

Teorema di Ascoli-Arzelà ed alcune sue conseguenze

Emanuele Pardini

Prima del teorema protagonista diamo dei lemmi utili sia per la dimostrazione di Ascoli-Arzelà, sia nella vita di tutti i giorni (si scherza).

Definizione 1: Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e $\Lambda \subset C^0(X, Y)$. La famiglia Λ è detta **equicontinua** se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall f \in \Lambda \quad \forall x, x' \in X \quad d_X(x, x') \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$$

O equivalentemente se hanno tutte lo stesso modulo di continuità (mdc) ω .

Lemma 1: $\Lambda \subset C^0(X, Y)$ è equicontinua \iff la mappa di valutazione $ev : \Lambda \times X \rightarrow Y$ t.c. $ev(f, x) = f(x)$ è uniformemente continua.

Dimostrazione. (\Rightarrow) Se Λ è equicontinua di mdc. ω allora:

$$\begin{aligned} d_Y(ev(f, x), ev(g, y)) &= d_Y(f(x), g(y)) \leq d_Y(f(x), f(y)) + d_Y(f(y), g(y)) \leq \\ &\leq \omega(d_X(x, y)) + d_\infty(f, g) = \Omega(d_X(x, y) + d_\infty(f, g)) = \Omega(d_{\Lambda \times X}((f, x), (g, y))) \end{aligned}$$

e Ω è un mdc.

(\Leftarrow) Se ev è uniformemente continua di mdc ω allora $\forall f \in \Lambda \quad \forall x, y \in X$ vale che:

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_Y(ev(f, x), ev(f, y)) \leq \omega(d_{\Lambda \times X}((f, x), (f, y))) = \omega(d_X(x, y))$$

□

Analizziamo ora il caso in cui $Y = E$ con $(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach.

Lemma 2: Sia $(f_n)_n \subset C^0(X, E)$, con E Banach, una successione di funzioni equicontinue. Allora $C = \{c \in E \mid f_n(x) \text{ converge in } E\}$ è chiuso.

Dimostrazione. Sia $x \in \overline{C}$, vediamo che $x \in C$, ossia che le f_n convergono in x , e per fare ciò, visto che E è spazio di Banach, basta far vedere che $(f_n(x))_n \subset E$ è una successione di Cauchy. Sia $c \in C$ allora

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p(x) - f_p(c)\| + \|f_p(c) - f_q(c)\| + \|f_q(c) - f_q(x)\| \leq$$

$$\leq 2\omega(d_X(x, c)) + \|f_p(c) - f_q(c)\| \leq$$

ora essendo $x \in \overline{C} \exists c \in C$ t.c. $2\omega(d_X(x, c)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e per questo c la successione $(f_n(c))_n$ converge \Rightarrow è di Cauchy $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall p, q \geq n \|f_p(c) - f_q(c)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e quindi con queste scelte si ha che

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e questo per ogni $\varepsilon > 0$, dunque la tesi. \square

Lemma 3: *Sia $(f_n)_n \subset C^0(X, E)$, con E Banach e X spazio metrico compatto, una successione di funzioni equicontinue puntualmente convergenti ad una funzione f . Allora la convergenza risulta essere uniforme e f è uniformemente continua con lo stesso modulo di continuità delle f_n .*

Dimostrazione. Sia ω mdc delle f_n , allora $\forall x, x' \in X \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n(x) - f_n(x')\| \leq \omega(d(x, x'))$$

e prendendo il $\lim_{n \rightarrow \infty}$ si ottiene che:

$$\|f(x) - f(x')\| \leq \omega(d(x, x'))$$

ossia che la funzione limite f è uniformemente continua con lo stesso modulo delle f_n . Mentre per la convergenza uniforme considerando il fatto che $f_n - f \rightarrow 0$ uniformemente se e solo se $f_n \rightarrow f$ uniformemente, posso prendere wlog $f = 0$. Dunque voglio vedere che $\|f_n\|_\infty = o(1)$ per $n \rightarrow \infty$, ora essendo X compatto:

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f_n(x)\|_E \stackrel{X \text{ compatto}}{=} \max_{x \in X} \|f_n(x)\|_E = \|f_n(x_n)\|_E$$

ora $(x_n)_n \subset X$ compatto allora esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ convergente ad un $x^* \in X$, e

$$\begin{aligned} \|f_{n_k}\|_\infty &= \|f_{n_k}(x_{n_k})\|_E \leq \|f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(x^*)\|_E + \|f_{n_k}(x^*)\|_E \leq \\ &\leq \omega(d(x_{n_k}, x^*)) + o(1) = o(1) \quad \text{per } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Ma lo stesso argomento si può applicare a qualsiasi sottosuccessione di $(f_n)_n$, ossia ogni sa sottosuccessione ammette una sottosottosuccessione che converge uniformemente a 0, dunque per la proprietà di Urysohn anche le f_n convergono uniformemente a 0 per $n \rightarrow \infty$. \square

Osservazione 1: Notare che l'ipotesi di compattezza di X è servita solamente per provare che la convergenza fosse uniforme, dunque l'altra affermazione, quella che dice che il limite puntuale di equicontinue è uniformemente continua, non necessita dell'ipotesi di compattezza di X .

Ora siamo pronti a enunciare e dimostrare il teorema principale di questo scritto.

Teorema 1 (di Ascoli-Arzelà): Sia X spazio metrico compatto ed E spazio di Banach. $\Lambda \subset C^0(X, E)$ è compatto rispetto alla convergenza uniforme \iff valgono le seguenti tre condizioni:

- (1) Λ è chiuso rispetto alla convergenza uniforme;
- (2) Λ è equicontinua;
- (3) $\Lambda(x)$ è relativamente compatto in $E \forall x \in S$, con S denso in X .

Dimostrazione. Supponiamo che Λ sia compatto, allora

- (1) è chiuso perché compatto in spazio topologico di Hausdorff è chiuso,
- (2) la mappa di valutazione $ev : \Lambda \times X \rightarrow E$ è continua su un compatto allora è uniformemente continua per Heine-Cantor e dunque per il lemma Λ è equicontinua;
- (3) poichè ev è continua e $\Lambda \times \{x\}$ è compatto per ogni $x \in X$ l'insieme $ev(\Lambda \times \{x\}) = \Lambda(x)$ in quanto immagini continue di compatti.

Viceversa se valgono (1), (2), (3) dell'enunciato allora, essendo X spazio metrico compatto, esso è separabile e quindi anche S è separabile. Sia quindi $\{y_k\}_{k \geq 1}$ sottoinsieme numerabile di S denso in $S \subset X$ t.c. $\Lambda(y_k)$ è relativamente compatto $\forall k \geq 1$. Sia $(f_n)_n$ una successione in Λ , vogliamo provare che ha una sottosuccessione convergente in Λ , ossia che Λ è sequenzialmente compatto. Definiamo dunque una successione di sottosuccessioni successive (indicizzata da k) ossia $(f_{n,0})_n = (f_n)_n$ e $(f_{n,k+1})_n$ una sottosuccessione di $(f_{n,k})_n$ che sia convergente in $y_{k+1} \forall k \geq 0$. (Queste sottosuccessioni esistono in quanto $(f_{n,k}(y_{k+1}))_n \subset \Lambda(y_{k+1}) \subset \overline{\Lambda(y_{k+1})}$ che è compatto in quanto $\Lambda(y_{k+1})$ è relativamente compatto per ipotesi e dunque posso trovare una sottosuccessione che sia convergente per compattezza.) A questo punto vogliamo applicare un argomento diagonale di Cantor. La successione diagonale $(f_{n,n})_n$ converge definitivamente in ogni $y_k \forall k \geq 1$ in quanto è definitivamente una sottosuccessione di $(f_{n,k})_n$ (esattamente da quando $n \geq k$). Per il primo lemma l'insieme di convergenza C di $(f_{n,n})_n$ è chiuso e contiene $\{y_k\}_{k \geq 1}$ che è denso in S . Dunque, essendo C chiuso, abbiamo $C \supseteq \overline{\{y_k\}_{k \geq 1}} = S$. Allora C è denso e chiuso in X , quindi necessariamente $C = X$, ossia la successione diagonale $(f_{n,n})_n$ converge puntualmente per ogni $x \in X$ Poi per il secondo lemma, essendo X compatto, la convergenza è uniforme e, essendo Λ chiuso per ipotesi, converge in Λ , ossia Λ è sequenzialmente compatto. \square

Corollario 1: Sia $\Lambda \subset C^0(X, \mathbb{K})$ con X spazio metrico compatto e $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Λ è compatto rispetto alla convergenza uniforme \iff valgono le seguenti tre condizioni

- (1) Λ è chiuso
- (2) Λ è equicontinuo

(3) Λ è puntualmente limitato su un denso di X .

Dimostrazione. In quanto in questi casi limitato è relativamente compatto. \square

Ora andiamo a vedere due importanti risultati ottenuti grazie a questo importante teorema: il primo è il teorema di Hopf-Rinow nel caso degli spazi metrici, che ci garantisce la possibilità di camminare meno se siamo almeno capaci di arrivare alla nostra meta (si scherza ma non troppo), il secondo è un importante risultato sulle equazioni differenziali ordinarie, il teorema di esistenza di Peano.

Prima diamo alcune piccole nozioni in più che ci serviranno.

Definizione 2: Una funzione $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, X spazio topologico, si dice **semicontinua inferiormente** se è continua nella topologia della continuità inferiore \mathcal{T}_{inf} , ossia quella in cui gli aperti sono tutti e soli gli insiemi della forma $(c, +\infty]$ con $c \in \mathbb{R}$. Cioè se $\forall c \in \mathbb{R}$ si ha che $F^{-1}((c, +\infty])$ è aperto.

Osservazione 2: Notiamo che una funzione continua $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è anche semicontinua inferiormente e che un inviluppo superiore di funzioni semicontinue inferiormente è semicontinuo inferiormente. Infatti sia $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di funzioni semicontinue inferiormente e sia $F(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ il suo inviluppo superiore, allora si ha che:

$$F^{-1}((c, +\infty]) = \{x \in X \mid \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda > c\} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{f_\lambda > c\}$$

che è aperto in quanto unione di aperti.

Teorema 2 (di Weierstrass per funzioni semicontinue inferiormente): *Siano X uno spazio metrico compatto non vuoto e $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione semicontinua inferiormente. Allora F ammette minimo su X .*

Dimostrazione. F è continua nella topologia \mathcal{T}_{inf} , quindi $F(X)$ è compatto e non vuoto in $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{inf})$, dunque per concludere basta notare che i compatti non vuoti di questo spazio sono insiemi dotati di minimo. Infatti se $C \subset \overline{\mathbb{R}}$ non ha minimo, allora $\exists (c_n)_n$ successione strettamente decrescente che tende al $\inf C$ e $C \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (c_n, +\infty]$ ma $\forall N \in \mathbb{N} C \not\subset \bigcup_{n=0}^N (c_n, +\infty]$ ossia per C esiste un ricoprimento infinito di aperti che non ammette un sottoricoprimento finito allora C non è compatto. \square

Siamo pronti per il primo risultato:

Teorema 3 (Hopf-Rinow per spazi metrici): *Sia (X, d) spazio metrico compatto e $x_0, x_1 \in X$ t.c. esiste una $\gamma \in C^0([0, 1], X)$ t.c. $\gamma(i) = x_i$ per $i = 0, 1$ e $\ell(\gamma, [0, 1]) < +\infty$. Allora esiste una curva continua di lunghezza minima che collega x_0 e x_1 .*

Dimostrazione. Notiamo per prima cosa che il funzionale lunghezza $\ell : C^0([0, 1], X) \rightarrow [0, +\infty]$ è per definizione inviluppo superiore di funzioni continue

$$\ell(\gamma, [0, 1]) = \sup_{P \in \mathfrak{P}([0, 1])} \sum_{x_i \in P} d(\gamma(x_i), \gamma(x_{i+1}))$$

in cui $\mathfrak{P}([0, 1])$ è la famiglia di tutte le suddivisioni di $[0, 1]$. Dunque è semicontinuo inferiormente e quindi ammette minimo su un compatto. Consideriamo la famiglia di funzioni continue

$$\Gamma = \{\gamma \in C^0([0, 1], X) \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}$$

questo è un insieme uniformemente chiuso e prendiamo $L = \inf_{\gamma \in \Gamma} \ell(\gamma, [0, 1]) \in \mathbb{R}$ che è finito in quanto esiste per ipotesi un cammino di lunghezza finita in Γ . Vorrei che L fosse un minimo. Per dimostrarlo, essendo il funzionale ℓ semicontinuo inferiormente, basta dire che Γ è un compatto di $C^0([0, 1], X)$. Ricordando che la lunghezza di una curva è invariante per riparametrazioni, voglio costruire, per ogni curva $\gamma \in \Gamma$, una riparametrazione che la renda lipschitziana, in modo da potermi restringere a studiare solo le lunghezze di curve lipschitziane. Se $\gamma \in \Gamma$ continua la funzione $[0, 1] \ni x \rightarrow \ell(\gamma, [0, x]) \in \mathbb{R}$ è continua e crescente, dunque la funzione: $\sigma : [0, 1] \rightarrow [0, \ell(\gamma) + 1]$ t.c. $\sigma(x) = \ell(\gamma, [0, x]) + x$ è un omeomorfismo crescente, e la curva $\gamma \circ \sigma^{-1} : [0, \ell(\gamma) + 1] \rightarrow X$ è una riparametrazione di γ ed è t.c. se $s < s' \in [0, \ell(\gamma) + 1]$:

$$\begin{aligned} d(\gamma(\sigma^{-1}(s')) - \gamma(\sigma^{-1}(s))) &\leq \ell(\gamma \circ \sigma^{-1}, [s, s']) = \ell(\gamma, [\sigma^{-1}(s), \sigma^{-1}(s')]) = \\ &= \ell(\gamma, [0, \sigma^{-1}(s')]) - \ell(\gamma, [0, \sigma^{-1}(s)]) \leq \\ &\leq \ell(\gamma, [0, \sigma^{-1}(s')]) + \sigma^{-1}(s') - \ell(\gamma, [0, \sigma^{-1}(s)]) - \sigma^{-1}(s) = s' - s \end{aligned}$$

in quanto $s' > s$ e quindi $\sigma^{-1}(s') - \sigma^{-1}(s) > 0$ essendo σ^{-1} crescente e $\ell(\gamma, [0, \sigma^{-1}(s')]) + \sigma^{-1}(s') = \sigma(\sigma^{-1}(s')) = s'$ e lo stesso per l'altro termine. Ossia $\gamma \circ \sigma^{-1}$ è 1-lipschitziana. Ora se $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, \ell(\gamma) + 1]$ t.c. $\tau(t) = (\ell(\gamma) + 1)t$ è un altro omeomorfismo crescente e rende $\gamma \circ \sigma^{-1} \circ \tau : [0, 1] \rightarrow X$ una curva $(\ell(\gamma) + 1)$ -lipschitziana (facile verifica), con la stessa lunghezza di γ e che sta sempre in Γ . Dunque possiamo restringerci ad effettuare l'estremo inferiore sulle $\gamma \in \Gamma$ t.c. $lip(\gamma) = \ell(\gamma) + 1$, in quanto:

$$L = \inf_{\gamma \in \Gamma} \ell(\gamma, [0, 1]) = \inf_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \ell(\gamma) \leq L+1}} \ell(\gamma, [0, 1]) = \inf_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ lip(\gamma) \leq L+1}} \ell(\gamma, [0, 1])$$

e le curve nella famiglia $\{\gamma \in \Gamma \mid lip(\gamma) \leq L + 1\}$ ammettono tutte modulo di continuità $\omega(t) = (L + 1)t$, dunque è una famiglia equicontinua, uniformemente chiusa (in quanto Γ è chiusa e una successione di funzioni equicontinue uniformemente convergente converge ad una funzione uniformemente continua con lo stesso modulo di continuità) e la sua immagine puntuale è relativamente compatta in quanto le funzioni che la compongono sono a valori in uno spazio metrico compatto, dunque per Ascoli-Arzelà è un compatto di $C^0([0, 1], X)$. Ma allora ℓ su

$\{\gamma \in \Gamma \mid \text{lip}(\gamma) \leq L + 1\}$ è un funzionale semicontinuo inferiormente definito su un compatto, dunque vi ammette minimo, ossia:

$$L = \min_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \text{lip}(\gamma) \leq L+1}} \ell(\gamma, [0, 1]) = \min_{\gamma \in \Gamma} \ell(\gamma, [0, 1])$$

e quindi la tesi. \square

Vediamo adesso il secondo risultato che discende dal Ascoli-Arzelà.

Teorema 4 (di esistenza di Peano): *Sia $f \in C^0(B, \mathbb{R}^n)$ con $B = \bar{B}(u_0, r) \subset \mathbb{R}^n$. Il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ ammette una soluzione $u \in C^1(I, B)$ con $I = [t_0 - a, t_0 + a]$ t.c. $a \cdot \|f\|_{\infty, B} \leq r$.*

Osservazione 3: Innanzitutto osserviamo che dimostrato questo asserto abbiamo l'esistenza in ipotesi di sola continuità per problemi di Cauchy anche non autonomi, in quanto un qualsiasi problema di Cauchy può essere ricondotto ad uno autonomo, ovvero: se ho un problema $\begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$ ponendo $y(t) = (t, u(t))$ il problema equivale a $\begin{cases} \dot{y} = F(y) \\ y(t_0) = (t_0, x_0) \end{cases}$ in cui $F(y) = (1, f(y))$, che è del tipo dell'enunciato.

Dimostrazione. Siano ora $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mappe lipschitziane (ad esempio mappe polinomiali componente per componente) convergenti uniformemente ad f su B (esistono per il teorema di approssimazione di Stone-Weierstrass) e posso supporle t.c. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\|_{\infty, B} \leq \|f\|_{\infty, B}$. In quanto se $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$ allora $\|f_n\|_{\infty, B} \rightarrow \|f\|_{\infty, B}$ e quindi prendendo $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f'_n = \left(\frac{\min\{\|f_n\|_{\infty, B}, \|f\|_{\infty, B}\}}{\|f_n\|_{\infty, B}} \right) f_n$$

si ha che $\|f'_n\|_{\infty, B} \leq \|f\|_{\infty, B}$. Ora per ogni $n \in \mathbb{N}$ per il teorema di Cauchy-Lipschitz esiste (unica) una soluzione u_n del problema $\begin{cases} \dot{u}_n = f'_n(u_n) \\ u_n(t_0) = u_0 \end{cases}$ (in quanto le f_n sono lipschitziane) in $C^1(I, B)$, in cui $I = [t_0 - a, t_0 + a]$ (in quanto per ipotesi $a\|f\|_{\infty, B} \leq r$ che è la condizione sull'ampiezza dell'intervallo di definizione richiesta dal teorema di Cauchy-Lipschitz). Inoltre le $\{u_n\}_n$ sono equicontinue in quanto sono tutte lipschitziane di costante $\|f\|_{\infty, B}$, in quanto:

$$\|\dot{u}_n\|_{\infty, I} \leq \|f_n\|_{\infty, B} \leq \|f\|_{\infty, B}$$

e sono a valori in B che è un compatto. Dunque $(u_n)_n \subset \{u \in C^0(I, B) \mid \text{lip}(u) \leq \|f\|_{\infty, B}\}$ che è un sottoinsieme equicontinuo, chiuso e puntualmente relativamente compatto (tutte le sue funzioni sono a valori in un compatto) su ogni $x \in I$, dunque compatto per Ascoli-Arzelà. Dunque vi è una sottosuccessione $(u_{n_k})_k$ di $(u_n)_n$ convergente ad una $u \in C^0(I, B)$. Ora: $\dot{u}_{n_k} = f_{n_k}(u_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\|_{\infty, I}} f(u)$, infatti

$$\|f_{n_k} \circ u_{n_k} - f \circ u\|_{\infty, I} \leq \|f_{n_k} \circ u_{n_k} - f \circ u_{n_k}\|_{\infty, I} + \|f \circ u_{n_k} - f \circ u\|_{\infty, I} \leq$$

$$\leq \|f_{n_k} - f\|_{\infty, B} + \omega_f(\|u_{n_k} - u\|_{\infty, I}) = o(1) \text{ per } k \rightarrow +\infty.$$

Dunque essendo $\begin{cases} u_{n_k} \rightarrow u \text{ uniformemente su } I \\ \dot{u}_{n_k} \rightarrow f(u) \text{ uniformemente su } I \end{cases}$ le ipotesi del teorema di limite sotto il segno di differenziale sono più che verificate, dunque si ha che la u è derivabile $C^1(I, B)$ e risolve $\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ dunque la tesi. \square