$$

per ogni $\varphi \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $\{\phi_k\}_{k=1}^N$ la partizione dell'unità associata ad Ω.
Caso 1: *supp*$(\phi_k) \Subset \Omega$, non c'è nulla da dimostrare.
Caso 2: *supp*$(\phi_k) \subseteq C$ aperto dato (a meno di rotazione) da $C = B'_r \times \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$ e dove

$$\Omega \cap (B'_{2R} \times (-2\delta, 2\delta)) = \{(x', x_d) \in B'_{2R} \times (-2\delta, 2\delta) : x_d > \eta(x')\}$$

dove $\eta : B'_{2R} \to \mathbb{R}$ è una funzione C^1, poichè Ω è C^1, a valori in $\left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$. Sia[9] $\varphi = (\sum \phi_k)\varphi = \sum \varphi_k$ dove $\varphi_k = \phi_k\varphi$.
Osserviamo che basta dimostrare il lemma per φ_k, infatti se esiste $C > 0$ tale che

$$\int_{\partial\Omega} |\varphi_k| \le C\left(\int_\Omega |\varphi_k| + \int_\Omega |\nabla\varphi_k|\right)$$

allora

$$|\varphi| \le \sum \int_{\partial\Omega} |\varphi_k| \le \sum C(\int_\Omega |\varphi_k| + \int_\Omega |\nabla\varphi_k|)$$
$$\le C(\sum \|\phi_k\|_{L^\infty}.) \int_\Omega |\varphi| + C\sum(\int \phi_k|\nabla\varphi| + \int |\nabla\phi_k||\varphi|)$$

Idea Tutta la geometria di Ω è nascosta nella scelta di ϕ_k. La costante C dipende da Ω, più questo sarà irregolare più C sarà grande. ⌟

Vediamo la disuguaglianza per le ϕ_k. Osserviamo che per ogni $x' \in B'_R$

$$\varphi_k(x', \eta(x') + \delta) = 0.$$

[9] omettiamo gli indici di somma consapevolmente. Sappiamo che è finita, non ci interessa sapere con precisione quali siano indici

Allora

$$|\varphi_k(x',\eta(x'))| = \left|\int_{\eta(x')}^{\eta(x')+\delta} \partial_{x_d}\varphi_k(x',t)dt\right| \leq \int_{\eta(x')}^{\eta(x')+\delta} |\partial_{x_d}\varphi_k|(x',t)dt$$
$$\leq \int_{\eta(x')}^{\eta(x')+\delta} |\nabla\varphi_k|(x',t)dt$$

Quindi

$$\int_{B'_r} |\varphi_k(x',\eta(x'))|dx' \leq \int_{B'_r} dx' \int_{\eta(x')}^{\eta(x')+\delta} |\nabla\varphi_k|(x',t)dt = \int_\Omega |\nabla\varphi_k|$$

Siccome η è Lipschitz con costante $\|\nabla\eta\|^2_{L^\infty} = L > 0$ su B'_R abbiamo che

$$\int_{\partial\Omega} |\varphi_k| = \int_{B'_r} |\varphi'_k(x',\eta(x'))\sqrt{1+|\nabla_{x'}\eta|^2(x')}dx'$$
$$\leq \sqrt{1+\|\nabla\eta\|^2_{L^\infty(B'_r)}} \int_{B'_r} |\varphi_k(x',\eta(x'))| \leq \sqrt{1+L^2}\int_\Omega |\nabla\varphi_k|.$$

□

Lemma 4.4.9

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto limitato di classe C^1 e $p \in (1,+\infty)$. Allora esiste $C = C(p,d,\Omega)$ tale che

$$\int_{\partial\Omega} |\varphi|^p \leq C\left(\int_\Omega |\varphi|^p + \int_\Omega |\nabla\varphi|^p\right)$$

$\forall\varphi \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$.

Dimostrazione. Visto che $|\varphi|^p \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, per il lemma precedente

$$\int_{\partial\Omega} |\varphi|^p \leq C(\int_\Omega |\varphi|^p + \int_\Omega |\nabla(|\varphi|^p)|).$$

Calcolando si ha

$$\nabla(|\varphi|^p) = p|\varphi|^{p-1}\nabla\varphi sign(\varphi).$$

Allora, usando la disuguaglianza di Young, otteniamo che:

$$\int_\Omega |\nabla(|\varphi|^p)| \leq p\int_\Omega |\varphi|^{p-1}|\nabla\varphi|$$
$$\leq p\int_\Omega \left(\frac{|\varphi|^{\frac{(p-1)p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}} + \frac{|\nabla\varphi|^p}{p}\right)$$
$$= (p-1)\int_\Omega |\varphi|^p + \int_\Omega |\nabla\varphi|^p.$$

□

Definizione 4.4.10

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto limitato C^1, $p \in (1,+\infty)$. Definiamo per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *la traccia di u* su $\partial\Omega$ come la funzione $T(u) \in L^p(\partial\Omega)$ ottenuta come limite (forte) in

$L^p(\partial\Omega)$ di una qualsiasi successione $\varphi_n \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ che converge a u fortemente in $W^{1,p}(\Omega)$.

Osservazione 4.4.2
L'esistenza di una successione con queste proprietà è garantita dalla densità di C^∞ e dal ragionamento visto nel caso $\Omega = B_R$. Sempre per densità vale che

$$\int_{\partial\Omega} |T(u)|^p \leq C\left(\int_\Omega |u|^p + \int_\Omega |\nabla u|^p\right)$$

Teorema 4.4.11

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto limitato di classe C^1 e $p \in (1, +\infty)$. Per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$, sono equivalenti:

1. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$
2. La traccia di u su $\partial\Omega$ è 0.

Dimostrazione. Vediamo 2 $\Rightarrow$ 1: Sia ϕ_k con $k = 1, \dots, N$ la partizione dell'unità su Ω. Allora $u = (\sum \phi_k)u = \sum u_k$ dove $u_k = \phi_k u$. Osserviamo che

$$\int_{\partial\Omega} |u_k|^p = \int_{\partial\Omega} |\phi_k|^p |u|^p \leq \|\phi_k\|_{L^\infty}^p \int_{\partial\Omega} |u|^p = 0$$

ossia la traccia è nulla al bordo. Quindi basta dimostrare che $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega) \forall k$.

Se $supp(\phi_k) \subseteq \Omega$ allora, approssimando per convoluzione, si ha $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Consideriamo il caso in cui $supp(\phi_k)$ interseca il bordo di Ω. Sia

$$\varphi_\varepsilon(x', x_d) = \begin{cases} 1 & x_d \geq \eta(x') + 2\varepsilon \\ 0 & x_d \leq \eta(x') + \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}(x_d - (\eta(x') + \varepsilon)) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che $u_k\varphi_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e che $u_k\varphi_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u_k$ fortemente in L^p per il teorema di convergenza monotona.

Quindi per dimostrare che $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ basta dimostrare che la convergenza è forte in $W^{1,p}$. Ricordando che, visto che $\nabla\varphi_\varepsilon$ è supportato nella striscia $\eta + \varepsilon, \eta + 2\varepsilon$, dunque $|\nabla\varphi_\varepsilon| \leq \frac{c}{\varepsilon}$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla\varphi_\varepsilon|^p |u_k|^p &= \int_{B'_r} dx' \int_{\eta(x')+\varepsilon}^{\eta(x')+2\varepsilon} |\nabla\varphi_\varepsilon|^p (u_k(x', x_d))^p dx_d \\
&\leq \frac{c^p}{\varepsilon^p} \int_{B'_r} dx' \int_{\eta(x')+\varepsilon}^{\eta(x')+2\varepsilon} (u_k(x', x_d))^p dx_d \\
&\leq \frac{c^p}{\varepsilon^p} \int_{B'_r} dx' \int_{\eta(x')}^{\eta(x')+2\varepsilon} [x_d - \eta(x')]^{p-1} \int_{\eta(x')}^{x_d} |\nabla u_k|^p(x', t) dt dx_d \\
&\overset{(*)}{\leq} \frac{c^p}{\varepsilon^p} \int_{B'_r} dx' \int_{\eta(x')}^{\eta(x')+2\varepsilon} [x_d - \eta(x')]^{p-1} \int_{\eta(x')}^{\eta(x')+2\varepsilon} |\nabla u_k|^p(x', t) dt dx_d \\
&= c^p \int_{B'_r} dx' \int_{\eta(x')}^{\eta(x')+2\varepsilon} [x_d - \eta(x')]^{p-1} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

dove in $(*)$ abbiamo sostituito x_d con $\eta(x') + 2\varepsilon$, così che l'integrale interno non dipendesse più da x_d. Segue quindi che

$$\int_\Omega |\nabla(u_k - u_k\varphi_\varepsilon)|^p \leq C_p \int_\Omega (1+\varphi_\varepsilon)^p |\nabla u_k|^p + |\nabla \varphi_\varepsilon|^p |u_k|^p \longrightarrow 0.$$

$\square$

Osservazione 4.4.3
Quando consideriamo $\partial\Omega$ intendiamo il bordo in senso di varietà e non topologico.

Osservazione 4.4.4
È possibile definire la traccia di u anche su domini Lipschitz.

4.5 Le disuguaglianze di Sobolev

Per gli spazi di Sobolev 1-dimensionali abbiamo visto che per ogni $p \in [1, +\infty]$ $W^{1,p}(I)$ si immerge compattamente in $L^\infty(I)$. Questo risultato non è più valido per dimensione $d \geq 2$, si pensi infatti a $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$, tuttavia, grazie ad una serie di disuguaglianze, è possibile esibire alcune immersioni compatte.

4.5.1 La disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger

Teorema 4.5.1 – Disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger

Sia B_R una palla in $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(B_R)$. Allora

$$\frac{1}{R^2} \int_{B_R} |u(x) - M_R|^2 dx \leq C_d \int_{B_R} |\nabla u|^2$$

dove C_d è una costante dimensionale e $M_R = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u(x) dx$.

Osservazione 4.5.1
Quindi la norma del gradiente stima la norma delle funzioni a media nulla.

Dimostrazione. Per il teorema di approssimazione è sufficiente dimostrare il teorema per $u \in C^\infty(\overline{B}_R)$. Dato $y \in B_R$, ricordiamo che

$$B_R(-y) = \{r\theta : \theta \in \partial B_1, r \in (0, R_\theta)\}$$

con $\forall \theta, R_\theta \in (0, 2R)$. Sia quindi $y \in B_R$ fissato, considerando $\varphi(x) = u(x+y)$ e sfruttando le coordinate polari, abbiamo che:

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} |u(x) - u(y)|^2 dx &\underset{z=x-y}{=} \int_{B_R(-y)} |\varphi(x) - \varphi(0)|^2 dx \\
&= \int_{\partial B_1} d\theta \int_0^{R_\theta} r^{d-1} |\varphi(r\theta) - \varphi(0)|^2 dr \\
&\leq \int_{\partial B_1} d\theta \int_0^{R_\theta} r^{d-1} \left| \int_0^r \theta \cdot \nabla \varphi(s\theta) ds \right|^2 dr \\
&\leq \int_{\partial B_1} d\theta \int_0^{R_\theta} r^{d-1} r \left(\int_0^r |\nabla \varphi|^2 (s\theta) ds \right) dr \\
&\leq \int_{\partial B_1} d\theta \int_0^{R_\theta} r^d \int_0^{R_\theta} |\nabla \varphi|^2 (s\theta) ds dr \\
&\leq \frac{(2R)^{d+1}}{d+1} \int_{\partial B_1} d\theta \int_0^{R_\theta} |\nabla \varphi|^2 (s\theta) ds \\
&= \frac{(2R)^{d+1}}{d+1} \int_{\partial B_1} d\theta \int_0^{R_\theta} \frac{|\nabla \varphi|^2 (s\theta)}{s^{d-1}} s^{d-1} ds \\
&= \frac{(2R)^{d+1}}{d+1} \int_{B_R(-y)} \frac{|\nabla \varphi|^2 (x)}{|x|^{d-1}} dx \\
&= \frac{(2R)^{d+1}}{d+1} \int_{B_R} \frac{|\nabla u|^2 (x)}{|x+y|^{d-1}} dx.
\end{aligned}$$

Integrando in y si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_{B_R} dy \int_{B_R} |u(x)-u(y)|^2 dx &\le \frac{(2R)^{d+1}}{d+1}\int_{B_R}\int_{B_R}\frac{|\nabla u|^2(x)}{|x+y|^{d-1}}dxdy \\ &= \frac{(2R)^{d+1}}{d+1}\int_{B_R}|\nabla u|^2(x)\left(\int_{B_R}\frac{dy}{|x+y|^{d-1}}\right)dx \\ &\le \frac{(2R)^{(d+1)}}{d+1}\int_{B_R}|\nabla u|^2 dx \int_{B_R}\frac{1}{|y|^{d-1}}dy \\ &\le \frac{(2R)^{(d+1)}}{d+1}|\int_{B_R}|\nabla u|^2\int_{\partial B_1}\int_0^R \frac{1}{r^{d-1}}r^{d-1}dy \\ &= \frac{2^{d+1}R^{d+2}}{d+1}|\partial B_1|\int_{B_R}|\nabla u|^2.\end{aligned}$$

Osserviamo ora che:

$$\begin{aligned}\int_{B_R} dy \int_{B_R} |u(x)-u(y)|^2 dx &= |B_R|\int_{B_R}u^2 + |B_R|\int_{B_R}u^2 - 2\left(\int_{B_R}u\right)^2 \\ &= 2|B_R|\int_{B_R}\left|u(x)-\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}u\right)\right|^2.\end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme si ottiene:

$$\int_{B_R}|u(x)-M_R|^2dx \le \frac{(2R)^{d+1}}{2(d+1)}|\partial B_1|\frac{1}{2R^d|B_1|}\int_{B_R}|\nabla u|^2 = \frac{2^d d}{(d+1)}R^2\int_{B_R}|\nabla u|^2.$$

□

Teorema 4.5.2 – Disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto limitato di classe C^1 e connesso. Sia $p \in (1,+\infty)$. Allora esiste $C = C(\Omega,p)$ tale che $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\int_\Omega |u(x)-M_\Omega|^p dx \le C\int_\Omega |\nabla u|^p \qquad \text{(PW)}$$

dove $M_\Omega = \fint_\Omega u(x)dx$

Dimostrazione. Visto che se la disuguaglianza è vera per $u \in W^{1,p}(\Omega)$, allora è vera anche per $cu \in W^{1,p}(\Omega)$ $\forall c$, possiamo limitarci a dimostrare la disuguaglianza per $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che $\fint_\Omega u = 0$. Definiamo

$$i := \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p : u \in W^{1,p}(\Omega), \int_\Omega u = 0, \|u\|^p = 1\right\}$$

e osserviamo che

$$\text{(PW)} \iff i > 0.$$

Chiaramente se vale (PW) si ha $i > 0$, mentre se $i > 0$ $\forall u \in W^{1,p}$, $\int u = 0$, $\int u^p = 1$ si ha che:

$$\int_\Omega u^p \le \frac{1}{i}\int_\Omega |\nabla u|^p.$$

Supponiamo quindi per assurdo che $i = 0$, ossia che esista una successione $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che $\int_\Omega u_n = 0, \|u_n\|^p = 1$ con $\int_\Omega |\nabla u_n|^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Per il teorema di Rellich esistono $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ed una sottosuccessione u_{n_k} tale che:

$$\begin{cases} u_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^p} u \\ u_{n_k} \xrightharpoonup[k\to+\infty]{W^{1,p}} u \end{cases}.$$

Per costruzione si ha che

$$\fint_\Omega u = \lim_{n\to+\infty} \fint_\Omega u_{n_k} = 0$$

$$\int_\Omega |u|^p = \lim_{n\to+\infty} \int |u_{n_k}|^p = 1.$$

Per la semicontinuità inferiore della convergenza debole si ha inoltre che

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^p = 0.$$

Segue quindi che $\nabla u = 0$ e, essendo Ω connesso, u è costante su Ω. Questo porta ad un assurdo visto che perchè $\int_\Omega u = 0$ e $\int |u|^p = 1$. □

Idea In generale, grazie all'immersione compatta, è possibile vedere le dimostrazioni di questo tipo come problemi di minimo. ⌟

4.5.2 Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Lemma 4.5.3

Se $\varphi \in C^1_C(\mathbb{R}^d)$ allora

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^{\frac{d}{d-1}}\right)^{\frac{d-1}{d}} \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|$$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione nel caso $d = 2$ e $d = 3$, i casi $d \geq 4$ seguono per induzione.

<u>Caso $d = 2$</u>: In generale valgono le seguenti disuguaglianze:

$$|\varphi(x,y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla\varphi|(x,t)dt$$

$$|\varphi(x,y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla\varphi|(s,y)ds$$

Integrando in x e in y abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy|\varphi(x,y)|^2 &\leq \int dx \int dy \left(\int |\nabla\varphi|(x,t)dt\right)\left(\int |\nabla\varphi|(s,y)dy\right) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\varphi|(x,y)dxdy\right)^2.\end{aligned}$$

<u>Caso $d = 3$</u>: in questo caso valgono le seguenti disuguaglianze:

$$|\varphi(x,y,z)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_x\varphi|(X,y,z)dX \leq \int_{\mathbb{R}} |\nabla\varphi|(X,y,z)dX$$

$$|\varphi(x,y,z)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_y \varphi|(x,Y,z)dY \leq \int_{\mathbb{R}} |\nabla\varphi|(x,Y,z)dY$$
$$|\varphi(x,y,z)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_z \varphi|(x,y,Z)dZ \leq \int_{\mathbb{R}} |\nabla\varphi|(x,y,Z)dZ$$

Visto che se $d=3$, allora $\frac{d}{d-1} = \frac{3}{2}$. Osserviamo che:

$$|\varphi(x,y,z)|^{\frac{3}{2}} \leq \left(\int |\nabla\varphi|(X,y,z)dX\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\nabla\varphi|(x,Y,z)dY\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\nabla\varphi|(x,y,Z)dX\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ricordando che

$$\int F(y)^{\frac{1}{2}} G(z)^{\frac{1}{2}} dx \leq \left(\int F(z)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int G(z)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

e similmente per dy e dx, integrando in x, y, z otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\int dx \int dy \int dz |\varphi(x,y,z)|^{\frac{3}{2}} \\
&\quad \leq \int dx \int dy \int dz (\int |\nabla\varphi|(X,y,z)dX)^{\frac{1}{2}} (\int |\nabla\varphi|(x,Y,z)dY)^{\frac{1}{2}} (\int |\nabla\varphi|(x,y,Z)dX)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq \int dx \int dy (\int |\nabla\varphi|(x,y,Z)dZ)^{\frac{1}{2}} \left(\int dX \int dz |\nabla\varphi(X,y,z))^{\frac{1}{2}}\right) \left(\int dY \int dz |\nabla\varphi(x,Y,z))^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad \leq \left(\int dx \left(\iint |\nabla\varphi(x,Y,z))^{\frac{1}{2}} dY dz\right) \left(\iint |\nabla\varphi(x,y,Z))^{\frac{1}{2}} dy dZ\right)\right) \left(\iiint |\nabla\varphi(X,y,z))^{\frac{1}{2}} dX dy dz\right) \\
&\quad \leq \left(\iiint |\nabla\varphi(x,Y,z))^{\frac{1}{2}} dx dY dz\right) \left(\iiint |\nabla\varphi(x,y,Z))^{\frac{1}{2}} dx dy dZ\right) \left(\iiint |\nabla\varphi(X,y,z))^{\frac{1}{2}} dX dy dz\right) \\
&\quad = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\varphi|\right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.5.4

Sia $\varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $p \in (1,d)$. Allora detta $C_{d,p} = \left(\frac{p(d-1)}{d-p}\right)^{\frac{p-1}{p}}$ si ha

$$\left(\int \varphi^{\frac{pd}{d-p}}\right)^{\frac{d-p}{pd}} \leq C_{d,p} \left(\int |\nabla\varphi|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dimostrazione. Applicando il lemma precedente a φ^α si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^{\alpha\frac{d}{d-1}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(\varphi^\alpha)|\right)^{\frac{d}{d-1}} \\
&= \alpha^{\frac{d}{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi^{\alpha-1}\nabla\varphi| dx\right)^{\frac{d}{d-1}} \\
&\leq \alpha^{\frac{d}{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^{\frac{p}{p-1}(\alpha-1)} dx\right)^{\frac{p-1}{p}\frac{d}{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^p dx\right)^{\frac{1}{p}\frac{d}{d-1}}.
\end{aligned}$$

Concludiamo scegliendo α tale che

$$\alpha\frac{d}{d-1} = (\alpha-1)\frac{p}{p-1}.$$

Visto che

$$\frac{p}{p-1} = \alpha\left(\frac{p}{p-1} - \frac{d}{d-1}\right) = \alpha\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{d-1}\right) = \alpha\frac{d-p}{(p-1)(d-1)},$$

segue che l'α da considerare è

$$\alpha = \frac{p(d-1)}{d-p}.$$

$\square$

Definizione 4.5.5 – Esponente di Sobolev

Dato $p \in (1,d)$, chiameremo *esponente di Sobolev* il numero p^* tale che

$$p^* = \frac{pd}{d-p}.$$

Teorema 4.5.6 – Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Siano $d \geq 2$ e $p \in (1,d)$. Considerato l'esponente di Sobolev p^*, esiste una costante $C = C(d,p)$ tale che per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ valga

$$\left(\int |u|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

In particolare $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ e l'immersione[a]

$$i : W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \to L^{p^*}(\mathbb{R}^d), \quad i(u) = u$$

è una mappa lineare continua.

[a] Stiamo migliorando l'integrabilità della funzione visto che $p^* > p$.

Dimostrazione. Per il teorema di approssimazione basta dimostrarlo per le C^∞, che è il lemma precedente. $\square$

Teorema 4.5.7 – Immersione di $W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$ in $L^q(\mathbb{R}^d)$

Siano $d \geq 2$ e $p = d$. Data $u \in W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$, allora $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$, $\forall q \in [d, +\infty)$.

Dimostrazione. Dal Lemma 4.5.2 applicato a φ^α otteniamo $\forall\alpha$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^{\alpha\frac{d}{d-1}}\right)^{\frac{d-1}{d}} \leq \alpha\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi^{\alpha-1}||\nabla\varphi| \leq \alpha\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^{(\alpha-1)\frac{d}{d-1}}\right)^{\frac{d-1}{d}}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^d\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Scegliendo $\alpha = d$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^{\frac{d^2}{d-1}}\right)^{\frac{d-1}{d}} \leq d\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^d\right)^{\frac{d-1}{d}}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^d\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Se $\varphi \in W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$, allora $\varphi \in L^{d\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)$. Scegliendo ora $\alpha = d + k$ con $k \in \mathbb{N}$ allora

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^{(d+k)\frac{d}{d-1}}\right)^{\frac{d-1}{d}} \leq C(d,k) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{(d+k-1)\frac{d}{d-1}}\right)^{\frac{d-1}{d}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^d\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Se $\varphi \in W^{1,d}(\mathbb{R}^d) \cap L^{(d+k-1)\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \varphi \in L^{(d+k)\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)$.
Per *bootstrap* segue quindi che $\varphi \in W^{1,d}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \varphi \in L^{(d+k)\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)$ $\forall k \geq 1$. $\Rightarrow \varphi \in L^q(\mathbb{R}^d)$ $\forall q \in [d, +\infty)$. □

4.5.3 Teorema di Rellich in domini illimitati

Lemma 4.5.8

Se $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ con $p \in (1, +\infty)$, allora:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^{p\frac{d}{d-1}}\right)^{\frac{d-1}{d}} \leq p \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Dimostrazione del Lemma. Applichiamo il Lemma 4.5.2:

$$\left(|\varphi|^{\alpha\frac{d}{d-1}}\right)^{\frac{d-1}{d}} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \nabla(\varphi^\alpha) = \alpha \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{\alpha-1}\nabla\varphi \leq \alpha \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{(\alpha-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Scegliendo $\alpha = p$ abbiamo la tesi. □

Teorema 4.5.9 – Teorema di Rellich in domini illimitati

Siano $p \in (1, +\infty)$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto[a] di <u>misura finita</u>. Se u_n è una successione in $W_0^{1,p}(\Omega)$ limitata in $W^{1,p}(\Omega)$, allora esistono una sottosuccessione u_{n_k} ed una funzione $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che

1. $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$;
2. $u_{n_k} \to u$ fortemente in $L^p(\Omega)$;
3. $u_{n_k}(x) \to u(x)$ per quasi ogni $x \in \Omega$.

[a]può tranquillamente essere illimitato

Osservazione 4.5.2
Questo è praticamente il teorema migliore di compattezza che possiamo avere.

Esempio 4.5.10. Vediamo che il teorema è falso per Ω con $|\Omega| = +\infty$. Consideriamo un'unione infinita di palle: $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} B_{\frac{1}{2}}(n, 0)$ e u_n che sia nulla su tutte le palle tranne l'n-esima, nella quale è una funzione specifica.

Dimostrazione.

Idea Noi sappiamo dimostrare il teorema nel caso di Ω limitato, quindi basta ridurci a questo caso. Lo possiamo fare sfruttando il precedente lemma ⌟

Sia $\varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che $\varphi \equiv 1$ su B_1 e $\varphi \equiv 0$ in $\mathbb{R}^d \backslash B_r$ e $0 \leq \varphi \leq 1$ in $\mathbb{R}^d$, $\|\nabla\varphi\|_{L^\infty} = L$. Per ogni $R > 0$ consideriamo $\varphi_R(x) = \varphi(\frac{x}{R})$. Quindi $\varphi_R \equiv 1$ su B_R e $\|\nabla\varphi_R\|_{L^\infty} = \frac{L}{R}$. Consideriamo ora la successione $u_n\varphi_R$:

$$\|u_n\varphi_R\|_{L^p} \leq \|u_n\|_{L^p}$$

$$\|\nabla(u_n\varphi_R)\|_{L^p} \leq \|\varphi_R\|_{L^\infty}\|\nabla u_n\|_{L^p} + \|\nabla\varphi_R\|_{L^\infty}\|u_n\|_{L^p}$$

Quindi

$$\|u_n\varphi_R\|_{W^{1,p}} \leq 2\|u_n\|_{W^{1,p}}$$

Quindi $u_n\varphi_R$ è limitata in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Inoltre $u_n\varphi_R$ ha supporto in $\Omega \subseteq B_{2R}$, dunque possiamo usare il teorema di Rellich per domini limitati. Vediamo ora quanto u_n e $u_n\varphi_R$ sono distanti[10]:

$$\|u_n - u_n\varphi_R\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |u_n(1-\varphi_R)|^p = \int_{\Omega\backslash B_R} |u_n|^p|(1-\varphi_R)|^p \leq \int_{\Omega\backslash B_R} |u_n|^p$$

$$\leq \left(\int |u_n|^{p\frac{d}{d-1}}\right)^{\frac{d-1}{d}} |\Omega\backslash B_R|^{\frac{1}{d}} \leq C|\Omega\backslash B_R|.$$

Concludiamo per processo diagonale: $\forall k > 1$ possiamo trovare una successione u_{n_k} tale che

$$\|u_{n_j} - \varphi_R u_{n_j}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall j \geq 1$$

scegliendo R abbastanza grande. (è sempre più piccola di $C|\Omega\backslash B_R|$). Per il teorema di Rellich in $\Omega \cap B_R$ possiamo supporre che , fissato R,

$$\|\varphi_R u_{n_j} - \varphi_R u_{n_i}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall i, j$$

Quindi per disuguaglianza triangolare

$$\|u_{n_i} - u_{n_j}\|_{L^p} \leq \frac{3}{2^k} \quad \forall i, j$$

□

Osservazione 4.5.3
I risultati che usavano il teorema di Rellich nel caso di Ω limitato, restano validi anche nel caso di Ω di misura finita. Ad esempio: se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d, |\Omega| < +\infty$ e $f \in L^2(\Omega)$ allora esiste un'unica soluzione delbole $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema $-\Delta u = f$.

4.5.4 Lemma di Morrey

Con i risultati precedenti abbiamo visto diverse inclusioni possibili per gli spazi di Sobolev in più dimensioni:

$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$	$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$	se $p < d$
$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$	$q \in [p, +\infty)$	se $p = d$

Con il teorema di Rellich-Kondrachov, se Ω è di misura finita, abbiamo che ci sono le seguenti immersioni compatte:

[10] Per il lemma precedente sappiamo che il seguente integrale è limitato.

$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$	$q \in [1, p^*)$	se $p < d$
$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$	$q \in [p, +\infty)$	se $p = d$

In particolare $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ è compatta per ogni p e per ogni d.

Vedremo ora che, nel caso $p > d$, varrà una stima del tipo

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$$

e quindi avremo l'immersione continua di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^\infty(\Omega)$. In realtà varrà una stima del tipo

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}|x-y|^\alpha \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$$

che darà l'immersione in $C(\overline{\Omega})$. Come prima, se Ω di misura finita, le immersioni saranno compatte.

Quindi nel caso $p > d$ le funzioni di Sobolev ammettono un rappresentante continuo.

Lemma 4.5.11

Sia $B_R \subseteq \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R)$. Se esistono $C > 0$ e $\alpha \in (0, 1]$ tali che

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 \leq C r^{2(\alpha-1)} \quad \text{per ogni } B_r(x_0) \subseteq B_R$$

allora $u \in C^{0,\alpha}(B_{\frac{R}{8}})$ (è alpha holderiana) e

$$|u(x) - u(y)| \leq \sqrt{C}\left(2^d + \frac{2}{\alpha}\right)|x-y|^\alpha$$

Osservazione 4.5.4

Se $u \in W^{1,p}(B_R)$ con $B_R \subseteq \mathbb{R}^d$ e $p > d$ allora vale una stima del genere:

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 \leq \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^{2\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}} (|B_r|)^{1-\frac{2}{p}}$$

Ossia

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 \leq \|\nabla u\|_{L^p(B_r)}|\omega_d r^d|^{-\frac{2}{p}} = C(d,p)\|\nabla u\|_{L^p(B_r)} r^{-\frac{2d}{p}}$$

e si ha $-\frac{2d}{p} = 2(\alpha - 1)$ se $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$, in particolare se $p \in (d, +\infty] \Rightarrow \alpha \in (0, 1]$.

(ricorda: poichè $p > d \geq 2$ si ha $W^{1,p}(B_R) \subseteq W^{1,2}(B_R))$).

Idea Nella prossima dimostrazione useremo un ragionamento utile in generale nella teoria delle regolarità delle equazioni ellittiche: per confrontare il comportamento della nostra funzione tra i due punti x, y, sapendo com'è il comportamento sulle medie, consideriamo $r = d(x, y)$ e lavoriamo con le palle $B_r(x)$ e $B_r(y)$. ⌟

Dimostrazione. Per il teorema di approssimazione possiamo supporre u regolare. Fissato $x_0 \in B_{\frac{R}{8}}$ si ha che:

$$\left|\fint_{B_r(x_0)} u - \fint_{B_s(x_0)} u\right| = \left|\fint_{B_r(x_0)} u(x)dx - \fint_{B_s(x_0)} u(x)dx\right|$$

Tramite cambio di variabile[11] vogliamo ricondurci alla palla di centro 0 e raggio 1:

$$\begin{aligned}
\left|\fint_{B_1} u(x_0+rx)dx - \fint_{B_1} u(x_0+sx)dx\right| &\le \fint_{B_1} |u(x_0+rx)-u(x_0+sx)|dx \\
&\le \fint_{B_1} \left|\int_s^r \frac{d}{dt}[u(x_0+tx)]dt\right| dx \\
&\le \fint_{B_1} \left(\int_s^r |x\cdot\nabla u(x_0+tx)|\right) dx \\
&\le \fint_{B_1} \int_s^r |\nabla u|(x_0+tx)dtdx \\
&= \int_s^r \left(\fint_{B_1} |\nabla u|(x_0+tx)dx\right) dt \\
&= \int_s^r \left(\fint_{B_t(x_0)} |\nabla u|\right) dt.
\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato, senza usare ipotesi teorema[12], che $\forall u \in H^1(B_R)$:

$$\begin{aligned}
\left|\fint_{B_r} u(x)dx - \fint_{B_s} u(x)dx\right| &\le \int_s^r \left(\fint_{B_t(x_0)} |\nabla u|\right) dt \\
&\le \int_s^r \left(\fint_{B_t(x_0)} |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \int_s^r (c^{\frac{1}{2}} t^{\alpha-1})dt = \frac{c^{\frac{1}{2}}}{\alpha} r^\alpha
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi che la successione degli integrali mediati è di Cauchy, quindi esiste il limite

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x_0)} u(x)dx = u(x_0).$$

Siccome $u \in L^1(B_R)$, quasi ogni $x \in B_{\frac{R}{8}}$ è di Lebesgue e quindi possiamo considerare per quasi ogni $x \in B_{\frac{R}{8}}$

$$u(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} u$$

e dimostriamo che $u \in C^{0,\alpha}(B_{\frac{R}{8}})$. Per quanto visto prima sappiamo che

$$\left|\fint_{B_r(x_0)} u(x)dx - u(x_0)\right| \le \frac{c^{\frac{1}{2}}}{\alpha} r^\alpha.$$

[11] dove $\frac{d}{dt}[u(x_0+tx)]dt = x\cdot\nabla u(x_0+tx)$.

[12] Che entrano in gioco solo nell'ultima riga della prossima disuguaglianza

Siano $x, y \in B_{\frac{R}{8}}$ e sia $r = |x-y|$.

$$\begin{aligned}
\left| \fint_{B_r(x)} u - \fint_{B_r(y)} u \right| &= \left| \fint_{B_1} u(x+rz)dx - \fint_{B_1} u(y+rz)dz \right| \\
&\leq \fint_{B_1} |u(x+rz) - u(y+rz)|dz \\
&= \fint_{B_1} dz \int_0^1 \left| \frac{d}{dt}[u(y+rz+t(x+y)] \right| dt \\
&\leq \fint_{B_1} dz \int_0^1 |(x-y)\cdot \nabla u(y+rz+t(x-y))|dt \\
&\leq \fint_{B_1} dz \int_0^1 |(x-y)||\nabla u|(y+rz+t(x-y))dt \\
&\leq |x-y| \fint_{B_1} dz \int_0^1 |\nabla u|(y+rz+t(x-y))dt \\
&= |x-y| \int_0^1 \left(\fint_{B_1} |\nabla u|(y+t(x-y)+rz)dz \right) dt \\
&= |x-y| \int_0^1 \left(\fint_{B_r(y+t(x-y)} |\nabla u| \right) dt \\
&\leq |x-y| \int_0^1 \frac{1}{|B_r|} \int_{B_{2r}(x)} |\nabla u| dt \leq |x-y| \frac{1}{|B_r|} \int_{B_{2r}(x)} |\nabla u| \\
&\leq |x-y| 2^d \left(\fint_{B_{2r}(x)} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |x-y| 2^d c^{\frac{1}{2}} (2r)^{\alpha-1} \\
&\leq 2^{d+1} c^{\frac{1}{2}} |x-y|^\alpha
\end{aligned}$$

□

Corollario 4.5.12

Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R)$. Se $|\nabla u| \in L^p(B_R)$ per un qualche $p \in (d, +\infty]$, allora u è α-Hölder in B_R con $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$. In particolare

$$W^{1,p}(B_R) \subset C^{0,\alpha}(B_R).$$

Dimostrazione. Se $|\nabla u| \in L^p(B_R)$ allora per ogni[13] $B_r(x_0) \subset B_R$

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 dx \leq |B_r|^{1-\frac{2}{p}} \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^p \right)^{\frac{2}{p}} \leq |B_r| \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} \omega_d^{\frac{-2}{p}} r^{-\frac{2d}{p}}.$$

Quindi scegliendo

$$C = \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} \omega_d^{\frac{-2}{p}} \text{ e } \alpha = 1 - \frac{d}{p}$$

[13] abbiamo usato Hölder con $p' = 2p$ e q' il suo coniugato.

segue che

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)}|\nabla u|^2dx \leq Cr^{\frac{-2d}{p}} = Cr^{2(\alpha-1)}.$$

□

Corollario 4.5.13

Se $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ con $p > d$ e se $x_0 \in \Omega$ allora $u_n(x_0) \to u(x_0)$, ossia le funzioni vedono i punti.

Corollario 4.5.14

Siano $d \geq 2$ e $p \in (d, +\infty)$. Allora $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ed esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \text{ per ogni } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d).$$

Dimostrazione. Per il Lemma di Morrey, se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ allora u è continua e $|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha$ dove $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$ e $C = C(d, p, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)})$.

Idea Visto che $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $u \in L^1(B_R)$, allora il modulo di continuità non può essere troppo grande: infatti se questo fosse grande, allora u non potrebbe scendere molto ma quindi $u \notin L^1$. ⌟

Segue che

$$\max_{B_R(x_0)}|u| \leq \min_{B_R(x_0)}|u| + CR^\alpha \leq \frac{1}{|B_R(x_0)|}\int_{B_R(x_0)}|u| + CR^\alpha$$

Quindi

$$|u(x_0)| \leq C(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}).$$

□

4.5.4.1 Definizione puntuale di una funzione di Sobolev

Riportiamo ora una breve ricapitolazione di quello che possiamo dire sulla definizione puntuale di una funzione di Sobolev.

Se $p > d$ In questo caso, grazie al lemma di Morrey, sappiamo che u ammette un rappresentante continuo e che quindi le funzioni vedono i punti.

Se $p < d$ Abbiamo visto, tramite i riscalamenti di una funzione di Sobolev, che esiste una successione $\{u_n\}$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ tale che $u_n(0) = 1$ e tale che $u_n \to 0$ fortemente in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Quindi in questo caso le funzioni non vedono i punti.

Se $p = d$ Vediamo che anche in questo caso esiste una successione $u_n \in W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$ tale che[14] $u_n(0) = 1$ e $\lim_{n\to+\infty}\|u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = 0$.

Dimostrazione. Per ogni $\delta > 0$ consideriamo la funzione[15] $u_\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq 1 \\ 1 & \text{se } |x| \leq \delta \\ \frac{\log(|x|)}{\log\delta} & \text{se } \delta \leq |x| \leq 1 \end{cases}$.

[14] vuol dire che 0 è punto di Lebesgue e il limite delle medie è 1

[15] vedere seguito per capire come si arriva a questa funzione

Vediamo che $|\nabla u_\delta|(x) = \frac{1}{|x|}\frac{1}{|\log\delta|}$. Calcoliamo la sue energia:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_\delta|^d = \int_{B_1\setminus B_\delta} |\nabla u_\delta|^d = d\omega_d \int_\delta^1 r^{d-1}\left(\frac{1}{r}\frac{1}{|\log\delta|}\right)^d dr$$
$$= d\omega_d \frac{1}{|\log\delta|^d}\int_\delta^1 \frac{1}{r}dr = d\omega_d \frac{1}{\log\delta|^{d-1}} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

Idea Perchè il logaritmo? Si è cercato di minimizzare

$$\int_{B_1\setminus B_\delta} |\nabla u|^d$$

con il vincolo $u = 1$ in B_δ e $u = 0$ su ∂B_1. ⌟

Fissiamo $g \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che $g = 1$ su ∂B_δ e $g = 0$ su ∂B_1 e

$$\min\left\{\int_{B_1\setminus B_\delta} |\nabla u|^d : u - g \in W_0^{1,d}(B_1\setminus B_\delta)\right\}.$$

Il minimo esiste sempre, si è dimostrato in passato per la convergenza debole in $W^{1,p}$. Il minimo è anche unico, poichè se prendo due funzioni che minimizzano u, v allora la loro combinazione $\frac{u+v}{2} - g \in W_0^{1,d}$ infatti la media soddisfa il vincolo:

$$\frac{u+v}{2} - g = \frac{u-g}{2} + \frac{v-g}{2}$$

Ma essendo l'energia convessa, se $\nabla u \neq \nabla v$, vale che $\int |\nabla(\frac{u+v}{2})|^d < \frac{1}{2}\int |\nabla u|^d + \frac{1}{2}\int |\nabla v|^d$, quindi $u \equiv v$. Vediamo che se la soluzione è unica, allora è radialmente simmetrica: infatti la rotazione di u soddisfa la stesse condizioni. Vediamo quindi che u dipende solo dal raggio: è della forma $u(x) = \phi(|x|)$.

Quindi il problema è diventato: Trovare la funzione $\phi : (\delta, 1) \to \mathbb{R}$ tale che $\phi(\delta) = 1, \phi(1) = 0$ e che minimizza l'energia in coordinate polari:

$$\int_\delta^1 r^{d-1}|\phi'(r)|^d dr.$$

L'esistenza è garantita, cerchiamo ora di esplicitare questo minimo. Per ogni ε consideriamo la funzione

$$\int_\delta^1 r^{d-1}|\phi'(r) + \varepsilon\eta'(r)|dr$$

dove $\eta(\delta) = \eta(1) = 0$. Quando deriviamo in ε abbiamo

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \int_\delta^1 r^{d-1}|\phi'(r) + \varepsilon\eta'(r)|^d dr = d\int_\delta^1 r^{d-1}(\phi'(r))^{d-1}\eta'(r)dr$$

Pensando di integrare per parti[16] otteniamo

$$\int_\delta^1 (r^{d-1}(\phi'(r))^{d-1})'\eta(r)dr = 0 \quad \forall\eta \in C_C^1(\delta, 1).$$

Cerchiamo ϕ tale che $r^{d-1}(\phi'(r))^{d-1} = c$. Quindi

$$\phi'(r) = \frac{c}{r} \Rightarrow \phi(r) = \log(r)c + a$$

e deve essere $a = 0$. La costante, visto che $\phi(\delta) = 1$ sarà $c = \frac{1}{\log(\delta)}$.

[16] Al momento stiamo facendo un conto formale, cerchiamo ϕ regolare che abbia questa proprietà.

Idea In dimensione 2 questo è un pezzo della soluzione fondamentale con armonica. ⌟

□

4.5.5 Il teorema di Gagliardo

Data una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ abbiamo definito la sua traccia $T(u)$. Ricordando che

$$\mathbb{R}^d_+ = \{(x', x_d) : x_d > 0\}.$$

in generale vale che se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ allora $T(u) \in L^p(\mathbb{R}^{d-1})$. Grazie al teorema della traccia vale invece che se $u \in H^1(\mathbb{R}^d_+)$ allora $T(u) \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Con il *teorema di Gagliardo* andremo a migliorare ancora l'integrabilità di $T(u)$. Per i curiosi che continueranno interessarsi alla materia e incontreranno gli spazi di Sobolev fratti, il teorema di Gagliardo dirà che $T(u) \in W^{s,p}$ con $s = \frac{1}{2}$.
Un'altra ovvia conseguenza del teorema è che non tutte le funzioni L^p sono traccia di funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$.

Lemma 4.5.15 – Disugaglianza integrale di Minkowski

Siano X, Y spazi misurabili con misura dx e dy (finite). Sia $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ positiva, limitata, misurabile. Allora

$$\left(\int_X dx \left(\int_Y F(x,y) dy \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X F(x,y)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Osservazione 4.5.5
Se la funzione non dipendesse da X e se avessimo X spazio di probabilità avremmo un'uguaglianza.

Dimostrazione. Chiamiamo $u(x) := \int_Y F(x,y)dy$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_X \left(\int_Y F(x,y) dy \right)^p dx &= \int_X u(x)^{p-1} \int_Y F(x,y) dy dx \\
&= \int_X \int_Y u(x)^{p-1} F(x,y) dy dx \\
&= \int_Y \int_X u(x)^{p-1} F(x,y) dx dy \\
&\leq \int_Y \left(\int_X u(x)^{(p-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_X F(x,y)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy
\end{aligned}$$

Ma quindi

$$\left[\int_X \left(\int_Y F(x,y) dy \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X F(x,y)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy$$

□

Teorema 4.5.16 – Diguguaglianza di Hardy

Sia $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ misurabile, positiva, a supporto compatto e $p > 1$. Allora

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{r}\int_0^r f(s)ds\right)^p dr \leq \left(\frac{p}{p+1}\right)^p \int_0^{+\infty} f(r)^p dr$$

Osservazione 4.5.6
Esiste anche la disugaglianza di Hardy in termini di primitiva[17]:

$$\int_0^{+\infty} \frac{|F(r)|^p}{r^p} dr \leq \int_0^{+\infty} |F'(r)|^p dr$$

Dimostrazione. Vogliamo stimare

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{r}\int_0^r f(s)ds\right)^p dr\right)^{\frac{1}{p}} &\underset{t=\frac{s}{r}}{=} \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 f(tr)dt\right)^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} |f(tr)|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} dt \\
&\underset{s=tr}{=} \int_0^1 dt \left(\frac{1}{t}\int_0^{+\infty} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\infty} |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.5.17 – Teorema di Gagliardo

Se $u \in H^1(\mathbb{R}^d_+)$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx' \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dy' \frac{|u(x',0) - u(y',0)|^2}{|x'-y'|^d} \leq C_d \int_{\mathbb{R}^d_+} |\nabla u|^2$$

Osservazione 4.5.7
Stiamo usando la notazione $T(u) = u(x', 0)$. Potremmo sostituire 2 con p.

Dimostrazione.

Idea La dimostrazione è fatta da 2 trucchetti:

1. Utilizzo furbo delle coordinate polari.

2. Disuguaglianza integrale di Hardy.

⌟

[17] $F(r) = \int_0^r f(s)ds$

Osserviamo che è possibile scrivere $y' = x' + 2h'$ e $k' = -h'$ cosi $y' + k' = x' + h'$ ed avere così:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx' \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dy' \frac{|u(x',0) - u(y',0)|^2}{|x'-y'|^d} &\underset{y'=x'+2h'}{=} \frac{1}{2} \int dx' \int dh' \frac{|u(x',0) - u(x'+2h',0)|^2}{|h'|^d} \\ &\leq \frac{1}{2} \int dx' \int dh' \frac{|u(x',0) - u(x'+h',|h'|)|^2)}{|h'|^d} \\ &+ \frac{1}{2} \int dx' \int dh' \frac{|u(x'+2h',0) - u(x'+h',|h'|)|^2}{|h'|^d} = (*).\end{aligned}$$

Scriviamo ora l'integrale in h in coordinate polari. Visto che $h' \in \mathbb{R}^{d-1}$ si ha $h = r\theta$ con $\theta \in S^{d-2}$, abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{|u(x'+h',|h'|) - u(x',0)|^2}{|h'|^d} dh' = \int_{S^{d-2}} \int_0^{+\infty} \frac{|u(x'+r\theta,r) - u(x',0)|^2}{r^2} dr d\theta'.$$

Dalla disuguaglianza di Hardy abbiamo che

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{r} \int_0^r |\nabla u| \right|^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} |\nabla u|^2$$

e inoltre vale

$$|u(x'+r\theta',r) - u(x',0)| = \left| \int_0^r \partial_t [u(x'+t\theta',t)] dt \right| \leq \int_0^r |\nabla u|(x'+t\theta',t) dt.$$

Dunque riprendendo il conto:

$$\begin{aligned}(*) &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx' \int_{S^{d-2}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{r^2} \left| \int_0^r |\nabla u|(x'+t\theta',t) dt \right|^2 dr d\theta' \\ &\leq 4 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx' \int_{S^{d-2}} \int_0^{+\infty} |\nabla u|^2 \\ &\leq 4d\omega_d \int_{\mathbb{R}^d_+} |\nabla u|^2.\end{aligned}$$

□

Osservazione 4.5.8
In particolare non tutte le funzioni in $L^p(\partial\Omega)$ sono tracce di funzioni di Sobolev. Ad esempio, se $d = 2$, si ha che

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1) \\ 0 & \text{se } x \in (-1,0) \end{cases}$$

non è la traccia di una funzione di Sobolev $u \in H^1(\mathbb{R}^2_+)$.

Dimostrazione. Per il teorema di Gagliardo è sufficiente notare che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \frac{|u(x,0) - u(y,0)|^2}{|x-y|^2} &\geq \int_0^1 dx \int_{-1}^0 dy \frac{1}{|x-y|^2} \\ &= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{x-y} \right]_{y=-1}^{y=0} \\ &= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right] \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)} = +\infty. \square\end{aligned}$$

4.6 Legame spazi di Sobolev e serie di Fourier

4.6.1 L'operatore risolvente. Autovalori e autofunzioni del Laplaciano con condizioni di Dirichlet

Osservazione 4.6.1
Consideriamo l'operatore $-\Delta$, perchè così questo è definito positivo.

Osservazione 4.6.2
Se Ω è un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$, allora esistono:

- una successione $\lambda_j > 0$
- $\lambda_j \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- una base di $L^2(\Omega), \{\phi_j\}_{j\geq 1}, \phi_j \in H_0^1(\Omega)$

tali che $\begin{cases} -\Delta\phi_j = \lambda_j\phi_j & \text{in senso debole in } \Omega \\ \phi_j \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \phi_j^2 = 1 \end{cases}$.

Dimostrazione. Abbiamo applicato il teorema spettrale a $T_u : L^2 \to L^2$, dove se $f \in L^2$ $T_u(f)$ associa la soluzione u al problema $\begin{cases} -\Delta u = f \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$. □

4.6.2 Fourier e Sobolev

Teorema 4.6.1

Sia Ω aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e ϕ_j come sopra. In particolare, per ogni $u \in L^2(\Omega)$ possiamo scrivere che $u = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j\phi_j$ dove $c_j = \int_\Omega \phi_j u$. Per ogni $u \in L^2(\Omega)$ sono equivalenti:

1. $u \in H_0^1(\Omega)$
2. $\sum_j c_j^2\lambda_j < +\infty$

Inoltre $\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \sum_j c_j^2\lambda_j$ e $\partial_k u = \sum_j c_j\partial_k\phi_j$ in $L^2(\Omega)$ e

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \sum_j c_j^2\lambda_j = \sum_j c_j^2\|\nabla\phi_j\|_2^2.$$

Dimostrazione. L'ultima uguaglianza segue immediatamente considerando ϕ_j come funzione test:

$$\int |\nabla\phi_j|^2 = \int \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_j = \int \lambda_j\phi_j\phi_j = \lambda_j.$$

(1) $\Rightarrow$ (2): definiamo $P_n = \sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j \in H_0^1(\Omega)$.

$$\|P_n - P_m\|_2^2 = \sum_{j=m+1}^{n} c_j^2$$

$$\|\nabla P_n - \nabla P_m\|_2^2 = \sum_{j=m+1}^{n} c_j^2 \|\nabla \phi_j\|_2^2 = \sum_{j=m+1}^{n} c_j^2 \lambda_j$$

poichè

$$\int \nabla \phi_i \nabla \phi_j = 0 \quad se \ i \neq j$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla u - \nabla P_n\|_2^2 &= \int |\nabla u|^2 - 2 \int \nabla u \cdot \nabla P_n + \int |\nabla P_n|^2 \\
&= \int |\nabla u|^2 - 2 \int \nabla u (\sum_{j=1}^{n} c_j \nabla \phi_j) + \sum c_j^2 \lambda_j \\
&= \int |\nabla u|^2 - 2 \sum c_j \int \nabla \phi_j \nabla u + \sum c_j^2 \lambda_j \\
&= \int |\nabla u|^2 - 2 \sum c_j^2 \lambda_j + \sum c_j^2 \lambda_j
\end{aligned}$$

poichè visto che $u \in H_0^1(\Omega)$ si ha $\int \nabla \phi_j \nabla u - = \lambda_j \int \phi_j u = \lambda_j c_j$. Quindi

$$\int |\nabla u|^2 \geq \sum c_j^2 \lambda_j \quad \forall n$$

(stesso conto che si fa quando si fa serie di fourier).

(2) $\Rightarrow$ (1): riprendendo

$$\|\nabla P_n - \nabla P_m\|_2^2 = \sum_{j=m+1}^{n} c_j^2 \|\nabla \phi_j\|_2^2 = \sum_{j=m+1}^{n} c_j^2 \lambda_j$$

Abbiamo che $\{P_n\}$ è di Cauchy in $H_0^1(\Omega)$. Ma sappiamo che $P_n \to u$ fortemente in $L^2(\Omega)$. Quindi necessariamente $P_n \to u$ in $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Capitolo 5

Equazioni ellittiche in più dimensioni

5.1 Soluzioni deboli di equazioni ellittiche con condizione di Dirichlet

A differenza del caso unidimensionale, non avendo l'immersione compatta di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^\infty(\Omega)$ dovremo fare più lavoro per certi risultati, in particolar modo per la convergenza delle soluzioni.

Nel seguito considereremo equazioni ellittiche su domini Ω limitati in $\mathbb{R}^d$. Considereremo inoltre $p = 2$, $f \in L^2(\Omega)$. Chiamiamo $\forall u \in H^1(\Omega)$

$$J_f(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega uf$$

Definizione 5.1.1 – Soluzione debole

Data una funzione $g \in H^1(\Omega)$ diciamo che u è *soluzione debole* di $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ se $u \in H^1(\Omega)$, $u - g \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Nel caso in cui $g = 0$, diciamo che u è *soluzione debole* di $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ se $u \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 5.1.2

Sia Ω aperto limitato, $f \in L^2(\Omega), g \in H^1(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole u di

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}.$$

Inoltre u è l'unico minimo del funzionale J_f nell'insieme $\{w + g : w \in H_0^1(\Omega)\}$

Dimostrazione. Diviamo la dimostrazione in step:

1. Mostriamo che il funzionale J_f ammette minimo su $H_0^1(\Omega)$.
2. Mostriamo che ogni minimo di J_f è soluzione debole.
3. Mostriamo che la soluzione debole è unica, così abbiamo l'unicità del minimo.

Idea Questo procedimento è il metodo più standard per risolvere PDE in generale. ⌟

Esistenza minimo J_f: sia $w_n \in H_0^1(\Omega)$ una successione minimizzante, ossia $J_f(w_n + g) \downarrow$ e

$$\lim_{n\to\infty} J_f(w_n + g) = \int_{w\in H_0^1(\Omega)} J_f(w+g)$$

Osserviamo che, essendo $w_n \equiv 0$ un competitore, possiamo supporre $J_f(w_n+g) \le J_f(g)\ \forall n$. Esplicitando la relazione abbiamo che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(w_n+g)|^2 - \int_\Omega (w_n+g)f &\le \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla g|^2 - \int_\Omega fg \\
\Rightarrow \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_n|^2 + \int_\Omega \nabla w_n\cdot\nabla g &\le \int_\Omega w_n f \\
\Rightarrow \int_\Omega |\nabla w_n|^2 &\le \int_\Omega |fw_n| - \int_\Omega |\nabla w_n\cdot\nabla g| \\
&\le \|f\|_{L^2}\|w_n\|_{L^2} + \|\nabla w_n\|_{L^2}\|\nabla g\|_{L^2} < +\infty.
\end{aligned}$$

Per Poincarè[1] $\|w_n\| \le C\|\nabla w_n\|$, segue quindi che $\{w_n\}$ è limitata. Esiste w_{n_k} tale che $w_{n_k} \rightharpoonup w$ con $w \in H_0^1(\Omega)$. In particolare la convergenza è forte L^2. Allora

$$\begin{aligned}
J_f(w+g) &= \frac{1}{2}\int_\Omega + \int_\Omega \nabla w\cdot\nabla g + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla g|^2 - \left(\int_\Omega fw + \int_\Omega fg\right) \\
&\le \frac{1}{2}\liminf \int_\Omega |\nabla w_{n_k}|^2 + \lim \int_\Omega \nabla w_{n_k}\cdot\nabla g + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla g|^2 - \lim\left(\int_\Omega f w_{n_k} + \int_\Omega fg\right) \\
&= \liminf J_f(w_{n_k}+g) = \inf_{\varphi\in H_0^1(\Omega)} J_f(\varphi+g).
\end{aligned}$$

Dunque w realizza il minimo.
Ogni minimo è soluzione debole: Siano u il minimo di J_f nell'insieme delle funzioni $g + H_0^1(\Omega)$ e $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Consideriamo $u_t = u + t\varphi\ \forall t \in \mathbb{R}$, che chiaramente $\in g + H_0^1(\Omega)$. La funzione di una variabile

$$t \longrightarrow J_f(u+t\varphi)$$

ha un minimo in $t = 0$. Esplicitando:

$$\begin{aligned}
J_f(u+t\varphi) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+t\varphi)|^2 - \int_\Omega (u+t\varphi)f \\
&= \frac{1}{2}t^2\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + t\left(\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi - \int_\Omega \varphi f\right) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega uf.
\end{aligned}$$

Ma quindi

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} J_f(u+t\varphi) = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi - \int_\Omega \varphi f$$

[1] Qui stiamo usando la condizione al bordo.

ossia u è soluzione debole.
La soluzione debole è unica: Siano u, v soluzioni deboli del problema considerato. Se consideriamo $\varphi := u - v$, abbiamo che[2] $\varphi \in H_0^1$, ma quindi

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u-v) = \int_\Omega f(u-v) \\ \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla(u-v) = \int_\Omega f(u-v) \end{cases}.$$

Considerando la differenza abbiamo

$$\int_\Omega (\nabla u - \nabla v)^2 = 0$$

e dalla disuguaglianza di Poincarè

$$\|u - v\| \leq C\|\nabla u - \nabla v\| = 0.$$

Quindi $u = v$. □

Osservazione 5.1.1
La condizione al bordo è stata usata due volte: per la compattezza della sottosuccessione e per l'unicità (serve per dire $u - v \in H_0^1$).

Osservazione 5.1.2
Data una soluzione debole, come possiamo ritrovare una soluzione classica? Questa domanda, di non facile risposta, sarà argomento di corsi successivi.

Esempio 5.1.3. La funzione $w(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2d}$ è soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -\Delta w = 1 & \text{su } B_R \\ w = 0 & \text{su } \partial B_R \end{cases}.$$

Dimostrazione. Chiaramente $w(x) = 0$ se $x \in \partial B_R$ e

$$-\Delta w = -\sum_j \partial_{jj} w = \frac{1}{2d} \sum_j \partial_{jj}(|x^2|) = \frac{1}{2d} \sum_{j=1}^d \partial_{jj} \sum_{i=1}^d x_i^2 = \frac{1}{2d} \sum_{j=1}^d \partial_{jj}(x_j^2) = 1.$$

Vediamo che è soluzione debole:

$$\begin{aligned} \int_{B_R} -\nabla w \cdot \nabla \varphi &= \int_{B_R} [\operatorname{div}(\varphi \nabla w) - \varphi \Delta w] \\ &= \int_{B_R} \operatorname{div}(\varphi \nabla w) + \int_{B_R} \varphi \\ &= \int_{\partial B_R} \varphi \nabla w d\nu + \int_{B_R} \varphi = \int_{B_R} \varphi \end{aligned}$$

dove $\int_{\partial B_R} \varphi \nabla w d\nu = 0$ perchè φ è a supporto compatto. Dobbiamo ora vedere che $w \in H_0^1(B_R)$. Per la Proposizione 4.3.1 è sufficiente trovare $w_n \in H_0^1(B_R)$ tale che $w_n \rightharpoonup w$ in $H^1(B_R)$. Abbiamo due scelte possibili:

1. $w_t = (w - t)_+$

[2] Qui stiamo usando la condizione al bordo.

2. $\tilde{w}_s = \frac{1}{2d}((R-s)^2 - |x|^2)_+$

Nel secondo caso, avendo una funziona esplicita, è sufficiente fare i conti per ottenere la tesi. Ci interessiamo maggiormente alla prima scelta: vediamo che

1. Data $w \in H^1(\Omega)$, come nel caso unidimensionale, si ha che $(w_t)_+ \in H^1(\Omega)$ e $\nabla(w_t)_+ = \nabla w \mathbb{1}_{\{w>t\}}$.
2. Vediamo che in realtà $\forall t > 0, w_t \in H_0^1(\Omega)$: infatti, essendo w continua, w_t è continua. Inoltre $sptw_t \cap \partial\Omega =$, sennò non sarebbe continua. Allora, considerando i classici nuclei di convoluzione ϕ_ε, si ha che $w_t * \phi_\varepsilon \in C_C^\infty(\Omega)$ e che $w_t * \phi_\varepsilon \xrightarrow{H^1} w_t$.
3. Vediamo che quindi $w \in H_0^1(\Omega)$: questo segue perchè $w_t \xrightarrow{L^2} w$ e abbiamo anche la convergenza per i gradienti visto che $\{w > t\} \to \Omega$ e quindi

$$\|\nabla(w_t)_+ - \nabla w\| \int_{\Omega^C} w = 0. \qquad \square$$

Idea Questo tipo di ragionamento si applica anche a problemi con dato non nullo al bordo. ⌟

Osservazione 5.1.3
Con una dimostrazione simile a quella di sopra, vale il seguente risultato: sia Ω dominio e u tale che $u \in C^2(\Omega)$, $u \in C(\overline{\Omega})$ e $u \equiv 0$ su $\partial\Omega$. Allora u è soluzione debole del problema considerato.

5.1.1 L'equazione del calore

Nel caso unidimensionale siamo riusciti a dimostrare l'esistenza e l'unicità di una *soluzione forte* per l'equazione del calore[3] sfruttando l'esistenza di due basi di Hilbert sull'intervallo I.

Nel caso di un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ l'esistenza di una base di Hilbert non è per nulla banale, ma è garantita dall'uso del Teorema Spettrale sull'operatore *laplaciano*. Nel seguito dovremo lavorare con *soluzioni deboli*.

Definizione 5.1.4 – Soluzione debole equazione del calore

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto limitato, $u_0 \in L^2(\Omega)$. Diciamo che la funzione u, con

$$u \in\in C([0, +\infty); L^2(\Omega)) \cap C^1((0, +\infty), L^2(\Omega)) \cap C((0, +\infty); H_0^1(\Omega))$$

è una *soluzione debole* dell'equazione del calore con condizioni di Dirichlet e dato iniziale u_0 se:

- per ogni $t > 0$, u_t è soluzione debole dell'equazione

$$\Delta u_t = \partial_t u_t \text{ in } \Omega, u_t \in H_0^1(\Omega).$$

- $\lim_{t \to 0} u_t = u_0$ fortemente in $L^2(\Omega)$.

[3]Questo perchè si aveva che $\partial_t u = \partial_{xx} u$ in $L^2(I)$.

Proposizione 5.1.5 – Unicità delle soluzioni deboli

Data u soluzione debole dell'equazione del calore con dato iniziale $u_0 \in L^2$ su Ω aperto limitato, la funzione $M : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita come

$$M(t) := \int_\Omega |u_t(x)|^2 dx$$

è decrescente e

$$M(t) \leq e^{-kt}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \text{ per ogni } t \geq 0$$

dove k è una costante universale. In particolare la soluzione debole dell'equazione del calore è unica.

Dimostrazione. La dimostrazione è praticamente uguale a quella del caso unidimensionale. Come prima cosa vediamo che M è derivabile su $(0, +\infty)$ e che

$$M'(t) = \int_\Omega 2\partial_t u_t(x)u_t(x)dx.$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\big(M(t+s) - M(t)\big) &= \frac{1}{s}\int_\Omega (u_{t+s}^2 - u_t^2)dx \\
&= \frac{1}{s}\int_\Omega (u_{t+s} - u_t)(u_{t+s} + u_t)dx \\
&= \int_\Omega \frac{u_{t+s} - u_t}{s} 2u_t dx + \int_\Omega \frac{u_{t+s} - u_t}{s}(u_{t+s} - u_t)dx.
\end{aligned}$$

Siccome abbiamo i seguenti limiti forti in $L^2(\Omega)$

$$\lim_{s\to 0} \frac{u_{t+s} - u_t}{s} = \partial_t u_t \text{ e } \lim_{s\to 0}(u_{t+s} - u_t) = 0$$

abbiamo che

$$M'(t) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(M(t+s) - M(t)) = 2\int_\Omega \partial_t u_t(x)u_t(x)dx.$$

Siccome u_t è soluzione debole di $\partial_t u_t = \Delta u_t$ in Ω e $u_t \in H^1_0(\Omega)$ è una funzione test ammissibile abbiamo

$$M'(t) = 2\int_\Omega \Delta u_t(x)u_t(x)dx = -2\int_\Omega |\nabla u_t(x)|^2 dx.$$

Per la disuguaglianza di Poincaré, esiste $C > 0$ tale che

$$-M(t) = -\int_\Omega u_t^2(x)dx \geq -C\int_\Omega |\partial_x u_t(x)|^2 dx = -\frac{C}{2}M'(t).$$

Segue quindi:

$$M(t) \leq e^{-\frac{2}{C}}M(0) = e^{-\frac{2}{C}}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ora se u, v sono soluzioni deboli dell'equazione del calore, possiamo considerare l'equazione del calore con dato iniziale nullo la cui soluzione debole è $u - v$. Ma allora, per la disuguaglianza, queste devono coincidere. □

Proposizione 5.1.6 – Esistenza soluzioni deboli

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto limitato, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\{\phi_k\}$ la base di autofunzioni del Laplaciano di Dirichlet e $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ sono gli autovalori: $\begin{cases} -\Delta\phi_k = \lambda_k\phi_k & in\ \Omega \\ \int \phi_k^2 = 1 \\ \phi_k \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$. Siano $c_k = \int_\Omega u_0(x)\phi_k(x)dx$ i coefficienti di Fourier, quindi $u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_k$ in senso $L^2(\Omega)$. Per ogni $t > 0$ definiamo[a]

$$u_t(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-t\lambda_k}\phi_k(x) \quad in\ L^2(\Omega)$$

Allora:

1. la funzione $u(t) = u_t$ è continua come funzione da $[0, +\infty)$ in $L^2(\Omega)$
2. la funzione u di sopra è derivabile in ogni $t \in (0, +\infty)$ e

$$\partial_t u = \sum_{k=1}^{+\infty} -c_k\lambda_k e^{-t\lambda_k}\phi_k$$

   e $\partial_t u : (0, +\infty) \to L^2(\Omega)$ è continua
3. $u : (0, +\infty) \to H_0^1(\Omega)$ è continua
4. $\forall t > 0, u_t$ è soluzione debole di $-\Delta u_t = -\partial_t u_t\ in\ \Omega$.

[a]la serie converge in L^2 perchè $0 \le e^{-t\lambda_k} \le 1$

Dimostrazione. Dimostrazione di (1): Consideriamo $u_{t+s} - u_t = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(e^{-(t+s)\lambda_k} - e^{-t\lambda_k})\phi_k$. Dobbiamo mandare s a 0.

$$\|u_{t+s} - u_t\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2(e^{-(t+s)\lambda_k} - e^{-t\lambda_k})^2 \to 0$$

per il teorema di convergenza dominata. ($\sum c_k^2 < +\infty$ e $0 \le (e^{-(t+s)\lambda_k} - e^{-t\lambda_k}) \le 1$, quindi la funzione è dominata da $\sum c_k^2$ e si ha $(e^{-(t+s)\lambda_k} - e^{-t\lambda_k}) \to 0$).
Dimostrazione di (2):

$$u_{t+s} - u_t - s\partial_t u_t = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(e^{-(t+s)\lambda_k} - e^{-t\lambda_k} - s(-\lambda_k)e^{-t\lambda_k})\phi_k$$

$$\Rightarrow \|u_{t+s} - u_t - s\partial_t u_t\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 e^{-2t\lambda_k}(e^{-s\lambda_k} - 1 + s\lambda_k)^2$$

Vogliamo che la seguente vada a 0:

$$\frac{1}{s^2}\|u_{t+s} - u_t - s\partial_t u_t\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 e^{-2t\lambda_k}\lambda_k^2 \left(\frac{e^{-s\lambda_k} - 1 + s\lambda_k}{s\lambda_k}\right)^2 = (*)$$

vogliamo applicare la convergenza dominata: ci basta mostrare che $(\frac{e^{-s\lambda_k}-1+s\lambda_k}{s\lambda_k})^2$ è limitato. Sia $e^{-x} = F(x)$ allora

$$\frac{F(s\lambda_k) - F(0) - F'(0)(s\lambda_k)}{s\lambda_k} = F'(\tau) - F'(0) = \tau F''(\eta) \leq \lambda^k$$

con $\tau, \eta \in [0, s\lambda_k]$. Quindi

$$(*) \leq \sum_k c_k^2 e^{-2t\lambda_k} \lambda_k^4$$

La funzione $x \to e^{-tx}\lambda^4$ è limitata (da una costante che dipende da t) $\Rightarrow u_t$ è derivabile. La continuità si fa come nel punto precedente.
Dimostrazione (3):$\forall t > 0, u_t \in H_0^1(\Omega)$ e che $u : (0, +\infty) \to H_0^1(\Omega)$ è continua. Poichè $u_t \in L^2$, vale

$$u_t = \sum_k c_k e^{-t\lambda_k} \phi_k \in H_0^1(\Omega) \iff \sum c_k^2 e^{-2t\lambda_k} \lambda_k < +\infty$$

ma a t fissato, come prima, $e^{-2t\lambda_k}\lambda_k$ è limitato, quindi $\sum < +\infty$. Quindi $u_t \in H_0^1(\Omega)$. Dobbiamo dimostrare che

$$\|u_{t+s} - u_t\|_{L^2} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$$

e che

$$\|\nabla u_{t+s} - \nabla u_t\|_{L^2} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$$

La prima l'abbiamo vista al punto 1. Per quanto riguarda la seconda invece, poichè $u_t \in H_0^1$, sappiamo che

$$\nabla u_{t+s} - \nabla u_t = \sum_k c_k (e^{-(t+s)\lambda_k} - e^{-t\lambda_k}) \nabla \phi_k$$

Vediamo che

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_{t+s} - \nabla u_t\|_{L^2}^2 &= \sum_k c_k^2 (e^{-(t+s)\lambda_k} - e^{-t\lambda_k})^2 \|\nabla \phi_k\|_{L^2}^2 \\
&= \sum_k c_k^2 (e^{(t+s)\lambda_k} - e^{-t\lambda_k})^2 \lambda_k \\
&= \sum_k c_k^2 e^{-2t\lambda_k} \lambda_k (e^{-s\lambda_k} - 1)^2 \\
&\leq \sum_k c_t^2 e^{-t\lambda_k} \lambda_k^3 < +\infty
\end{aligned}$$

dove si è usato che i gradienti sono ortogonali e per la convergenza dominata[4] questa va a 0.
Dimostrazione (4): Detta $P_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{-t\lambda_k}\phi_k$, consideriamo $-\Delta P_n = -\sum_{k=1}^n c_k e^{-t\lambda_k} + \Delta\phi_k = \sum c_k e^{-t\lambda_k}(-\lambda_k)\phi_k$ in senso debole, poichè $-\Delta\phi_k = \lambda_k \phi_k$ vale in senso debole. Ma poichè $P_n \overset{H_0^1(\Omega)}{\longrightarrow} u_t$ allora

$$\sum_{k=1}^n c_k(-\lambda_k) e^{-t\lambda_k} \phi_k \underset{n\to+\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} \partial_t u_t$$

[4] qui è importante che $t \neq 0$ infatti $(e^{-s\lambda_k} - 1)^2 \leq (s\lambda_k)^2 e^{-\tau}$ con $\tau \leq t$

Ma quindi $\forall w \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla P_n \nabla w = -\int w(\sum_{k=1}^n c_k e^{-t\lambda_k}(-\lambda_k)\phi_k)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u_t \nabla w = -\int_\Omega w\partial_t u_t$$

Motiviamo $P_n \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} u_t$: $P_n \to u$ in L^2, quindi basta vedere che $\{P_n\}$ è di Cauchy in $H_0^1(\Omega)$:

$$\|\nabla P_n - \nabla P_m\|_{L^2}^2 = \|\sum_{k=m+1}^n c_k e^{-\lambda_k t}\nabla\phi_k\|^2 = \sum_{k=m+1}^n c_k^2 e^{-2t\lambda_k}\lambda_k \to 0$$

□

5.2 Equazioni con condizioni di Neumann

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto. Vogliamo trovare u tale che, con $f \in L^2(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \textit{in } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \textit{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove con $\partial\nu$ intendiamo derivata normale. Possiamo pensare Ω di classe C^2, o anche $\Omega = B_R$.
Una soluzione di $-\Delta u = f$ è una funzione $H^1(\Omega)$ tale che $\int_\Omega \nabla u \nabla\phi = \int \phi f \ \forall\phi \in H^1(\Omega)$.

Come nel caso precedente, per l'esistenza di una soluzione, basta minimizzare

$$\frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \int uf$$

nelle classe di funzioni di appartenenza, in questo caso H^1. A differenza di prima tuttavia c'è un problema da considerare: se considerassimo $u+c$ invece di u, avremmo $\nabla(u+c) = \nabla u$. Per evitare che la c compaia nell'altro termine dobbiamo considerare una f che abbia media nulla, così anche il secondo termine non cambia. Quindi invece di considerare $H^1(\Omega)$, possiamo prendere lo spazio $\mathcal{H} = \{u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u = 0\}$ e come funzioni test possiamo considerare equivalentemente $H^1(\Omega)$ oppure $\mathcal{H}$, se infatti $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ non fosse a media nulla, verrebbe ammazzata dalla f.

Lemma 5.2.1

Dato $\Omega = B_R$, $f \in L^2, \int f = 0$ esiste un minimo di $F(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \int fu$ in $\mathcal{H}$

Dimostrazione. Per avere l'esistenza del minimo ci serve sapere che , se presa una successione minimizzante $\{u_n\}$, $F(u_n) \le F(0) = 0$ vale che

$$\frac{1}{2}\int |\nabla u_n|^2 \le \int u_n f \le \|u_n\|_{L^2}\|f\|_{L^2} \le C\|\nabla u_n\|_{L^2}\|f\|_{L^2}.$$

Vorrei Poincarè, così ho che le u_n sono limitate, per le funzioni in $H^1(\Omega)$ a media nulla (noi lo abbiamo fatto con quelle 0 al bordo). È possibile generalizzare la disuguaglianza di Poincarè allo spazio $\mathcal{H}$ e dunque ottenere che la successione è limitata. A questo punto si procede esattamente come si è sempre fatto osservando che la proprietà di avere media nulla passa al limite. Quindi u è a media nulla e minimizza F in $\mathcal{H}$. □

Lemma 5.2.2

Se u minimizza F in $\mathcal{H}$ allora $\int \nabla u \nabla \varphi = \int \varphi f \ \forall \varphi \in \mathcal{H}$.

Dimostrazione. Basta considerare $u_t = u + t\varphi \in \mathcal{H}$ e derivare $F(u_t)$ in $t = 0$. □

Osservazione 5.2.1
Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ e u è soluzione debole di $-\Delta u = f$ su $\mathcal{H}$ allora $-\Delta u = f$ e $\partial_\nu u = 0$ su $\partial\Omega$.

Dimostrazione. La prima condizione è ovvia: basta testare u contro C_C^∞ e usare la formula di integrazione per parti. Per vedere la seconda invece, se prendiamo $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ sappiamo che

$$\int \nabla\varphi\nabla u = \int f\varphi = \int (-\Delta u)\varphi$$

(ho f a media nulla quindi costanti non rompono)

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla\varphi\nabla u + \varphi\Delta u = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \operatorname{div}(\varphi\nabla u) = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Omega} \varphi\partial_\nu u = 0 \Rightarrow \partial_\nu u \equiv 0 \ su\ \partial\Omega$$

□

poincare + inclusione compatta H^1 in L^2 ci daranno , in maniera identica, l'esistenza di soluzioni per calore con condizioni neumann.

Indice analitico