IN SUPREMÆ DIGNITATIS
1343
UNIVERSITÀ DI PISA

Emanuele Pardini

Topologia Generale

Indice

Capitolo 1

Spazi topologici

1.1 Spazi metrici

Definizione 1.1.1 (Spazio metrico): Uno **spazio metrico** è una coppia (X, d) in cui X è un insieme e $d : X \times X \to [0, +\infty)$ è funzione t.c.

(1) $\forall x, y \in X \ d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(2) $\forall x, y \in X \ d(x, y) = d(y, x)$;

(3) (*Disuguaglianza triangolare*) $\forall x, y, z \in X \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Una tale d è detta **distanza** o **metrica** si X.

Esempio 1.1.2: $X = \mathbb{R}^n$ e $d_E(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$, questa è detta **distanza euclidea**.

Esempio 1.1.3: $X = \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty)$ e $d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, questa è detta **distanza** p. Osserviamo che per $p = 2$ si ritrova la distanza euclidea.

Esempio 1.1.4: $X = \mathbb{R}^n$ e $d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| \mid i \in \{1, ..., n\}\}$.

Esempio 1.1.5: X insieme qualsiasi e $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$, questa è detta **distanza discreta**.

Definizione 1.1.6 (Embedding isometrico): Dati (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici una funzione $f : X \to Y$ t.c. $\forall x, x' \in X \ d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ è detta **embedding isometrico** e se f è anche bigettiva è detta **isometria**.

Osservazione 1.1.7:

- Un embedding isometrico è sempre iniettivo.

- L'inversa di un'isometria è anch'essa un isometria.
- Composizione di embedding isometrici è embedding isometrico.

Definizione 1.1.8 (Palle): Sia (X, d) uno spazio metrico, $x \in X$ e $r > 0$. Si definisce la **palla aperta** centrata in x e di raggio r l'insieme

$$B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

mentre si definisce la **palla chiusa** centrata in x e di raggio r l'insieme

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Invece sarà detta **palla** un qualsiasi sottoinsieme $B \subset X$ per il quale $\exists x \in X\ \exists r > 0$ t.c. $B(x, r) \subset B \subset \overline{B}(x, r)$.

Osservazione 1.1.9: Chiaramente $B(x, r) \subset \overline{B}(x, r)$.

Definizione 1.1.10 (Limitatezza): Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subset X$. Y è detto **limitato** in (X, d) se $\exists x \in X,\ \exists R \in (0, +\infty)$ t.c. $Y \subset B(x, R)$.

Se in (X, d) si ha che X è limitato diremo che (X, d) è uno **spazio metrico limitato**.

Definizione 1.1.11 (Funzione continua tra spazi metrici): Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, $f : X \to Y$ una funzione e $x_0 \in X$. f è detta **continua in** x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in X\ d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

ossia se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $f\left(B(x_0, \delta)\right) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$.

Se f è continua in ogni punto di X allora è detta **continua**.

Esempio 1.1.12:

- Gli embedding isometrici sono funzioni continue.
- Se nel contesto della definizione precedente $d_X = d$ metrica discreta allora ogni funzione $f : X \to Y$ è continua. Infatti per ogni $\varepsilon > 0$ basta prendere $\delta = \frac{1}{2}$ ad esempio.

Definizione 1.1.13 (Funzione lipschitziana): Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, $f : X \to Y$ una funzione. f è detta **lipschitziana** se $\exists L > 0$ t.c. $\forall x, x' \in X\ d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x')$ ed in tal caso è anche detta **L-lipschitziana**.

Proposizione 1.1.14: *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, $f : X \to Y$ una funzione lipschitziana, allora f è continua.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, se f è L-lipschitziana, prendendo $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ si ha che $x' \in B(x, \delta) \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x') < L\delta = \varepsilon$. □

Definizione 1.1.15 (Insiemi aperti e chiusi in spazi metrici): Sia (X, d) spazio metrico, un insieme $A \subset X$ è detto **aperto** se $\forall x \in A\ \exists r_x > 0$ t.c. $B(x, r_x) \subset A$.

Invece un insieme $C \subset X$ è detto **chiuso** se $X \setminus C$ è aperto.

Lemma 1.1.16: *Sia (X, d) spazio metrico. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

(1) Le palle aperte sono insiemi aperti di X;

(2) le palle chiuse sono insiemi chiusi di X.

Dimostrazione. (1). Sia $B(x, r) \subset X$ una palla aperta e sia $y \in B(x, r)$, allora preso $\rho < r - d(x, y)$ si ha che $B(y, \rho) \subset B(x, r)$.

(2). Sia $C = X \setminus \overline{B}(x, r)$ il complementare di una palla chiusa di X e sia $y \in C$. Considerando $\rho < r - d(y, x)$ si ha che $B(y, \rho) \subset C$. □

Definizione 1.1.17 (Distanza da un insieme): Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subset X$, allora si definisce la **distanza da Y** di un punto $x \in X$ l'oggetto

$$d(x, Y) := \inf\{d(x, y) \mid y \in Y\}$$

Proposizione 1.1.18: *Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subset X$, allora la funzione*

$$X \ni x \longmapsto d(x, Y) \in [+\infty)$$

è 1-lipschitziana.

Dimostrazione. Siano $x, x' \in X$ e $y \in Y$, allora $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y)$ da cui $d(x, Y) \leq d(x, x') + d(x', y)\ \forall y \in Y$ e passando all'inf anche al secondo membro si ottiene $d(x, Y) - d(x', Y) \leq d(x, x')$. Invertendo x e x' si ottiene anche $d(x', Y) - d(x, Y) \leq d(x, x')$, da cui $|d(x, Y) - d(x', Y)| \leq d(x, x')$, che è quanto voluto. □

Proposizione 1.1.19: *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e $f : X \to Y$ una funzione. f è continua $\iff \forall A \subset Y$ aperto di Y $f^{-1}(A)$ è aperto di X.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$). Sia $A \subset Y$ aperto e sia $x \in f^{-1}(A)$. Allora $f(x) \in A$ e $\exists r > 0$ t.c. $B(f(x), r) \subset A$ e sia $\delta > 0$ dato dalla definizione di continuità t.c $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), r)$. Allora $B(x, r) \subset f^{-1}(A)$.

($\Leftarrow$). Sia $x \in X$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Per il lemma precedente $B(f(x), \varepsilon)$ è un aperto di Y, dunque per ipotesi $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ è un aperto di X, ma $x \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ dunque $\exists r_x > 0$ t.c. $B(x, r_x) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ da cui $f(B(x, r_x)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. □

Osservazione 1.1.20: Quindi la continuità di una funzione tra spazi metrici dipende soltanto dagli aperti dei due spazi.

1.2 Spazi topologici

Definizione 1.2.1 (Spazio topologico): Sia X un insieme una famiglia $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ è detta **topologia** su X se valgono le seguenti proprietà

(1) $\emptyset, X \in \tau$;

(2) se $A, B \in \tau \;\Rightarrow\; A \cap B \in \tau$;

(3) se $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau \;\Rightarrow\; \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Ed in tal caso la coppia (X, τ) è detto **spazio topologico**.

Gli insiemi $A \in \tau$ sono detti **aperti**, mentre un insieme $C \subset X$ è detto **chiuso** se $\exists A \in \tau$ t.c. $C = X \setminus A =: A^c$.

Teorema 1.2.2: *Sia (X, d) uno spazio metrico, allora la famiglia*

$$\tau_d := \{A \subset X \mid A \textit{ aperto di } (X, d)\} \subset \mathcal{P}(X)$$

*è una topologia su X ed è detta **topologia indotta dalla distanza** d.*

Dimostrazione. Ovviamente $\emptyset, X \in \tau_d$.

Prendiamo $A, B \in \tau_d$ e $x \in A \cap B$, esistono $r_A, r_B > 0$ t.c. $B(x, r_A) \subset A$ e $B(x, r_B) \subset B$ allora preso $r < \min\{r_A, r_B\}$ si ha che $B(x, r) \subset A \cap B$, dunque $A \cap B \in \tau_d$.

Adesso invece prendiamo $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau_d$, allora preso $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ si ha che $\exists i_x \in I$ t.c. $x \in A_{i_x}$ e quindi $\exists r_x > 0$ t.c. $B(x, r_x) \subset A_{i_x} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, quindi $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_d$. □

Esempio 1.2.3: In generale non vale che se $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$ allora $\bigcap_{i \in I} A_i \in \tau$. Infatti come controesempio possiamo prendere $X = \mathbb{R}$ e $\tau = \tau_E := \tau_{d_E}$ e $\forall n \in \mathbb{N}_+$ prendiamo $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, allora $\forall n \in \mathbb{N}_+$ $A_n \in \tau_E$, ma $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} A_n = \{0\} \notin \tau_E$.

Osservazione 1.2.4: Essendo i chiusi i complementari degli aperti si sarebbe potuta dare una definizione equivalente di topologia usando i chiusi scambiando, nella definizione data, i segni di unione con quelli di intersezione e viceversa.

Osservazione 1.2.5: Possono esistere insiemi che non sono né aperti né chiusi.

Definizione 1.2.6: Uno spazio topologico (X, τ) è detto **metrizzabile** se esiste una metrica d su X t.c. $\tau = \tau_d$.

Definizione 1.2.7: Sia un insieme X. Due distanze d e d' su X sono dette **equivalenti** se $\tau_d = \tau_{d'}$.

Proposizione 1.2.8: *Sia un insieme X e d e d' due distanze su X. Se $\exists \alpha, \beta > 0$ t.c. $\forall x, y \in X$ $\alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y)$ allora d e d' sono equivalenti.*

*Nel caso valga la condizione appena descritta d e d' sono dette **bilipschitz-equivalenti**.*

Dimostrazione. Denoteremo con $B_d(x,r)$ e $B_{d'}(x,r)$ le palle aperte centrate in x di raggio r nelle metriche d e d' rispettivamente.

($\tau_{d'} \subset \tau_d$). Sia $A \in \tau_d$ e sia $x \in A$, allora esiste $r_x > 0$ t.c. $B_d(x, r_x) \subset A$, allora facciamo vedere che $B_{d'}(x, \alpha r_x) \subset A$. Sia $y \in B_{d'}(x, \alpha r_x)$ si ha

$$d(x,y) \leq \frac{1}{\alpha} d'(x,y) \leq r_x$$

cioè $y \in B_d(x, r_x)$. Quindi $B_{d'}(x, \alpha r_x) \subset B_d(x, r_x) \subset A$ che implica per arbitrarietà di $x \in A$ che $A \in \tau_{d'}$.

($\tau_{d'} \subset \tau_d$). Sia $A' \in \tau_{d'}$ e sia $x \in A'$, allora esiste $r'_x > 0$ t.c. $B_{d'}(x, r'_x) \subset A$, considera $B_d(x, \frac{1}{\beta} r'_x)$ e si dimostra in modo analogo a prima che $B_d(x, \frac{1}{\beta} r'_x) \subset A$. □

Lemma 1.2.9 (Disuguaglianza MA-MQ): *Dati $n \in \mathbb{N}_+$ e $\{a_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}} \subset [0, +\infty)$, allora vale la disuguaglianza*

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}}$$

Dimostrazione. Segue, ad esempio, dalla convessità di $\mathbb{R} \ni x \longmapsto x^2 \in [0, +\infty)$. □

Proposizione 1.2.10: *Le metriche d_1, d_E, d_∞ su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$, dalla disuguaglianza MA-MQ si ha

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n}}$$

che equivale a $d_1 \leq \sqrt{n} d_E$. Inoltre vale che $d_\infty \leq d_1$ e che $d_E \leq \sqrt{n} d_\infty$, che insieme alla proposizione precedente provano la tesi. □

Esempio 1.2.11: Sia X insieme qualsiasi, la **topologia discreta** è $\tau_{\text{disc}} = \mathcal{P}(X)$. Tale topologia è metrizzabile, infatti è indotta dalla metrica discreta.

Esempio 1.2.12: Sia X insieme qualsiasi, la **topologia indiscreta** è $\tau_{\text{indisc}} = \{\emptyset, X\}$.

Definizione 1.2.13 (Funzione continua tra spazi topologici): Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione. f è detta **continua** (rispetto alle topologie τ_X, τ_Y) se $\forall A \in \tau_Y$ $f^{-1}(A) \in \tau_X$.

Osservazione 1.2.14: Se, nel contesto della definizione precedente, le topologie su X e Y, τ_X e τ_Y, sono metrizzabili, abbiamo già dimostrato che la nozione di continuità tra spazi topologici coincide con quella data per spazi metrici se considerati tali.

Definizione 1.2.15 (Omeomorfismo): Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione. f è detta **omeomorfismo** se è continua, bigettiva e con inversa anch'essa continua.

Se esiste un omeomorfismo tra due spazi topologici allora questi sono detti **omeomorfi**.

Osservazione 1.2.16:

- Per due spazi topologici l'essere omeomorfi è una proprietà che dipende soltanto dalle rispettive topologie.
- Composizione di omeomorfismo è omeomorfismo.
- Di conseguenza l'essere omeomorfi è una relazione transitiva.

Definizione 1.2.17 (Funzioni aperte e chiuse): Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione. f è detta:

- **aperta** se $\forall A \in \tau_X\ f(A) \in \tau_Y$;
- **chiusa** se $\forall C \subset X$ chiuso $f(C) \subset Y$ è chiuso.

Proposizione 1.2.18: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione continua e bigettiva. Allora f è un omeomorfismo $\iff$ f è aperta $\iff$ f è chiusa.*

Dimostrazione. Sia f^{-1} inversa di f. Allora f è aperta $\iff$ f^{-1} manda aperti in aperti, cioè f^{-1} è continua. Mentre f è chiusa $\iff$ f^{-1} manda chiusi in chiusi, cioè f^{-1} è continua. $\square$

Proposizione 1.2.19: *Sia (X, τ) uno spazio topologico metrizzabile, allora τ è indotta da una distanza limitata.*

Dimostrazione. Sia d distanza su X t.c. $\tau = \tau_d$, definisco $d^1(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}$, è facile verificare che d^1 è ancora una distanza su X ed è limitata. Dimostriamo che $\tau_{d^1} = \tau$. Infatti vale che $A \in \tau \iff \forall x \in A\ \exists r_x > 0$ t.c. $B_d(x, r_x) \subset A \iff \forall x \in A\ \exists r_x \in (0, \frac{1}{2})$ t.c. $B_d(x, r_x) \subset A \iff \forall x \in A\ \exists r_x \in (0, \frac{1}{2})$ t.c. $B_{d^1}(x, r_x) \subset A \iff A \in \tau_{d^1}$. $\square$

Osservazione 1.2.20: La proposizione appena dimostrata ci dice in particolare che esistono coppie di distanze definite su uno stesso insieme X che sono equivalenti ma non bilipschitz-equivalenti, vedi ad esempio $X = \mathbb{R}$ e $d_1, \min\{d_1, 1\}$.

Esempio 1.2.21: Sia X insieme, definiamo la **topologia cofinita** su X come

$$\tau_{\text{cof}} := \{A \subset X \mid |A^c| < \aleph_0\}$$

è facile verificare che effettivamente è una topologia.

Esempio 1.2.22: Sia X insieme, definiamo la **topologia conumerabile** su X come

$$\tau_{\text{con}} := \{A \subset X \mid |A^c| \leq \aleph_0\}$$

è facile verificare che effettivamente è una topologia.

Esempio 1.2.23: Consideriamo $X = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$, polinomi in n variabili a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$. Per ogni $I \subset \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ sia

$$V(I) := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(x_1, ..., x_n) = 0 \quad \forall f \in I\}$$

e definiamo

$$\tau_Z := \{A \subset \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] \mid \exists I \subset \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] \text{ t.c. } V(I) = A^c\}$$

è facile verificare che questa è una topologia in cui i $V(I)$ al variare di $I \subset \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ sono chiusi. Tale topologia è detta **topologia di Zariski**.

Definizione 1.2.24 (Chiusura): Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Z \subset X$. Definiamo la **chiusura** di Z come

$$\overline{Z} := \bigcap_{\substack{Z \subset C \subset X \\ C \text{ chiuso}}} C.$$

Osservazione 1.2.25: La chiusura di un sottoinsieme di uno spazio topologico è il più piccolo chiuso che lo contiene.

Osservazione 1.2.26 (Palle chiuse e chiusura di palle in spazi metrici): Sia (X, d) uno spazio metrico, $x \in X$ e $r > 0$. In generale vale $\overline{B(x, r)} \subset \overline{B}(x, r)$ infatti abbiamo dimostrato che $\overline{B}(x, r)$ è un chiuso di (X, d) e il contenimento segue dalla definizione di chiusura.

Ma in generale non si ha l'uguaglianza, cioè esiste uno spazio metrico in cui la chiusura di una palla non è la palla chiusa. Prendiamo X insieme con $|X| \geq 2$ e d la distanza discreta, allora se $x \in X$ vale $B(x, 1) = \{x\}$ e quindi anche $\overline{B(x, 1)} = \{x\}$, mentre invece $\overline{B}(x, 1) = X$.

Definizione 1.2.27 (Parte interna): Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Z \subset X$. Definiamo la **parte interna** di Z come

$$\mathring{Z} = \mathrm{Int}(Z) := \bigcup_{\substack{A \subset Z \\ A \text{ aperto}}} A.$$

Osservazione 1.2.28: La parte interna di un sottoinsieme di uno spazio topologico è il più grande aperto contenuto in esso.

Definizione 1.2.29 (Frontiera topologica): Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Z \subset X$. Definiamo la **frontiera topologica** o **bordo topologico** di Z come $\partial Z := \overline{Z} \setminus \mathring{Z}$

Definizione 1.2.30 (Insieme denso): Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Z \subset X$. Diciamo che Z è **denso** in X se $\overline{Z} = X$.

Esempio 1.2.31: Consideriamo $(X, \tau) = (\mathbb{R}^n, \tau_E)$ e $Z = \mathbb{Q}^n$, notiamo che $\mathbb{Q}^n$ non contiene alcuna palla di raggio positivo, dunque non contiene nessun aperto di τ_E, dunque $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$, similmente anche $\mathrm{Int}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n) = \emptyset$ e quindi

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Int}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n) \cup \overline{(\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n))} = \emptyset \cup \overline{\mathbb{Q}^n} = \overline{\mathbb{Q}^n}$$

ossia $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.2.32: Sia (X, τ) uno spazio topologico, $Z \subset X$ e $x \in Z$. Il punto x si dice **aderente** a Z se $x \in \overline{Z}$, mentre si dice **punto di accumulazione** di Z se $x \in \overline{Z \setminus \{x\}}$.

Osservazione 1.2.33:

- Chiaramente se $Z \subset Y \subset X$ allora $\overline{Z} \subset \overline{Y}$ e $\mathring{Z} \subset \mathring{Y}$, quindi un punto di accumulazione è anche aderente.
- Punti aderenti e di accumulazione di uno $Z \subset X$ possono anche non appartenere a Z.

Proposizione 1.2.34 (Aderenza con intorni): *Sia (X, τ) uno spazio topologico, $Z \subset X$ e $x \in X$. Vale che $x \in \overline{Z} \iff \forall A \in \tau$ t.c. $x \in A$ $A \cap Z \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. $(\Leftarrow)$. Supponiamo che $x \notin \overline{Z}$ allora $x \in X \setminus \overline{Z}$ ma $X \setminus \overline{Z}$ è aperto e $X \setminus \overline{Z} \cap Z = \emptyset$.

$(\Rightarrow)$. Supponiamo che $\exists A \in \tau$ t.c. $x \in A$ e $A \cap Z = \emptyset$, allora $X \setminus A$ è un chiuso e contiene Z e per definizione di chiusura $\overline{Z} \subset X \setminus A \not\ni x \Rightarrow x \notin \overline{Z}$.

□

Definizione 1.2.35: Sia X insieme e $\tau, \tau' \subset \mathcal{P}(X)$ due topologie su X, diciamo che τ è **più fine** di τ' se $\tau \supset \tau'$, mentre diciamo che τ è **meno fine** di τ' se $\tau \subset \tau'$.

Osservazione 1.2.36:

- Sia X insieme e $\tau, \tau' \subset \mathcal{P}(X)$ due topologie su X notiamo che τ è più fine di τ' $\iff$ $Id : (X, \tau) \to (X, \tau')$ è continua.
- Possono esistere topologie su uno stesso insieme che non sono comparabili.
- Sia X insieme e d, d' due distanze su X dalla dimostrazione della Proposizione 1.2.8 segue che se $\exists \beta > 0$ t.c. $d \leq \alpha d'$ allora τ_d è meno fine di $\tau_{d'}$.
- Su $X = \mathbb{R}$ la topologia euclidea τ_E è più fine della la topologia cofinita τ_{cof}.

1.3 Basi e prebasi

Lemma 1.3.1: *Sia X insieme e $\{\tau_i\}_{i \in I}$ una famiglia di topologie su X, allora $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ è una topologia su X.*

Dimostrazione. Essendo $\forall i \in I$ $\emptyset, X \in \tau_i$ si ha $\emptyset, X \in \tau$.

Prendiamo $A, B \in \tau$ allora $A, B \in \tau_i$ $\forall i \in I$ e quindi $A \cap B \in \tau_i$ $\forall i \in I$ da cui $A \cap B \in \tau$.

Infine se si prendono $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \tau$ allora $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \tau_i$ $\forall i \in I$ e quindi $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \tau_i$ $\forall i \in I$ e quindi $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \tau$. $\square$

Definizione 1.3.2 (Topologia generata da una famiglia di parti): Sai X insieme e $S \subset \mathcal{P}(X)$, allora definiamo la **topologia generata** da S come

$$\tau_S := \bigcap_{\substack{S \subset \tau \\ \tau \text{ topologia su } X}} \tau.$$

Osservazione 1.3.3: Nel contesto della definizione precedente, la topologia τ_S è ben definita grazie al lemma 1.3.1 e l'intersezione è fatta su una famiglia non vuota di topologie in quanto di sicuro almeno la topologia discreta ne fa parte.

Definizione 1.3.4 (Base di una topologia): Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una **base** della topologia τ su X è una famiglia $\mathcal{B} \subset \tau$ t.c. $\forall A \in \tau$ $\exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ che realizza $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$.

Esempio 1.3.5: Se (X, d) è uno spazio metrico, $\mathcal{R} \subset (0, +\infty)$ t.c. $\forall R \in (0, +\infty)$ $\exists r \in \mathcal{R}$ t.c. $r \in (0, R)$, allora la famiglia

$$\mathcal{B}_d := \{B(x, r) \mid x \in X, \ r \in \mathcal{R}\}$$

è una base della topologia τ_d su X.

Infatti sia $A \in \tau_d$ e sia $x \in A$ allora $\exists \varepsilon_x > 0$ t.c. $B(x, \varepsilon_x) \subset A$, ma per ipotesi su $\mathcal{R}$ $\exists r_x \in (0, \varepsilon_x)$ e vale $x \in B(x, r_x) \subset B(x, \varepsilon_x) \subset A$, da cui quanto voluto.

Proposizione 1.3.6: *Sia X insieme, allora $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ è base di una topologia su X $\iff$ gode delle seguenti proprietà:*

(1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$;

(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ *t.c.* $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$). Sia $\mathcal{B}$ base della topologia τ su X. (1) segue dal fatto che $X \in \tau$ e dalla definizione di base. (2) segue dal fatto che $B_1 \cap B_2 \in \tau$ e dalla definizione di base.

($\Leftarrow$). Definiamo

$$\tau := \left\{ A \subset X \mid \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \text{ t.c. } A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \right\}$$

è facile verificare che τ è una topologia su X e per costruzione $\mathcal{B}$ è una base di τ. □

Definizione 1.3.7 (Prebase di una topologia): Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una **prebase** della topologia τ su X è una famiglia $\mathcal{S} \subset \tau$ t.c. se prendo la famiglia delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{j=1}^{n} E_j \mid n \in \mathbb{N}_+,\ \{E_j\}_{j=1,\dots,n} \subset \mathcal{S} \right\}$$

questa forma una base di τ.

Osservazione 1.3.8 (Base $\Rightarrow$ prebase): Chiaramente una base è anche una prebase. Infatti se (X, τ) è uno spazio topologico e $\mathcal{B}$ è una base di τ allora la famiglia delle intersezioni finite di $\mathcal{B}$ contiene $\mathcal{B}$ e quindi è a sua volte una base di τ.

Osservazione 1.3.9 (Prebase $\not\Rightarrow$ base): Ci sono prebasi che non sono basi. Infatti consideriamo $X = \mathbb{R}$ munito della topologia euclidea τ_E e sia $\mathcal{S} := \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, +\infty) \mid b \in \mathbb{R}\}$, la famiglia delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$ contiene gli intervalli del tipo (a, b), con $a, b \in \mathbb{R}$, che formano una base della topologia euclidea su $\mathbb{R}$, dunque $\mathcal{S}$ è effettivamente una prebase della topologia euclidea τ_E su $\mathbb{R}$, ma gli aperti del tipo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ non si possono scrivere come unione di elementi di $\mathcal{S}$ che quindi non è una base di τ_E.

Teorema 1.3.10: *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $S \subset \mathcal{P}(X)$, allora τ coincide con τ_S, la topologia generata da S $\iff$ $S \cup \{X\}$ è una prebase di τ.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$). Vediamo che $S \cup \{X\}$ è una prebase della topologia $\tau = \tau_S$. Chiaramente $S \cup \{X\} \subset \tau$ e consideriamo $\mathcal{B}$ la famiglia delle intersezini finite di elementi di $S \cup \{X\}$ e vediamo che $\mathcal{B}$ è base di una topologia usando la proposizione 1.3.6. Essendo

$X \in S \cup \{X\} \subset \mathcal{B}$ si ha che $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ e se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ allora sono intersezioni finite di elementi di $S \cup \{X\}$ e quindi $B_1 \cap B_2$ è anch'esso intersezione finita di elementi di $S \cup \{X\}$.

Dunque $\mathcal{B}$ è base di una topologia τ' su X. Ora $S \cup \{X\} \subset \tau \Rightarrow \mathcal{B} \subset \tau$ e quindi $\tau' \subset \tau$. Viceversa si ha $S \subset \tau'$ allora per definizione di τ_S si ha $\tau' \subset \tau_S = \tau$, di conseguenza $\tau' = \tau$.

($\Leftarrow$). Supponiamo che $S \cup \{X\}$ sia una prebase di τ, allora gli elementi di τ sono unioni di intersezioni finite di elementi di $S \cup \{X\}$ e quindi essendo $S \cup \{X\} \subset \tau_S$ si ha $\tau \subset \tau_S$. D'altra parte $S \subset \tau$ dunque necessariamente $\tau_S \subset \tau$. Quindi $\tau = \tau_S$.

□

Osservazione 1.3.11: Il teorema precedente caratterizza la topologia τ_S generata da S, infatti ci dice che $A \in \tau_S \iff A$ è unione di intersezioni finite di elementi di $S \cup \{X\}$.

Proposizione 1.3.12: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione, allora sono equivalenti:*

(1) f è continua;

(2) $\exists \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ base di τ_Y t.c. $\forall B \in B$ $f^{-1}(B) \in \tau_X$;

(3) $\exists \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ prebase di τ_Y t.c. $\forall E \in \mathcal{S}$ $f^{-1}(E) \in \tau_X$.

Dimostrazione. Chiaramente valgono (1) $\Rightarrow$ (2) e (1) $\Rightarrow$ (3).

(2) $\Rightarrow$ (3). Vera perché una base è anche una prebase.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sia $A \in \tau_Y$ allora esiste un insieme di indici I e $\forall i \in I$ $\exists n_i \in \mathbb{N}_+$ e $\exists \{E_{i,j}\}_{j \in \{\dots, n_i\}} \subset \mathcal{S}$ t.c. $A = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} E_{i,j}$, ma allora

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} E_{i,j}\right) = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} f^{-1}(E_{i,j}) \in \tau_X.$$

□

1.4 Assiomi di numerabilità

Definizione 1.4.1 (Spazi II-numerabili): Uno spazio topologico (X, τ) è detto **II-numerabile** o **N2** se ammette una base di cardinalità al più numerabile.

Definizione 1.4.2 (Spazi separabili): Uno spazio topologico (X, τ) è detto **separabile** o **III-numerabile** o **N3** se ha un sottoinsieme denso di cardinalità al più numerabile.

Esempio 1.4.3: $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$ è separabile, in quanto $\mathbb{Q}^n$ è denso (vedi Esempio 1.2.31) e $|\mathbb{Q}^n| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Osservazione 1.4.4: Sia (X, τ) spazio topologico, dalla proposizione 1.2.34 segue che $Q \subset X$ è denso $\iff$ $\forall A \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ $A \cap Q \neq \emptyset$.

Proposizione 1.4.5: *Uno spazio topologico (X, τ) N2 è separabile.*

Dimostrazione. Sia $J \subset \mathbb{N}$ e $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in J}$ una base al più numerabile, posso supporre che $\forall n \in J$ $B_n \neq \emptyset$ e $\forall n \in J$ scelgo $x_n \in B_n$. Dico che $Z = \{x_n\}_{n \in J}$ è denso in X, infatti se $A \in \tau$ allora $\exists n \in J$ t.c. $B_n \subset A$ e quindi $x_n \in A \cap Z \neq \emptyset$. □

Teorema 1.4.6: *Uno spazio metrico (X, d) è N2 $\iff$ è separabile.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$). Vera per la proposizione precedente.

($\Leftarrow$). Sia $Z \subset X$ sottoinsieme denso al più numerabile e sia

$$\mathcal{B} := \{B(z, r) \mid z \in Z,\ r \in \mathbb{Q} \cap [0, +\infty)\}$$

dico che $\mathcal{B}$ è una base della topologia τ_d indotta dalla distanza d su X. Infatti sia $A \in \tau_d$ e $x \in A$ allora $\exists r_x > 0$ t.c. $B(x, r_x) \subset A$ e siano $z \in B(x, \frac{r_x}{3}) \cap Z$ e $r \in \mathbb{Q} \cap \left(\frac{r_x}{3}, \frac{r_x}{2}\right)$, è facile verificare che $x \in B(z, r) \subset B(x, r_x) \subset A$. □

Corollario 1.4.7: *Lo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d_E)$ è N2.*

Esempio 1.4.8 (Retta di Sorgenfrey): Consideriamo $X = \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$$

allora $\mathcal{B}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$ (è facile convincersene usando la proposizione 1.3.6), indichiamo tale topologia con τ_{sfy} e chiamiamo lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \tau_{\text{sfy}})$ **retta di Sorgenfrey**.

Valgono le seguenti:

- *La topologia τ_{sfy} è strettamente più fine della topologia euclidea su $\mathbb{R}$.*

  Infatti $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ vale che $(a, b) \in \tau_{\text{sfy}}$ dunque $\tau_E \subset \tau_{\text{sfy}}$ ed inoltre $[a, b) \in \tau_{\text{sfy}} \setminus \tau_E \neq \emptyset$.

- *$(\mathbb{R}, \tau_{sfy})$ è uno spazio topologico separabile.*

  Infatti $\mathbb{Q}$ è denso (si vede in modo analogo a quanto fatto per τ_E).

- *$(\mathbb{R}, \tau_{sfy})$ non è uno spazio topologico N2.*

  Infatti sia $\mathcal{B}'$ è una qualsiasi base di $(\mathbb{R}, \tau_{\text{sfy}})$ e sia $x \in \mathbb{R}$. L'insieme $[x, x+1) \in \tau_{\text{sfy}}$ allora $\exists \mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}'$ t.c. $[x, x+1) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}''} B$ ed in particolare $\exists B_x \in \mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}'$ t.c. $x \in B_x$, ma $B_x \subset [x, x+1)$ quindi necessariamente $x = \inf B_x = \min B_x$. Abbiamo dimostrato che $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists B_x \in \mathcal{B}'$ t.c. $x = \min B_x$ dunque $|\mathcal{B}'| \geq |\mathbb{R}| > \aleph_0$.

- $(\mathbb{R}, \tau_{sfy})$ *non è uno spazio topologico metrizzabile.*

  Infatti sappiamo che è separabile, dunque se fosse metrizzabile, per il teorema 1.4.6 sarebbe N2, ma abbiamo visto che non è così.

Definizione 1.4.9 (Intorni): Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $x \in X$. Un **intorno** di x è un sottoinsieme $U \subset X$ t.c. $\exists A \in \tau$ t.c. $x \in A \subset U$. Denotiamo con $\mathcal{I}(x)$ la famiglia degli intorni di x.

Osservazione 1.4.10: Nel contesto della definizione precedente si nota che un intorno non è necessariamente aperto. Un esempio concreto è $X = \mathbb{R}$, $\tau = \tau_E$ e $U = [0, 1)$ allora $U \in \mathcal{I}(\frac{1}{2})$ ma $U \notin \tau_E$.

Osservazione 1.4.11:

- $U \in \mathcal{I}(x) \iff x \in \mathring{U}$.
- Se $U \in \mathcal{I}(x)$ e $U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{I}(x)$.
- Se $U, V \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{I}(x)$.

Proposizione 1.4.12: *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $A \subset X$. Allora $A \in \tau \iff A$ è intorno di ogni suo punto.*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$. Ovviamente se $A \in \tau$ allora $\forall x \in A$ $A \in \mathcal{I}(x)$.

$(\Leftarrow)$. Se $\forall x \in A$ vale $A \in \mathcal{I}(x)$ allora $\forall x \in A$ $\exists U_x \in \tau$ t.c. $x \in U_x \subset A$ e $A = \bigcup_{x \in A} U_x \in \tau$. □

Proposizione 1.4.13: *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $Z \subset X$. Allora*

$$\overline{Z} = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{I}(x) \ Z \cap U \neq \emptyset\}.$$

Dimostrazione. Nella proposizione 1.2.34 si è dimostrato che

$$\overline{Z} = \{x \in X \mid \forall A \in \tau \text{ con } x \in A \ Z \cap A \neq \emptyset\}$$

dimostriamo adesso che, preso $x \in X$, vale l'equivalenza

$$(\forall A \in \tau \text{ con } x \in A \ Z \cap A \neq \emptyset) \iff (\forall U \in \mathcal{I}(x) \ Z \cap U \neq \emptyset)$$

$(\Leftarrow)$. Se $A \in \tau$ e $x \in A \Rightarrow A \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow A \cap Z \neq \emptyset$.

$(\Rightarrow)$. Se $U \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow \exists A \in \tau$ t.c. $x \in A \subset U$, ma allora per ipotesi $A \cap Z \neq \emptyset$ e quindi $U \cap Z \neq \emptyset$. □

Definizione 1.4.14 (Continuità puntuale in spazi topologici): Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici, $f : X \to Y$ una funzione e $x_0 \in X$. f è detta **continua in**

x_0 se
$$\forall V \in \mathcal{I}(f(x_0))\ \exists U \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } f(U) \subset V$$
o equivalentemente se
$$\forall V \in \mathcal{I}(f(x_0))\ \exists U \in \mathcal{I}(x_0) \text{ t.c. } U \subset f^{-1}(V)$$
e quindi, ancora equivalentemente, se
$$\forall V \in \mathcal{I}(f(x_0))\ f^{-1}(V) \in \mathcal{I}(x_0)$$

Proposizione 1.4.15: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione. Allora f è continua $\iff$ f è continua in x $\forall x \in X$.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$). Sia $A \in \tau_Y$ allora per la Proposizione 1.4.12 A è intorno di ogni suo punto, ma allora per definizione di continuità puntuale (tra spazi topologici) $f^{-1}(A)$ è intorno di ogni suo punto e quindi, di nuovo per la Proposizione 1.4.12, si ha $f^{-1}(A) \in \tau_X$.

($\Rightarrow$). Sia $x \in X$ e sia $U \in \mathcal{I}(f(x))$. Allora $f(x) \in \mathring{U} \subset U$ e quindi $x \in f^{-1}(\mathring{U}) \subset f^{-1}(U)$, ma essendo f continua e $\mathring{U} \in \tau_Y$ si ha $f^{-1}(\mathring{U}) \in \tau_X$, da cui $f^{-1}(U) \in \mathcal{I}(x)$. □

Definizione 1.4.16 (Sistema fondamentale di intorni): Sia (X, τ) uno spazio topologico e $x \in X$, un **sistema fondamentale di intorni** e **SFI** di x è una famiglia $J_x \subset \mathcal{I}(x)$ t.c. $\forall U \in \mathcal{I}(x)\ \exists V \in J_x$ t.c. $V \subset U$.

Esempio 1.4.17:

- $J_x = \mathcal{I}(x)$ è un SFI di x.
- Se (X, d) è spazio metrico e $x \in X$, allora le famiglie: $J_x = \{B(x, r) \mid r \in [0, +\infty)\}$, $J'_x = \{B(x, r) \mid r \in [0, +\infty) \cap \mathbb{Q}\}$, $J''_x = \left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}_+\right\}$ sono SFI di x.

Definizione 1.4.18 (Spazi I-numerabili): Uno spazio topologico (X, τ) è detto **I-numerabile** o **N1** se $\forall x \in X$ esite un SFI al più numerabile di x.

Proposizione 1.4.19: *Se (X, d) è uno spazio metrico allora è N1.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$. La famiglia $J_x = \left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}_+\right\} \subset \mathcal{I}(x)$ è un esempio di SFI di x numerabile. □

Osservazione 1.4.20: Quindi uno spazio topologico che non è N1 non può essere metrizzabile.

Proposizione 1.4.21: *Uno spazio topologico (X, τ) N2 è anche N1.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un base numerabile di (X, τ) e sia $x \in X$. Poniamo $\mathcal{B}(x) := \{B_n \in \mathcal{B} \mid x \in B_n\}$, dico che questo è un SFI di x. Infatti $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{B} \subset \tau$ e quindi $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{I}(x)$, inoltre se $U \in \mathcal{I}(x)$ allora $\exists A \in \tau$ t.c. $x \in A \subset U$, ma essendo $\mathcal{B}$ base $\exists I \subset \mathbb{N}$ t.c. $A = \bigcup_{n\in I} B_n$ ed in particolare $\exists n_x \in I$ t.c. $x \in B_{n_x} \subset A \subset U$, dunque effettivamente $\mathcal{B}(x)$ è SFI di x. Infine si nota che $|\mathcal{B}(x)| \leq |\mathcal{B}| \leq \aleph_0$, da cui la tesi. □

Osservazione 1.4.22 (N1 $\not\Rightarrow$ N2): Il viceversa della proposizione precedente è falso in generale, infatti se ad esempio X è più che numerabile lo equipaggio della topologia discreta $\tau = \mathcal{P}(X)$, questo è N1 (perché è metrizzabile attraverso la distanza discreta) ma non è N2, in quanto una qualsiasi base della topologia discreta deve contenere la famiglia dei singleton che, con la nostra scelta di X, sarà più che numerabile.

1.5 Successioni e limiti in spazi topologici

Definizione 1.5.1 (Successioni): Sia (X, τ) uno spazio topologico, una **successione** in X è una funzione $\mathbb{N} \to X$ e viene comunemente denotata con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$.

Definizione 1.5.2: Sia (X, τ) uno spazio topologico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione. Preso $U \subset X$ diciamo che $x_n \in U$ **definitivamente** se $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq N$ $x_n \in U$.

Mentre diciamo che $x_n \in U$ **frequentemente** se $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n \geq N$ t.c. $x_n \in U$.

Definizione 1.5.3 (Limite di una successione): Sia (X, τ) uno spazio topologico, diciamo che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ **converge** a $x \in X$ e scriviamo $x_n \to x$ o $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, se $\forall U \in \mathcal{I}(x)$ $x_n \in U$ definitivamente ed in tal caso x è chiamato **limite** della successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Osservazione 1.5.4: In generale i limiti possono non esistere oppure non essere unici.

Definizione 1.5.5 (Insiemi sequenzialmente chiusi): Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $C \subset X$. C è detto **sequenzialmente chiuso** o **chiuso per successioni** se $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ successione t.c. $x_n \in C$ frequentemente e $x_n \to x$ si ha $x \in C$.

Proposizione 1.5.6: *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $C \subset X$. Se C è chiuso $\Rightarrow$ C è sequenzialmente chiuso.*

Dimostrazione. Sappiamo che $C = \overline{C} = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{I}(x)\ U \cap C \neq \emptyset\}$. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ successione t.c. $x_n \in C$ frequentemente e $x_n \to x$, allora dato $U \in \mathcal{I}(x)$ si avrà che $x_n \in U$ definitivamente, ma essendo $x_n \in C$ frequentemente si ha che $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $x_{n_0} \in U \cap C \neq \emptyset$, allora $x \in \overline{C} = C$. □

Definizione 1.5.7 (Spazio sequenziale): Uno spazio topologico (X, τ) è detto **sequenziale** se $\forall C \subset X$ C è chiuso $\iff$ C è sequenzialmente chiuso.

Teorema 1.5.8 (N1 $\Rightarrow$ sequenziale): *Sia (X, τ) uno spazio topologico N1 e sia $C \subset X$. Allora C è chiuso $\iff$ $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ successione t.c. $x_n \in C$ frequentemente e $x_n \to x$ si ha $x \in C$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$). Dimostrata in generale nella proposizione precedente.

($\Leftarrow$). Dimostriamo che $C = \overline{C}$. Sappiamo già che $C \subset \overline{C}$ quindi basta dimostrare che $\overline{C} \subset C$. Sia $x \in \overline{C}$ e sia $J_x = \{U_n\}_{n\in I}$, con $I \subset \mathbb{N}$, un SFI al più numerabile di x, senza perdita di generalità posso supporre che $I = \mathbb{N}$, in quanto anche se I fosse finito basterebbe porre $\forall n \in \mathbb{N} \setminus I$ $U_n := U_{i_0}$ in cui si è fissato un qualsiasi $i_0 \in I$. Inoltre a meno di sostituire U_n con $\bigcap_{i=0}^{n} U_i$ posso supporre che $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} \subset U_n$, in quanto anche questa famiglia sostitutiva costituisce un SFI numerabile di x. Ora $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \cap C \neq \emptyset$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ scelgo un qualsiasi $x_n \in U_n \cap C$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così costruita converge a x per costruzione, infatti se $V \in \mathcal{I}(x)$ allora $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $U_N \subset V$, dunque $\forall n \geq N$ $U_n \subset V$, ma $x_n \in U_n$ quindi $x_n \in V$ definitivamente. Inoltre $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è contenuta in C, dunque in particolare vi appartiene frequentemente, quindi per ipotesi $x \in C$. □

Corollario 1.5.9: *Sia (X, τ) uno spazio topologico N1 e sia $C \subset X$. Allora C è chiuso $\iff$ $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ successione t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in C$ e $x_n \to x$ si ha $x \in C$.*

Dimostrazione. Segue dalla dimostrazione del teorema precedente. □

Proposizione 1.5.10: *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $A \subset X$. Allora A aperto $\Rightarrow$ $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ successione t.c. $x_n \to x$ e $x \in A$ si ha $x_n \in A$ definitivamente.*

Dimostrazione. Essendo A aperto è intorno di ogni suo punto, dunque la tesi segue dalla definizione di limite. □

Proposizione 1.5.11: *Sia (X, τ) uno spazio topologico N1 e $A \subset X$. Allora $A \in \tau$ $\iff$ $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ successione t.c. $x_n \to x$ e $x \in A$ si ha $x_n \in A$ definitivamente.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$). Si è dimostrata in generale nella proposizione precedente.

($\Leftarrow$). A è aperto $\iff$ $X \setminus A$ è chiuso $\iff$ $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ successione t.c. $x_n \in X \setminus A$ frequentemente e $x_n \to x$ si ha $x \in X \setminus A$ e quest'ultima affermazione equivale all'ipotesi. □

Proposizione 1.5.12: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione. f continua $\Rightarrow$ $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ successione t.c. $x_n \to x$ si ha che $f(x_n) \to f(x)$.*

Dimostrazione. Sia $U \in \mathcal{I}(f(x))$ allora per continuità di f in x si ha $f^{-1}(U) \in \mathcal{I}(x)$, dunque per definizione di limite $x_n \in f^{-1}(U)$ definitivamente cioè $f(x_n) \in U$ definitivamente. □

Proposizione 1.5.13: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici con (X, τ_X) N1 e sia $f : X \to Y$ una funzione. f è continua $\iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ successione t.c. $x_n \to x$ si ha che $f(x_n) \to f(x)$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$). Si è dimostrata in generale nella proposizione precedente.

($\Leftarrow$). Sia $A \in \tau_Y$ aperto, visto che X è N1 usiamo la proposizione 1.5.11 per dimostrare che $f^{-1}(A) \in \tau_X$. Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ t.c. $x_n \to x$ con $x \in f^{-1}(A)$, vediamo che $x_n \in f^{-1}(A)$ definitivamente. Per ipotesi si ha che $f(x_n) \to f(x)$, ma $f(x) \in A$ ed essendo A aperto $A \in \mathcal{I}(f(x))$, dunque per definizione di limite si ha che $f(x_n) \in A$ definitivamente, che equivale a $x_n \in f^{-1}(A)$ definitivamente. □

Esempio 1.5.14: *Consideriamo lo spazio topologico (X, τ_{con}) in cui X è un insieme con $|X| > \aleph_0$ e τ_{con} è la topologia conumerabile su X. Questo spazio non è sequenziale e quindi non è nemmeno N1 per il teorema 1.5.8.*

Dimostriamo che se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ successione si ha che $x_n \to x \iff x_n = x$ definitivamente.

Infatti se $x_n = x$ definitivamente allora ovviamente $x_n \to x$. Mentre se $x_n \to x$ consideriamo $U := X \setminus \{x_n \mid x_n \neq x\}$, allora $U \in \tau_{\text{cof}}$ e quindi $U \in \mathcal{I}(x)$, ma questo implica che $x_n \in U$ definitivamente, cioè che $x_n = x$ definitivamente.

Dimostrato questo è facile notare che tutti i sottoinsiemi di X sono sequenzialmente chiusi, dunque la caratterizzazione data nel teorema 1.5.8 non funziona, dunque (X, τ_{cof}) non è sequenziale.

1.6 Sottospazi topologici

Lemma 1.6.1: *Sia (X, τ) uno spazio topologico, Z un insieme e $f : Z \to X$ una funzione. Esiste su Z la topologia meno fine che rende f continua ed è*

$$f^{-1}\tau := \left\{ f^{-1}(A) \mid A \in \tau \right\}$$

Dimostrazione. $f^{-1}\tau$ è una topologia, infatti $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}\tau$, $Z = f^{-1}(X) \in f^{-1}\tau$, se $A_1, A2 \in \tau$ allora $f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) = f^{-1}(A_1 \cap A_2) \in f^{-1}\tau$ e se $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$ allora $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \in f^{-1}\tau$.

E se τ' è una topologia su Z che rende continua f allora $\forall A \in \tau \; f^{-1}(A) \in \tau' \Rightarrow f^{-1}\tau \subset \tau'$. □

Definizione 1.6.2 (Sottospazio topologico): Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Y \subset X$. La (X, τ_{cof}) **topologia di sottospazio** ereditata da Y è la topologia meno fine che rende continua l'inclusione $i : Y \hookrightarrow X$ e si indica con $\tau_{|_Y}$. Lo spazio topologico $(Y, \tau_{|_Y})$ è un **sottospazio topologico** di (X, τ).

Osservazione 1.6.3: Per la proposizione precedente quella appena data è una buona definizione.

Proposizione 1.6.4: *Sia (X, τ) uno spazio topologico, $(Y, \tau_{|_Y})$ un suo sottospazio e $B, D \subset Y$. Allora $B \in \tau_{|_Y} \iff \exists A \in \tau$ t.c. $B = i^{-1}(A) = A \cap Y$. E analogamente D è chiuso in $(Y, \tau_{|_Y}) \iff \exists C \subset X$ chiuso in (X, τ) t.c. $D = i^{-1}(C) = C \cap Y$.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che, per la proposizione 1.6.1, si ha $\tau_{|_Y} = i^{-1}\tau$. □

Osservazione 1.6.5: Se $\mathcal{B}$ è una base di (X, τ) spazio topologico e $(Y, \tau_{|_Y})$ è un suo sottospazio allora $\mathcal{B}_{|_Y} := \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ è una base di $(Y, \tau_{|_Y})$ (la verifica è molto semplice).

D'ORA IN POI SE (X, τ) È UNO SPAZIO TOPOLOGICO E $Y \subset X$ SI SOTTINTENDERÀ SEMPRE LA SCELTA DI $\tau_{|_Y}$ COME TOPOLOGIA SU Y QUANDO NON SPECIFICATA.

Proposizione 1.6.6: *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $(Y, \tau_{|_Y})$ un suo sottospazio, valgono le seguenti:*

*(1) (**Aperto di un aperto è aperto**) Se $Y \in \tau$ allora $\forall A \subset Y$ $A \in \tau_{|_Y} \iff A \in \tau$.*

*(2) (**Chiuso di un chiuso è chiuso**) Se Y è chiuso in (X, τ), allora $\forall C \subset Y$ C è chiuso in $(Y, \tau_{|_Y}) \iff C$ è chiuso in (X, τ).*

Dimostrazione. (1) Sia $A \subset Y$, se $A \in \tau \Rightarrow A \cap Y = A \in \tau_{|_Y}$. Viceversa se $A \in \tau_{|_Y}$ allora $A = B \cap Y$ con $B \in \tau$, ma allora $A \in \tau$.

(2) Analoga al caso precedente ma con i chiusi. □

Osservazione 1.6.7: Nel contesto della proposizione precedente se Y non è aperto non è vero che gli aperti di Y sono aperti di X.

Infatti come esempio possiamo prendere $X = \mathbb{R}$ e $Y = [0, 1]$, allora $\left[0, \frac{1}{2}\right) = [0, 1] \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è aperto in $[0, 1]$, ma non lo è in $\mathbb{R}$.

E se Y non è chiuso non è vero che i chiusi di Y sono chiusi in X.

Infatti come esempio possiamo prendere $X = \mathbb{R}$ e $Y = (0, 1)$, allora $\left(0, \frac{1}{2}\right] = (0, 1) \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ è chiuso in $(0, 1)$, ma non lo è in $\mathbb{R}$.

Proposizione 1.6.8: *Siano* (X,τ) *e* (Z,τ_Z) *spazi topologici,* $(Y,\tau_{|_Y})$ *un sottospazio di* (X,τ) *e* $f : X \to Z$ *continua. Allora anche* $f_{|_Y} : Y \to Z$ *è continua.*

Dimostrazione. Infatti $f_{|_Y} = f \circ i$ e composizione di continue è continua. □

Proposizione 1.6.9: *Siano* (X,τ) *e* (Z,τ_Z) *spazi topologici,* $(Y,\tau_{|_Y})$ *un sottospazio di* (X,τ)*,* $i : Y \hookrightarrow X$ *l'inclusione e* $f : Z \to Y$ *una funzione. Allora* f *è continua* $\iff$ $i \circ f : Z \to X$ *è continua.*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$ Composizione di continue è continua.

$(\Leftarrow)$ Sia $A \in \tau_{|_Y}$ allora $\exists B \in \tau$ t.c. $A = B \cap Y$, dunque per continuità di $i \circ f$ si ha

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(B \cap Y)) = (i \circ f)^{-1}(B) \in \tau_Z.$$

□

Teorema 1.6.10 (Proprietà universale della topologia di sottospazio): *Sia* (X,τ) *spazio topologico e* $(Y,\tau_{|_Y})$ *un suo sottospazio. Allora* $\tau_{|_Y}$ *è l'unica topologia su* Y *per cui vale la proprietà universale:*

L'inclusione $i : (Y,\tau') \hookrightarrow X$ è continua e dati uno spazio topologico (Z,τ_Z) e una funzione $f : Z \to (Y,\tau')$ allora f è continua $\iff$ $i \circ f : Z \to X$ è continua.

Dimostrazione. Per la proposizione 1.6.9 la topologia di sottospazio $\tau_{|_Y}$ su Y verifica la proprietà universale.

Sia τ' una topologia su Y che verifica la proprietà universale. Applicando tale proprietà con $(Z,\tau_Z) = (Y,\tau_{|_Y})$ e $f = Id_Y$, identità di Y:

$$(Y,\tau_{|_Y}) \xrightarrow{Id_Y} (Y,\tau') \xrightarrow{i} (X,\tau)$$

dalla continuità di $i \circ Id_Y = i$ si ottiene la continuità di Id_Y, perciò $\tau' \subset \tau_{|_Y}$. Ma $\tau_{|_Y}$ è la topologia meno fine che rende i continua e τ' rende i continua per ipotesi, dunque $\tau_{|_Y} \subset \tau'$ e quindi $\tau' = \tau_{|_Y}$. □

Lemma 1.6.11: *Sia* (Y,τ_Y) *uno spazio topologico, allora esiste uno spazio topologico* (X,τ) *separabile che ha* (Y,τ_Y) *come sottospazio.*

Dimostrazione. Sia $p \notin Y$, consideriamo $X := Y \cup \{p\}$ e muniamo X della topologia τ t.c. $\forall A \in \mathcal{P}(X)$

$$A \in \tau \iff A = \emptyset \text{ oppure } \exists U \in \tau_Y \text{ t.c. } A = U \cup \{p\}$$

è facile verificare che τ è effettivamente una topologia su X e (X,τ) è separabile perchè per costruzione $\{p\}$ è denso, infatti interseca ogni elemento di $\tau \setminus \{\emptyset\}$. Vediamo che $\tau_{|_Y} = \tau_Y$.

Effettivamente $Z \in \tau_{|_Y} \iff \exists A \in \tau$ t.c. $Z = A \cap Y \iff \exists A \in \{\emptyset\} \cup \{U \cup \{p\} \mid U \in \tau_Y\}$ t.c. $Z = A \cap Y \iff Z = \emptyset$ oppure $\exists U \in \tau_Y$ t.c. $A = (U \cup \{p\}) \cap Y \iff \exists U \in \tau_Y$ t.c. $A = U$ in cui l'ultima uguaglianza è vera perché $\emptyset \in \tau_Y$ e nel secondo caso essendo $U \subset Y$ si ha $A = (U \cup \{p\}) \cap Y = U$. □

Teorema 1.6.12: *Sia (X, τ) spazio topologico e $(Y, \tau_{|_Y})$ un suo sottospazio. Allora valgono:*

(1) Se (X, τ) è N1 $\Rightarrow (Y, \tau_{|_Y})$ è N1.

(2) Se (X, τ) è N2 $\Rightarrow (Y, \tau_{|_Y})$ è N2.

(3) Se (X, τ) è metrizzabile $\Rightarrow (Y, \tau_{|_Y})$ è metrizzabile.

(4) Se (X, τ) è metrizzabile e separabile $\Rightarrow (Y, \tau_{|_Y})$ è metrizzabile e separabile.

(5) Se (X, τ) è separabile non è detto che $(Y, \tau_{|_Y})$ sia separabile.

Dimostrazione. (1). Sia $x \in Y$ e sia $\{U_n\}_{n \in J}$, $J \subset \mathbb{N}$ un SFI al più numerabile di x in (X, τ), allora presi $\forall n \in J$ $V_n := U_n \cap Y$ si ha che $\{V_n\}_{n \in J}$ è un SFI al più numerabile di x in $(Y, \tau_{|_Y})$. Infatti, se $\mathcal{I}_Y(x)$ è la famiglia di intorni di x in $(Y, \tau_{|_Y})$ e $\mathcal{I}(x)$ è la famiglia degli intorni di x in (X, τ), preso $V \in \mathcal{I}_Y(x)$ si ha che $\exists B \in \tau_{|_Y}$ t.c. $x \in B \subset V$ e per la natura della topologia di sottospazio $\exists A \in \tau$ t.c. $B = A \cap Y$. Notiamo che $x \in A \in \mathcal{I}(x)$, dunque $\exists n_x \in J$ t.c. $x \in U_{n_x} \subset A$, ma allora $V_{n_x} = U_{n_x} \cap Y \subset A \cap Y = B$ che prova quanto voluto.

(2). Se $\mathcal{B}$ è base al più numerabile per (X, τ) allora si verifica facilmente che la famiglia $\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ è una base al più numerabile per $(Y, \tau_{|_Y})$.

(3). Sia d una distanza su X t.c. $\tau = \tau_d$ allora consideriamo d_Y la restrizione di d a $Y \times Y$. Ora le palle di d in X formano una base per (X, τ), dunque dalla dimostrazione di (2) si ha che $\mathcal{B}_Y := \{B(x, r) \cap Y \mid x \in X,\ r > 0\}$ è una base di $(Y, \tau_{|_Y})$. Notiamo che $\forall x \in Y$ e $\forall r > 0$ si ha $B_{d_Y}(x, r) = B(x, r) \cap Y \in \tau_{|_Y}$ e $\{B_{d_Y}(x, r) \mid x \in Y,\ r > 0\}$ formano una base per τ_{d_Y}, dunque $\tau_{d_Y} \subset \tau_{|_Y}$. Adesso dobbiamo dimostrare che $\tau_{|_Y} \subset \tau_{d_Y}$, per farlo basta vedere che $\mathcal{B}_Y \subset \tau_{d_Y}$. Sia quindi $B(x, r) \cap Y \in \mathcal{B}_Y$ e sia $y \in B(x, r) \cap Y$, allora $d(x, y) < r$ e poniamo $r_y := \frac{r - d(x,y)}{2} > 0$, allora dico che $B_{d_Y}(y, r_y) \subset B(x, r) \cap Y$. Infatti

$$B_{d_Y}(y, r_y) = \{z \in Y \mid d_Y(z, y) = d(z, y) < r_y\} \subset Y$$

e se $z \in B_{d_Y}(y, r_y)$, essendo $d(x, y) < r$, si ha

$$d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) \leq r_y + d(x, y) = \frac{r - d(x, y)}{2} + d(x, y) = \frac{r + d(x, y)}{2} < r$$

dunque $B(x, r) \cap Y$ è aperto in τ_{d_Y} ed effettivamente $\mathcal{B}_Y \subset \tau_{d_Y}$. Si deduce quindi che $\tau_{|_Y} = \tau_{d_Y}$ è metrizzabile.

(4). Per quanto dimostrato nel teorema 1.4.6 uno spazio topologico è metrizzabile e separabile $\iff$ è metrizzabile e N2. Dunque (X,τ) metrizzabile e separabile $\Rightarrow$ (X,τ) metrizzabile e N2 $\overset{(1),(2)}{\Rightarrow}$ $(Y,\tau_{|_Y})$ metrizzabile e N2 $\Rightarrow$ $(Y,\tau_{|_Y})$ metrizzabile e separabile.

(5). Segue dal lemma precedente scegliendo (Y,τ_Y) non separabile, ad esempio $(Y,\tau_Y) = (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. □

Esempio 1.6.13:

- *Consideriamo $(\mathbb{R},\tau_E)$ e muniamo $[0,1]$ della topologia di sottospazio, allora $i : [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}$, inclusione, è chiusa ma non aperta.*

  Infatti $[0,1]$ è chiuso in $\mathbb{R}$ e abbiamo visto che chiuso di un chiuso è chiuso, dunque se $C \subset [0,1]$ è chiuso in $[0,1]$ allora $i(C) = C \subset \mathbb{R}$ è chiuso anche in $\mathbb{R}$, dunque è chiusa. Non è aperta perché ad esempio $[0,1]$ è aperto in $[0,1]$ ma $i([0,1]) = [0,1] \subset \mathbb{R}$ non è aperto in $\mathbb{R}$.

- *Consideriamo $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}$ con le rispettive topologie euclidee, allora $i : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, t.c. $i(x) = (x,0)$, è chiusa ma non aperta.*

  Infatti è chiusa per lo stesso motivo di prima (è inclusione in un sottospazio chiuso: $\mathbb{R} \times \{0\}$), ma ad esempio $i((0,1)) = (0,1) \times \{0\}$ non è aperto in $\mathbb{R}^2$ (perché non contiene nessuna palla di $\mathbb{R}^2$ di raggio positivo), mentre $(0,1)$ è aperto in $\mathbb{R}$.

Definizione 1.6.14 (Sottoinsiemi discreti): Sia (X,τ) uno spazio topologico e $D \subset X$. D è detto **discreto** in X se la topologia di sottospazio di D, $\tau_{|_D}$, coincide con la topologia discreta di D o equivalentemente se i singleton sono elementi di $\tau_{|_D}$.

Esempio 1.6.15 (Piano di Sorgenfrey): Consideriamo $X = \mathbb{R}^2$ e

$$\mathcal{B} := \{[a,b) \times [c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < d\}$$

allora $\mathcal{B}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}^2$ (facile verifica grazie alla proposizione 1.3.6), indichiamo tale topologia con τ^2_{sfy} e chiamiamo lo spazio topologico $(\mathbb{R}^2, \tau^2_{\text{sfy}})$ **piano di Sorgenfrey**. Vale che

- *La topologia τ^2_{sfy} è strettamente più fine di quella euclidea su $\mathbb{R}^2$.*

  Infatti $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < d$ il rettangolo $(a,b) \times (c,d) \in \tau^2_{\text{sfy}}$ ed i rettangoli aperti sono una base per la topologia τ_{d_∞} su $\mathbb{R}^2$, ma abbiamo dimostrato che τ_{d_∞} coincide con la topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$, dunque i rettangoli aperti formano una base anche per la topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$.

- *$(\mathbb{R}^2, \tau^2_{sfy})$ è uno spazio topologico separabile.*

  Infatti $\mathbb{Q}^2$ è denso.

- $(\mathbb{R}^2, \tau^2_{sfy})$ *ha un sottospazio non separabile e quindi, in particolare, non è metrizzabile.*

  Si consideri la retta $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}$, questo è un sottoinsieme discreto di $(\mathbb{R}^2, \tau^2_{\text{sfy}})$. Infatti preso $(x, -x) \in D$, considerando $[x, x+1) \times [-x, -x+1) \in \tau^2_{\text{sfy}}$ si ha $D \cap [x, x+1) \times [-x, -x+1) = \{(x, -x)\}$, dunque $\forall x \in \mathbb{R}$ $\{(x, -x)\} \in (\tau^2_{\text{sfy}})_{|D}$. In particolare $(D, (\tau^2_{\text{sfy}})_{|D})$ non è separabile.

Definizione 1.6.16 (Immersione topologica): Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione. f è detta **immersione topologica** è un omeomorfismo con l'immagine, cioè se induce un omeomorfismo tra X ed $f(X) \subset Y$ dotato della topologia di sottospazio $\tau_Y|_{f(X)}$.

Osservazione 1.6.17: Nella definizione sopra si intende che presa $\tilde{f} : X \to (f(X), \tau_Y|_{f(X)})$, t.c. $\tilde{f}(x) = f(x)$, questa è un omeomorfismo. Nel seguito indicheremo f ed $\tilde{f}$ entrambe con f ignorando la leggera ambiguità che questo abuso di notazione provoca.

Osservazione 1.6.18: Un immersione topologica è sempre continua ed iniettiva, ma non tutte le funzioni continue ed iniettive sono immersioni topologiche. Si prenda ad esempio $Id : (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \tau_E)$, questa è continua perchè $\tau_E \subset \mathcal{P}(X)$, iniettiva, ma non è un omeomorfismo con l'immagine perché $\tau_E \subsetneq \mathcal{P}(X)$.

Teorema 1.6.19: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione continua e iniettiva. Se f è aperta o chiusa allora è un immersione topologica.*

Dimostrazione. Essendo f iniettiva è ben definita la sua inversa $g : f(X) \to X$, vediamo che g è continua in entrambi i casi, questo basta perché, per la proposizione 1.6.9, $f : X \to f(X)$ è continua essendolo $f : X \to Y$. Sia $D \subset X$ un aperto se f è aperta o un chiuso se f è chiusa, allora $g^{-1}(D) = f(D)$ che è quindi aperto di Y se f è aperta o chiuso di Y se f è chiusa, ma un aperto o chiuso di Y contenuto in $f(X)$, per la natura della topologia di sottospazio, è aperto o chiuso anche di $f(X)$. Questo prova la continuità di g in entrambi i casi. □

Osservazione 1.6.20: *Esistono immersioni topologiche che non sono né aperte né chiuse. Ad esempio prendiamo $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^2$ muniti delle rispettive topologie euclidee, allora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ t.c. $f(x) = (\arctan(x), 0)$ è un'immersione topologica non aperta e non chiusa.*

Infatti $f(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \{0\}$ ed ammette l'inversa continua $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \{0\} \to \mathbb{R}$ t.c. $g(y, 0) = \tan(y)$. Ma poiché $f(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \{0\}$ non è né aperto (perché non contiene palle di raggio positivo) né chiuso (perché ad esempio $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \in f(\mathbb{R})^c$, ma nessuna palla centrata in $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ di raggio positivo è contenuta in $f(\mathbb{R})^c$, dunque $f(\mathbb{R})^c$ non è aperto) in $\mathbb{R}^2$.

Esempio 1.6.21: *Consideriamo* $\mathbb{R}^2, \tau_E$ *e* $[0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ *munito della topologia di sottospazio ereditata da quella euclidea di* $\mathbb{R}$*, allora* $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ *t.c.* $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$*, è continua e iniettiva ma non è un immersione topologica.*

Infatti se $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ si ha che $f([0, 2\pi)) = S^1$ e l'inversa $g : S^1 \to [0, 2\pi)$ non è continua in $(1, 0) = f(0)$, infatti se fosse continua $\forall U \in \mathcal{I}_{[0,2\pi)}(0)$ $\exists V \in \mathcal{I}_{S^1}((1, 0))$ t.c. $g(V) \subset U$, ma se ad esempio $U = [0, 1)$ si ha che un qualsiasi intorno di $(1, 0)$ in S^1 contiene almeno un punto $(x, y) \in S^1$ con $y < 0$, che quindi ha immagine $g((x, y)) \in [\pi, 2\pi)$, dunque $g((x, y)) \notin [0, 1)$.

1.7 Prodotti topologici

Definizione 1.7.1 (Prodotto cartesiano di insiemi arbitrario): Siano I un insieme di indici qualsiasi e $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di insiemi. Definiamo il **prodotto cartesiano** della famiglia $\{X_i\}_{i\in I}$ come

$$\prod_{i\in I} X_i := \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid \forall i \in I \ f(i) \in X_i \right\}$$

Di solito l'elemento $f \in \prod_{i\in I} X_i$ t.c. $\forall i \in I$ $f(i) = x_i$ si indica con $(x_i)_{i\in I}$.

Inoltre $\forall i \in I$ la funzione $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ t.c. $\forall f \in \prod_{i\in I} X_i$ $\pi_i(f) = f(i)$ viene chiamata **proiezione** sull'i-esima componente.

Osservazione 1.7.2:

- Da notare l'analogia di notazione con le successioni in uno spazio topologico, infatti preso (X, τ) uno spazio topologico e $(x_n)_{n\in N} \subset X$ una successione possiamo interpretare quest'ultima come un elemento di $\prod_{n\in\mathbb{N}} X$.
- Se I è finito possiamo pensarlo come $I = \{1, ..., n\}$ per un qualche $n \in \mathbb{N}$ e gli elementi di $\prod_{i=1}^{n} X_i$ possono essere pensati come le n-uple $(x_1, ..., x_n)$, dunque la definizione ricade in quella di prodotto cartesiano finito già nota.

Definizione 1.7.3 (Topologia prodotto): Siano I un insieme di indici qualsiasi e $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici. La **topologia prodotto** sul prodotto cartesiano $\prod_{i\in I} X_i$ è la topologia meno fine che rende continue le proiezioni $\{\pi_i\}_{i\in I}$. Tale topologia verrà talvolta chiamata τ_{prod}.

Osservazione 1.7.4: Notiamo che la topologia discreta su $\prod_{i\in I} X_i$ rende ovviamente le proiezioni continue dunque

$$\mathcal{T}_p := \left\{ \tau \subset \mathcal{P}\left(\prod_{i\in I} X_i\right) \mid \tau \text{ topologia su } \prod_{i\in I} X_i \text{ che rende continue le proiezioni} \right\} \neq \emptyset$$

Inoltre intersezioni di topologie è topologia e, nel conteso della definizione appena data, se ho una famiglia di topologie che rendono le proiezioni continue allora anche la topologia data dalla loro intersezione rende le proiezioni continue, dunque possiamo dire che

$$\tau_{\text{prod}} = \bigcap_{\tau \in \mathcal{T}_p} \tau$$

quindi la topologia prodotto è ben definita.

Teorema 1.7.5: *Siano I un insieme di indici qualsiasi, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici e $X = \prod_{i\in I} X_i$. Allora:*

(1) La famiglia $\bigcup_{i\in I} \left\{\pi_i^{-1}(A) \mid A \in \tau_i\right\}$ è una prebase di (X, τ_{prod}).

(2) La famiglia $\left\{\pi_{i_1}^{-1}(A_1) \cap ... \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_k) \mid k \in \mathbb{N},\ \{i_j\}_{j\in\{1,...,k\}} \subset I,\ \forall j \in \{1, ..., n\}\ A_{i_j} \in \tau_{i_j}\right\}$ è una base di (X, τ_{prod}).

Dimostrazione. (1). τ_{prod} dovendo rendere continue tutte le proiezioni deve contenere necessariamente la famiglia $\bigcup_{i\in I} \left\{\pi_i^{-1}(A) \mid A \in \tau_i\right\}$ e quindi anche la topologia da essa generata τ', dunque $\tau' \subset \tau_{\text{prod}}$. Ma τ' rende continue le proiezioni, dunque per definizione di τ_{prod} si ha anche che $\tau_{\text{prod}} \subset \tau'$, ossia $\tau_{\text{prod}} = \tau'$.

(2). Segue da (1) per definizione di prebase di uno spazio topologico. □

Corollario 1.7.6: *Siano $I = \{1, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in\{1,...,n\}}$ una famiglia di spazi topologici e $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Allora una base della topologia prodotto è data dalla famiglia*

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times ... \times A_n \mid \forall i \in \{1, ..., n\}\ A_i \in \tau_i\}$$

Dimostrazione. La tesi si ha grazie al teorema precedente notando che $\forall A_1 \times ..., \times A_n \in \mathcal{B}$ si ha $A_1 \times ..., \times A_n = \pi_1^{-1}(A_1) \cap ... \cap \pi_n^{-1}(A_n)$. □

Teorema 1.7.7 (Continuità per componenti): *Siano I un insieme di indici, (Y, τ_Y) spazio topologico, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici e $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ una funzione. Allora f è continua rispetto a τ_{prod} su $\prod_{i\in I} X_i \iff \pi_i \circ f : Y \to X_i$ è continua $\forall i \in I$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$). Per definizione di τ_{prod} $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ è continua e composizione di continue è continua.

($\Leftarrow$). Essendo $\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I} \left\{\pi_i^{-1}(A) \mid A \in \tau_i\right\}$ una prebase di $\left(\prod_{i\in I} X_i, \tau_{\text{prod}}\right)$, basta verificare che $\forall \pi_i^{-1}(A) \in \mathcal{S}$ sia $f^{-1}(\pi_i^{-1}(A)) \in \tau_Y$. Effettivamente $f^{-1}(\pi_i^{-1}(A)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(A) \in \tau_Y$ per continuità di $\pi_i \circ f$ che si ha per ipotesi. □

Teorema 1.7.8: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici. Se (X, τ_X) e (Y, τ_Y) sono metrizzabili $\Rightarrow$ $(X \times Y, \tau_{prod})$ è metrizzabile. E se d_x e d_Y sono le distanze che inducono τ_X e τ_Y rispettivamente τ_{prod} è indotta da una qualsiasi tra queste distanze:*

- $d_1^p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2) = d_1(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$;
- $d_E^p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2} = d_E(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$;
- $d_\infty^p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\} = d_\infty(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$.

in cui d_1, d_E, d_∞ sono le note metriche su $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Nella proposizione 1.2.10 abbiamo detto che d_1, d_E, d_∞ sono tutte equivalenti, dunque anche d_1^p, d_E^p, d_∞^p sono equivalenti, dunque inducono la stessa topologia su $X \times Y$. Quindi basta dimostrare che ad esempio d_∞^p induce su $X \times Y$ la topologia τ_{prod}. Dalla definizione di d_∞^p si ha che le proiezioni sono 1-lipschitziane e quindi sono continue, dunque $\tau_{\text{prod}} \subset \tau_{d_\infty^p}$ per definizione di τ_{prod}. Inoltre la famiglia di palle $\mathcal{B}_\infty = \{B_{d_\infty^p}((x, y), r) \mid (x, y) \in X \times Y,\ r > 0\}$ è una base di $(X \times Y, \tau_{d_\infty^p})$, dunque per vedere che $\tau_{d_\infty^p} \subset \tau_{\text{prod}}$ basta vedere che $\mathcal{B}_\infty \subset \tau_{\text{prod}}$. Sia dunque $B_{d_\infty^p}((x, y), r) \in \mathcal{B}_\infty$, si ha

$$B_{d_\infty^p}((x, y), r) = \{(x', y') \in X \times Y \mid d_\infty^p((x, y), (x', y')) < r\}$$

$$= \{(x', y') \in X \times Y \mid d_X(x, x'), d_Y(y, y') < r\} = B_{d_X}(x, r) \times B_{d_Y}(y, r) \in \tau_{\text{prod}}$$

che prova quindi quanto voluto. □

Corollario 1.7.9: *$\forall n, m \in \mathbb{N}$ presi $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{n+m}$, muniti delle rispettive topologie euclidee si ha che $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tau_{prod})$ è omeomorfo a $(\mathbb{R}^{n+m}, \tau_E)$.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m}$ t.c.

$$j((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_m)) = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$$

questa è bigettiva ed è un omeomorfismo. Infatti la topologia euclidea su $\mathbb{R}^{n+m}$ è indotta ad esempio dalla distanza d_1 su $\mathbb{R}^{n+m}$ che però è esattamente la distanza d_1^p su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ che induce la topologia τ_{prod} su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. L'uguaglianza tra le distanze ci dice che sia j cha la sua inversa sono 1-lipschitziane e quindi continue, da cui la tesi. □

Lemma 1.7.10: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione. Se $\mathcal{B}$ è una base di (X, τ_X) allora f è aperta $\iff$ $\forall B \in \mathcal{B}$ $f(B) \in \tau_Y$.*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$. Ovvio.

$(\Leftarrow)$. Se $A \in \tau_X$ allora $\exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ t.c. $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \ \Rightarrow\ f(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} f(B) \in \tau_Y$. □

Proposizione 1.7.11: *Siano $I = \{1, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in\{1,...,n\}}$ una famiglia di spazi topologici. $\forall i \in I$ la proiezione $\pi_i : X \to X_i$ è una funzione aperta.*

Dimostrazione. Fissiamo $i \in I$, grazie al lemma precedente e al teorema 1.7.5, per vedere che π_i è aperta, possiamo restringerci a controllare gli insiemi in X della forma $\pi_{i_1}^{-1}(A_1) \cap ... \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_k)$ con $\{i_j\}_{j\in\{1,...,k\}} \subset I$ e $\forall j \in \{1, ..., k\}$ $A_j \in X_{i_j}$. Sia quindi $B = \pi_{i_1}^{-1}(A_1) \cap ... \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_k)$ come sopra, allora si ha che

$$\pi_i(B) = \begin{cases} A_j & \text{se } \ i \in \{i_j\}_{j\in\{1,...,k\}} \\ X_i & \text{se } i \notin \{i_j\}_{j\in\{1,...,k\}} \end{cases}$$

in ogni caso $\pi_i(A) \in \tau_i$. □

Teorema 1.7.12: *Siano A un insieme di indici, $n \in \mathbb{N}$, $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ una famiglia di spazi topologici e $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Fissiamo $A' \subset A$ e $x_\beta \in X_\beta$ con $\beta \notin A'$, allora la funzione*

$$i : \prod_{\alpha\in A'} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$$

t.c. $i((x_\alpha)_{\alpha\in A'}) = (y_\alpha)_{\alpha\in A}$ *con* $y_\alpha = \begin{cases} x_\alpha & \textit{se } \alpha \in A' \\ x_\beta & \textit{se } \alpha \notin A' \end{cases}$ *è un'immersione topologica.*

Dimostrazione. Per vedere che i è continua consideriamo $i\left(\prod_{\alpha\in A'} X_\alpha\right)$ e lo dotiamo della topologia di sottospazio di $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ per utilizzare la proprietà universale dei sottospazi topologici. Quindi dobbiamo dimostrare che $\forall\alpha \in A$ $\pi_\alpha \circ i$ è continua. In effetti, fissato $\alpha \in A$, si ha

$$(\pi_\alpha \circ i)((x_\alpha)_{\alpha\in A'}) = \pi_\alpha((y_\alpha)_{\alpha\in A}) = \begin{cases} x_\alpha & \text{se } \alpha \in A' \\ x_\beta & \text{se } \alpha \notin A' \end{cases}$$

da cui si verifica facilmente la continuità. Dunque i è continua ed inoltre è iniettiva con inversa continua. □

Corollario 1.7.13: *Siano A un insieme di indici, $n \in \mathbb{N}$, $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ una famiglia di spazi topologici e $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Fissiamo $\bar\alpha \in A$ e $x_\beta \in X_\beta$ con $\beta \neq \bar\alpha$, allora la funzione*

$$i : X_{\bar\alpha} \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$$

t.c. $i((x_\alpha)_{\alpha\in A'}) = (y_\alpha)_{\alpha\in A}$ *con* $y_\alpha = \begin{cases} x_\alpha & \textit{se } \alpha = \bar\alpha \\ x_\beta & \textit{se } \alpha \neq \bar\alpha \end{cases}$ *è un'immersione topologica.*

Esempio 1.7.14 (Topologia della convergenza puntuale): Siano (Y, τ_Y) uno spazio topologico e X un insieme. Definiamo

$$Fun(X,Y) = Y^X := \prod_{x \in X} Y = \{f : X \to Y \mid f \text{ funzione}\}$$

allora la topologia prodotto su Y^X è detta **topologia della convergenza puntuale**. Tale nome deriva dal seguente fatto:
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Fun(X,Y)$*, allora* $f_n \to f$ *nella topologia della convergenza puntuale* $\iff$ $\forall x \in X\ f_n(x) \to f(x)$ *in* (Y, τ_Y)

Dimostriamolo. $(\Rightarrow)$. Fissiamo $x \in X$, abbiamo visto che le proiezioni $\pi_x : Fun(X,Y) \to Y$ sono sempre continue, dunque per la proposizione 1.5.12 si ha che $\pi_x(f_n) = f_n(x) \to \pi_x(f) = f(x)$.

$(\Leftarrow)$. Sia $U \in \mathcal{I}_{Fun(X,Y)}(f)$ e sia $\mathcal{B}$ la base usuale della topologia della convergenza puntuale (che è la topologia prodotto) e scelgo un $A \in \mathcal{B}$ t.c. $A \subset U$. Allora $A = \prod_{x\in X} A_x$ con $A_x \neq Y$ solo per un numero finito di indici, siano $\{x_1, ..., x_k\} \subset X$ tali indici. Sappiamo dalle ipotesi che $\pi_{x_i}(f_n) = f_n(x_i) \to \pi_{x_i}(f) = f(x_i)\ \forall i \in \{1, ..., k\}$, dunque $\forall i \in \{1, ..., k\}\ f_n(x_i) \in A_{x_i} \in \mathcal{I}_Y(f(x_i))$ definitivamente, dunque essendo gli x_i finiti, è possibile trovare un $N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq N\ \forall i \in \{1, ..., k\}\ f_n(x_i) \in A_{x_i}$. Inoltre se $x \notin \{x_1, ..., x_k\}\ A_x = Y$, dunque $\pi_x(f_n) = f_n(x) \in A_x$ definitivamente in modo ovvio. Dunque possiamo concludere che $\forall n \geq N\ f_n \in A \subset U$ e quindi che $f_n \to f$ nella topologia della convergenza puntuale.

1.8 Proprietà di separazione

Definizione 1.8.1 (Spazi T0, T1, T2 (o di Hausdorff)): Uno spazio topologico (X, τ) è:

- **T0** se $\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists U \in \tau$ t.c. $x \in U$ e $y \notin U$ oppure $x \notin U$ e $y \in U$;
- **T1** se $\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists U, V \in \tau$ t.c. $x \in U,\ y \notin U$ e $x \notin V,\ y \in V$;
- **T2** (o **di Hausdorff**) se $\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists U, V \in \tau$ t.c. $x \in U,\ y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Osservazione 1.8.2: Una formulazione equivalente della definizione appena data si ottiene richiedendo intorni invece di aperti che facciano quello che devono fare.

Osservazione 1.8.3: $T2 \Rightarrow T1 \Rightarrow T0$ e le implicazioni non si invertono.

Esempio 1.8.4 (T1 $\not\Rightarrow$ T2): Consideriamo (X, τ_{cof}) con X infinito e τ_{cof} la topologia cofinita su X, questo spazio è T1 ma non T2. Infatti siano $x, y \in X,\ y \neq x$, allora

$U = X \setminus \{x\} \in \tau_{\text{cof}}$ e $V = X \setminus \{y\} \in \tau_{\text{cof}}$ sono insiemi che soddisfano le richieste per essere T1. Ma presi $U, V \in \tau_{\text{cof}}$ qualsiasi si ha che $U \cap V \neq \emptyset$, infatti

$$U \cap V = X \setminus ((X \setminus U) \cup (X \setminus V))$$

e X è infinito mentre $(X \setminus U)$ e $(X \setminus V)$ sono finiti.

Esempio 1.8.5 (T0 $\not\Rightarrow$ T1): Consideriamo $X = \mathbb{R}$ e definiamo su $\mathbb{R}$ la topologia

$$\tau_{\text{inf}} := \{(a, +\infty) \subset \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

è facile verificare che effettivamente è una topologia su $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R}, \tau_{\text{inf}})$ è T0 ma non T1. Infatti se $x, y \in \mathbb{R}$, con $x \neq y$, allora $\left(\frac{x+y}{2}, +\infty\right) \in \tau_{\text{inf}}$ e contiene solo $\max\{x, y\}$. Inoltre non è T1 perché se, ad esempio, $x < y$ allora non esiste un aperto di τ_{inf} che contenga x ma non y.

Esempio 1.8.6: Esiste uno spazio topologico che non è nemmeno T0. Si prenda ad esempio $(X, \tau_{\text{indisc}})$ con X t.c. $|X| \geq 2$, questo ovviamente non è T0.

Proposizione 1.8.7 (Metrico $\Rightarrow$ T2): *Sia (X, d) uno spazio metrico, allora (X, τ_d) è T2.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in X$ con $x \neq y$ e sia $r \in \left(0, \frac{d(x,y)}{2}\right)$, allora presi $U = B(x, r)$ e $V = B(y, r)$ si ha che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Corollario 1.8.8: *Uno spazio topologico non T2 non è metrizzabile.*

Proposizione 1.8.9 (Caratterizzazione spazi T1): *Sia (X, τ) uno spazio topologico, sono equivalenti*

(1) X è T1;

(2) i singleton sono chiusi, cioè $\forall x \in X$ $\overline{\{x\}} = \{x\}$;

(3) τ è più fine della topologia cofinita τ_{cof} su X.

Dimostrazione. (3) $\Rightarrow$ (2). Ovvia.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sia $A \in \tau_{\text{cof}} \Rightarrow |A^c| < \aleph_0 \Rightarrow A^c$ è unione finita di singleton, che sono chiusi $\Rightarrow A^c$ è chiuso $\Rightarrow A \in \tau$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Sia $x \in X$, chiaramente $\{x\} \subset \overline{\{x\}}$ e se prendiamo $y \in X \setminus \{x\}$, essendo X T1, $\exists U \in \tau$ t.c. $y \in U$ e $x \notin U \Rightarrow$ il chiuso U^c è t.c. $U^c \supset \overline{\{x\}}$ e $y \notin U^c \Rightarrow y \notin \overline{\{x\}} \Rightarrow \overline{\{x\}} = \{x\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Siano $x, y \in X$ con $x \neq y \Rightarrow y \notin \{x\} = \overline{\{x\}} \Rightarrow U := X \setminus \{x\} \in \tau$ ed è t.c. $x \notin U$ e $y \in U$. Similmente si ha che $V := X \setminus \{y\} \in \tau$ ed è t.c. $y \notin U$ e $x \in U$. $\square$

Proposizione 1.8.10 (Caratterizzazione spazi T2 con diagonale): *Uno spazio topologico* (X, τ) *è T2* $\iff$ *preso* $\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ *si ha che* Δ_X *è chiuso nella topologia prodotto di* $X \times X$*.*

Dimostrazione. Δ_X è chiuso nella topologia prodotto di $X \times X \iff \Delta_X^c$ è aperto nella topologia prodotto di $X \times X \iff \forall (x, y) \in \Delta_X^c\ \exists A, B \in \tau$ t.c $(x, y) \in A \times B \subset \Delta_X^c \iff \forall x, y \in X\ \exists A, B \in \tau$ t.c. $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. L'ultima formula ci dice esattamente che (X, τ) è T2. □

Corollario 1.8.11: *Siano* (X, τ_X) *spazio topologico,* (Y, τ_Y) *spazio topologico T2 e* $f : X \to Y$ *una funzione continua. Allora il* ***grafico*** *di* f

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

è chiuso nella topologia prodotto di $X \times Y$*.*

Dimostrazione. Sia $F : X \times Y \to Y \times Y$ t.c. $F(x, y) = (y, f(x))$, allora F è continua (in quanto lo sono le componenti) e $\Gamma_f = F^{-1}(\Delta_Y)$. Ma Y è T2 $\Rightarrow \Delta_Y$ è chiuso nella topologia prodotto di $Y \times Y \Rightarrow \Gamma_f$ è chiuso nella topologia prodotto di $X \times Y$ per continuità di F. □

Corollario 1.8.12: *Siano* (X, τ_X) *spazio topologico,* (Y, τ_Y) *spazio topologico T2 e* $f, g : X \to Y$ *due funzioni continue. Allora l'insieme* $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ *è chiuso in* (X, τ_X)*.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione precedente con $F : X \to Y \times Y$ t.c. $F(x) = (f(x), g(x))$. □

Corollario 1.8.13: *Siano* (X, τ_X) *spazio topologico,* (Y, τ_Y) *spazio topologico T2 e* $f, g : X \to Y$ *due funzioni continue. Allora se* $f = g$ *su un denso di* (X, τ_X) *si ha che* $f = g$ *su tutto* X*.*

Dimostrazione. Segue dal corollario 1.8.12. □

Corollario 1.8.14: *Siano* (X, τ) *spazio topologico T2 e* $f : X \to X$ *una funzione continua. Allora l'insieme dei* ***punti fissi*** *di* f

$$\mathrm{Fix}(f) := \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

è chiuso in (X, τ)*.*

Dimostrazione. Segue dal corollario 1.8.12 con $g(x) = x$. □

Proposizione 1.8.15 (Unicità del limite in spazi T2): *Siano* (X, τ) *uno spazio topologico T2 e* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ *un successione. Allora se* $\exists x, y \in X$ *t.c.* $x_n \to x$ *e* $x_n \to y$ *si ha necessariamente* $x = y$*.*

Dimostrazione. Se per assurdo fosse $x \neq y$ esisterebbero $U \in \mathcal{I}(x)$ e $V \in \mathcal{I}(y)$ t.c. $U \cap V = \emptyset$ e si dovrebbe avere sia $x_n \in U$ definitivamente sia $x_n \in V$ definitivamente, che è chiaramente un assurdo. □

Proposizione 1.8.16: *(1) Un sottospazio di uno spazio topologico T2 è T2.*

(2) Prodotto arbitrario di spazi topologici T2 è T2.

(3) Una topologia più fine di una T2 è T2.

Dimostrazione. (1). Sia (X, τ) spazio topologico T2 e $(Y, \tau_{|_Y})$ un suo sottospazio. Siano $x, y \in Y$ con $x \neq y$, essendo $Y \subset X$ e (X, τ) T2, $\exists U, V \in \tau$ t.c. $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Ma allora $U' = U \cap Y \in \tau_{|_Y}$ e $V' = V \cap Y \in \tau_{|_Y}$ sono t.c. $x \in U'$, $y \in V'$ e $U' \cap V' = \emptyset$.

(2). Siano I un insieme di indici, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici T2, $X = \prod_{i \in I} X_i$ e τ_{prod} la topologia prodotto su X. Prendiamo $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in X$ t.c. $(x_i)_{i \in I} \neq (y_i)_{i \in I} \Rightarrow \exists i_0 \in I$ t.c. $x_{i_0} \neq y_{i_0} \Rightarrow$ essendo (X_{i_0}, τ_{i_0}) T2, si ha che $\exists U, V \in \tau_{i_0}$ t.c. $x_{i_0} \in U$, $y_{i_0} \in V$ e $U \cap V = \emptyset \Rightarrow$ se $U' = \pi_{i_0}^{-1}(U)$ e $V' = \pi_{i_0}^{-1}(V)$ si ha che $(x_i)_{i \in I} \in U'$, $(y_i)_{i \in I} \in V'$ e $U' \cap V' = \emptyset$.

(3). Ovvia. □

Proposizione 1.8.17: *(1) Un sottospazio di uno spazio topologico T1 è T1.*

(2) Prodotto arbitrario di spazi topologici T1 è T1.

(3) Una topologia più fine di una T1 è T1.

Dimostrazione. Analoga a quella della proposizione 1.8.16. □

Proposizione 1.8.18: *(1) Un sottospazio di uno spazio topologico T0 è T0.*

(2) Prodotto arbitrario di spazi topologici T0 è T0.

(3) Una topologia più fine di una T0 è T0.

Dimostrazione. Analoga a quella della proposizione 1.8.16. □

Definizione 1.8.19 (Spazi T3 e T4): Uno spazio topologico (X, τ) è

- **T3** se $\forall x \in X$ $\forall C \subset X$ chiuso t.c. $x \notin C$ $\exists U, V \in \tau$ t.c. $x \in U$, $C \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$;
- **T4** se $\forall C, D \subset X$ chiusi t.c. $C \cap D = \emptyset$ $\exists U, V \in \tau$ t.c. $C \subset U$, $D \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Definizione 1.8.20 (Spazi normali e regolari): Uno spazio topologico (X, τ) è

- **normale** se è T1 e T4;

- **regolare** se è T1 e T3.

Osservazione 1.8.21: Se (X,τ) è uno spazio topologico T1, allora T4 $\Rightarrow$ T3 $\Rightarrow$ T2. Infatti in tal caso i singleton sono chiusi.

Esempio 1.8.22: Sia X un insieme con $|X| \geq 2$ e consideriamo lo spazio topologico $(X, \tau_{\text{indisc}})$, questo ha come unici chiusi $\{\emptyset, X\}$ dunque è T3 e T4, ma non è né T0 né T1 né T2.

Lemma 1.8.23: *Sia (X,d) uno spazio metrico, allora preso $C \subset X$ si ha che $d(\cdot, C)^{-1}(\{0\}) = \overline{C}$. In particolare se C è chiuso si ha $d(\cdot, C)^{-1}(\{0\}) = C$.*

Dimostrazione. Sappiamo che $d(\cdot, C)$ è 1-lipschitziana. dunque è continua e visto che $\{0\} \subset \mathbb{R}$ è chiuso nella topologia euclidea si ha che $d(\cdot, C)^{-1}(\{0\})$ è chiuso in (X, τ_d) e ovviamente $C \subset d(\cdot, C)^{-1}(\{0\})$, quindi $\overline{C} \subset d(\cdot, C)^{-1}(\{0\})$. Inoltre se $y \in d(\cdot, C)^{-1}(\{0\})$, per definizione, si ha

$$\inf\{d(y,c) \mid c \in C\} = 0$$

dunque $\exists \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ t.c. $d(y, c_n) < 2^{-n}$. Dunque $\forall n \in \mathbb{N}$ $c_n \in C \cap B(y, 2^{-n})$ e $\{B(y, 2^{-n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un SFI di y in (X, τ_d), dunque $\forall U \in \mathcal{I}(y)$ $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $B(y, 2^{-n}) \subset U$ e $B(y, 2^{-n}) \cap C \neq \emptyset$, dunque $U \cap C \neq \emptyset$, ossia $y \in \overline{C}$. Quindi $d(\cdot, C)^{-1}(\{0\}) = \overline{C}$. $\square$

Proposizione 1.8.24: *Sia (X,d) uno spazio metrico, allora (X,τ_d) è normale.*

Dimostrazione. Sappiamo dalla proposizione 1.8.7 che (X,τ_d) è T2 e quindi è T1. Dimostriamo che è T4. Siano $C, D \subset X$ due chiusi t.c. $C \cap D = \emptyset$, sappiamo che le due funzioni $d(\cdot, C), d(\cdot, D) : X \to [0, +\infty)$ sono continue, dunque la funzione $f : X \to [0,1]$ t.c.

$$f(x) = \frac{d(x,D)}{d(x,C) + d(x,D)}$$

è ben definita (perché $C \cap D = \emptyset$) e continua (è composizione di continue). Osserviamo che $f(x) = 0 \iff x \in D$, ossia $D = f^{-}(\{0\})$ e che $f(x) = 1 \iff x \in C$, ossia $C = f^{-}(\{1\})$. Siano quindi $U = \left(\frac{2}{3}, 1\right]$ e $V = \left[0, \frac{1}{3}\right)$ aperti di $[0,1]$ e definiamo $U' = f^{-1}(U)$ e $V' = f^{-1}(V)$ aperti di X, questi sono t.c. $U' \cap V' = f^{-1}(U \cap V) = \emptyset$ e $C \subset U'$, $D \subset V'$. Questo dimostra che (X, τ_d) è T4. $\square$

Proposizione 1.8.25: *Uno spazio topologico (X,τ) è T3 $\iff$ $\forall x \in X$ la famiglia di intorni $\mathcal{I}^{\text{cl}}(x) := \{D \in \mathcal{I}(x) \mid D \text{ chiuso in } (X,\tau)\}$ forma un SFI di x.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$). Sia $x \in X$ $U \in \mathcal{I}(x)$, allora $\exists A \in \tau$ t.c. $x \in A \subset U$, allora A^c è chiuso in (X,τ) e $x \notin A^c$, dunque, essendo (X,τ) T3, si ha che $\exists U', V' \in \tau$ t.c. $U' \cap V' = \emptyset$ e $x \in U'$, $A^c \subset V'$. Notiamo che $\overline{U'} \subset V'^c \subset A \subset U$ e $\overline{U'} \in \mathcal{I}^{\text{cl}}(x)$ da cui segue quanto voluto.

($\Leftarrow$). Siano $x \in X$ e $C \subset X$ chiuso t.c. $x \notin C \Rightarrow x \in C^c \in \tau \Rightarrow C^c \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow$ per ipotesi $\exists D \in \mathcal{I}^{\mathrm{cl}}(x)$ t.c. $D \subset C^c$. Dunque presi $U' = \mathring{D}$ e $V' = D^c$ si ha che $U' \cap V' = \emptyset$ e $x \in U'$, $C \subset V'$. Questo dimostra che (X, τ) è T3. □

Proposizione 1.8.26: *(1) Un sottospazio di uno spazio T3 è T3.*

(2) Prodotto arbitrario di spazi T3 è T3.

(3) Un sottospazio chiuso di uno spazio T4 è T4.

Dimostrazione. (1). Sia (X, τ) uno spazio topologico T3 e $(Y, \tau_{|_Y})$ un suo sottospazio. Siano $y \in Y$ e $C \subset Y$ un chiuso di $(Y, \tau_{|_Y})$ t.c. $y \notin C$. Per la natura della topologia di sottospazio $\exists C' \subset X$ chiuso di (X, τ) t.c. $C = C' \cap Y$, Notiamo che $y \notin C$, dunque, essendo (X, τ) T3, si ha che $\exists U, V \in \tau$ t.c. $U \cap V = \emptyset$ e $y \in U$, $C \subset V$. Definiamo $U' = U \cap Y \in \tau_{|_Y}$ e $V' = V \cap Y \in \tau_{|_Y}$, allora $U' \cap V' = \emptyset$ e $y \in U'$, $C = C' \cap Y \subset V \cap Y = V'$.

(2). Siano I un insieme di indici, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici T3, $X = \prod_{i \in I} X_i$ e τ_{prod} la topologia prodotto su X. Per dimostrare che $(X, \tau_{\mathrm{prod}})$ è T3 usiamo la caratterizzazione dimostrata nella Proposizione 1.8.25. Sia $(x_i)_{i \in I} \in X$ e $U \in \mathcal{I}((x_i)_{i \in I})$, presa $\mathcal{B}_{\mathrm{p}}$ la base usuale della topologia prodotto, si ha che $\exists A \in \mathcal{B}_{\mathrm{p}}$, $A = \prod_{i \in I} A_i$ con $A_i \in \tau_i$ $\forall i \in I$ e $A_i \neq X_i$ solo per un numero finito di indici, t.c. $x \in A \subset U$. Usando la Proposizione 1.8.25 sugli spazi (X_i, τ_i) si ha che $\forall i \in I$ $\exists D_i \subset X_i$ chiuso in (X_i, τ_i) e t.c. $x_i \in D_i \subset A_i$. Prendo $D = \prod_{i \in I} D_i$. Notiamo che $(x_i)_{i \in I} \in D \in \mathcal{B}_{\mathrm{p}}$ e che $D = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(D_i)$ è chiuso in $(X, \tau_{\mathrm{prod}})$, quindi $D \in \mathcal{I}^{\mathrm{cl}}((x_i)_{i \in I})$. Inoltre per costruzione $D \subset A \subset U$.

(3). Analoga al punto (1). □

Osservazione 1.8.27: Vale la catena di implicazioni:

$$\textit{metrizzabile} \Rightarrow \textit{normale} \Rightarrow \textit{regolare} \Rightarrow \textit{di Hausdorff}.$$

Inoltre gli esempio che seguono dimostrano che le implicazioni di tale catena non si invertono.

Esempio 1.8.28 (Normale $\not\Rightarrow$ metrizzabile: retta di Sorgenfrey): *Consideriamo la retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau_{sfy})$ presentata nell'esempio 1.4.8. Tale spazio topologico è normale ma non è metrizzabile.*

La topologia τ_{sfy}, per quanto visto nell'esempio 1.4.8, è non metrizzabile ed è più fine della topologia euclidea su $\mathbb{R}$, dunque è anch'essa T1. Dimostriamo che è T4. Siano $C, D \subset \mathbb{R}$ chiusi per τ_{sfy} t.c. $C \cap D = \emptyset$. Ovviamente $D^c \in \tau_{\mathrm{sfy}} \Rightarrow$ preso $c \in C \subset D^c$ $\exists a_c, b_c \in \mathbb{R}$ t.c. $c \in [a_c, b_c) \subset D^c$ (ricordiamo che gli insiemi della forma $[a, b)$ formano, per costruzione di τ_{sfy}, una base per $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{sfy}})$). Notiamo che $c < b_c$ e che $c \in [c, b_c) \subset D^c$.

Facciamo questa costruzione $\forall c \in C$ e prendiamo $U = \bigcup_{c \in C}[c, b_c) \subset D^c$. La stessa cosa si può fare per ogni $d \in D$ considerando $C^c \supset D$ e trovando $\forall d \in D$ $[d, b_d) \subset C^c$. Anche in questo caso consideriamo $V = \bigcup_{d \in D}[d, b_d) \subset C^c$. Ora $U, V \in \tau_{\text{sfy}}$ e vale $U \cap V = \emptyset$, infatti se così non fosse $\exists c \in C$ e $\exists d \in D$ t.c. $[c, b_c) \cap [d, b_d) \neq \emptyset$, ma per la struttura "a linea" di $\mathbb{R}$ si avrebbe necessariamente che o $c \in [d, b_d)$ o $d \in [c, b_c)$ che porta ad un assurdo perché $[c, b_c) \subset D^c$ e $[d, b_d) \subset C^c$. Inoltre $C \subset U$, $D \subset V$, questo dimostra che $(\mathbb{R}, \tau_{\text{sfy}})$ è T4 e che è quindi uno spazio normale.

Esempio 1.8.29 (T2 $\not\Rightarrow$ T3): *Consideriamo lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \tau_0)$ in cui τ_0 è la topologia generata da $\mathcal{S}_0 = \tau_E \cup \{\mathbb{R} \setminus K\}$ in cui $K = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\right\}$. Allora $(\mathbb{R}, \tau_0)$ è T2 ma non è T3.*

La topologia τ_0 è più fine di quella euclidea τ_E, dunque è anch'essa T2. Vediamo che non è T3. Prendiamo i chiusi di $(\mathbb{R}, \tau_0)$: $C = K$e $D = \{0\}$. Per il teorema 1.3.10, sappiamo che $\mathcal{S}_0$ è una prebase di $(\mathbb{R}, \tau_0)$ (notiamo che $\mathbb{R} \in \mathcal{S}_0$), quindi è facile vedere che la famiglia $\mathcal{B}_0 := \tau_E \cup \{A \setminus K \mid A \in \tau_E\}$ forma una base di $(\mathbb{R}, \tau_0)$ (in quanto le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}_0$ sono tutti insiemi di questa famiglia). Quindi se $V \in \tau_0$ è t.c. $\{0\} \subset V$, cioè $0 \in V$, necessariamente $\exists \delta > 0$ t.c. $(-\delta, \delta) \setminus K \subset V$. Mentre se $U \in \tau_0$ è t.c. $K \subset U$, necessariamente $\forall n \in \mathbb{N}_+$ $\exists \delta_n > 0$ t.c. $\left(\frac{1}{n} - \delta_n, \frac{1}{n} + \delta_n\right) \subset U$. Prendendo $n \in \mathbb{N}_+$ t.c. $\frac{1}{n} \in (0, \delta)$ si ha $\left(\frac{1}{n} - \delta_n, \frac{1}{n} + \delta_n\right) \cap (-\delta, \delta) \setminus K \neq \emptyset$, dunque $U \cap V \neq \emptyset$. Dall'arbitrarietà di U e V si deduce che $(\mathbb{R}, \tau_0)$ non è T3. In particolare è T2 ma non regolare.

Lemma 1.8.30: *Sia (X, τ) uno spazio topologico T4 separabile e sia $D \subset X$ chiuso e discreto, allora $|D| < 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$.*

Dimostrazione. Sia $Q \subset X$ denso al più numerabile di (X, τ) e sia $S \subset D$. Essendo $\tau_{|_D}$ la topologia discreta su D, S è chiuso in $(D, \tau_{|_D})$, ma quindi $\exists C \subset X$ chiuso in (X, τ) t.c. $S = C \cap D$ ed analogamente per $D \setminus S$ $\exists C' \subset X$ chiuso in (X, τ) t.c. $D \setminus S = C' \cap D$, questo dimostra che S e $D \setminus S$ sono chiusi di (X, τ). Ma essendo (X, τ) T4 e $S \cap (D \setminus S) = \emptyset$ si ha che $\exists U_S, V_S \in \tau$ t.c. $U_S \cap V_S = \emptyset$ e $S \subset U_S$, $D \setminus S \subset V_S$. Definiamo la funzione $f : \mathcal{P}(D) \to \mathcal{P}(Q)$ t.c. $f(S) = Q \cap U_S$. Dimostriamo che f è iniettiva. Siano $S, T \in \mathcal{P}(D)$ t.c. $S \neq T$, a meno di invertirli possiamo supporre che $S \setminus T \neq \emptyset$. Ora $S \setminus T \subset S \subset U_S$ e contemporaneamente $S \setminus T \subset D \setminus T \subset V_T$, dunque $S \setminus T \subset U_S \cap V_T$, inclusione che implica $U_S \cap V_T \neq \emptyset$. Ma $U_S \cap V_T \in \tau$, dunque per densità $(U_S \cap V_T) \cap Q \neq \emptyset$, cioè $\exists q \in (U_S \cap V_T) \cap Q \subset U_S \cap Q = f(S)$. Ricordiamo che $U_T \cap V_T = \emptyset$, quindi essendo $q \in V_T$ si ha $q \notin U_T$ che implica $q \notin U_T \cap Q = f(T)$. Dunque $f(S) \neq f(T)$ e f è iniettiva. Ma questo, per quanto noto dalla teoria degli insiemi, ci dice che $|D| < |\mathcal{P}(D)| \leq |\mathcal{P}(Q)| = 2^{|Q|} \leq 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$. □

Esempio 1.8.31 (Regolare $\not\Rightarrow$ normale: piano di Sorgenfrey): Consideriamo la retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}^2, \tau^2_{\text{sfy}})$ presentato nell'esempio 1.6.15, per quanto visto sempre nell'esempio 1.6.15 si ha che τ^2_{sfy} è più fine della topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$, dunque anche $(\mathbb{R}^2, \tau^2_{\text{sfy}})$ è T1. Dimostriamo che è T3. Siano $x \in \mathbb{R}^2$ e $C \subset \mathbb{R}^2$ chiuso t.c. $x \notin C$, allora $\exists a_x, b_x, c_x, d_x \in \mathbb{R}$ con $a_x < b_x$ e $c_x < d_x$ t.c. $x \in [a_x, b_x) \times [c_x, d_x) \subset C^c$. Notiamo che $\mathbb{R}^2 \setminus ([a_x, b_x) \times [c_x, d_x))$ è unione di elementi di τ^2_{sfy} (in particolare è unione di rettangoli del tipo $[a, b) \times [c, d)$), dunque è anch'esso in τ^2_{sfy} dunque $U = [a_x, b_x) \times [c_x, d_x)$ e $C \subset$ e $V = \mathbb{R}^2 \setminus ([a_x, b_x) \times [c_x, d_x))$ sono due aperti di $(\mathbb{R}^2, \tau^2_{\text{sfy}})$ disgiunti t.c. $x \in U$ e $C \subset V$. Vediamo che non è T4. Nell'esempio 1.6.15 abbiamo dimostrato che il piano di sorgenfrey è separabile e che $D = \{(x, y \in \mathbb{R}^2) \mid y = -x\}$ è un suo sottoinsieme discreto, però $|d| = |\mathbb{R}|$, dunque per il lemma precedente $(\mathbb{R}^2, \tau^2_{\text{sfy}})$ non può essere T4. In particolare $(\mathbb{R}^2, \tau^2_{\text{sfy}})$ è regolare ma non è normale.

Esempio 1.8.32 (Prodotto di T4 che non è T4): Si verifica facilmente che il piano di Sorgenfrey $(\mathbb{R}^2, \tau^2_{\text{sfy}})$ non è altro che lo spazio topologico prodotto tra due rette di Sorgenfrey (vedi esempio 1.4.8) e per quanto visto nell'esempio precedente non è T4, ma la retta di Sorgenfrey è T4, dunque il piano di Sorgenfrey è un esempio di spazio prodotto di T4 che però non è T4.

Osservazione 1.8.33: Le proprietà di separazione sono invarianti per omeomorfismo.

1.9 Ricoprimenti

Definizione 1.9.1 (Ricoprimento): Sia X un insieme. Un **ricoprimento** di X è una famiglia $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ t.c. $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.

Definizione 1.9.2 (Ricoprimento aperto o chiuso): Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un ricoprimento $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ di X è detto **aperto** rispetto a τ se $\mathcal{U} \subset \tau$, mentre è detto **chiuso** rispetto a τ se $\forall U \in \mathcal{U}$ U è chiuso in (X, τ).

Definizione 1.9.3 (Ricoprimento fondamentale): Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un ricoprimento $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ di X è detto **fondamentale** rispetto a τ se

$$\forall A \in \mathcal{P}(X) \; A \in \tau \iff \forall U \in \mathcal{U} \; A \cap U \in \tau_{|U}$$

o equivalentemente se

$$\forall A \in \mathcal{P}(X) \; A \text{ è chiuso} \iff \forall U \in \mathcal{U} \; A \cap U \text{ è chiuso in } (U, \tau_{|U})$$

Osservazione 1.9.4: La freccia $(\Rightarrow)$ in entrambe le formulazioni è sempre verificata.

Nel seguito, quando sarà fissato uno spazio topologico (X, τ), preso un ricoprimento di X nel dire che è aperto, chiuso o fondamentale si sottintenderà sempre rispetto alla topologia τ presentata insieme ad X.

Teorema 1.9.5: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici, $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ un ricoprimento fondamentale di X e $f : X \to Y$ una funzione. Allora f è continua $\iff$ $\forall U \in \mathcal{U}$ $f_{|_U} : U \to Y$ è continua (rispetto alla topologia di sottospazio di U).*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$. Vera perché restrizione di continue è continua (vedi proposizione 1.6.8).

$(\Leftarrow)$. Sia $A \in \tau_Y$, per vedere che $f^{-1}(A) \in \tau_X$, essendo $\mathcal{U}$ fondamentale, basta vedere che $\forall U \in \mathcal{U}$ $f^{-1}(A) \cap U \in \tau_X$. Sia quindi $U \in \mathcal{U}$, si ha $f^{-1}(A) \cap U = f_{|_U}(A) \in \tau_X$ per ipotesi. □

Definizione 1.9.6 (Famiglia localmente finita): Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una famiglia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ è detta **localmente finita** se

$$\forall x \in X\ \exists U \in \mathcal{I}(x) \text{ t.c. } |\{F \in \mathcal{F} \mid F \cap U \neq \emptyset\}| < \aleph_0$$

Lemma 1.9.7: *Siano (X, τ) spazio topologico, $n \in \mathbb{N}$ e $\{Y_i\}_{i \in \{1,...,n\}} \subset \mathcal{P}(X)$. Allora $\overline{\bigcup_{i=1}^n Y_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{Y_i}$.*

Dimostrazione. $\forall i \in \{1, ..., n\}$ $\overline{Y_i} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^n Y_i} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n \overline{Y_i} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^n Y_i}$. Viceversa $\forall i \in \{1, ..., n\}$ $Y_i \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{Y_i} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n Y_i \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{Y_i}$ ma essendo $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\bigcup_{i=1}^n \overline{Y_i}$ è chiuso, dunque $\overline{\bigcup_{i=1}^n Y_i} \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{Y_i}$. □

Osservazione 1.9.8: Dalla dimostrazione del lemma precedente si nota che l'inclusione $\bigcup_{i \in I} \overline{Y_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}$ si ha sempre, qualsiasi sia la cardinalità dell'insieme di indici I.

Teorema 1.9.9: *Siano (X, τ) spazio topologico, I un insieme di indici e $\{Y_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia localmente finita. Allora $\overline{\bigcup_{i \in I} Y_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{Y_i}$*

Dimostrazione. Abbiamo detto nell'osservazione 1.9.8 che sempre si ha $\bigcup_{i \in I} \overline{Y_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}$. Vediamo l'altra inclusione. Sia $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}$, per ipotesi $\exists U \in \mathcal{I}(x)$ t.c. $J := \{i \in I \mid U \cap Y_i \neq \emptyset\}$ è finito. Mostriamo che $x \in \overline{\bigcup_{i \in J} Y_i}$ e per farlo dimostriamo che $\forall V \in \mathcal{I}(x)$ si ha $V \cap \left(\bigcup_{i \in J} Y_i\right) \neq \emptyset$. Sia $V \in \mathcal{I}(x)$ allora $U \cap V \in \mathcal{I}(x)$ ed essendo $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}$ si ha necessariamente $(U \cap V) \cap \left(\bigcup_{i \in I} Y_i\right) \neq \emptyset$, ma $U \cap \left(\bigcup_{i \notin J} Y_i\right) = \emptyset$ allora $(U \cap V) \cap \left(\bigcup_{i \in J} Y_i\right) \neq \emptyset$ e $V \cap \left(\bigcup_{i \in I} Y_i\right) \neq \emptyset$. Dunque essendo per il lemma precedente $\overline{\bigcup_{i \in J} Y_i} = \bigcup_{i \in J} \overline{Y_i}$ si ha $x \in \overline{\bigcup_{i \in J} Y_i} = \bigcup_{i \in J} \overline{Y_i} \subset \bigcup_{i \in I} \overline{Y_i}$. □

Esempio 1.9.10:

- $\{\{q\}\}_{q\in\mathbb{Q}}$ non è localmente finita in $(\mathbb{R}, \tau_E)$.
- $\{[n, n+1]\}_{n\in\mathbb{N}}$ è localmente finita in $(\mathbb{R}, \tau_E)$.

Teorema 1.9.11: *Siano (X, τ) spazio topologico e $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ un ricoprimento di X. Valgono le seguenti implicazioni*

(1) se $\mathcal{U}$ è aperto $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ è fondamentale;

(2) se $\mathcal{U}$ è chiuso e localmente finito $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ è fondamentale.

Dimostrazione. (1). Sia $A \subset X$ t.c. $\forall U \in \mathcal{U}$ $A \cap U \in \tau_{|U}$ allora chiaramente $A \cap U \in \tau$ e $A = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} A \cap U \in \tau$.

(2). Sia $C \subset X$ t.c. $\forall U \in \mathcal{U}$ $C \cap U$ è chiuso in $(U, \tau_{|U})$. Allora essendo $\forall U \in \mathcal{U}$ U chiuso in (X, τ) si ha che $C \cap U$ è chiuso anche in (X, τ) per ogni $U \in \mathcal{U}$. Mostriamo che C è chiuso in (X, τ). Essendo ogni $\mathcal{U}$ ricoprimento chiuso $\forall U \in \mathcal{U}$ $C \cap U$ è chiuso in (X, τ). Inoltre essendo $\mathcal{U}$ localmente finita anche $\{C \cap U\}_{U\in\mathcal{U}}$ è localmente finita, dunque per il teorema precedente si ha

$$C = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} C \cap U = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} \overline{C \cap U} = \overline{\bigcup_{U\in\mathcal{U}} C \cap U} = \overline{C}$$

dunque C è chiuso in (X, τ). □

Capitolo 2

Connessione e compattezza

2.1 Connessione e connessione per archi

Definizione 2.1.1 (Clopen): Sia (X, τ) uno spazio topologici. Un insieme $E \subset X$ è detto **clopen** se è sia aperto che chiuso in (X, τ).

Definizione 2.1.2 (Spazio sconnesso): Uno spazio topologico (X, τ) è detto **sconnesso** se vale una tra le seguenti affermazioni equivalenti

- $\exists A, B \in \tau$ t.c. $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$.
- $\exists A, B$ chiusi t.c. $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$.
- $\exists A \subset X$ clopen t.c. $A \neq \emptyset, X$.

Definizione 2.1.3 (Spazio connesso): Uno spazio topologico (X, τ) è detto **connesso** se non è sconnesso.

Teorema 2.1.4: *Consideriamo lo spazio topologico* $(\mathbb{R}, \tau_E)$. *Il sottospazio* $([0,1], (\tau_E)_{|[0,1]})$ *è connesso.*

Dimostrazione. Sia $A \subset [0,1]$, $A \neq \emptyset$, clopen in $([0,1], (\tau_E)_{|[0,1]})$. A meno di sostituire A con $[0,1] \setminus A$ si può supporre che $0 \in A$. Dimostriamo che $A = [0,1]$. Consideriamo $\bar{t} := \sup\{t \in [0,1] \mid [0,t] \subset A\}$, $[0,0] = \{0\} \subset A$, dunque il sup è fatto su un insieme non vuoto e quindi $\bar{t}$ è ben definito. Vediamo che $\bar{t}$ è un massimo, cioè che $\bar{t} \in [0,1]$. Per definizione di sup $\exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ t.c. $t_n \to t_0$ e t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ $[0, t_n] \subset A$, $t_n \leq t_{n+1}$ e $t_n \leq \bar{t}$. Ma allora $[0, \bar{t}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, t_n] \subset A$ ed essendo A chiuso si ha $[0, \bar{t}] = \overline{[0, \bar{t})} \subset A$, dunque $\bar{t} \in [0,1]$. Ora se $\bar{t} = 1$ allora $[0,1] \subset A$ e quindi $A = [0,1]$. Se invece fosse $\bar{t} < 1$, allora essendo A aperto $\exists \delta > 0$ t.c. $[\bar{t}, \bar{t} + \delta) \subset A$. Quindi se $\delta' < \delta$ si ha $[0, \bar{t} + \delta'] \subset A$ che è una contraddizione in quanto $\bar{t}$ non sarebbe il sup dell'insieme $\{t \in [0,1] \mid [0,t] \subset A\} \ni \bar{t} + \delta'$. $\square$

Definizione 2.1.5 (Insieme convesso): Un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$ è detto **convesso** se $\forall x, y \in C$ e $\forall t \in [0,1]$ si ha $tx + (1-t)y \in C$.

Chiameremo gli insiemi convessi di $\mathbb{R}$ **intervalli**.

Osservazione 2.1.6: Notiamo che gli intervalli sono tutti e soli i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ della forma

$$(a,b), [a,b), (a,b], [a,b]$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, oppure quelli della forma

$$(-\infty, b), (-\infty, b], (a, +\infty), [a, +\infty)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.1.7 (Cammino): Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una funzione $\gamma : [0,1] \to X$ continua è chiamata **cammino** in (X, τ).

Quando si parla di cammini, come topologia su $[0,1]$, si sottintende sempre la topologia di sottospazio ereditata da quella euclidea su $\mathbb{R}$.

Definizione 2.1.8 (Giunzione di cammini): Siano (X, τ) uno spazio topologico e $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ due cammini in (X, τ) t.c. $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Definiamo la **giunzione** tra γ_1 e γ_2 la funzione $\gamma_1 * \gamma_2 : [0,1] \to X$ t.c. $\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{se } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$

Proposizione 2.1.9: *Siano (X, τ) uno spazio topologico e $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ due cammini in (X, τ) t.c. $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. La giunzione $\gamma_1 * \gamma_2$ è continua, cioè è a sua volta un cammino.*

Dimostrazione. Le funzioni $m_1 : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to [0,1]$ t.c. $m_1(t) = 2t$ e $m_2 : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to [0,1]$ t.c. $m_2(t) = 2t - 1$ sono continue e le restrizioni $(\gamma_1 * \gamma_2)_{|_{\left[0, \frac{1}{2}\right]}} = \gamma_1 \circ m_1$ e $(\gamma_1 * \gamma_2)_{|_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]}} = \gamma_2 \circ m_2$ sono composizioni di continue e quindi continue. Inoltre il ricoprimento di $[0,1]$ fatto da $\left\{ \left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\}$ è chiuso e finito ($\Rightarrow$ localmente finito), dunque è fondamentale. Si conclude usando il teorema 1.9.5. □

Definizione 2.1.10 (Spazio connesso per archi): Uno spazio topologico (X, τ) è **connesso per archi** se $\forall x, y \in X$ $\exists \gamma : [0,1] \to X$ cammino t.c. $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Si dice che un tale cammino **congiunge** x con y.

Teorema 2.1.11 (Connesso per archi $\Rightarrow$ connesso): *Uno spazio topologico (X, τ) connesso per archi è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che (X, τ) sia connesso per archi e sconnesso. Allora $\exists A, B \in \tau$ t.c. $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$. Siano $a \in A$ e $b \in B$, essendo (X,τ) connesso per archi, si ha che $\exists\gamma : [0,1] \to X$ cammino t.c. $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$. Per continuità di γ si ha che $\gamma^{-1}(A), \gamma^{-1}(B) \in \tau$ ed inoltre $0 \in \gamma^{-1}(A) \neq \emptyset$ e $1 \in \gamma^{-1}(B) \neq \emptyset$. Poiché $X = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$ si ha che $\gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(B) = \gamma^{-1}(X) = [0,1]$ e $\gamma^{-1}(A) \cap \gamma^{-1}(B) = \gamma^{-1}(A \cap B) = \emptyset$, dunque si avrebbe $[0,1]$ sconnesso che è un assurdo. □

Teorema 2.1.12: *Siano (X,τ_X) e (Y,τ_Y) spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione. Se f è continua allora:*

(1) se (X,τ_X) è connesso allora $(f(X), (\tau_Y)_{|f(X)})$ è connesso;

(2) se (X,τ_X) è connesso per archi allora $(f(X), (\tau_Y)_{|f(X)})$ è connesso per archi.

Dimostrazione. (1). Supponiamo per assurdo $(f(X), (\tau_Y)_{|f(X)})$ sconnesso, allora $\exists A, B \in (\tau_Y)_{|f(X)}$ t.c. $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ e $f(X) = A \cup B$. f continua come mappa $X \to Y$ $\Rightarrow f$ continua come mappa $X \to f(X)$, dunque $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \tau_X$. Inoltre $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = \emptyset$, essendo $f(X) = A \cup B$ vale $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ e sono non vuoti, perché $A \cap f(X), B \cap f(X) \neq \emptyset$. Dunque dovrebbe essere X sconnesso, che è un assurdo.

(2). Siano $y, y' \in f(X)$ e $x, x' \in X$ t.c. $y = f(x)$ e $y' = f(x')$. Essendo (X,τ) connesso per archi si ha che $\exists\gamma : [0,1] \to X$ cammino t.c. $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = x'$, ma allora preso $f \circ \gamma : [0,1] \to f(X)$ si ha che è un cammino (in quanto composizione di continue è continua) e congiunge y con y'. □

Teorema 2.1.13 (Connessi di $\mathbb{R}$): *Sia $A \subset \mathbb{R}$ con l'usuale topologia euclidea, allora sono equivalenti:*

(1) A è un intervallo;

(2) A è connesso per archi;

(3) A è connesso.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Siano $a, b \in A$ t.c. $a \leq b$, per ipotesi $[a,b] \subset A$. La funzione $\gamma : [0,1] \to A$ t.c. $\gamma(t) = tb + (1-t)a$ è un cammino e congiunge a con b.

(2) $\Rightarrow$ (3). Si è dimostrato che è sempre vero.

(3) $\Rightarrow$ (1). Se per assurdo A fosse un connesso ma non un intervallo, allora $\exists a, b \in A$ t.c. $a \neq b$, supponiamo $a < b$, e $[a,b] \not\subset A$. Ma allora preso $c \in (a,b)$ si ha che $A = ((-\infty, c) \cap A) \cup ((c, +\infty) \cap A)$ e $(-\infty, c) \cap A, (c, +\infty) \cap A$ sono aperti in A, disgiunti e non vuoti. Dunque A è sconnesso, che è un assurdo. □

Teorema 2.1.14 (dei valori intermedi): *Sia (X, τ) uno spazio topologico connesso e consideriamo $(\mathbb{R}, \tau_E)$. Se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione continua $\Rightarrow \forall x, y \in f(X)$ f assume ogni valore compreso tra $f(x)$ e $f(y)$.*

Dimostrazione. Infatti per continuità $f(X)$ è un sottospazio connesso di $(\mathbb{R}, \tau_E)$, dunque è un intervallo, da cui segue la tesi. $\square$

Proposizione 2.1.15: *Sia (X, τ) uno spazio topologico connesso e $(Y, \mathcal{P}(Y))$ un insieme munito della topologia discreta. Se $f : X \to Y$ è continua $\Rightarrow$ f è costante.*

Dimostrazione. Sia $y \in f(X)$, allora $\{y\} \in \mathcal{P}(Y)$ è clopen non vuoto in $(Y, \mathcal{P}(Y))$, dunque per continuità $f^{-1}(\{y\})$ è clopen non vuoto (perché $y \in f(X)$) in (X, τ) che è connesso, dunque $f^{-1}(\{y\}) = X$. $\square$

Definizione 2.1.16: Siano (X, τ) uno spazio topologico e $(Y, \tau_{|_Y})$ un suo sottospazio. Preso $A \subset Y$ indichiamo con $\overline{A}^Y$ la chiusura di A come sottoinsieme dello spazio topologico $(Y, \tau_{|_Y})$.

Lemma 2.1.17: *Siano (X, τ) uno spazio topologico e $(Y, \tau_{|_Y})$ un suo sottospazio. Preso $Z \subset Y$ vale che $\overline{Z}^Y = \overline{Z} \cap Y$.*

Dimostrazione.

$$\overline{Z}^Y = \bigcap_{\substack{D \text{ chiuso in } Y \\ Z \subset D \subset Y}} D = \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso in } X \\ Z \subset C}} C \cap Y = Y \cap \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso in } X \\ Z \subset C}} C = Y \cap \overline{Z}$$

$\square$

Osservazione 2.1.18: Non vale lo stesso risultato con le parti interne. Infatti prendiamo $(X, \tau) = (\mathbb{R}, \tau_E)$ e $Y = Z = \mathbb{Q}$, allora la parte interna di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ è $\emptyset$, mentre la parte interna di $\mathbb{Q}$ in sé stesso è sé stesso.

Proposizione 2.1.19: *Siano (X, τ) uno spazio topologico e $(Y, \tau_{|_Y}), (Z, \tau_{|_Z})$ due suoi sottospazi t.c. $Z \subset Y \subset \overline{Z}$. Allora se $(Z, \tau_{|_Z})$ è connesso anche $(Y, \tau_{|_Y})$ è connesso.*

Dimostrazione. Sia A clopen non vuoto di $(Y, \tau_{|_Y})$, dimostriamo che $A = Y$. Notiamo che $\overline{Z}^Y = \overline{Z} \cap Y = Y$, dunque Z è denso in $(Y, \tau_{|_Y})$. Quindi essendo A aperto in Y si ha che $A \cap Z \neq \emptyset$ ed inoltre per la natura nella topologia di sottospazio $A \cap Z$ è clopen in $(Z, \tau_{|_Z})$, dunque per connessione di quest'ultimo spazio, si ha che $A \cap Z = Z$, cioè $Z \subset A$. Quindi usando il contenimento trovato ed il fatto che A è chiuso in $(Y, \tau_{|_Y}$ si ottiene che

$$Y = \overline{Z}^Y \subset \overline{A}^Y = A$$

cioè $Y \subset A$ e quindi $Y = A$, che è quanto voluto. $\square$

Corollario 2.1.20: *Siano* (X, τ) *uno spazio topologico e* $(Z, \tau_{|Z})$ *un suo sottospazio. Se* $(Z, \tau_{|Z})$ *è connesso anche* $(\overline{Z}, \tau_{|\overline{Z}})$ *è connesso.*

Dimostrazione. Basta usare la proposizione precedente con $(Y, \tau_{|Y}) = (\overline{Z}, \tau_{|\overline{Z}})$. □

Esempio 2.1.21 (Connesso $\not\Rightarrow$ connesso per archi: seno del topologo): Consideriamo $(X, \tau) = (\mathbb{R}^2, \tau_E)$ e $Z = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid x \in (0, +\infty)\right\}$. Poniamo $Y = Z \cup \{(0,0)\}$, lo spazio topologico $(Y, (\tau_E)_{|Y})$ è detto **seno del topologo**.

Valgono le seguenti proprietà:

- *Il seno del topologo è connesso.*

  Infatti, essendo Z immagine della funzione continua $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ t.c. $g(x) = \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ e $(0, +\infty)$ con la topologia di sottospazio ereditata da $(\mathbb{R}, \tau_E)$ è connesso. Ed inoltre $(0,0) \in \overline{Z}$ in quanto

  $$(0,0) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n\pi}, 0\right) = \lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n\pi}\right)$$

  e $\left(g\left(\frac{1}{n\pi}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset Z$, dunque usando il teorema 1.5.8 (ricordando che sottospazio di N1 è N1) si ha che $(0,0) \in \overline{Z}$. Quindi $(Y, (\tau_E)_{|Y})$ è connesso per la proposizione 2.1.19.

- *Il seno del topologo non è connesso per archi.*

  Infatti non possiamo connettere l'origine a nessun altro punto di Y. Dimostriamo che tutti i cammini che partono dall'origine sono costanti. Sia $\gamma : [0,1] \to Y$ un cammino t.c. $\gamma(0) = (0,0)$, dimostriamo che $\gamma^{-1}(\{(0,0)\})$ è clopen in $[0,1]$, questo basta per concludere che $\gamma^{-1}(\{(0,0)\}) = [0,1]$ in quanto $\gamma^{-1}(\{(0,0)\})$ sarebbe clopen, non vuoto (perché $0 \in \gamma^{-1}(\{(0,0)\})$) in $[0,1]$ che è connesso. Il fatto che $\gamma^{-1}(\{(0,0)\})$ è chiuso segue dalla continuità di γ e dal fatto che $\{(0,0)\}$ è chiuso in Y (è chiuso perché $(Y, (\tau_E)_{|Y})$ è T1 essendo sottospazio di un T1). Vediamo che $\gamma^{-1}(\{(0,0)\})$ è aperto. Sia $t_0 \in [0,1]$ t.c. $\gamma(t_0) = (0,0)$, poiché γ è continua, se π_y è la proiezione sull'ordinata, si ha che $\pi_y \circ \gamma$ è continua e quindi $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1]$ vale $|\pi_y(\gamma(t))| \leq \frac{1}{2}$ (perché $\pi_y \circ \gamma(t_0) = 0$). Dimostriamo che $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1]$ vale $\gamma(t) = (0,0)$, da cui segue che $\gamma^{-1}(\{(0,0)\})$ è aperto in $[0,1]$. Supponiamo per assurdo che $\exists t_1 \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1]$ t.c. $\gamma(t_1) = (a,b)$ con $(a,b) \in X = Y \setminus \{(0,0)\}$, cioè con $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Poiché γ è continua, se π_x è la proiezione sull'ascissa, si ha che $\pi_x \circ \gamma$ è continua. Ora $\pi_x(\gamma(t_0)) = 0$ e $\pi_x(\gamma(t_1) = a > 0$ e se $I_{t_0,t_1} = \{st_1 + (1-s)t_0 \mid s \in [0,1]\} \subset [0,1]$ si ha che I_{t_0,t_1} è connesso, per cui lo è anche $\pi_x(\gamma(I_{t_0,t_1}))$, ma $0, a \in \pi_x(\gamma(I_{t_0,t_1}))$ allora $[0,a] \subset \pi_x(\gamma(I_{t_0,t_1}))$ per connessione. Adesso notiamo che ovviamente $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \in (0,a)$ e quindi

$\exists t_2 \in I_{t_0,t_1}$ t.c. $\pi_x(\gamma(t_2)) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, cioè

$$\gamma(t_2) = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}, \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right) = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}, 1\right)$$

ma quindi $t_2 \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \cap [0,1]$ con $\pi_y(\gamma(t_2)) = 1$, che è un assurdo per la scelta di ε.

Lemma 2.1.22: *Siano (X,τ) uno spazio topologico, I un insieme di indici e $\{(Y_i, \tau_{|_{Y_i}})\}_{i\in I}$ suoi sottospazi connessi. Se $\bigcap_{i\in I} Y_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i\in I} Y_i$ con la topologia di sottospazio è connesso.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \bigcap_{i\in I} Y_i \neq \emptyset$. Sia $A \subset \bigcup_{i\in I} Y_i$ clopen non vuoto in $\bigcup_{i\in I} Y_i$. A meno di sostituire A col suo complementare in $\bigcup_{i\in I} Y_i$ possiamo supporre che $x_0 \in A$. $\forall i \in I$ $A \cap Y_i$ è clopen non vuoto in Y_i, dunque per connessione $\forall i \in I$ $A \cap Y_i = Y_i$, ma allora $A = \bigcup_{i\in I} A \cap Y_i = \bigcup_{i\in I} Y_i$. Questo mostra la connessione di $\bigcup_{i\in I} Y_i$. □

Definizione 2.1.23 (Componente connessa): Sia (X,τ) spazio topologico e $x_0 \in X$, definiamo la **componente connessa** di x_0 in (X,τ) il più grande sottospazio connesso di (X,τ) che contiene x_0 e la indicheremo con $C(x_0)$.

Osservazione 2.1.24: La definizione appena data è ben posta infatti vale che

$$C(x_0) = \bigcup_{\substack{C \subset X \text{ connesso} \\ x_0 \in C}} C$$

e l'unione appena scritta forma un sottospazio connesso di (X,τ) per il lemma precedente.

Teorema 2.1.25: *Sia (X,τ) uno spazio topologico, le componenti connesse di (X,τ) formano una partizione di X in chiusi.*

Dimostrazione. Chiaramente $X = \bigcup_{x\in X} C(x)$ e se $x, y \in X$ sono t.c. $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ allora $C(x) \cup C(y)$ è connesso , dunque per definizione $C(x) \cup C(y) \subset C(x), C(y)$ da cui $C(x) = C(y) = C(x) \cup C(y)$, dunque effettivamente le componenti connesse formano una partizione di X. Inoltre $\forall x \in X$, essendo $C(x)$ connesso, per il corollario 2.1.20, si ha che $\overline{C(x)}$ è sempre connesso, dunque per definizione $\overline{C(x)} \subset C(x)$, da cui $\overline{C(x)} = C(x)$ che è quindi chiuso in (X,τ). □

Corollario 2.1.26: *Sia (X,τ) uno spazio topologico. Se (X,τ) ha un numero finito di componenti connesse $\Rightarrow$ le componenti connesse sono anche aperte.*

Dimostrazione. Le componenti connesse sono sempre chiuse e se $\{C_k\}_{k\in\{1,\dots,n\}}$, $n \in \mathbb{N}$ sono le componenti connesse di (X,τ) allora $\forall j \in \{1,...,n\}$ si ha $C_j^c = \bigcup_{k\in\{1,\dots,n\}\setminus\{j\}} C_k$ che è unione finita di chiusi e che quindi è chiuso in (X,τ). □

Esempio 2.1.27: Le componenti connesse di $\mathbb{Q}$, visto come sottospazio di $(\mathbb{R}, \tau_E)$ sono i singleton, dunque sono infinite.

Definizione 2.1.28 (Spazio totalmente sconnesso): Uno spazio topologico (X, τ) è detto **totalmente sconnesso** se $\forall x \in X$ si ha $C(x) = \{x\}$.

Osservazione 2.1.29: Nell'esempio precedente si è detto che $(\mathbb{Q}, (\tau_E)_{|\mathbb{Q}})$ è totalmente sconnesso.

Teorema 2.1.30: *Sia (X, τ) uno spazio topologico, definiamo su X la seguente relazione*

$$\forall x, y \in X \ x \sim_a y \iff \exists \gamma : [0,1] \to X \text{ cammino che congiunge } x \text{ con } y$$

questa è una relazione d'equivalenza.

Dimostrazione. Chiaramente $\forall x \in X \ x \sim_a x$ attraverso il cammino costante. Se $x, y \in X$ e γ è un cammino che congiunge x con y allora $\overline{\gamma} : [0,1] \to X$ t.c. $\overline{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ è un cammino che congiunge y con x. Avendo dimostrato in precedenza che la giunzione di due cammini è un cammino si ha che la relazione definita è anche transitiva. □

Definizione 2.1.31 (Componente connessa per archi): Sia (X, τ) uno spazio topologico e $x \in X$. La **componente connessa per archi** di x in (X, τ) è la classe di equivalenza di x rispetto alla relazione d'equivalenza $\sim_a$ e la chiameremo $C_a(x)$. Inoltre l'insieme delle componenti connesse per archi di (X, τ) sarà indicato con $\pi_0(X, \tau)$ o anche solo con $\pi_0(X)$.

Osservazione 2.1.32: Le componenti connesse per archi, per costruzione, formano una partizione di X. Però in generale non sono né aperte né chiuse.

Esempio 2.1.33: Consideriamo il seno del topologo $(Y, (\tau_E)_{|Y})$ presentato nell'esempio 2.1.21, allora $\{(0,0)\}$ e $\left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid x \in (0, +\infty)\right\}$ sono due sue componenti connesse per archi e $\{(0,0)\}$ è chiuso ma non aperto in $(Y, (\tau_E)_{|Y})$, mentre $\left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid x \in (0, +\infty)\right\}$ è aperto ma non chiuso in $(Y, (\tau_E)_{|Y})$.

Definizione 2.1.34 (Spazio localmente connesso): Uno spazio topologico (X, τ) è detto **localmente connesso** se $\forall x \in X$ esiste un SFI di x fatto da intorni connessi.

Definizione 2.1.35 (Spazio localmente connesso per archi): Uno spazio topologico (X, τ) è detto **localmente connesso per archi** se $\forall x \in X$ esiste un SFI di x fatto da intorni connessi per archi.

Proposizione 2.1.36: *Sia (X,d) uno spazio metrico. Valgono le seguenti caratterizzazioni:*

(1) (X,d) è localmente connesso $\iff$ $\forall x \in X\ \exists U \in \mathcal{I}(x)$ connesso.

(2) (X,d) è localmente connesso per archi $\iff$ $\forall x \in X\ \exists U \in \mathcal{I}(x)$ connesso per archi.

Dimostrazione. In entrambi gli enunciati l'implicazione $(\Rightarrow)$ è ovvia.

Dimostriamo $(\Leftarrow)$. Sia $x \in X$ e consideriamo il SFI di x $\{B(x,2^{-n})\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sia $U \in \mathcal{I}(x)$ connesso connesso per archi, allora chiaramente $\{B(x,2^{-n}) \cap U\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un SFI connessi o connessi per archi per x. □

Osservazione 2.1.37 (Connesso $\not\Rightarrow$ localmente connesso: pettine razionale): Consideriamo $(\mathbb{R}^2,\tau_E)$ e il suo sottospazio siffatto $X = (\mathbb{R}\times\{0\})\cup(\mathbb{Q}\times\mathbb{R})$, $(X,(\tau_E)_{|X})$ è detto **pettine razionale infinito**. Vale che $(X,(\tau_E)_{|X})$ è connesso per archi ma non localmente connesso. Infatti presi $x,y \in X$ è facile costruire un cammino che congiunge x con y (fare un disegno). Invece se $(q,y) \in X$ con $y \neq 0$ allora $\exists \delta > 0$ t.c. $B(x,\delta)\cap\mathbb{R}\times\{0\} = \emptyset$, dunque $B(x,\delta)\cap X$ è un intorno di x in $(X,(\tau_E)_{|X})$ che non contiene nessun intorno connesso.

Proposizione 2.1.38: *Sia (X,τ) uno spazio topologico localmente connesso per archi, allora le componenti connesse per archi di (X,τ) sono aperte e coincidono con le componenti connesse di (X,τ).*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X$, vediamo che $C_a(x_0) \in \tau$. Dimostriamo che $C_a(x_0)$ è intorno di ogni suo punto. Sia $x \in C_a(x_0)$ e sia $U \in \mathcal{I}(x)$ connesso per archi, allora $U \subset C_a(x_0)$. Infatti $\forall y \in U$ si ha che $y \sim x$, ma $x \sim x_0$, dunque $y \sim x_0$ e quindi $y \in C_a(x_0)$. Dimostriamo ora che $C_a(x_0) = C(x_0)$. Infatti chiaramente $C_a(x_0) \subset C(x_0)$ e $C_a(x_0)^c = \bigcup_{x\notin C_a(x_0)} C_a(x)$ che è unione di aperti e quindi è aperto. Allora $C_a(x_0)$ è clopen in (X,τ) e quindi $C_a(x_0)\cap C(x_0)$ è clopen in $C(x_0)$ ed è non vuoto (perché contiene x_0) dunque $C_a(x_0)\cap C(x_0) = C(x_0)$, che implica $C(x_0) \subset C_a(x_0)$. □

Corollario 2.1.39: *Sia (X,τ) uno spazio topologico localmente connesso per archi e sia $U \in \tau$. Allora U è connesso $\iff$ è connesso per archi.*

Dimostrazione. U è localmente connesso per archi. Infatti preso $x \in U$ e preso $V \in \mathcal{I}_U(x)$, essendo $U \in \tau$ si ha che $V \in \mathcal{I}(x)$ (cioè V è intorno di x anche in X), dunque per locale connessione per archi di (X,τ) esiste $W \in \mathcal{I}(x)$ connesso per archi t.c. $W \subset V$, ma $W \subset U$, dunque $W \in \mathcal{I}_U(x)$. Questo prova quanto voluto. Adesso se U è connesso per archi allora è connesso, viceversa se è connesso, preso $x \in U$, per la proposizione precedente si ha $U \subset C^U(x) = C^U_a(x)$ e quindi U è connesso per archi. In cui $C^U(x)$ e $C^U_a(x)$ sono rispettivamente la componente connessa e connessa per archi di x in $(U,\tau_{|U})$. □

Osservazione 2.1.40: La connessione e la connessione per archi sono proprietà invarianti per omeomorfismo.

Proposizione 2.1.41: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici connessi, allora $X \times Y$ con la topologia prodotto è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\exists A, B \subset X \times Y$ aperti, non vuoti t.c. $X \times Y = A \cup B$. Dimostriamo che $A \cap B \neq \emptyset$.

Osserviamo che, se π_X è la proiezione sulla prima componente, si ha he $\pi_X(A) \cup \pi_X(B) = X$, inoltre $\pi_X(A), \pi_X(B)$ sono aperti non vuoti (perché le proiezioni sulle componenti sono mappe aperte). Dunque per connessione di (X, τ_X) deve essere $\pi_X(A) \cap \pi_X(B) \neq \emptyset$. Fissiamo $x_0 \in \pi_X(A) \cap \pi_X(B)$ e consideriamo il sottospazio di $X \times Y$ formato da $\{x_0\} \times Y$ che è ovviamente omeomorfo a (Y, τ_Y), dunque per l'osservazione precedente è anch'esso connesso. Siano $A' = (\{x_0\} \times Y) \cap A$ e $B' = (\{x_0\} \times Y) \cap B$, questi sono due aperti di $\{x_0\} \times Y$ t.c. $A' \cup B' = \{x_0\} \times Y$ e quindi per connessione $A' \cap B' \neq \emptyset$, ma $A' \cap B' = (\{x_0\} \times Y) \cap (A \cap B)$, dunque necessariamente $A \cap B \neq \emptyset$. □

Proposizione 2.1.42: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici connessi per archi, allora $X \times Y$ con la topologia prodotto è connesso per archi.*

Dimostrazione. Presi $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ e presi $\gamma_X : [0, 1] \to X$ che congiunge x con x' e $\gamma_Y : [0, 1] \to Y$ che congiunge y con y' si ha che $(\gamma_X, \gamma_Y) : [0, 1] \to X \times Y$ t.c. $(\gamma_X, \gamma_Y)(x, y) = (\gamma_X(x), \gamma_Y(y))$ è un cammino (in quanto le componenti sono entrambe continue) in $X \times Y$ che congiunge (x, y) con (x', y'). □

Lemma 2.1.43: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione continua. Allora f induce la ben definita funzione $\pi_0 f : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ t.c. $\pi_0 f(C_a(x)) = C_a(f(x))$.*

Dimostrazione. Sia $f : X \to Y$ continua. Se $x, x' \in X$ sono $x \sim_a x'$ attraverso il cammino γ, allora $f(x) \sim_a f(x')$ mediante il cammino (f è continua) $f \circ \gamma$. □

Teorema 2.1.44: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici omeomorfi, allora $|\pi_0(X)| = |\pi_0(Y)|$.*

Dimostrazione. Sia $f : X \to Y$ l'omeomorfismo, per il lemma precedente f induce una funzione $\pi_0 f : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ t.c. $\pi_0 f(C_a(x)) = C_a(f(x))$ è ben definita. Inoltre $\pi_0 f$ è una bigezione, infatti l'inversa è data da $\pi_0 g$ con $g : Y \to X$ l'inversa di f, che è ben definita perché anche g è continua. Infatti preso $y \in Y$ si ha $(\pi_0 f \circ \pi_0 g)(C_a(y)) = \pi_0 f(C_a(g(y))) = C_a(f(g(y))) = C_a(y)$ e similmente preso $x \in X$ si ha $(\pi_0 g \circ \pi_0 f)(C_a(x)) = C_a(x)$. □

2.2 Compattezza

Definizione 2.2.1 (Spazio topologico compatto): Uno spazio topologico (X, τ) è detto **compatto** se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito. Cioè se $\forall \mathfrak{U} \subset \tau$ ricoprimento di X $\exists \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ricoprimento di X t.c. $|\mathfrak{U}'| < \aleph_0$.

Esempio 2.2.2: $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$ non è uno spazio compatto. Infatti $\mathfrak{U} = \{B(0, n)_{n \in \mathbb{N}}\} \subset \tau_E$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}^n$ che non ammette sottoricoprimenti finiti.

Osservazione 2.2.3: Qualsiasi spazio topologico finito è compatto.

Teorema 2.2.4: *Lo spazio topologico* $([0,1], (\tau_E)_{|[0,1]})$ *è compatto.*

Dimostrazione. Sia I un'insieme di indici e $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I} \subset (\tau_E)_{|[0,1]}$ un ricoprimento aperto di $[0,1]$. Sia $A = \{t \in [0,1] \mid \exists J \subset I$ con $|J| < \aleph_0$ t.c. $[0,t] \subset \bigcup_{i \in J} U_i\}$. Per ottenere la tesi basta mostrare che $1 \in A$.

Essendo $\mathfrak{U}$ ricoprimento di $[0,1]$ ovviamente $0 \in A$ e quindi $A \neq \emptyset$, inoltre presi $i_0 \in I$ t.c. $\{0\} \subset U_{i_0}$, essendo U_{i_0} aperto, si ha che $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $[0, \varepsilon) \subset U_{i_0}$ e quindi $\frac{\varepsilon}{2} \in A$. Inoltre se $a \in A$ allora $[0, a] \subset A$. Infatti preso $a \in A$ e $a' \in [0,1]$ t.c. $0 \leq a' \leq a$ allora preso $J_a \subset I$ t.c. $|J_a| < \aleph_0$ e $[0, a] \subset \bigcup_{i \in J_a} U_i$ essendo $[0, a'] \subset [0, a] \subset \bigcup_{i \in J_a} U_i$ si ha che $a' \in A$. Prendiamo $s = \sup A$ allora chiaramente $[0, s) \subset A$, in quanto se esistesse $b \in [0, s)$ t.c. $b \notin A$ allora $[0, b]$ non potrebbe essere ricoperto da finiti elementi di $\mathfrak{U}$ e di conseguenza nessun altro $c \geq b$ potrebbe stare in A, dunque sarebbe $b = \sup A$, che è un assurdo essendo $b < s$.

Dimostriamo che $s \in A$. $\mathfrak{U}$ è ricoprimento di $[0,1] \ni s \Rightarrow \exists i_s \in I$ t.c. $s \in U_{i_s}$ ed essendo U_{i_s} aperto, si ha che $\exists \delta > 0$ t.c. $[s - \delta, s] \subset U_{i_s}$. Ma $s - \frac{\delta}{2} \in [0, s) \subset A \Rightarrow \exists J_\delta \in I$ con $|J_\delta| < \aleph_0$ t.c. $[0, s - \frac{\delta}{2}] \subset \bigcup_{i \in J_\delta} U_i \Rightarrow [0, s] \subset \bigcup_{i \in J_\delta} U_i \cup U_{i_s}$ e $|J_\delta \cup \{i_s\}| = |J_\delta| + 1 < \aleph_0$ $\Rightarrow s \in A$.

Dimostriamo ora che $s = 1$. Se per assurdo fosse $s < 1$, allora analogamente a quanto fatto prima si ottiene che $\exists \delta > 0$ t.c. $s + \frac{\delta}{2} \in A$, ma $s + \frac{\delta}{2} > s$, dunque si ha un assurdo essendo $s = \sup A$. □

Teorema 2.2.5 (Immagine continua di un compatto è compatta): *Siano* (X, τ_X) *e* (Y, τ_Y) *due spazio topologici e* $f : X \to Y$ *una funzione continua. Se* (X, τ_X) *è compatto* $\Rightarrow (f(X), (\tau_Y)_{|f(X)})$ *è compatto.*

Dimostrazione. Sia I un insieme di indici e $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$. Allora per continuità $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di X, ma (X, τ_X) è compatto, dunque $\exists J \subset I$ con $|J| < \aleph_0$ t.c. $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in J}$ forma sempre un ricoprimento di X. Ma $\forall i \in J$ $f(f^{-1}(U_i)) = U_i$, dunque $\{U_i\}_{i \in J}$ è sottoricoprimento finito di $\mathfrak{U}$. □

Corollario 2.2.6: *Siano (X,τ_X) e (Y,τ_Y) due spazio topologici omeomorfi. (X,τ_X) è compatto $\iff$ (Y,τ_Y) è compatto.*

Corollario 2.2.7: *Se $I \subset \mathbb{R}$ e $(I,(\tau_E)_{|_I})$ è uno spazio topologico compatto, allora necessariamente $I=[a,b]$ per qualche $a,b\in\mathbb{R}$ con $a\le b$.*

Dimostrazione. Chiaramente $(\mathbb{R},\tau_E)$ non è compatto (vedi esempio 2.2.2) e $\forall x\in\mathbb{R}$ $([x,+\infty),(\tau_E)_{|_{[x,+\infty)}})$, $((x,+\infty),(\tau_E)_{|_{(x,+\infty)}})$, $((-\infty,x],(\tau_E)_{|_{(-\infty,x]}})$ e $((-\infty,x),(\tau_E)_{|_{(-\infty,x)}})$ non sono compatti.

Presi $a,b\in\mathbb{R}$ con $a\le b$, se $a=b$ allora I è un punto e $(I,(\tau_E)_{|_I})$ è chiaramente compatto, se invece $a<b$ si ha che $([a,b],(\tau_E)_{|_{[a,b]}})$ è omeomorfo a $([0,1],(\tau_E)_{|_{[0,1]}})$ tramite $[0,1]\ni t\longmapsto(1-t)a+tb\in[a,b]$, dunque è compatto essendolo $([0,1],(\tau_E)_{|_{[0,1]}})$.

Ora $((0,1),(\tau_E)_{|_{(0,1)}})$ è omeomorfo a $((0,+\infty),(\tau_E)_{|_{(0,+\infty)}})$ (che ovviamente non è compatto) tramite $x\ni(0,1)\longmapsto\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\in(0,+\infty)$ dunque non è compatto. E presi $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, allora $((a,b),(\tau_E)_{|_{(a,b)}})$ è omeomorfo a $((0,1),(\tau_E)_{|_{(0,1)}})$ tramite $(0,1)\ni t\longmapsto(1-t)a+tb\in(a,b)$, dunque non è compatto.

Invece $([0,1),(\tau_E)_{|_{[0,1)}})$ è omeomorfo a $([0,+\infty),(\tau_E)_{|_{[0,+\infty)}})$ (che ovviamente non è compatto) tramite $x\ni[0,1)\longmapsto\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\in[0,+\infty)$ dunque non è compatto. E presi $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, allora $([a,b),(\tau_E)_{|_{[a,b)}})$ e $((a,b],(\tau_E)_{|_{(a,b]}})$ sono omeomorfi a $([0,1),(\tau_E)_{|_{[0,1)}})$ tramite $[0,1)\ni t\longmapsto(1-t)a+tb\in[a,b)$ e $[0,1)\ni t\longmapsto(1-t)b+ta\in(a,b]$ rispettivamente, dunque non sono compatti. □

Definizione 2.2.8 (Proprietà dell'intersezione finita): Sia X un'insieme, I un insieme di indici e $\{Y_i\}_{i\in I}\subset\mathcal{P}(X)$. Diciamo che la famiglia $\{Y_i\}_{i\in I}$ gode della **proprietà dell'intersezione finita** se $\forall J\subset I$ con $|J|<\aleph_0$ si ha che $\bigcap_{i\in J}Y_i\neq\emptyset$.

Teorema 2.2.9: *Sia (X,τ) uno spazio topologico. (X,τ) è compatto $\iff$ $\forall\mathcal{C}$ famiglia di chiusi di (X,τ) che goda della proprietà dell'intersezione finita si ha $\bigcap_{C\in\mathcal{C}}C\neq\emptyset$.*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$. Sia I insieme di indici e $\mathcal{C}=\{C_i\}_{i\in I}$ famiglia di chiusi di (X,τ) che gode della proprietà dell'intersezione finita. Per assurdo supponiamo che $\bigcap_{i\in I}C_i=\emptyset$. Poniamo $\forall i\in I$ $A_I:=C_i^c\in\tau$, allora $\bigcup_{i\in I}A_i=\left(\bigcap_{i\in I}C_i\right)^c=X$ ossia $\{A_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto di X. Dunque per compattezza $\exists J\subset I$ con $|J|<\aleph_0$ t.c. $\bigcup_{i\in J}A_i=X$. Ma allora $\bigcap_{i\in J}C_i=\left(\bigcup_{i\in J}A_i\right)=\emptyset$ che è un assurdo in quanto $\mathcal{C}$ gode della proprietà dell'intersezione finita.

$(\Leftarrow)$. Sia I insieme di indici e $\mathcal{U}=\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X. Poniamo $\forall i\in I$ $C_i=A_i^c$ chiusi di (X,τ). Supponiamo per assurdo che $\mathcal{U}$ non ammetta sottoricoprimenti finiti. Dunque $\forall J\subset I$ con $|J|<\aleph_0$ si ha $\bigcup_{i\in J}A_i=\left(\bigcap_{i\in J}C_i\right)^c\neq X$, dunque $\forall J\subset I$ con $|J|<\aleph_0$ si ha $\bigcap_{i\in J}C_i\neq\emptyset$, ossia $\{C_i\}_{i\in I}$ gode della proprietà dell'intersezione finita e quindi per ipotesi $\bigcap_{i\in I}C_i=\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^c\neq\emptyset$, da cui $\bigcup_{i\in I}A_i\neq X$ che è un assurdo in quanto $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di X. □

Corollario 2.2.10: *Sia (X, τ) uno spazio topologico compatto e $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un successione di chiusi non vuoti di (X, τ) t.c. $C_{n+1} \subset C_n$. Allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.*

Esempio 2.2.11: Consideriamo $(\mathbb{R}, \tau_E)$ e $C_n = [n, +\infty)$ per $n \in \mathbb{N}$. La famiglia di chiusi $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gode della proprietà dell'intersezione finita ma $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \emptyset$. D'altronde $(\mathbb{R}, \tau_E)$ non è compatto.

Proposizione 2.2.12: *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $(Y, \tau_{|_Y})$ uno suo sottospazio. $(Y, \tau_{|_Y})$ è compatto $\iff$ $\forall \mathfrak{U} \subset \tau$ t.c. $Y \subset \bigcup_{U\in\mathfrak{U}} U$ $\exists \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ con $|\mathfrak{U}'| < \aleph_0$ t.c. $Y \subset \bigcup_{U\in\mathfrak{U}'} U$.*

Dimostrazione. Facile verifica usando la definizione di compattezza ed il fatto che $A \in \tau_{|_Y} \iff \exists B \in \tau$ t.c. $A = B \cap Y$. □

Nel seguito quando sarà fissato uno spazio topologico (X, τ), nel dire che un $K \subset X$ è compatto si intenderà sempre che $(K, \tau_{|_K})$ è uno spazio topologico compatto.

Osservazione 2.2.13: *I sottospazi di uno spazio compatto non sono compatti in generale.*

Infatti $([0, 1], (\tau_E)_{|_{[0,1]}})$ è compatto, ma, ad esempio, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ visto come suo sottospazio non è compatto.

Teorema 2.2.14 (Chiuso di un compatto è compatto): *Sia (X, τ) uno spazio topologico compatto. Se $C \subset X$ è chiuso in $(X, \tau) \Rightarrow C$ è compatto.*

Dimostrazione. Siano I un insieme di indici e $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I} \subset \tau$ t.c. $C \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Prendiamo $V := C^c \in \tau$ e costruiamo $\mathfrak{U}_X := \{U_i\}_{i\in I} \cup \{V\} \subset \tau$ ricoprimento aperto di X. Per compattezza $\exists J \subset I$ con $|J| < \aleph_0$ t.c. $\{U_i\}_{i\in J} \cup \{V\}$ è un sottoricoprimento finito (V potrebbe non essere necessario, ma aggiungerlo non cambia niente). Ora $C \cap V = \emptyset$, dunque necessariamente $\{U_i\}_{i\in J}$ è t.c. $C \subset \bigcup_{i\in J} U_i$, dunque C è compatto per la proposizione precedente. □

Osservazione 2.2.15: *In generale dato (X, τ) spazio topologico $C \subset X$ compatto $\not\Rightarrow C$ chiuso di (X, τ).*

Ad esempio se X è insieme con $|X| \geq 2$ allora in $(X, \{\emptyset, X\})$ tutti i sottospazi sono compatti ma nessuno di loro, tranne $\emptyset$ e X, è chiuso.

Oppure $(\mathbb{N}, \tau_{\text{cof}})$, anche in questo caso tutti i sottospazi sono compatti, perché se $A \subset \mathbb{N}$, se $A = \emptyset$ è ovvio, altrimenti presi I insieme di indici e $\{U_i\}_{i\in I} \subset \tau_{\text{cof}}$ t.c. $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ si ha che $\exists i_0 \in I$ t.c. $A \cap U_{i_0} \neq \emptyset$, ma per definizione di τ_{cof} si ha che $|U_{i_0}^c| < \aleph_0$, dunque anche $|A \setminus U_{i_0}| < \aleph_0$ e quindi $\exists\{n_1, ..., n_k\} \subset \mathbb{N}$, con $k \in \mathbb{N}$, t.c. $A \setminus U_{i_0} = \{n_1, ..., n_k\}$. Ma $\forall j \in \{1, ..., k\}$ $\exists i_j \in I$ t.c. $n_j \in U_{i_j}$, dunque $\{U_{i_0}\} \cup \{U_{i_j}\}_{j\in\{1,...,k\}}$ ricopre A che quindi è compatto. Però ad esempio $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ non è chiuso in $(\mathbb{N}, \tau_{\text{cof}})$.

Teorema 2.2.16: *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Se (X, τ) è T2 e $Y \subset X$ è compatto $\Rightarrow Y$ è chiuso in (X, τ).*

Dimostrazione. Dimostriamo che Y^c è aperto, cioè che è intorno di ogni suo punto. Sia $x \in Y^c$, poiché (X, τ) è T2 $\forall y \in Y$ $\exists U_y, V_y \in \tau$ con $U_y \cap V_y = \emptyset$ t.c. $y \in U_y$ e $x \in V_y$. Ma $\{U_y\}_{y\in Y} \subset \tau$ è t.c. $Y \subset \bigcup_{y\in Y} U_y$, allora per compattezza esistono $n \in \mathbb{N}$ e $\{y_i\}_{i\in\{1,...,n\}}$ t.c. $Y \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$ Inoltre prendiamo $V := \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$, questo è un aperto che contiene x e vale

$$V \cap Y \subset V \cap \bigcup_{i=1}^n U_{y_i} = \bigcup_{i=1}^n V \cap U_{y_i} \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset$$

ossia V è un intorno aperto di x tutto contenuto in Y^c, che è quello che volevamo costruire. □

Lemma 2.2.17: *Uno spazio topologico (X, τ) T2 e compatto è regolare.*

Dimostrazione. Essendo T2 è anche T1. Dimostriamo che è T3. Siano $Y \subset X$ un chiuso di (X, τ) e $x \in X \setminus Y$. Essendo Y chiuso in un compatto, per la proposizione 2.2.14 è compatto, dunque in modo analogo alla dimostrazione precedente si trovano due aperti $U = \bigcup_{i=1}^n U_{y y_i} \in \tau$ e $V = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i} \in \tau$ con $U \cap V = \emptyset$ t.c. $Y \subset U$ e $x \in V$. □

Teorema 2.2.18: *Uno spazio topologico (X, τ) T2 e compatto è normale.*

Dimostrazione. Essendo T2 è anche T1. Dimostriamo che è T4. Siano $Y_1, Y_2 \subset X$ due chiusi di (X, τ) con $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Essendo per il lemma precedente (X, τ) T3 si ha che $\forall y \in Y_1$ $\exists U_y, V_y \in \tau$ con $U_y \cap V_y = \emptyset$ t.c. $y \in U_y$ e $Y_2 \subset V_y$. Ma Y_1 essendo chiuso in un compatto è compatto (visto come sottospazio del compatto), dunque poiché $Y_1 \subset \bigcup_{y\in Y_1} U_y$ si ha che $\exists n \in \mathbb{N}$ e $\exists\{y_1, ..., y_n\} \subset Y_1$ t.c. $Y_1 \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$. Poniamo quindi $U = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i} \in \tau$ e $V = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i} \in \tau$ e notiamo che $Y_1 \subset U$, $Y_2 \subset V$ e $U \cap V \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset$. □

Lemma 2.2.19: *Si (X, τ) uno spazio topologico e $\mathcal{B}$ una sua base. Se $\forall \mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ ricoprimento di X $\exists \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ sottoricoprimento con $|\mathcal{U}'| < \aleph_0 \Rightarrow (X, \tau)$ è compatto.*

Dimostrazione. Siano I un insieme di indici e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I} \subset \tau$ ricoprimento aperto di X, allora $\forall i \in I$ $\exists \mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$ t.c. $U_i = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_i} B$. Ma quindi $\bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$ è un ricoprimento di X di elementi di $\mathcal{B}$, dunque per ipotesi $\exists\{B_1, ..., B_n\} \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i$ t.c. $X = \bigcup_{j=1}^n B_i$. Ora $\forall j \in \{1, ..., n\}$ $\exists i_j \in I$ t.c. $B_j \subset U_{i_j}$ e quindi $X \subset \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$. □

Teorema 2.2.20 (Prodotti finiti di compatti): *Siano* (X, τ_X) *e* (Y, τ_Y) *due spazi topologici compatti* $\Rightarrow$ $(X \times Y, \tau_{prod})$ *è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}_p$ la base usuale della topologia prodotto. Per il lemma precedente basta controllare che ogni ricoprimento fatto da elementi di $\mathcal{B}_p$ ammette un sottoricoprimento finito. Siano I un insieme di indici e $\mathcal{U} = \{U_i \times V_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}_p$ (cioè $U_i \in \tau_X$ e $V_i \in \tau_Y$ $\forall i \in I$) ricoprimento di $X \times Y$. Notiamo che $\forall x_0 \in X$ lo spazio $\{x_0\} \times Y$, visto come sottospazio di $(X \times Y, \tau_{\text{prod}})$, è omeomorfo a (Y, τ_Y) ed è quindi compatto, quindi $\exists J_{x_0} \subset I$ con $|J_{x_0}| < \aleph_0$ t.c. $\{x_0\} \times Y \subset \bigcup_{i \in J_{x_0}} (U_i \times V_i)$. Inoltre se $x_0 \notin U_i$ allora $(U_i \times V_i) \cap (\{x_0\} \times Y) = \emptyset$, dunque, a meno di scartare alcuni indici di J_{x_0}, posso supporre che $x_0 \in U_i$ $\forall i \in J_{x_0}$. Quindi $U_{x_0} = \bigcap_{i \in J_{x_0}} U_i \in \tau$ contiene x_0. Per costruzione $U_{x_0} \times Y \subset \bigcup_{i \in J_{x_0}} (U_i \times V_i)$.

Ripetendo il ragionamento appena fatto per ogni $x \in X$ si ottiene $\forall x \in X$ un insieme di indici $J_x \subset I$ con $|J_x| < \aleph_0$ ed un aperto $U_x \in \tau$ t.c. $x \in U_x$ e $U_x \times Y \subset \bigcup_{i \in J_x} (U_i \times V_i)$.

Ora $\{U_x\}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto di X, quindi per compattezza posso trovare $n \in \mathbb{N}$ e $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ t.c. $X \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ da cui

$$X \times Y \subset \left(\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \right) \times Y = \bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} \times Y) \subset \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j \in J_{x_i}} (U_j \times V_j)$$

Quindi $\mathcal{U}' = \bigcup_{i=1}^n \{U_j \times V_j\}_{j \in J_{x_i}}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$. □

Definizione 2.2.21: Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ è detta **propria** se $\forall K \subset Y$ compatto si ha che $f^{-1}(K) \subset X$ è compatto.

Proposizione 2.2.22: *Siano* (X, τ_X) *uno spazio topologico compatto e* (Y, τ_Y) *uno spazio topologico T2. Se* $f : X \to Y$ *è un funzione continua* $\Rightarrow$ f *è una funzione chiusa e propria.*

Dimostrazione. Sia C chiuso in (X, τ_X), allora C è compatto e quindi per continuità $f(C)$ è compatto in (Y, τ_Y) che è T2, dunque $f(C)$ è chiuso in (Y, τ_Y). Quindi f è chiusa.

Sia ora $K \subset Y$ compatto. (Y, τ_Y) è T2, dunque K è chiuso di (Y, τ_Y), ma allora per continuità $f^{-1}(K)$ è chiuso di (X, τ_X) che è compatto, dunque $f^{-1}(K)$ è compatto. Quindi f è propria. □

Corollario 2.2.23: *Siano* (X, τ_X) *uno spazio topologico compatto e* (Y, τ_Y) *uno spazio topologico T2. Se* $f : X \to Y$ *è un funzione continua e bigettiva* $\Rightarrow$ f *è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Segue facilmente dalla proposizione precedente e dalla proposizione 1.2.18.
□

Definizione 2.2.24 (Spazio topologico sequenzialmente compatto): Uno spazio topologico (X, τ) è detto **sequenzialmente compatto** se ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ ammette una sottosuccessione $(x_{n_k})_{x\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

Definizione 2.2.25 (Spazio topologico di Lindelöff): Uno spazio topologico (X, τ) è detto **di Lindelöff** se ogni ricoprimento aperto di (X, τ) ammette un sottoricoprimento al più numerabile.

Proposizione 2.2.26: *Uno spazio topologico (X, τ) compatto ed N1 è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione. Voglio costruire una sottosuccessione convergente. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ponga $C_m = \overline{\{x_n \mid n \geq m\}} \subset X$. Allora $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ è una famiglia di chiusi di (X, τ) t.c. $C_m \neq \emptyset$ e $C_{m+1} \subset C_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Essendo (X, τ) compatto, per il corollario 2.2.10, si ha che $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_m \neq \emptyset$. Sia $x^* \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_m \neq \emptyset$ e costruiamo una sottosuccessione che converge a x^*. Prendo $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ SFI numerabile di x^*. Possiamo supporre $U_{k+1} \subset U_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Scegliamo una successione $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ t.c. $n_0 = 0$ e $n_k \to +\infty$.

Si ha $x^* \in C_0 = \overline{\{x_n \mid n \geq 0\}}$ e $U_0 \in \mathcal{I}(x^*)$, dunque $U_0 \cap \{x_n \mid n \geq 0\} \neq \emptyset$ e scegliamo $x_{n_0} \in U_0 \cap \{x_n \mid n \geq 0\}$. Ricorsivamente per $k \geq 1$ si ha che $x^* \in C_{n_k} = \overline{\{x_n \mid n \geq n_k\}}$ e $U_k \in \mathcal{I}(x^*)$, dunque $U_k \cap \{x_n \mid n \geq n_k\} \neq \emptyset$ e scegliamo $x_{n_k} \in U_k \cap \{x_n \mid n \geq n_k\}$.

Dunque abbiamo costruito una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Inoltre tale costruzione converge a x^*, infatti preso $U \in \mathcal{I}(x^*)$ si ha che $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tc. $U_{k_0} \subset U$ e $\forall k \geq k_0$, per costruzione, si ha che $x_{n_k} \in U_{k_0} \subset U$. $\square$

Proposizione 2.2.27: *Uno spazio topologico (X, τ) N2 è di Lindelöff.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerabile di (X, τ) e siano I un insieme di indici e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I} \subset \tau$ un ricoprimento di aperti di X. Preso un qualsiasi $i \in I$ si ha che $\exists J_i \subset \mathbb{N}$ t.c. $U_i = \bigcup_{j\in J_i} B_j$ e sia $J = \bigcup_{i\in I} J_i \subset \mathbb{N}$. Prendiamo $\forall j \in J$ $i_j \in I$ t.c. $B_j \subset U_{i_j}$. Allora $X \subset \bigcup_{j\in J} B_j \subset \bigcup_{j\in J} U_{i_j}$ e $\{U_{i_j}\}_{j\in J}$ è un sottoricoprimento al più numerabile di X estratto da $\mathcal{U}$. $\square$

Teorema 2.2.28: *Sia (X, τ) uno spazio topologico N2. (X, τ) è compatto $\iff$ è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$ Uno spazio N2 è N1, dunque per la proposizione 2.2.26 si ha quanto voluto.

$(\Leftarrow)$. Sia I un insieme di indici e per assurdo sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I} \subset \tau$ un ricoprimento aperto di X che non ammette sottoricoprimenti finiti. Essendo (X, τ) N2 è di Lindelöff per la proposizione precedente, dunque sia $J \subset I$ con $|J| = \aleph_0$ t.c. $\mathcal{U}' = \{U_i\}_{i \in J}$ è un sottoricoprimento numerabile di X estratto da $\mathcal{U}$. Enumeriamo $\mathcal{U}'$ usando una funzione $j : \mathbb{N} \to J$, cioè $\mathcal{U}' = \{U_{j(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ scegliamo $x_n \in X \setminus \bigcup_{i=0}^n U_{j(i)}$. Notiamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ $X \setminus \bigcup_{i=0}^n U_{j(i)} \neq \emptyset$ perché per ipotesi assurda $\mathcal{U}$ non può ammettere sottoricoprimenti finiti. Dico che $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non ammette sottosuccessioni convergenti. Infatti se ne esistesse una $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ t.c. $x_{n_k} \to x^* \in X$, allora preso $n^* \in \mathbb{N}$ t.c. $x^* \in U_{j(n^*)}$ si dovrebbe avere $x_{n_k} \in U_{j(n^*)}$ definitivamente, ma per costruzione $\forall k \geq n^*$ si ha $x_{n_k} \notin U_{j(n^*)}$. Quindi avendo costruito una successione senza sottosuccessioni convergenti si è contraddetta l'ipotesi di compattezza sequenziale di (X, τ). □

Teorema 2.2.29 (Compattificazione di Alexandrov): *Sia (X, τ) uno spazio topologico e ∞ un insieme t.c. $\infty \notin X$. Definiamo $\widehat{X} := X \cup \{\infty\}$ e*

$$\widehat{\tau} = \tau \cup \{A \cup \{\infty\} \mid X \setminus A \text{ è chiuso e compatto in } (X, \tau)\} \subset \mathcal{P}(\widehat{X})$$

Allora valgono le seguenti affermazioni:

(1) $\widehat{\tau}$ è una topologia su $\widehat{X}$;

(2) la funzione $i : X \hookrightarrow \widehat{X}$ t.c. $i(x) = x$ è un'immersione topologica.

(3) $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ è uno spazio topologico compatto;

Dimostrazione. (1). Verificare che $\widehat{\tau}$ è effettivamente una topologia su $\widehat{X}$ è semplice ma leggermente noioso (il lettore è invitato a farlo).

(2). Sia $A \in \widehat{\tau}$. Se $\infty \notin A$ allora $i^{-1}(A) = A \in \tau$ per definizione di $\widehat{\tau}$. Se invece $\infty \in A$ allora $i^{-1}(A) = A = X \setminus (X \setminus A) \in \tau$ per definizione di $\widehat{\tau}$.

(3). Sia I un insieme di indici e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I} \subset \widehat{\tau}$ un ricoprimento aperto di $\widehat{X}$. Sia $i_0 \in I$ t.c. $\infty \in U_{i_0}$, allora $\widehat{X} \setminus U_{i_0} = i(K)$ con $X = X \setminus U_{i_0}$ compatto e chiuso in (X, τ). Visto che i è continua si ha che $i(K)$ è compatto in $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, dunque $\exists J \subset I$ con $|J| < \aleph_0$ t.c. $i(K) \subset \bigcup_{i \in J} U_i$, dunque $\widehat{X} \subset U_{i_0} \cup \bigcup_{i \in J} U_i$. Dunque $\{U_i\}_{i \in J} \cup \{U_{i_0}\}$ è un sottoricoprimento finito di $\widehat{X}$ estratto da $\mathcal{U}$. □

Capitolo 3

Quozienti

3.1 Quozienti topologici

Definizione 3.1.1: Sia (X, τ) uno spazio topologico e $\sim$ una relazione d'equivalenza su di esso. Definiamo $X/\sim$ l'insieme delle classi di equivalenza su X rispetto a $\sim$. La classe d'equivalenza di un $x \in X$ sarà indicata $[x]$. Inoltre la funzione $\pi : X \to X/\sim$ sarà chiamata **proiezione al quoziente**.

Definizione 3.1.2 (Topologia quoziente): Sia (X, τ) uno spazio topologico e $\sim$ una relazione d'equivalenza su di esso. Definiamo su $X/\sim$ la topologia t.c.

$$A \subset X/\sim \text{ è aperto} \iff \pi^{-1}(A) \text{ è aperto in } (X, \tau)$$

tale topologia è detta **topologia quoziente** e si indicherà con τ_{quoz}.

Osservazione 3.1.3: Vedere che è la topologia quoziente sia effettivamente una topologia è una semplice verifica.

Teorema 3.1.4: *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $\sim$ una relazione d'equivalenza su di esso. La topologia quoziente su $X/\sim$ è la topologia più fine che quelle che rendono continua la proiezione al quoziente $\pi : X \to X/\sim$.*

Dimostrazione. Ovviamente per definizione la topologia quoziente τ_{quoz} rende π continua. Inoltre se τ' è una topologia che rende continua π allora $\forall A \in \tau'$ $\pi^{-1}(A) \in \tau$, ma allora per definizione di topologia quoziente $A \in \tau_{\text{quoz}}$, dunque $\tau' \subset \tau_{\text{quoz}}$. □

Osservazione 3.1.5: Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici, $\sim$ una relazione d'equivalenza su (X, τ_X) e $f : X \to Y$ una funzione. Si dice che f **passa al quoziente** se $\forall x, x' \in X$ con $x \sim x'$ si ha $f(x) = f(x')$. Ed in tal caso è ben definita la funzione $\overline{f} : X/\sim \to Y$ t.c. $\overline{f}([x]) = f(x)$, cioè t.c. $f = \overline{f} \circ \pi$.

Teorema 3.1.6: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici, $\sim$ una relazione d'equivalenza su (X, τ_X) e $f : X \to Y$ una funzione che passa al quoziente. Consideriamo $X/\sim$ con la topologia quoziente e sia $\overline{f} : X/\sim \to Y$ la funzione t.c. $f = \overline{f} \circ \pi$. Allora f è continua $\iff$ $\overline{f}$ è continua.*

Dimostrazione. f è continua $\iff$ $\forall A \in \tau_Y$ $f^{-1}(A) \in \tau_X$ $\iff$ $\forall A \in \tau_Y$ $\pi^{-1}(\overline{f}^{-1}(A)) \in \tau_X$ $\iff$ $\forall A \in \tau_Y$ $\overline{f}^{-1}(A) \subset X/\sim$ è aperto nella topologia quoziente $\iff$ $\overline{f}$ è continua. □

Definizione 3.1.7 (Identificazione): Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione. f è detta **identificazione** se

(1) f è surgettiva;

(2) $\forall A \subset Y$ $A \in \tau_Y \iff f^{-1}(A) \in \tau_X$.

Osservazione 3.1.8: Nella definizione precedente la condizione (2) è equivalente alla seguente

$$\forall C \subset Y \ C \text{ è chiuso in } (Y, \tau_Y) \iff f^{-1}(C) \text{ è chiuso in } (X, \tau_X)$$

Osservazione 3.1.9: Nella definizione precedente, nella condizione (2) la freccia $(\Rightarrow)$ è la definizione di continuità di f, quindi un'identificazione è continua.

Teorema 3.1.10: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici, $f : X \to Y$ una funzione e poniamo su X la relazione d'equivalenza data da $x \sim y \iff f(x) = f(y)$. Consideriamo $X/\sim$ con la topologia quoziente e sia $\overline{f} : X/\sim \to Y$ la funzione t.c. $f = \overline{f} \circ \pi$. Se f è un'identificazione $\Rightarrow$ $\overline{f} : X/\sim \to Y$ è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Abbiamo osservato che un'identificazione è continua ed è per definizione surgettiva, dunque $\overline{f} : X/\sim \to Y$ è bigettiva e continua (per il teorema 3.1.6). Mostriamo che $\overline{f}$ è aperta, da cui segue che è un omeomorfismo. Sia $A \subset X/\sim$ aperto nella topologia quoziente, essendo f un'identificazione, per vedere che $\overline{f}(A)$ sia aperto basta vedere che lo sia $f^{-1}(\overline{f}(A))$. Ma vale $f^{-1}(\overline{f}(A)) = \pi^{-1}(A)$ che è aperto in (X, τ_X) per definizione di topologia quoziente. □

Proposizione 3.1.11: *Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici ed $f : X \to Y$ una funzione continua e surgettiva. Allora*

(1) se f è aperta $\Rightarrow$ f è un'identificazione;

(2) se f è chiusa $\Rightarrow$ f è un'identificazione.

Dimostrazione. (1). Sia $A \subset Y$ dobbiamo vedere che se $f^{-1}(A) \in \tau_X$ allora $A \in \tau_Y$. Ma essendo f surgettiva si ha che $A = f(f^{-1}(A))$ e visto che f è aperta si ha la tesi.

(2). Analoga al caso precedente ma con i chiusi al posto degli aperti. □

Definizione 3.1.12 (Insieme f-saturo): Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici ed $f : X \to Y$ una funzione. Un $A \subset X$ è detto **f-saturo** se $f^{-1}(f(A)) = A$, cioè se $\forall x \in A$ se $x' \in X$ è t.c. $f(x') = f(x)$ allora anche $x' \in A$.

Osservazione 3.1.13: Un caso particolare molto importante della definizione precedente è quando su (X, τ_X) è definita una relazione d'equivalenza $\sim$ e $f = \pi$ è la proiezione al quoziente. In questo contesto nel seguito gli insiemi π-saturi saranno chiamati **saturi**.

Proposizione 3.1.14: *Siano (X, τ) uno spazio topologico, $\sim$ una relazione d'equivalenza su di esso e ${}^{X}\!/\!_{\sim}$ il quoziente munito della topologia quoziente. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

(1) $\forall A \subset {}^{X}\!/\!_{\sim}$ A è aperto nella topologia quoziente $\iff \exists B \in \tau$ saturo t.c. $A = \pi(B)$.

(2) $\forall C \subset {}^{X}\!/\!_{\sim}$ C è chiuso nella topologia quoziente $\iff \exists D$ chiuso in (X, τ) saturo t.c. $C = \pi(D)$.

Dimostrazione. (1). ($\Rightarrow$). A aperto nella topologia quoziente $\Rightarrow \pi^{-1}(A) \in \tau$ è saturo (ovvio) ed essendo π surgettiva si ha $\pi(\pi^{-1}(A)) = A$.

($\Leftarrow$). Se $\exists B \in \tau$ saturo t.c. $A = \pi(B) \Rightarrow$ essendo B saturo si ha $\pi^{-1}(A) = \pi^{-1}(\pi(B)) = B$ che è aperto in (X, τ) in quanto A è aperto nella topologia quoziente.

(2). Analoga al caso precedente ma con i chiusi al posto degli aperti. □

Proposizione 3.1.15: *Siano (X, τ) uno spazio topologico, $\sim$ una relazione d'equivalenza su di esso e ${}^{X}\!/\!_{\sim}$ il quoziente munito della topologia quoziente. Allora valgono le seguenti:*

(1) se (X, τ) è compatto $\Rightarrow ({}^{X}\!/\!_{\sim}, \tau_{quoz})$ è compatto;

(2) se (X, τ) è connesso $\Rightarrow ({}^{X}\!/\!_{\sim}, \tau_{quoz})$ è connesso;

Dimostrazione. Segue dalla surgettività e dalla continuità della proiezione al quoziente. □

Esempio 3.1.16 (${}^{[0,1]}\!/\!_{0 \sim 1}$ è omeomorfo a S^1): Consideriamo su $([0,1], \tau_{|_{[0,1]}})$ la relazione d'equivalenza che identifica soltanto 0 ed 1 insieme, cioè t.c. $\forall x, y \in [0,1]$ $x \sim y \iff x = y$ oppure $\{x, y\} \subset \{0, 1\}$. E consideriamo la funzione $f : [0,1] \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ t.c. $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. f è chiaramente surgettiva e continua e si verifica facilmente che passa al quoziente. Dunque per quanto dimostrato induce una funzione

$\overline{f} : {}^{[0,1]}\!\big/_{0 \sim 1} \to S^1$ continua e bigettiva. Ma $[0,1]$ è compatto e S^1 è T2 (è sottospazio di $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$ che è T2), dunque f è chiusa e quindi è un'identificazione. Dunque $\overline{f}$ è un omeomorfismo.

Esempio 3.1.17 (${}^{D^n}\!\big/_{S^{n-1}}$ è omeomorfo a S^n): Consideriamo su $D^n := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$, visto come sottospazio di $\mathbb{R}^n$, la relazione d'equivalenza che identifica i punti di $S^{n-1} := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$. Per $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ sia $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Si dimostra in modo totalmente analogo al caso con $n = 1$ dell'esempio precedente che la funzione $D^n \ni v \longmapsto (2v\sqrt{1 - \|v\|^2}, 2\|v\|^2 - 1) \in S^n$ passa al quoziente e che è un'identificazione. L'unica difficoltà è convincersi che effettivamente la funzione è a valori in S^n e che è surgettiva, ma è vero pensateci.

3.2 Quozienti per azioni di gruppi

Definizione 3.2.1 (Azione di un gruppo): Sia X un insieme e G un gruppo. Un'**azione (sinistra)** di G su X è una funzione $\phi : G \times X \to X$ t.c.

(1) $\phi(e, x) = x \ \forall x \in X$ in cui $e \in G$ è l'elemento neutro di G;

(2) $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x) \ \forall x \in X \ \forall g, h \in G$.

Nel seguito la funzione ϕ verrà sottintesa e al posto di $\phi(g, x)$ si scriverà $g \cdot x$. Inoltre data un'azione (non specificata) di G su X si dirà che G **agisce** su X.

Definizione 3.2.2: Sia X un insieme e G un gruppo che agisce su X. Se $x \in X$ si definisce lo **stabilizzatore** di x come

$$\mathrm{stab}(x) := \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G$$

Mentre verrà detta **orbita** di x l'insieme

$$\mathrm{orb}(x) = G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$$

Osservazione 3.2.3: Non è difficile verificare che $\mathrm{stab}(x)$ è un sottogruppo di G. E che le orbite formano una partizione di X. Infatti la relazione su X t.c. $\forall x, y \in X$ $x \sim_G y \iff \exists g \in G \ g \cdot x = y$ è una relazione d'equivalenza.

Definizione 3.2.4: Sia X un insieme e G un gruppo che agisce su X. L'azione è detta:

- **fedele** se preso $g \in G$ t.c. $\forall x \in X \ g \cdot x = x$ si ha necessariamente $g = e$;
- **libera** se $\forall x \in X \ \mathrm{stab}(x) = \{e\}$;

- **transitiva** se $\forall x, y \in X\ \exists g \in G$ t.c. $g \cdot x = y$.

Definizione 3.2.5 (Quoziente per un'azione di gruppo): Sia X un insieme e G un gruppo che agisce su X. Indichiamo con ${}^{X}\!/_{G} := {}^{X}\!/_{\sim_G}$, cioè l'insieme delle orbite dell'azione di G su X.

Definizione 3.2.6: Sia (X, τ) uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X. Diciamo che G **agisce per omeomorfismi** su X se $\forall g \in G$ la mappa $X \ni x \overset{\ell_g}{\longmapsto} g \cdot x \in X$ è continua.

Osservazione 3.2.7: Notiamo che se $g \in G$ si ha $\ell_g^{-1} = \ell_{g^{-1}}$ e anche questa è continua, dunque ℓ_g è un omeomorfismo $\forall g \in G$, ecco spiegata la terminologia usata.

Esempio 3.2.8: $X = \mathbb{R}$ e $G = \mathbb{Z}$ con $n \cdot x = x + n\ \forall n \in \mathbb{Z}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$ è un esempio di azione per omeomorfismi munendo $\mathbb{R}$ della topologia euclidea.

D'ora in poi quando su X è definita una topologia e G agisce su X si supporrà sempre che l'azione sia fatta per omeomorfismi.

Osservazione 3.2.9: Sia (X, τ) uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X. Un sottoinsieme $A \subset X$ è saturo $\iff$ è unione di orbite $\iff$ $G \cdot A = A$ in cui $G \cdot A := \{g \cdot x \mid g \in G,\ x \in A\}$.

Proposizione 3.2.10: *Sia (X, τ) uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X. Muniamo ${}^{X}\!/_{G}$ della topologia quoziente. La proiezione al quoziente $\pi : X \to {}^{X}\!/_{G}$ è una funzione aperta.*

Dimostrazione. Sia $A \in \tau$. Vale che $\pi(A)$ è aperto in ${}^{X}\!/_{G} \iff \pi^{-1}(\pi(A)) \in \tau$. Ma chiaramente $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot A = \bigcup_{g \in G} \ell_g(A)$ ed essendo ℓ_g un omeomorfismo $\forall g \in G$ si ha che $\forall g \in G\ \ell_g(A) \in \tau$, dunque $\pi^{-1}(\pi(A)) \in \tau$. $\square$

Proposizione 3.2.11: *Sia (X, τ) uno spazio topologico e G un gruppo finito che agisce su X. Muniamo ${}^{X}\!/_{G}$ della topologia quoziente. La proiezione al quoziente $\pi : X \to {}^{X}\!/_{G}$ è una funzione chiusa.*

Dimostrazione. Analoga alla precedente. $\square$

Esempio 3.2.12: Nel contesto delle due proposizioni precedenti se G non è finito non vale in generale che π è chiusa. Ad esempio si prenda $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea e $G = \mathbb{Z}$

che agisce per traslazioni come nell'esempio 3.2.8. Allora $\pi(C)$ con $C = \{n + 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ non è chiuso in ${}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$. Infatti $\pi^{-1}(\pi(C))$ contiene $\{2^{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e quindi se $\pi(C)$ fosse chiuso anche $\pi^{-1}(\pi(C))$ dovrebbe esserlo, ma $(\mathbb{R}, \tau_E)$ è sequenziale, dunque $\pi^{-1}(\pi(C))$ dovrebbe contenere $0 = \lim_{n\to+\infty} 2^{-n}$, ma questo è falso, dunque $\pi^{-1}(\pi(C))$ non è chiuso. Allo stesso tempo però C è chiuso in $(\mathbb{R}, \tau_E)$.

Lemma 3.2.13: *Sia (X, τ) uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X. Lo spazio $({}^{X}\!/\!_{G}, \tau_{quoz})$ è T1 $\iff$ $G \cdot x$ è chiuso in (X, τ) $\forall x \in X$.*

Dimostrazione. $({}^{X}\!/\!_{G}, \tau_{\text{quoz}})$ è T1 $\iff$ (per il teorema 1.8.9) $\{[x]\}$ è chiuso nella topologia quoziente $\forall [x] \in {}^{X}\!/\!_{G}$ $\iff$ $\pi^{-1}(\{[x]\}) = G \cdot x$ è chiuso in (X, τ) $\forall [x] \in {}^{X}\!/\!_{G}$. □

Definizione 3.2.14: Sia (X, τ) uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X. L'azione è detta:

- **vagante** se $\forall x \in X$ $\exists U \in \mathfrak{I}(x)$ t.c. $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ è finito;
- **propriamente discontinua** se $\forall x \in X$ $\exists U \in \mathfrak{I}(x)$ t.c. $g \cdot U \cap U = \emptyset$ $\forall g \in G,\ g \neq e$;
- **propria** se $\forall K \subset X$ compatto l'insieme $\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ è finito.

Osservazione 3.2.15: Chiaramente, nel contesto della definizione precedente, propriamente discontinua $\Rightarrow$ vagante e libera.

Proposizione 3.2.16: *Sia (X, τ) uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X. Valgono i seguenti fatti:*

(1) se (X, τ) è T2, allora l'azione di G è propriamente discontinua $\iff$ è vagante e libera;

(2) se (X, τ) è localmente compatto, allora l'azione di G è propria $\iff$ $\forall x, y \in X$ $\exists U \in \mathfrak{I}(x)$ $\exists V \in \mathfrak{I}(y)$ t.c. l'insieme $\{g \in G \mid g \cdot U \cap V \neq \emptyset\}$ è finito.

Dimostrazione. (1). ($\Rightarrow$). è ovvia.

($\Leftarrow$). Sia $x \in X$ e $U \in \mathfrak{I}(x)$ t.c. $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U\} = \{g_1, ..., g_n\}$ è finito (esiste perché l'azione è vagante). Poiché l'azione è libera $\forall i \in \{1, ..., n\}$ $g_i \cdot x \neq x$ e quindi, essendo (X, τ) T2, $\exists W_i, W_i' \in \tau$ disgiunti t.c. $x \in W_i$ e $g_i \cdot x \in W_i'$. Pongo

$$V = U \cap \bigcap_{i=1}^{n} \left(W_i \cap g_i^{-1} \cdot W_i'\right)$$

e dico che questo V ha la proprietà richiesta. Infatti se $g \in G$ è t.c. $g \cdot U \cap U = \emptyset \ \Rightarrow$ $g \cdot V \cap V = \emptyset$ se invece $g \cdot U \cap U \neq \emptyset$ e $g \neq e \ \Rightarrow g = g_i$ per un qualche $i \in \{1, ..., n\}$ e $g \cdot V \cap V \subset W_i' \cap W_i = \emptyset$.

(2). Esercizio. □

Teorema 3.2.17: *Sia (X,τ) uno spazio topologico localmente compatto T2 e G un gruppo che agisce su X. Se l'azione è propria $\Rightarrow$ il quoziente $({}^{X}\!/_{G}, \tau_{quoz})$ è T2.*

Dimostrazione. Siano $[x],[y] \in {}^{X}\!/_{G}$ con $[x] \neq [y]$. Essendo (X,τ) T2 $\exists U \in \mathcal{I}(x)$ $\exists V \in \mathcal{I}(y)$ t.c. $U \cap V = \emptyset$ e per locale compattezza di (X,τ) possiamo assumerli compatti. Poiché l'azione è propria se $K := U \cup V$ si ha che $\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ è finito (perché K è compatto) ed in particolare si avrà anche che $\{g \in G \mid g \cdot U \cap V \neq \emptyset\} = \{g_1, ..., g_n\}$ è finito. Ora essendo $[x] \neq [y]$ necessariamente $\forall i \in \{1,...,n\}$ si ha $g_i \cdot x \neq y$, dunque essendo (X,τ) T2 si ha che $\forall i \in \{1,...,n\}$ $\exists U_i \in \mathcal{I}(g_i \cdot x)$ $\exists V_i \in \mathcal{I}(y)$ t.c. $U_i \cap V_i = \emptyset$. Poniamo $U' = U \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1} \cdot U_i$ e notiamo che, essendo $\ell_{g_i^{-1}}$ un omeomorfismo $\forall i \in \{1,...,n\}$, si ha che $g_i^{-1} \cdot U_i \in \mathcal{I}(x)$ $\forall i \in \{1,...,n\}$ e $U \in \mathcal{I}(x)$, dunque anche $U' \in \mathcal{I}(x)$. Consideriamo anche $V' = V \cap \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{I}(y)$. Ma π, proiezione al quoziente, è una mappa aperta (perché il quoziente è fatto per un'azione di gruppo), dunque $\pi(U') \in \mathcal{I}([x])$ e $\pi(V') \in I([y])$. Vediamo che $\pi(U') \cap \pi(V') = \emptyset$. Se per assurdo fosse $\pi(U') \cap \pi(V') \neq \emptyset$ allora si avrebbe che

$$\pi^{-1}(\pi(U')) \cap \pi^{-1}(\pi(V')) = \left(\bigcup_{g \in G} g \cdot U'\right) \cap \left(\bigcup_{g \in G} g \cdot V'\right) \neq \emptyset$$

ma questo implicherebbe che $\exists g, h \in G$ t.c. $(g \cdot U') \cap (h \cdot V') \neq \emptyset$ da cui $(h^{-1}g \cdot U') \cap V' \neq \emptyset$. Ma $U' \subset U$ e $V' \subset V$, dunque quanto appena scritto ci farebbe arrivare a $(h^{-1}g \cdot U) \cap V \neq \emptyset$ che implicherebbe $h^{-1}g = g_j$ per un qualche $j \in \{1,...,n\}$. Quindi si avrebbe $(g_j \cdot U') \cap V' \neq \emptyset$, ma $U' \subset g_j^{-1} \cdot U_j$ e $V' \subset V_j$ per costruzione, dunque si avrebbe $g_j g_j^{-1} \cdot U_j \cap V_j = U_j \cap V_j \neq \emptyset$, che è un assurdo per la scelta di U_j e V_j. $\square$

Esempio 3.2.18: Consideriamo $(X,\tau) = (\mathbb{R}^d, \tau_E)$ e $G = \mathbb{Z}^d$. Ovviamente $(\mathbb{R}^d, \tau_E)$ è T2 e localmente compatto e se si considera l'azione definita da $(n_1, ..., n_d) \cdot (x_1, ..., x_d) = (x_1 + n_1, ..., x_d + n_d)$ si ha che questa è propria (semplice verifica) e quindi per il teorema precedente il quoziente ${}^{\mathbb{R}^d}\!/_{\mathbb{Z}^d}$ con l'usuale topologia quoziente è T2.

Definizione 3.2.19 (Dominio fondamentale): Sia (X,τ) uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X. Un **dominio fondamentale** per l'azione considerata è un sottoinsieme di $D \subset X$ t.c.

(1) $\overline{\mathring{D}} = D$;

(2) $\bigcup_{g \in G} g \cdot D = X$;

(3) $g \cdot \mathring{D} \cap \mathring{D} = \emptyset$ $\forall g \in G,\ g \neq e$;

(4) $\{g \cdot D\}_{g \in G}$ è una famiglia localmente finita.

Esempio 3.2.20: Il cubo unitario $[0,1]^d$ è un dominuo fondamentale per l'azione descritta nell'esempio 3.2.18.

Teorema 3.2.21: *Sia (X,τ) uno spazio topologico localmente compatto e G un gruppo che agisce su X. Se $D \subset X$ è un dominio fondamentale per l'azione considerata si ha che:*

(1) se (X,τ) è T2 $\Rightarrow {X}/{G}$ è T2;

(2) il quoziente ${X}/{G}$ è omeomorfo a ${D}/{\sim_G^D}$, in cui $\sim_G^D$ è la relazione d'equivalenza su D t.c. $\forall d, d' \in D$ $d \sim_G^D d' \iff d \sim_G d'$.

Dimostrazione. (1). Dimostriamo che se (X,τ) è T2 e l'azione ammette un dominio fondamentale D allora il quoziente è T2. Essendo (X,τ) localmente compatto, per il teorema precedente basta vedere che l'azione è propria. Sia $K \subset X$ compatto, allora $\forall x \in K$, essendo la famiglia $\{g \cdot D\}_{g\in G}$ localmente finita, $\exists U_x \in I(x)$ t.c. $\{g \in G \mid g \cdot D \cap U_x \neq \emptyset\}$ è finito. Ora $\{U_x\}_{x\in K}$ è un ricoprimento aperto di K compatto, dunque possiamo estrarne uno finito $\{U_{x_i}\}_{i\in\{1,\dots,k\}}$, con $\{x_i\}_{i\in\{1,\dots,k\}} \subset K$. Quindi essendo $\{U_{x_i}\}_{i\in\{1,\dots,k\}}$ un ricoprimento di K se $g \in G$ è t.c. $g \cdot D \cap K \neq \emptyset \Rightarrow \exists j \in \{1,\dots,k\}$ t.c. $g \cdot D \cap U_{x_j} \neq \emptyset$, quindi necessariamente $g \in \bigcup_{i=1}^k \{g \in G \mid g \cdot D \cap U_{x_i} \neq \emptyset\} = \{g_1,..,g_n\} \subset G$, che è finito in quanto è unione finita di insiemi finiti. Ora $K \subset X = \bigcup_{g\in G} g \cdot D$ e per costruzione se $g \notin \{g_1,\dots,g_n\} \Rightarrow g \cdot D \cap K = \emptyset$, dunque $K \subset \bigcup_{i=1}^n g_i \cdot D$.

Ora se $g \in G$ è t.c. $g \cdot K \cap K \neq \emptyset \Rightarrow g \cdot (\bigcup_{i=1}^n g_i \cdot D) \cap K \neq \emptyset \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^n gg_i \cdot D) \cap K \neq \emptyset \Rightarrow \exists i \in \{1,\dots,n\}$ t.c. $(gg_i \cdot D) \cap K \neq \emptyset \Rightarrow \exists j \in \{1,..,n\}$ t.c. $gg_i = g_j \Rightarrow g = g_i^{-1}g_j$ con $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Quindi abbiamo dimostrato che se $g \in G$ è t.c. $g \cdot K \cap K \neq \emptyset \Rightarrow g \in \{g_i^{-1}g_j \mid i,j \in \{1,\dots,n\}\}$ e quest'ultimo è un sottoinsieme finito di G, dunque l'azione è propria.

(2). Sia $i : D \hookrightarrow X$ l'usuale inclusione, allora funzione $\pi \circ i : D \to {X}/{G}$ è continua (perché è composizione di continue) e passa al quoziente per $\sim_G^D$ (facile verifica), dunque, per il teorema 3.1.6, induce una funzione continua su quoziente $\bar{i} : {D}/{\sim_G^D} \to {X}/{G}$ e si nota che tale funzione è iniettiva per sua natura (per come è fatta $\sim_G^D$). Inoltre, essendo $X = \bigcup_{g\in G} g \cdot D$, si ha che $\pi \circ i$ è surgettiva, dunque anche $\bar{i}$ lo è e quindi $\bar{i}$ è continua e bigettiva. Per vedere che $\bar{i}$ è effettivamente un omeomorfismo dimostriamo che è chiusa. Notiamo che $\{g \cdot D\}_{g\in G}$ è un ricoprimento di chiusi (D è chiuso in (X,τ) e ℓ_g è un omeomorfismo) localmente finito, dunque è un ricoprimento fondamentale. Siano $\pi : X \to {X}/{G}$ e $\pi' : D \to {D}/{\sim_G^D}$ le proiezioni ai quozienti e sia $C \subset {D}/{\sim_G^D}$ chiuso. Voglio dimostrare che $\bar{i}(C)$ è chiuso in ${X}/{G}$ e per farlo, per definizione di topologia quoziente, posso dimostrare che $\pi^{-1}(\bar{i}(C))$ è chiuso in (X,τ). Per continuità della proiezione si ha che $\widehat{C} := (\pi')^{-1}(C) \subset X$ è chiuso in (X,τ) e si ha che $\pi^{-1}(\bar{i}(C)) = \bigcup_{g\in G} g \cdot \widehat{C} =: \widetilde{C}$. Ora $\forall g \in G$ si ha che $\widetilde{C} \cap g \cdot D = g \cdot \widehat{C}$ è chiuso in $g \cdot D$ (sottospazio di (X,τ)) infatti $\widehat{C}$ è chiuso in D e $(\ell_g)_{|_D} : D \to g \cdot D$ è un omeomorfismo. Ma quindi, essendo $\{g \cdot D\}_{g \in G}$ un ricoprimento fondamentale di (X, τ), si ha che $\widetilde{C} = \pi^{-1}(\bar{i}(C))$ è chiuso in (X, τ) che è quello che volevamo. $\square$

Capitolo 4

Completezza metrica

4.1 Spazi metrici completi

Definizione 4.1.1 (Successione di Cauchy): Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ è detta **di Cauchy** se

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n, m > N\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Proposizione 4.1.2 (Le successioni convergenti sono di Cauchy): *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione. Se $x_n \to x^* \in X \;\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$, allora $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > N\ d(x_n, x^*) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ma allora se $n, m > N$ si ha che $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x^*) + d(x^*, x_m) < \varepsilon$. □

Proposizione 4.1.3: *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione di Cauchy. Se $\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sottosuccessione di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_{n_k} \to x^* \in X$ allora anche $x_n \to x^*$.*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy, si ha che $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n, m > N\ d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ ed essendo $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_{n_k} \to x^*$ si ha che $\exists K \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall k > K\ d(x_{n_k}, x^*) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dunque se $M = \max\{N, n_K\}$ si ha che $\forall n > M$, preso $n_k > M$

$$d(x^*, x_n) \leq d(x^*, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Proposizione 4.1.4: *Sia (X, d) uno spazio metrico. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ é una successione di Cauchy $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata.*

Dimostrazione. Dalla definizione di successione di Cauchy $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq N$ si ha $x_n \in B(x_N, 1)$, dunque $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(x_N, 1) \cup \{x_1, ..., x_{N-1}\} \subset B(x_N, R)$ per $R > 0$ abbastanza grande. □

Definizione 4.1.5 (Spazio metrico completo): Uno spazio metrico (X, d) è detto **completo** se ogni successione di Cauchy in (X, d) converge in (X, d).

Esempio 4.1.6: $\mathbb{Q}$ con la distanza euclidea ereditata da $(\mathbb{R}, d_E)$ non è completo. Infatti presa una qualsiasi successione in $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ che converge (in $\mathbb{R}$) ad esempio a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ si ha che questa è di Cauchy in $\mathbb{R}$, e quindi anche in $\mathbb{Q}$, ma non converge in $\mathbb{Q}$.

4.2 Compattezza di spazi metrici

Definizione 4.2.1 (Ricoprimenti di spazi metrici): Sia (X, d) uno spazio metrico e $\mathcal{U}$ un ricoprimento di X. $\mathcal{U}$ è detto

- **aperto** rispetto a d se è aperto rispetto a τ_d;
- **chiuso** rispetto a d se è chiuso rispetto a τ_d;
- **fondamentale** rispetto a d se è fondamentale rispetto a τ_d;

Definizione 4.2.2 (Compattezze per spazi metrici): Uno spazio metrico (X, d) è detto

- **compatto** se (X, τ_d) è uno spazio topologico compatto;
- **sequenzialmente compatto** se (X, τ_d) è uno spazio topologico sequenzialmente compatto;
- **di Lindelöff** se (X, τ_d) è uno spazio topologico di Lindelöff.

Proposizione 4.2.3: *Sia (X, d) uno spazio metrico compatto, allora d è una funzione limitata, cioè $\exists D > 0$ t.c. $\forall x, y \in X$ $d(x, y) < D$. Ed in particolare (X, d) è limitato.*

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in X$ e consideriamo il ricoprimento aperto di X formato da $\mathcal{U} = (B(x_0, n))_{n \in \mathbb{N}_+}$, per compattezza $\exists \{B(x_0, n_j)\}_{j=1,\dots,s} \subset \mathcal{U}$ sottoricoprimento finito. Poniamo $\frac{D}{2} := \max\{n_j \mid j \in \{1, ..., s\}\}$, allora si nota che $X = B\left(x_0, \frac{D}{2}\right)$ e quindi $\forall x, y \in X$ vale

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < \frac{D}{2} + \frac{D}{2} = D$$

□

Proposizione 4.2.4: *Uno spazio metrico (X, d) sequenzialmente compatto è completo.*

Dimostrazione. Segue facilmente dalla proposizione 4.1.3. □

Teorema 4.2.5 (di Heine-Borel): *Consideriamo $(\mathbb{R}^n, d_E)$. Un $Y \subset \mathbb{R}^n$ è compatto $\iff$ Y è chiuso e limitato in $(\mathbb{R}^n, d_E)$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$). Se Y è compatto per quanto detto nella proposizione precedente è limitato. Inoltre $(\mathbb{R}^n, d_E)$ è metrico e quindi T2, dunque Y è anche compatto.

($\Leftarrow$). Se Y è limitato allora $\exists M > 0$ t.c. $Y \subset [-M, M]^n$ e $[-M, M]^n$ è compatto in quanto $[-M, M]$ è omeomorfo a $[0, 1]$ (come sottospazi di $(\mathbb{R}, \tau_E)$) che è compatto e prodotto finito di compatti è compatto. Inoltre Y chiuso in $\mathbb{R}^n$ implica Y chiuso in $[-M, M]^n$ e chiuso in un un compatto è compatto. □

Teorema 4.2.6 (di Weierstrass): *Sia (X, τ) uno spazio topologico compatto e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette massimo e minimo in X.*

Dimostrazione. Per continuità $f(X)$ è compatto in $\mathbb{R}$, dunque è chiuso e limitato per il teorema precedente. Ora il fatto che è limitato implica che $\sup_X f, \inf_X f \in \mathbb{R}$, mentre il fatto che è chiuso implica che $\sup_X f, \inf_X f \in f(X)$. □

Definizione 4.2.7 (Totale limitatezza): Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subset X$. Y è detto **totalmente limitato** in (X, d) se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\exists \{x_1, ..., x_{n_\varepsilon}\} \subset X$ t.c. $\{B(x_i, \varepsilon)\}_{i \in \{1,...,n_\varepsilon\}}$ costituisce una ricoprimento di Y.

Se in (X, d) si ha che X è totalmente limitato diremo che (X, d) è uno **spazio metrico totalmente limitato**.

Proposizione 4.2.8: *Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subset X$. Se Y è totalmente limitato $\Rightarrow$ è limitato.*

Dimostrazione. Prendiamo ad esempio $\varepsilon = 1$, allora $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\exists \{x_1, ..., x_{n_1}\} \subset X$ t.c. $\{B(x_i, \varepsilon)\}_{i \in \{1,...,n_1\}}$ costituisce una ricoprimento di Y. Prendo $R \geq \max\{d(x_i, x_j) \mid i, j \in \{1, ..., n_1\}\} + 2$, allora $\forall y, y' \in Y$ si ha che $\exists i, j \in \{1, ..., n_1\}$ t.c. $y \in B(x_i, 1)$ e $y' \in B(x_j, 1)$ e quindi

$$d(y, y') \leq d(y, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y') < 2 + d(x_i, x_j) \leq R$$

Dunque fissato un $y_0 \in Y$ si ha che $Y \subset B(y_0, R)$. □

Osservazione 4.2.9: Non vale il viceversa della proposizione precedente. Infatti si prenda ad esempio $X = \mathbb{R}^n$ con $d = \min\{d_E, 1\}$ questa distanza è limitata, dunque $\mathbb{R}^n$ è limitato in $(\mathbb{R}^n, d)$, però non è totalmente limitato in $(\mathbb{R}^n, d)$. Infatti le palle di raggio $r < 1$ in $(\mathbb{R}^n, d)$ sono le stesse di quelle in $(\mathbb{R}^n, d_E)$ e ovviamente finite palle euclidee di un qualsiasi raggio (minore di 1 nel nostro caso) non ricoprono interamente $\mathbb{R}^n$.

Lemma 4.2.10: *Uno spazio metrico (X, d) totalmente limitato è separabile.*

Dimostrazione. Per totale limitatezza $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \{x_i^n\}_{i \in \{1,...,k_n\}}$ t.c. $\{B(x_i^n, 2^{-n})\}$ forma un ricoprimento di X. Sia $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_i^n\}_{\{1,...,k_n\}}$, questo è al più numerabile in quanto unione numerabile di insiemi finiti. Dimostriamo che E è denso in (X, τ_d). Per farlo basta dimostrare che $\forall x \in X$ e $\forall r > 0$ si ha $E \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Siano quindi $x \in X$ e $r > 0$ e fissiamo $n_r \in \mathbb{N}$ t.c. $2^{-n_r} < r$. Essendo $\{B(x_i^{n_r}, 2^{-n_r})\}_{\{1,...,k_{n_r}\}}$ un ricoprimento di X si ha che $\exists i \in \{1, ..., k_{n_r}\}$ t.c. $x \in B(x_i^{n_r}, 2^{-n_r})$. Ma allora $x_i^{n_r} \in B(x, r)$, in quanto $d(x, x_i^{n_r}) < 2^{-n_r} < r$. Quindi $E \cap B(x, r) \neq \emptyset$. □

Corollario 4.2.11: *Uno spazio metrico (X, d) totalmente limitato è N2.*

Dimostrazione. Uno spazio metrico separabile è N2 (vedi teorema 1.4.6), dunque la tesi segue dalla proposizione precedente. □

Teorema 4.2.12 (Compattezza in spazi metrici): *Sia (X, d) spazio metrico. Sono fatti equivalenti:*

(1) (X, d) è compatto;

(2) (X, d) è sequenzialmente compatto;

(3) (X, d) è completo e totalmente limitato.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Gli spazi metrici sono N1 dunque quest'implicazione vale per la proposizione 2.2.26.

(2) $\Rightarrow$ (3). Per la proposizione 4.2.4 sappiamo che sequenzialmente compatto implica completo. Dimostriamo che (X, d) è totalmente limitato. Se per assurdo non lo fosse $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$ t.c. nessuna collezione finita di palle aperte di (X, d) di raggio ε_0 forma un ricoprimento di X. Sia $x_0 \in X$ e ricorsivamente prendiamo $\forall n \geq 1$

$$x_n \in X \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} B(x_i, \varepsilon_0) \right)$$

la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ appena costruita è ben definita per la scelta di ε_0. Ora $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non ha sottosuccessioni di Cauchy in quanto $\forall n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m,\ d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0$, ma quindi non ha nessuna sottosuccessione convergente e questo è in contraddizione con l'ipotesi di compattezza sequenziale di (X, d).

(3) $\Rightarrow$ (1). Per il corollario 4.2.11 (X, d) è N2, dunque, grazie alla proposizione 2.2.28, la tesi segue se dimostriamo che (X, d) è sequenzialmente compatto. Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una successione. Per totale limitatezza $\forall k \in \mathbb{N}_+$ posso fissare $\mathcal{U}_k$ ricoprimento finito di X fatto da palle aperte di raggio 2^{-k}. Costruiamo ricorsivamente una sottosuccessione di Cauchy di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ usando i ricoprimenti $\{\mathcal{U}_k\}_{k \in \mathbb{N}_+}$. Essendo $\mathcal{U}_1$ ricoprimento finito di X $\exists U_1 \in \mathcal{U}_1$ t.c. $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_1\}$ è infinito. Fissiamo quindi $n_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $x_{n_1} \in U_1$. Essendo $\mathcal{U}_2$ ricoprimento finito di X, la famiglia $\{U \cap U_1 \mid U \in \mathcal{U}_2\}$ è ricoprimento finito di U_1, dunque come prima $\exists U_2 \in \mathcal{U}_2$ t.c. $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_2 \cap U_1\}$ è infinito. Fissiamo quindi $x_{n_2} \in U_2 \cap U_1$.

Per $k \geq 3$ ripetiamo ricorsivamente la costruzione fatta per $k = 1$ e $k = 2$ per trovare $x_{n_k} \in U_k \cap U_{k-1} \cap ... \cap U_2 \cap U_1$, in cui $U_k \in \mathfrak{U}_k$ è t.c. $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_k \cap U_{k-1} \cap ... \cap U_2 \cap U_1\}$ è infinito. Dico che la sottosuccessione $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy. Infatti preso $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ t.c. $2^{-m+1} < \varepsilon$ si ha che se $n_p, n_q > m$, per costruzione $x_{n_p}, x_{n_q} \in U_m = B(x, 2^{-m})$ per un qualche $x \in X$ e quindi

$$d(x_{n_p}, x_{n_q}) \leq d(x_{n_p}, x) + d(x, x_{n_q}) < 2^{-m+1} < \varepsilon$$

Quindi effettivamente $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in (X, d) che è completo, dunque $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ è convergente. Questo prova la compattezza sequenziale voluta. $\square$

Definizione 4.2.13 (Numero di Lebesgue): Sia (X, d) uno spazio metrico e $\mathfrak{U}$ un ricoprimento di X. Diciamo che $\varepsilon > 0$ è un **numero di Lebesgue** per il ricoprimento $\mathfrak{U}$ se

$$\forall x \in X \ \exists U \in \mathfrak{U} \text{ t.c. } B(x, \varepsilon) \subset U$$

Teorema 4.2.14 (del numero di Lebesgue): *Sia (X, d) uno spazio metrico compatto. Ogni ricoprimento aperto di X ammette un numero di Lebesgue.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\mathfrak{U}$ sia un ricoprimento aperto di X che non ammette numero di Lebesgue. Allora $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in X$ t.c. $B(x_n, 2^{-n})$ non è contenuta in nessun $U \in \mathfrak{U}$. Ricordiamo che, per quanto dimostrato nel teorema precedente, uno spazio metrico è compatto $\iff$ è sequenzialmente compatto, dunque presa la successione appena costruita $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ si ha che $\exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $x_{n_k} \to x^* \in X$. Ora essendo $\mathfrak{U}$ un ricoprimento $\exists U^* \in \mathfrak{U}$ t.c. $x^* \in U^*$ ed essendo U^* aperto in (X, d) si ha che $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B(x^*, \varepsilon) \subset U^*$. Ma per definizione di limite $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall k \geq k_0 \ x_{n_k} \in B(x^*, \frac{\varepsilon}{2})$ e quindi per $k \geq k_0$ si ha che se $z \in B(x_{n_k}, \frac{\varepsilon}{2})$

$$d(z, x^*) \leq d(z, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x^*) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ossia $B(x_{n_k}, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(x^*, \varepsilon) \subset U^*$. Dunque preso $k_1 \geq k_0$ t.c. $2^{-n_{k_1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ si ha che $B(x_{n_{k_1}}, 2^{-n_{k_1}}) \subset B(x_{n_{k_1}}, \frac{\varepsilon}{2}) \subset U^*$ che è un assurdo. $\square$

4.3 Teorema delle contrazioni di Banach-Cacciopoli

Definizione 4.3.1 (Contrazione): Sia (X, d) uno spazio metrico. Una **contrazione** è una mappa $T : X \to X$ k-lipschitziana con $k < 1$. In tal caso T si chiamerà anche **k-contrazione**.

Teorema 4.3.2 (delle contrazioni di Banach-Cacciopoli): *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e $T : X \to X$ una k-contrazione. Allora:*

(1) $\exists! x^* \in X$ *t.c.* $T(x_0) = x^*$;

(2) $\forall x_0 \in X$, *preso* $\forall n \geq 1$ $x_n = T(x_{n-1})$ *si ha che* $x_n \to x^*$ *per* $n \to \infty$;

(3) valgono le seguenti stime di convergenza:

- $d(x^*, x_n) \leq k^n d(x^*, x_0)$
- $d(x^*, x) \leq \frac{1}{1-k} d(x, T(x))$ *("un punto quasi fisso è quasi il punto fisso")*

e quindi: $d(x^*, x_n) \leq k^n d(x^*, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, T(x_0))$

Dimostrazione. (1). *(Esistenza).* Sia $x_0 \in X$ e $\forall n \geq 1$ sia $x_n = T(x_{n-1})$. Verifichiamo che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ è di Cauchy. Presi $n, p, q \in \mathbb{N}$ t.c. $n \leq p < q$, vale:

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{p\leq j<q} d(x_j, x_{j+1}) = \sum_{p\leq j<q} d(T^j(x_0), T^j(x_1) \leq$$

$$\leq d(x_0, x_1) \sum_{p\leq j<q} k^j \leq d(x_0, x_1) \sum_{j\geq n} k^j = \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

dunque essendo $k < 1$ e potendo prendere n grande a piacere segue che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Quindi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in (X, d) spazio metrico completo, dunque converge ad un $x^* \in X$. Vediamo che x^* è un punto fisso di T:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x^*)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla continuità di T.

(Unicità). Se x^* e y^* sono due punti fissi di T, risulta:

$$d(x^*, y^*) = d(T(x^*), T(y^*)) \leq kd(x^*, y^*) \iff d(x^*, y^*) = 0 \iff x^* = y^*$$

dunque il punto fisso è unico.

(2). Segue dall'arbitrarietà di $x_0 \in X$ nella dimostrazione dell'esistenza e dall'unicità del punto fisso.

(3). Si ha che:

- $d(x^*, x_n) = d(T^n(x^*), T^n(x_0)) \leq k^n d(x^*, x_0)$
- $d(x^*, x) \leq d(x^*, T(x)) + d(T(x), x) \leq kd(x^*, x) + d(T(x), x) \Rightarrow d(x^*, x) \leq \frac{1}{1-k} d(T(x), x)$.

□

Corollario 4.3.3: *Sia* (X, d) *uno spazio metrico completo e* $T : X \to X$ *t.c.* $\exists m \in \mathbb{N}$ *per il quale* T^m *è una* k*-contrazione allora:*

(1) $\exists! x^* \in X$ *t.c.* $T(x_0) = x^*$

(2) $\forall x_0 \in X$, preso $\forall n \geq 1$ $x_n = T(x_{n-1})$ si ha che $x_n \to x^*$ per $n \to \infty$.

Dimostrazione. (1). *(Esistenza).* Se $m = 1$ il risultato è già stato dimostrato nel teorema precedente. Supponiamo $m \geq 2$. Per il Teorema delle Contrazioni T^m ha un unico punto fisso x^*, cioè $T^m(x^*) = x^*$ ma allora $T(T^m(x^*)) = T(x^*)$ e quindi $T^m(T(x^*)) = T(x^*)$ ovvero anche $T(x^*)$ è un punto fisso di T^m ma per l'unicità deve essere che $T(x^*) = x^*$, ovvero x^* è un punto fisso di T.

(Unicità). Se x^* e y^* sono due punti fissi di T, risulta:

$$d(x^*, y^*) = d(T^m(x^*), T^m(y^*)) \leq kd(x^*, y^*) \iff d(x^*, y^*) = 0 \iff x^* = y^*$$

dunque il punto fisso è unico.

(2). Prendiamo un qualsiasi $x_0 \in X$, e per $n \geq 1$ consideriamo $x_n = T(x_{n-1})$. Dimostriamo che è di Cauchy. Siano $n, p, q \in \mathbb{N}$ t.c. $n \leq p < q$, si avrà $q - p = ml + r$ con $l \in \mathbb{N}$ e $r \in \{0, ..., m-1\}$. Allora preso $D = \max\{d(x_0, T^i(x_0)) \mid i \in \{0, ..., m-1\}\}$ vale:

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{j=0}^{l-1} d(x_{p+mj}, x_{p+m(j+1)}) + d(x_{p+ml}, x_q)$$

$$= \sum_{j=0}^{l-1} d(T^{p+mj}(x_0), T^{p+m(j+1)}(x_0)) + d(T^{p+ml}(x_0), T^{p+ml+r}(x_0))$$

$$\leq \sum_{j=0}^{l-1} k^{p+mj} d(x_0, T^m(x_0)) + k^{p+ml} d(x_0, T^r(x_0))$$

$$\leq d(x_0, T^m(x_0)) \sum_{j \geq n} k^j + Dk^n$$

$$= d(x_0, T^m(x_0)) \frac{k^n}{1-k} + Dk^n = k^n \left(\frac{d(x_0, T^m(x_0))}{1-k} + D \right)$$

dunque essendo $k < 1$ e $n \in \mathbb{N}$ grande a piacere si ottiene che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Dunque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in (X, d) completo, dunque converge ad un qualche x_0^*. Inoltre si ha

$$x_0^* = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} T(x_n) = T(x_0^*)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla continuità di T. Dunque anche x_0^* è punto fisso per T da cui segue $x_0^* = x^*$ per l'unicità. $\square$

4.4 Estensione per uniforme continuità

Definizione 4.4.1 (Uniforme continuità): Siano (X, d_X) e (X, d_Y) due spazi metrici e $f : X \to Y$ una funzione. f è detta **uniformemente continua** o **UC** se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in X \ f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$$

o, equivalentemente, se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x, x' \in X \ d_X(x, x') < \delta \ \Rightarrow \ d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Osservazione 4.4.2: L'uniforme continuità è ben spiegata dalla seguente simpatica analogia:

La continuità è saper riconoscere ogni porta e avere sempre una chiave pronta. Invece l'uniforme continuità è avere una chiave universale che apre ogni porta.

Esempio 4.4.3: *La funzione* $(0, +\infty) \ni x \longmapsto x^2 \in (0, +\infty)$ *è continua ma non uniformemente continua.*

Infatti siano $\varepsilon > 0$ e $x, y \in (0, +\infty)$, allora $x + y > 0$ e

$$|x^2 - y^2| < \varepsilon \iff |x - y||x + y| < \varepsilon \iff |x - y| < \frac{\varepsilon}{x + y}$$

Prendiamo $\varepsilon = 1$ e $n \in \mathbb{N}_+ \subset (0, +\infty)$. Allora $\forall y \in X$ vale

$$|n^2 - y^2| < 1 \iff |n - y| < \frac{1}{n + y}$$

Se inoltre prendiamo $n \geq 2$ si ha $\frac{1}{n+y} \leq \frac{1}{2}$, dunque dalla disuguaglianza precedente si ottiene $n - y \leq |n - y| < \frac{1}{2}$ e quindi $y > n - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}$. Mettendo insieme si ottiene $|n - y| < \frac{1}{n+\frac{3}{2}}$. Dunque il $\delta > 0$ per $\varepsilon = 1$ deve essere t.c. $\forall n \in \mathbb{N} \ \delta < \frac{1}{n+\frac{3}{2}}$, quindi non può essere uniforme per tutti gli $x \in X$ (perché si è detto che cambia sempre scegliendo diversi x in $\{2, 3, 4, 5, ...\} \subset \mathbb{N}_+$).

Definizione 4.4.4 (Modulo di continuità): Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e $f : X \to Y$ una funzione. Un **modulo di continuità** per f è una funzione $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ t.c.

(1) ω è monotona non decrescente;

(2) $\omega(0) = 0$ e ω è continua in 0;

(3) $\forall t \in [0, +\infty) \ \forall x, x' \in X \ d_X(x, x') < t \ \Rightarrow \ d_Y(f(x), f(x')) \leq \omega(t)$.

Teorema 4.4.5 (del modulo di continuità): *Siano* (X, d_X) *e* (Y, d_Y) *spazi metrici e* $f : X \to Y$ *una funzione.* f *è UC* $\iff \exists \omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ *modulo di continuità per* f.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Sia ω un modulo di continuità per f, per la continuità in 0 di ω si ha che $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ t.c. $\omega(\delta) < \varepsilon$. Dunque se $x, x' \in X$ sono t.c. $d_X(x, x') < \delta$ allora $d_Y(f(x), f(x')) \leq \omega(d_X(x, x')) \leq \omega(\delta) < \varepsilon$.

($\Rightarrow$). Supponiamo f uniformemente continua e definiamo $\forall t \in [0, +\infty)$

$$\omega(t) = \sup\left\{d_Y(f(x), f(x')) \mid x, x' \in X \text{ con } d_X(x, x') \leq t\right\}$$

ω così costruita è ovviamente non decrescente (il sup è fatto su un insieme sempre più grande all'aumentare di t) e $\forall t \in [0, +\infty)$ $\omega(t) \in [0 + \infty]$ in quanto nel sup contribuisce sempre $d_X(f(x), f(x)) = 0$ per $x \in X$. Per costruzione si ha la proprietà (3) della definizione di modulo di continuità. Dimostriamo la continuità in 0. Sia $\varepsilon > 0$ per uniforme continuità $\exists\delta > 0$ t.c. $\forall x, x' \in X$ con $d_X(x, x') < \delta$ si ha $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$, da cui $\omega(\delta) \leq \varepsilon$. □

Osservazione 4.4.6: *Le funzioni lipschitziane sono uniformemente continue.*

Infatti se $f : X \to Y$ è una funzione tra spzi metrici L-lipschitziana, questa ha modulo di continuità $\omega(t) = Lt$.

Teorema 4.4.7 (di Heine-Cantor): *Sia (X, d_X) uno spazio metrico compatto, (Y, d_Y) uno spazio metrico e $f : X \to Y$ una funzione. Se f è continua $\Rightarrow$ f è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f sia continua ma non uniformemente continua. Dunque $\exists\varepsilon_0 > 0$ t.c. $\forall n > 0\ \exists x_n, x'_n \in X$ t.c. $d_X(x_n, x'_n) < 2^{-n}$ ma $d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon_0$. Essendo (X, d_X) compatto $\exists(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_{n_k} \to \overline{x} \in X$. Ma $d_X(x_{n_k}, x'_{n_k}) \to 0$, quindi anche $x'_{n_k} \to \overline{x}$. Per continuità di f in $\overline{x}$ si ha che $\exists\delta > 0$ t.c. $f(B(\overline{x}, \delta)) \subset B(f(\overline{x}), \frac{\varepsilon}{2})$. Poiché $x_{n_k} \to \overline{x}$ e $x'_{n_k} \to \overline{x}$ si ha che $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall k \geq k_0$ $x_{n_k}, x'_{n_k} \in B(\overline{x}, \delta)$ che implicherebbe per la scelta di δ

$$d_Y(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \leq d_Y(f(x_{n_k}), f(\overline{x})) + d_Y(f(\overline{x}), f(x'_{n_k})) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

che è un assurdo. □

Lemma 4.4.8: *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e $f : X \to Y$ una funzione. Se f è uniformemente continua $\Rightarrow$ manda successioni di Cauchy in successioni di Cauchy.*

Dimostrazione. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione di Cauchy. Sia ω modulo di continuità per f. Preso $\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ t.c. $\omega(\delta) \leq \varepsilon$. Quindi se $n_\delta \in \mathbb{N}$ è t.c. $\forall p, q \geq n_\delta$ $d_X(x_p, x_q) \leq \delta$ vale che $\forall p, q \geq n_\delta$ $d_Y(f(x_p), f(x_q)) \leq \omega(d_X(x_p, x_q)) \leq \omega(\delta) \leq \varepsilon$. □

Teorema 4.4.9 (Estensione per uniforme continuità): *Siano (X, d_x) uno spazio metrico, (Y, d_Y) uno spazio metrico completo, $E \subset X$ ed $f : E \to Y$ uno funzione. Se f*

è UC con modulo di continuità ω $\Rightarrow$ f si estende ad una $F : \overline{E} \to Y$ UC con lo stesso modulo di continuità ω. Inoltre esiste un'unica estensione continua di f ad $\overline{E}$ che quindi è UC e che risulta essere lineare quando f lo è.

Dimostrazione. Sia $x \in \overline{E}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ t.c. $x_n \to x$. Allora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $(E, (d_X)_{|E})$, ma allora per il lemma precedente $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ è una successione di Cauchy in (Y, d_Y) che è completo, dunque $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge in Y e poniamo $F(x) := \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$. Vediamo che tale definizione è ben posta. Sia $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ un'altra successione t.c. $x'_n \to x$, allora per continuità della distanza si ha che $d_X(x_n, x'_n) \to 0$. Quindi preso $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ t.c. $\omega(\delta) \le \varepsilon$ e $n_\delta \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \ge n_\delta$ $d_X(x_n, x'_n) \le \delta$ si ha che

$$d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \le \omega(d_X(x_n, x'_n)) \le \omega(\delta) \le \varepsilon$$

Se ne deduce che $d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \to 0$ e quindi che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = F(x)$. Essendo f UC in particolare è continua e uno spazio metrico è $N1$, dunque f è sequenzialmente continua e se $x \in E$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ con $x_n \to x$ si ha che $F(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$, ossia effettivamente F estende f a $\overline{E}$. Rimane da dimostrare che F è UC con modulo di continuità ω. Sia $t \in (0, +\infty)$ e siano $x, x' \in \overline{E}$ con $d(x, x') < t$, supponiamo $d(x, x') = t - \varepsilon$. Siano $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ due successioni t.c. $x_n \to x$ e $x'_n \to x'$, allora $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \ge N$ si ha $d_X(x_n, x), d_X(x'_n, x') < \frac{\varepsilon}{2}$. Per $n \ge N$ si ha allora

$$d_X(x_n, x'_n) \le d_X(x_n, x) + d_X(x, x') + d_X(x', x'_n) \le \varepsilon + d_X(x, x') = t$$

e quindi usando per proprietà di ω si ottiene

$$d_Y(f(x_n), f(x'_n)) < \omega(t)$$

e prendendo il limite per $n \to +\infty$, per continuità della distanza d_Y (rispetto alla topologia prodotto $Y \times Y$) si ottiene $d_Y(F(x), F(x')) < \omega(t)$.

Dalla costruzione segue facilmente che se f è lineare allora anche F è lineare.

Infine se $F, F' : \overline{E} \to Y$ sono due estensioni continue di f, preso comunque $x \in \overline{E}$ esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ t.c. $x_n \to x$ e quindi

$$\begin{aligned} d_Y(F(x), F'(x)) &= \lim_{n\to+\infty} d_Y(F(x_n), F'(x_n)) \\ &= d_Y(f(x_n), f(x_n)) = 0 \end{aligned}$$

ossia $F(x) = F'(x)$ per ogni $x \in \overline{E}$ e questo conclude anche la dimostrazione dell'unicità. □