IN SUPREMÆ DIGNITATIS
1343

UNIVERSITÀ DI PISA

Emanuele Pardini

Funzioni di Una Variabile Complessa

Indice

Capitolo 1

Lo Spazio $\mathbb{C}$ e funzioni olomorfe

1.1 Definizione di $\mathbb{C}$

Iniziamo col definire lo spazio su cui lavoreremo. Partiamo da $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}\}$ e definiamoci due operazioni: **somma** e **prodotto**

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

definite nel seguente modo, se $(x,y),(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$(a,b) + (x,y) = (a+x, b+y)$$

$$(a,b) \cdot (x,y) = (ax - by, bx + ay)$$

Osservazione 1.1.1: Notiamo che

$$(a,b) \cdot (x,y) = a(x,y) + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (x,y) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} (x,y)$$

Si può verificare che lo spazio $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è un campo, lo indicheremo con $\mathbb{C}$ e chiameremo i suoi elementi **numeri complessi**.

$\mathbb{R}$ si immerge naturalmente in $\mathbb{C}$ mediante la funzione iniettiva

$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

t.c. $j(x) = (x, 0)$.

Tendenzialmente per l'operazione di prodotto $\cdot$, si ometterà il puntino e se due numeri complessi sono uno accanto all'altro senza niente di specificato sarà sottintesa l'operazione di prodotto. Inoltre l'operazione prodotto ha per convenzione la priorità rispetto alla somma in un espressione senza parentesi.

Chiaramente $\mathbb{C}$ eredita da $\mathbb{R}^2$ la struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, dunque ho altre due operazioni la somma come spazio vettoriale e il prodotto per uno scalare reale, per fortuna non c'è ambiguità in questo, infatti la due somme sono la stessa operazione e il prodotto per scalare reale coincide con il prodotto definito prima nel caso di numero reale immerso in $\mathbb{C}$.

Sfruttando tale struttura prendo la base canonica $(1,0),(0,1)$ e definisco la seguente notazione

$$1 := (1,0) \qquad\qquad i := (0,1)$$

che ci permette di scrivere un numero complesso nella forma

$$\mathbb{C} \ni (x,y) = x1 + yi =: x + iy$$

Si nota che $i^2 = -1$ dunque i risolve l'equazione $x^2 + 1 = 0$.

Nel seguito indicheremo un generico numero complesso con $z = x + iy = (x,y)$, $x = \Re(z)$ è detta **parte reale di** z mentre $y = \Im(z)$ è detta **parte immaginaria di** z.

Inoltre $\mathbb{C}$ eredita da $\mathbb{R}^2$ anche la struttura di spazio normato su $\mathbb{R}$ con la norma, detta **modulo** $|\cdot| : \mathbb{C} \to [0,+\infty)$, t.c. se $x + iy \in \mathbb{C}$

$$|x+iy| := \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

con questa norma $\mathbb{C}$ è uno spazio di Banach (reale). Ma il modulo è anche una norma complessa, cioè si verifica che $\forall z \in \mathbb{C}$ $\forall a + ib \in \mathbb{C}$

$$|(a+ib)z| = |a+ib||z|$$

dunque $\mathbb{C}$ ha una struttura anche di spazio normato complesso. Tale norma induce una metrica e quindi una topologia su $\mathbb{C}$; tale topologia è "analoga" a quella euclidea su $\mathbb{R}^2$.

1.2 Applicazioni $\mathbb{C}$-lineari $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare su $\mathbb{R}^2$, L, è rappresentabile con una matrice 2×2 a entrate in $\mathbb{R}$

$$L = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

dunque anche un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare su $\mathbb{C}$ è rappresentabile attraverso una matrice.

Se L è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare su $\mathbb{C}$ si ha che è anche $\mathbb{C}$-lineare se e solo se commuta con la moltiplicazione per un numero complesso e questo è se e solo se commuta con la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che appare nella definizione del prodotto su $\mathbb{C}$, ma questo avviene se e solo se vale

$$\begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

cioè

$$L = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

che è la rappresentazione matriciale della moltiplicazione per il numero complesso $a + ib$.

Nel seguito chiameremo $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ lo spazio delle applicazioni $\mathbb{R}$-lineari $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ lo spazio delle applicazioni $\mathbb{C}$-lineari $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1.3 Differenziabilità per funzioni in $\mathbb{C}$

Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione. Talvolta considereremo la f come funzione

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Il fatto che voglio enfatizzare qui è che è sostanzialmente la stessa cosa lavorare con una o con l'altra, fino a che non si vanno ad utilizzare proprietà intrinseche di $\mathbb{C}$.

Osservazione 1.3.1: Una $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è scrivibile anche dividendo la sua parte reale e immaginaria

$$f = u + iv$$

con

$$u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$v : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Richiamiamo la nozione di continuità, esplicitandola per l'ambiante particolare in cui stiamo lavorando.

Definizione 1.3.2: Una $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con U aperto, è **continua in** $z_0 \in U$ se $\forall V \subset \mathbb{C}$ intorno di $f(z_0)$ $\exists A \subset U$ intorno di z_0 t.c. $f(A) \subset V$. Inoltre f è detta **continua su** U se e solo se è continua in ogni punto di U

Osservazione 1.3.3: Dalla natura della topologia su $\mathbb{C}$ si nota che $f = u+iv$ è continua $\iff$ lo sono entrambe $u : U \to \mathbb{R}$ e $v : U \to \mathbb{R}$.

Definizione 1.3.4: Una $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con U aperto è detta **$\mathbb{R}$-Differenziabile in** $z_0 = x_0 + iy_0$ se e solo se esiste un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ t.c.

$$f(z) = f(z_0) + L[z - z_0] + o(|z - z_0|) \quad \text{per } z \to z_0$$

Tale L è detta **differenziale di** f **in** z_0 si indicherà con $df(z_0)$. Inoltre diremo che f è **$\mathbb{R}$-differenziabile su** U se è $\mathbb{R}$-differenziabile in ogni punto di U ed in tal caso è definita l'applicazione

$$df : U \to \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

che associa ad ogni $z \in U$ il $df(z)$.

Proposizione 1.3.5: *$f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con U aperto, se è $\mathbb{R}$-Differenziabile in $z_0 \Rightarrow$ è continua in z_0.*

Osservazione 1.3.6: La nozione di $\mathbb{R}$-differenziabilità $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è esattamente la nozione di differenziabilità $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dunque se $f = u + iv : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è $\mathbb{R}$-differenziabile in $z_0 = x_0 + iy_0 = (x_0, y_0)$ si ha ha che $df(z_0)$ corrisponde alla moltiplicazione per una matrice che per quanto noto sul calcolo differenziabile in più variabili si chiama **matrice jacobiana di f in** (x_0, y_0), denotato con $Jf(x_0, y_0)$ ed ha la forma

$$J_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & \partial_y u(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) & \partial_y v(x_0, y_0). \end{pmatrix}$$

Inoltre per verificare la $\mathbb{R}$-differenziabilità ci si può rifare alle derivate parziali di f vista $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e vedere che effettivamente esistano continue, dunque per il teorema del differenziale totale, esiste anche il differenziale di f in $z_0 = x_0 + iy_0$.

Definizione 1.3.7 (Funzione olomorfa): Una $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con U aperto è detta **olomorfa** (o **$\mathbb{C}$-differenziabile in** $z_0 \in U$ se e solo se esiste un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ t.c.

$$f(z) = f(z_0) + L[z - z_0] + o(|z - z_0|) \text{ per } z \to z_0$$

o equivalentemente se è $\mathbb{R}$-differenziabile con $df(z_0)$ $\mathbb{C}$-lineare. Inoltre diremo che f è **olomorfa su** U se è olomorfa in ogni punto di U ed in tal caso è definita l'applicazione

$$df : U \to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

che associa ad ogni $z \in U$ il $df(z)$, se tale applicazione è continua f è detta C^1.

Osservazione 1.3.8: Per quanto detto nella sezione precedente sulle applicazioni $\mathbb{C}$-lineari $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, si ha che $df(z_0)$ è necessariamente la moltiplicazione per un numero complesso, cosa che ci porta alla prossima definizione.

Definizione 1.3.9 (Derivata di una funzione complessa): Sia $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con U aperto, olomorfa in $z_0 \in U$, chiamo **derivata di f in** z_0 il numero complesso

$$f'(z_0) := df(z_0)[1]$$

Osservazione 1.3.10: Una $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con U aperto, è olomorfa in z_0 se e solo se esiste il limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

e se esiste si vede bene che è uguale a $f'(z_0)$.

Definizione 1.3.11 (Funzione intera): Una $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, è detta **intera** se e solo se è definita su tutto $\mathbb{C}$ ed è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$.

Proposizione 1.3.12: *Siano $f, g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con U aperto, olomorfe in $z_0 \in \mathbb{C}$ allora*

- *$f + g$ è olomorfa in z_0 con $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$*
- *fg è olomorfa in z_0 con $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$*
- *se $g(z_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ è olomorfa in z_0 con $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$*
- *sia $f : U \to V$ è una funzione olomorfa in $z_o \in U$ e bigettiva e $g : V \to U$ è la sua inversa, se $f'(z_0) \neq 0$ allora g è olomorfa in $f(z_0)$ con derivata $g'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$*

Dimostrazione. Le prime tre sono analoghe al caso reale.

Vediamo la quarta.

Essendo f è olomorfa in z_0 si ha che $Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a + ib = f'(z_0)$, dunque essendo $a + ib \neq 0$ si ha che $df(z_0)$ è invertibile e quindi (teorema generale sugli spazi di Banach reali) si ha che esiste $dg(f(z_0)) = [df(z_0)]^{-1}$, cioè $dg(f(z_0)) = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ con $c + id = \frac{1}{a+ib} \in \mathbb{C}$.

Dunque essendo la matrice jacobiana di g in $f(z_0)$ la moltiplicazione per un numero complesso si ha che $dg(f(z_0))$ è $\mathbb{C}$-differenziabile, ossia g è olomorfa in $f(z_0)$ con

$$g'(f(z_0)) = c + id = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

□

Proposizione 1.3.13: *Siano $f : U \subset \mathbb{C} \to V \subset \mathbb{C}$, $g : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con U, V aperti, t.c. f olomorfa in z_0 è g olomorfa in $f(z_0)$ allora $g \circ f$ è olomorfa in z_0 con $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.*

Dimostrazione. Analoga al caso reale. □

Esempio 1.3.14: I polinomi sono funzioni intere.

Le funzioni del tipo $\frac{p(z)}{q(z)}$ con $p(z), q(z)$ polinomi sono olomorfe in $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} | q(z) = 0\}$.

Esempio 1.3.15 (Funzione non olomorfa): $f(z) = \bar{z}$ non è olomorfa. Infatti affinché lo sia deve esistere il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

ma

$$1 = \lim_{h \to 0, Im(h)=0} \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{h \to 0, Re(h)=0} \frac{\bar{h}}{h} = -1$$

che ci da un assurdo.

Proposizione 1.3.16 (Equazioni di Cauchy-Riemann): *Una* $f = u + iv : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *con* U *aperto, è olomorfa in* $z_0 = x_0 + iy_0$ *se e solo se è* $\mathbb{R}$*-differenziabile e valgono*

$$\begin{cases} \partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0) \\ \partial_y u(x_0, y_0) = -\partial_x v(x_0, y_0) \end{cases}$$

quelle appena scritte sono dette ***equazioni di Cauchy-Riemann****.*

Dimostrazione. Viene dal fatto che f è olomorfa in z_0 se e solo se è $\mathbb{R}-$differenziabile in z_0 e $J_f(z_0)$ è $\mathbb{C}$-lineare e ricordando quanto detto nella sezione precedente sugli endomorfismi $\mathbb{C}$-lineari di $\mathbb{C}$, ho che questo è possibile se e solo se

$$\begin{cases} \partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0) \\ \partial_y u(x_0, y_0) = -\partial_x v(x_0, y_0) \end{cases}.$$

□

Definizione 1.3.17: Useremo le notazioni

$$\partial_x f(z) = \partial_x u(x, y) + i\partial_x v(x, y)$$

$$\partial_y f(z) = \partial_y u(x, y) + i\partial_y v(x, y).$$

Osservazione 1.3.18: Chiamando

$$x, y : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

le proiezione sulla parte reale e complessa rispettivamente, si ha che queste due sono applicazioni lineari, dunque i loro differenziali

$$dx, dy : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

in ogni z, sono loro stessi e se $z := Id_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si ha che

$$\begin{cases} dz = dx + idy \\ d\bar{z} = dx - idy \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \\ dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

Per chiarire le cose scrivo le seguenti uguaglianze che danno un idea degli oggetti con cui stiamo lavorando

$$dx(z_0)[a + ib] = a$$

$$dy(z_0)[a + ib] = b$$

$$dz(z_0)[a+ib] = dx(z_0)[a+ib] + idy(z_0)[a+ib] = a+ib$$

ma molto spesso (se non sempre), per comodità, nelle espressioni $dx(z_0), dy(z_0)$ ometteremo di scrivere la valutazione in z_0 in quanto nella maggior parte dei casi è chiaro a che livello siamo delle due valutazioni del differenziale e quest'ultimo è sempre la stessa funzione per ogni z_0, dunque non crea ambiguità da questo punto di vista.

Ora se $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ è $\mathbb{R}$-differenziabile in $z = x + iy$, per il teorema del differenziale totale

$$\begin{aligned} df(z) &= \partial_x f(z) dx + \partial_y f(z) dy = \\ &= \partial_x f(z) \frac{dz + d\bar{z}}{2} + \partial_y f(z) \frac{dz - d\bar{z}}{2i} = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_x f(z) - i\partial_y f(z))dz + \frac{1}{2}(\partial_x f(z) + i\partial_y f(z))d\bar{z} \end{aligned}$$

dunque definendo gli operatori

$$\begin{cases} \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \\ \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \end{cases}$$

detti **derivate di Wirtinger**, si ha

$$df(z) = \partial_z f(z) dz + \partial_{\bar{z}} f(z) d\bar{z}$$

e si ha la seguente

Proposizione 1.3.19 (delle derivate di Wirtinger): *Siano $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $z \in U$ in cui f è $\mathbb{R}$-differenziabile. f è olomorfa in $z \iff \partial_{\bar{z}} f(z) = 0$.*

Dimostrazione. f è olomorfa in z se e solo se $df(z)$ è $\mathbb{C}$-lineare, cioè se e solo se

$$df(z)[i] = \partial_y f(z) = idf(z)[1] = i\partial_x f(z)$$

e questo è se e solo se

$$\partial_x f(z) = -i\partial_y f(z)$$

cioè

$$\partial_{\bar{z}} f(z) = 0.$$

□

Proposizione 1.3.20: *Sia $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ aperto connesso, olomorfa. Sono equivalenti*

(1) f è costante in U

(2) f' è nulla su tutto U

(3) $\Re(f) = u$ *è costante in* U

(4) $\Im(f) = v$ *è costante in* U

Dimostrazione. Ovvio è che $(1) \Rightarrow (3), (4)$.

$(1) \iff (2)$. Se f è costante in U allora chiaramente $\forall z \in U$ $df(z)$ è l'applicazione nulla e quindi $f'(z) = df(z)[1] = 0$. Viceversa se $\forall z \in U$ $f'(z) = 0$ allora f è costante sulle palle, infatti se $\rho > 0$ e $q \in B(z, \rho)$ si ha che considerando la curva $h : [0, 1] \to B(z, \rho) \subset \mathbb{C}$

$$h(t) = f(tq + (1-t)z)$$

si ha che $h(0) = f(z)$, $h(1) = f(q)$ e $\forall t \in [0, 1]$

$$h'(t) = df(tq + (1-t)z)[q - z] = f'(tq + (1-t)z)(q - z) = 0 \cdot (q - z) = 0$$

dunque h è costante per il teorema del valor medio. Dunque $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ le fibre $f^{-1}(\{\lambda\})$ sono aperte, ma

$$U = \bigsqcup_{\lambda \in \mathbb{C}} f^{-1}(\{\lambda\})$$

dunque per connessione di U $\exists \lambda_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $U = f^{-1}(\{\lambda_0\})$.

$(3) \Rightarrow (2)$ e $(4) \Rightarrow (2)$. Si usano le condizioni di Cauchy-Riemann che in entrambi i casi, per $z = x + iy \in U$, implicano che lo jacobiano di f in $z = (x, y)$ è nullo e quindi anche che la derivata $f'(z) = 0$. $\square$

Capitolo 2

1-Forme complesse

2.1 1-Forme complesse continue

Definizione 2.1.1 (1-forma complessa): Una **1-forma a valori complessi** è un'applicazione

$$\omega : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$$

Osservazione 2.1.2: A noi interessa il caso in cui $m = 2$ in cui si identifica $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Ora in tal caso se si prendono le due proiezioni sulla parte reale e immaginaria (che sono le proiezioni sulle due componenti)

$$x : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad y : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

si ha che

$$\omega(z)[a+ib] = \omega(z)[1]a + \omega(z)[i]b = (\omega(z)[1]dx + \omega(z)[i]dy)[a+ib]$$

dunque se $Q(z) = \omega(z)[1]$ e $Q(z) = \omega(z)[i]$ si ha

$$\omega(z) = P(z)dx + Q(z)dy.$$

Osservazione 2.1.3: Nel caso in cui $\omega : U \subset \mathbb{C} \to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, cioè è a valori nelle $\mathbb{C}$-lineari, allora vale che esiste una $f : U \to \mathbb{C}$ t.c.

$$\omega = fdz$$

infatti in tal caso

$$\omega(z)[a+ib] = \omega(z)[1](a+ib)$$

e chiamando $f(z) = \omega(z)[1]$ si ha quello che volevamo.

Definizione 2.1.4: Una 1-forma a valori complessi $\omega = Pdx + Qdy$ è detta **continua** se lo sono entrambe P e Q. Ed è detta $\mathbf{C^1}$ se lo sono entrambe P e Q.

Osservazione 2.1.5: Se $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa C^1 allora il suo differenziale

$$df : U \to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

è una 1-forma a valori complessi continua. E per quanto detto precedentemente si ha

$$df = f' dz.$$

Definizione 2.1.6: Una 1-forma a valori complessi su $U \subset \mathbb{C}$ continua ω è detta **esatta** se e solo se $\exists F : U \to \mathbb{C}$ t.c.

$$\omega = dF.$$

Mentre è detta **localmente esatta (o chiusa)** se e solo se $\forall z \in U$ $\exists V$ intorno di z t.c. $\omega|_V$ è esatta. Inoltre viene detta **$\mathbf{C^1}$-chiusa** se e solo se $\omega = Pdx + Qdy$ con P, Q C^1 e vale

$$\partial_y P = \partial_x Q.$$

Proposizione 2.1.7: *Sia $\omega = Pdx + Qdy : U \to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ 1-forma a valori complessi su $U \subset \mathbb{C}$ aperto.*

(1) Se ω è esatta allora è chiusa;

(2) se ω è anche C^1 vale che se ω è esatta allora è C^1-chiusa.

Dimostrazione. Il primo caso è ovvio dalle definizioni.

Il secondo caso segue dal teorema di Schwarz, infatti se $\omega = dF$ allora

$$P = \partial_x F \qquad Q = \partial_y F$$

e F è C^2. Quindi per il teorema di Schwarz

$$\partial_y P = \partial_y \partial_x F = \partial_x \partial_y F = \partial_x Q.$$

□

2.2 Integrazione di 1-forme complesse su cammini

Definizione 2.2.1 (Integrale di 1-forme complesse su cammini C^1): Sia ω una 1-forma complessa continua su $U \subset \mathbb{C}$ e sia $\gamma : [a, b] \to U$ un cammino C^1, allora definiamo l'**integrale di ω lungo γ**

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \omega(\gamma(t))[\gamma'(t)]dt$$

Osservazione 2.2.2: $\int_\gamma \omega$ è invariante per riparametrizzazioni di γ. Infatti se $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ è una riparametrizzazione e $\delta = \gamma \circ \varphi$ allora

$$\int_\delta \omega = \int_c^d \omega(\gamma(\varphi(t)))[\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)]dt = \int_c^d \omega(\gamma(\varphi(t)))[\gamma'(\varphi(t))]\varphi'(t)dt =$$

ponendo $s = \varphi(t)$

$$= \int_a^b \omega(\gamma(s))[\gamma'(s)]ds = \int_\gamma \omega.$$

Grazie a questa proprietà d'ora in poi, a volte, considererò senza perdere di generalità cammini del tipo $[0,1] \to U \subset \mathbb{C}$.

Proposizione 2.2.3: *Sia ω una 1-forma complessa continua su $U \subset \mathbb{C}$ e sia $\gamma : [0,1] \to U$ un cammino C^1. Valgono le seguenti proprietà*

- *sia γ^{-1} il cammino che corrisponde a γ percorso al contrario allora*

$$\int_{\gamma^{-1}} \omega = -\int_\gamma \omega$$

- *se $c \in (0,1)$ allora*

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma|_{[0,c]}} \omega + \int_{\gamma|_{[c,1]}} \omega$$

Definizione 2.2.4: Sia ω una 1-forma complessa continua su $U \subset \mathbb{C}$ e sia $\gamma : [a,b] \to U$ un cammino C^1 a tratti, cioè esistono $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ t.c. $\forall i = 1,...,n \quad \gamma_i := \gamma_{[x_{i-1},x_i]}$ sono cammini C^1, allora definiamo

$$\int_\gamma \omega := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \omega$$

Definizione 2.2.5: Siano $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to U$ definisco il cammino concatenato, $\gamma_1 * \gamma_2$, come

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{per } t \in [0,1/2] \\ \gamma_2(2(t-1)) & \text{per } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

Proposizione 2.2.6: *Siano $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to U$ C^1 a tratti t.c. $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ e sia ω una 1-forma complessa continua su U. Vale che*

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

Dimostrazione. Segue dall'additività dell'integrale provata precedentemente e dall'invarianza per riparametrizzazioni. □

Teorema 2.2.7: *Sia $\omega = dF$ una 1-forma complessa esatta continua su $U \subset \mathbb{C}$ e sia $\gamma : [a,b] \to U$ un cammino C^1 a tratti. Vale che*

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Dimostrazione. A meno di restringerci ad ogni pezzetto C^1 posso considerare γ C^1, in quanto poi diventa una somma telescopica.

Dunque

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma dF = \int_a^b dF(\gamma(t))[\gamma'(t)]dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(F(\gamma(t)))dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

per il teorema fondamentale del calcolo integrale. □

Lemma 2.2.8: *Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto connesso $\Rightarrow U$ è connesso per archi C^1 a tratti.*

Dimostrazione. Un aperto di $\mathbb{C}$ è localmente connesso per archi, anzi è localmente convesso.

Considero la relazione d'equivalenza su U: $x \sim y$ se e solo se esiste un cammino C^1 a tratti che collega x e y. Chiaramente questa è una relazione di equivalenza e se C_x è la classe di equivalenza di $x \in U$ si ha che è aperta (per locale convessità). Inoltre se $\{C_{x_j}\}_{j\in J}$ sono tutte le diverse classi di equivalenza vale

$$U = \bigsqcup_{j\in J} C_{x_j}$$

dunque per connessione di U $\exists x_{j_0} \in U$ t.c. $U = C_{x_{j_0}}$ che equivale alla tesi. □

Teorema 2.2.9: *Siano $U = B(z,\rho)$ una palla e $\omega = Pdx + Qdy$ una 1-forma complessa su U. ω è esatta su $U \iff \int_{\partial R}\omega = 0$ per ogni rettangolo $R \subset U$ con lati paralleli agli assi e con bordo percorso da una curva C^1 a tratti ∂R.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$). $\omega = dF$, il cammino ∂R che percorre il bordo del rettangolo $\partial R : [a,b] \to U$ è chiuso, dunque per il teorema precedente

$$\int_{\partial R} \omega = 0$$

($\Leftarrow$). Costruisco la F. Pongo per ogni $z = x + iy \in U$

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \omega$$

in cui

$$\gamma_z(t) = \begin{cases} tx & \text{per } t \in [0,1] \\ x + i(t-1)y & \text{per } t \in [1,2] \end{cases}$$

dunque vale che

$$F(z) = \int_0^1 \omega(\gamma_z(t))[\gamma_z'(t)]dt + \int_1^2 \omega(\gamma_z(t))[\gamma_z'(t)]dt.$$

Essendo

$$\gamma_z'(t) = \begin{cases} x & \text{per } t \in [0,1] \\ iy & \text{per } t \in [1,2] \end{cases}$$

si ha

$$\omega(\gamma_z(t))[\gamma_z'(t)] = \begin{cases} P(tx)x & \text{per } t \in [0,1] \\ Q(x + i(t-1)y)y & \text{per } t \in [1,2] \end{cases}$$

e quindi

$$F(z) = \int_0^1 P(tx)xdt + \int_1^2 Q(x + i(t-1)y)ydt =$$

ponendo $s = (t-1)y$ nel secondo integrale

$$= \int_0^1 P(tx)xdt + \int_0^y Q(x + is)ds$$

e quindi

$$\partial_y F(z) = Q(x + iy) = Q(z).$$

Mentre se chiamo $\delta_z = \begin{cases} ity & \text{per } t \in [0,1] \\ (t-1)x + iy & \text{per } t \in [1,2] \end{cases}$ essendo $\gamma_z * \delta_z^{-1}$ il rettangolo di vertici $0, iy, x+iy, x$ ho che per ipotesi

$$0 = \int_{\gamma_z * \delta_z^{-1}} \omega = \int_{\gamma_z} \omega - \int_{\delta_z} \omega$$

cioè

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \omega = \int_{\delta_z} \omega$$

ed in modo analogo a prima si ottiene

$$\partial_x F(z) = P(z).$$

Dunque per il teorema del differenziale totale si ottiene $dF = Pdx + Qdy = \omega$. □

Teorema 2.2.10: *Sia ω una 1-forma complessa su $U \subset \mathbb{C}$. Sono equivalenti*

(1) ω è esatta;

(2) $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni cammino chiuso γ C^1 a tratti in U;

(3) $\int_\gamma \omega = \int_\delta \omega$ per ogni cammino γ, δ C^1 a tratti in U con gli stessi punti iniziali e finali.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). $\omega = dF$ dunque

$$\int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Se considero $\delta * \delta^{-1}$ ho che è un cammino chiuso, dunque

$$0 = \int_{\delta * \delta^{-1}} \omega = \int_\gamma \omega - \int_\delta \omega$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Costruisco la primitiva. Posso assumere U connesso, in quanto se non lo fosse potrei restringermi ad ogni componente connessa.

Sia dunque $z_0 \in U$ un punto base e definisco

$$F(q) = \int_{\gamma_q} \omega$$

con γ_q un cammino C^1 a tratti che collega z_0 e q. Per ipotesi F è ben definita, cioè non dipende dal cammino scelto. Ora $\omega = Pdx + Qdy$ e $q = x_1 + iy_1 = (x_1, y_1)$, vediamo le derivate parziali

$$\partial_x F(q) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x_1 + \varepsilon, y_1) - F(x_1, y_1)}{\varepsilon}.$$

Divido i casi $\varepsilon > 0$ e $\varepsilon < 0$.

$\varepsilon > 0$

Prendo $\gamma : [a, b] \to U$ un cammino qualsiasi da z_0 a q e sia $\gamma_\varepsilon : [a, b + \varepsilon]$ t.c.

$$\gamma_\varepsilon(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{per } t \in [a, b] \\ (x_1 + (t - b), y_1) & \text{per } t \in [b, b + \varepsilon] \end{cases}$$

sostanzialmente è il cammino γ con incollato un segmento che collega $q = (x_1, y_1)$ e $(x_1 + \varepsilon, y_1)$, se chiamo δ_ε questo ultimo pezzetto percorso come da definizione di γ_ε allora ho

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \omega = \int_\gamma \omega + \int_{\delta_\varepsilon} \omega$$

ossia

$$F(x_1 + \varepsilon, y_1) - F(x_1, y_1) = \int_{\delta_\varepsilon} \omega$$

dunque

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{F(x_1 + \varepsilon, y_1) - F(x_1, y_1)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\delta_\varepsilon} \omega =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_b^{b+\varepsilon} \omega(x_1 + (t - b), y_1)[(1, 0)]dt =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_b^{b+\varepsilon} P(x_1 + (t - b), y_1)dt = P(x_1, y_1) = P(q)$$

con il penultimo uguale ottenuto grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale.

$\varepsilon < 0$

Allo stesso modo del caso precedente solo che prendo $\gamma_\varepsilon : [a, b - \varepsilon]$ t.c.

$$\gamma_\varepsilon(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{per } t \in [a, b] \\ (x_1 - (t - b), y_1) & \text{per } t \in [b, b - \varepsilon] \end{cases}.$$

Dunque ho $\partial_x F(q) = P(q)$. In modo completamente analogo trovo che l'altra derivata parziale è $\partial_y F(q) = Q(q)$. Dunque F è una primitiva di ω su U. □

Teorema 2.2.11 (Invarianza per omotopia): *Sia ω una 1-forma complessa continua e chiusa su $U \subset \mathbb{C}$ e siano $\alpha, \beta : [a, b] \to U$ due cammini C^1 a tratti e $x_0, x_1 \in U$ t.c. $\alpha(a) = \beta(a) = x_0$ e $\alpha(b) = \beta(b) = x_1$. Se α e β sono omotopi ad estremi fissi in U, allora vale*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$

Dimostrazione. Possiamo supporre che i cammini siano parametrizzati su $[0,1]$ e prendiamo $H : [0,1] \times [0,1] \to U$ un'omotopia tra α e β.

Per ogni $p \in [0,1] \times [0,1]$ esiste $r_p > 0$ t.c. se $B_p := B(H(p), r_p)$ vale $\omega_{|B_p}$ esatta, con $\omega_{|B_p} = df_p$.

Notiamo che se $V_p := H^{-1}(B_p)$, $\{V_p\}_{p\in[0,1]\times[0,1]}$ è un ricoprimento di $[0,1] \times [0,1]$, quindi per compattezza di $[0,1] \times [0,1]$ esiste un numero $\delta > 0$ t.c. $\forall p \in [0,1] \times [0,1]$ $\exists q \in [0,1] \times [0,1]$ t.c. $B(p,\delta) \subset V_q$.

Quindi possiamo trovare un $N \in \mathbb{N}$ t.c. se dividiamo $[0,1] \times [0,1]$ in N^2 quadratini $\{Q\}_{i\in\{1,\ldots,N\}j\in\{1,\ldots,N\}}$, tutti dello stesso lato, si ha che ognuno di questi è tutto contenuto in V_p per qualche $p \in [0,1] \times [0,1]$.

Ora consideriamo gli integrali di ω sui bordi dei quadratini e quando si scrive $\int_{\partial Q_{i,j}} \omega$ si intende l'integrale di ω sulle opportune concatenazioni di restrizioni di H tali che seguano il bordo di $Q_{i,j}$ in senso antiorario partendo dal vertice in basso a sinistra, mentre $\int_{\partial Q} \omega$ è l'integrale sulle restrizioni di H che seguono il bordo di $[0,1] \times [0,1]$ partendo dall'origine $(0,0)$.

Notiamo che i contributi dei segmenti interni si elidono a due a due, quindi si rimane con

$$\int_{\partial Q} \omega = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial Q_{i,j}} \omega$$

ma se A, B, C, D sono i vertici di un quadratino tra quelli considerati, tale quadratino (e quindi in particolare anche i vertici A, B, C, D) è tutto contenuto in V_p per un qualche $p \in [0,1] \times [0,1]$, ma ω è esatta in V_p con primitiva locale f_p, quindi l'integrale su uno dei lati di tale quadratino non è altro che la differenza delle immagini secondo f_p dei due vertici del lato considerato; quindi l'integrale $\int_{\partial Q} \omega$ da origine ad una somma telescopica di cui rimane solo la differenza tra l'immagine secondo f_{p_0} di $(0,0)$, in cui p_0 è un punto t.c. $Q_{0,0} \subset V_{p_0}$ ($Q_{0,0}$ è il primo quadratino sul vertice in basso a sinistra di $[0,1] \times [0,1]$ che ha come vertice l'origine) e se stessa, ossia

$$\int_{\partial Q} \omega = f_{p_0}(0,0) - f_{p_0}(0,0) = 0$$

dunque

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial Q_{i,j}} \omega = 0$$

ma $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial Q_{i,j}} \omega = \int_\alpha \omega + \int_{c_{z_1}} \omega - \int_\beta \omega - \int_{c_{z_0}} \omega$, con c_{z_0} e c_{z_1} i cammini costanti su z_0 e z_1 rispettivamente.

Ma $\int_{c_{z_0}} \omega = 0$ e $\int_{c_{z_1}} \omega = 0$, dunque mettendo assieme si ottiene che

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega.$$

□

Corollario 2.2.12 (Domini semplicemente connessi): *Sia ω una 1-forma complessa su $U \subset \mathbb{C}$ semplicemente connesso. Allora se ω è esatta se e solo se è chiusa.*

Dimostrazione. Esatta implica chiusa è sempre vero e si è già dimostrato.

Quindi supponiamo ω chiusa e prendiamo un cammino chiuso C^1 a tratti in U γ, allora essendo U semplicemente connesso γ, preso $p \in \mathrm{Imm}(\gamma) \subset U$, si ha che γ è omotopo ad estremi fissi al cammino costante p, c_p, quindi essendo ω chiusa, per il teorema precedente:

$$\int_\gamma \omega = \int_{c_p} \omega = 0$$

che prova l'esattezza di ω grazie all'arbitrarietà di γ. $\square$

Capitolo 3

Esponenziale e logaritmo complessi

3.1 Esponenziale complesso

Definizione 3.1.1 (Esponenziale complesso): Definiamo l'**esponenziale complesso** come quella funzione t.c. $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$e^z = \exp(z) := e^x(\cos y + i \sin y).$$

Proposizione 3.1.2: *$f(z) = \exp(z) = e^z$ è intera con $f'(z) = e^z$ e quindi $d\exp(z) = e^z dz$.*

Dimostrazione. Vale che, se $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $e^z = u(x, y) + iv(x, y)$ con

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

$$v(x, y) = e^x \sin y$$

per vedere che è olomorfa in z vasta vedere, per quanto detto precedentemente, che sia $\mathbb{R}$-differenziabile e che valgano le condizioni di Cauchy-Riemann. Ora $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ è chiramente $\mathbb{R}$-differenziabile, inoltre vale che

$$\partial_x u(x, y) = e^x \cos y = \partial_y v(x, y)$$

$$\partial_y u(x, y) = -e^x \sin y = -\partial_x v(x, y)$$

ossia le condizioni di Cauchy-Riemann.

□

Corollario 3.1.3: *Sono intere anche le funzioni*

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

3.2 Logaritmi complessi

Definizione 3.2.1 (Branca del logaritmo complesso): Chiamiamo **branca del logaritmo (o logaritmo)** su $U \subset \mathbb{C}$, una qualsiasi funzione continua $L : U \to \mathbb{C}$ t.c.

$$e^{L(z)} = z \quad \forall z \in U$$

Osservazione 3.2.2 (sulla definizione dei logaritmi): Affinchè su U sia definito un logaritmo bisogna chiedere che $0 \notin U$ in quanto, dalla definizione, l'esponenziale complesso non è mai nullo, dunque nel caso in cui $0 \in U$ non esisterebbe nessuna funzione $L : U \to \mathbb{C}$ t.c. $e^{L(0)} = 0$.

Detto questo l'ideale sarebbe definire un logaritmo su tutto $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$, ma vedremo tra poco che questo non è possibile.

Sia $2\pi\mathbb{Z}$ il sottoguppo additivo di $\mathbb{R}$ formato dai multipli interi di 2π, mentre sia S^1 il sottogruppo moltiplicativo di $\mathbb{C}$ fatto dai numero complessi t.c. $|z| = 1$.

Ora la mappa $\varphi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to S^1$ t.c

$$\varphi(y) = e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

è un isomorfismo di gruppi, dunque è definita la sua inversa che associa ad un numero complesso z in S^1 una classe d'equivalenza di numeri reali che all'interno della classe distano un multiplo di 2π, tale classe di numeri è detta **argomento di** z ed è denotata con $Arg(z)$ e con un abuso di notazione denoteremo un qualunque elemento di tale classe sempre con $Arg(z)$.

Dunque siamo pronti per la definizione seguente

Definizione 3.2.3 (Argomento): Sia $z \in \mathbb{C}^*$, definiamo **argomento di** z

$$\text{Arg}(z) := \text{Arg}\left(\frac{z}{|z|}\right)$$

Osservazione 3.2.4: Notare che il RHS nella definizione è già stato definito, dunque la definizione è ben posta. Come per S^1 anche l'argomento di un qualsiasi numero complesso è definito modulo 2π.

Osservazione 3.2.5: Notare che vale per $z \neq 0$

$$z = |z|e^{i\text{Arg(z)}}$$

Proposizione 3.2.6: *Sia $f(z)$ una branca del logaritmo su $U \subset \mathbb{C}$ connesso, allora ogni altra branca del logaritmo su U è della forma*

$$f(z) + 2\pi ki$$

per un qualche $k \in \mathbb{Z}$. E viceversa $f(z) + 2\pi ki$ è una branca del logaritmo su U per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Siano $f(z), g(z)$ due branche del logaritmo su U allora la funzione $h : U \to \mathbb{C}$

$$h(z) = \frac{g(z) - f(z)}{2\pi i}$$

è continua (in quanto lo sono f, g) ed è a valori in $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$, infatti se $z \in U$

$$e^{2\pi i h(z)} = e^{g(z)} e^{-f(z)} = e^{g(z)} [e^{f(z)}]^{-1} = z z^{-1} = 1$$

e questo può avvenire se e solo se $h(z) \in \mathbb{Z}$. Ora, essendo U connesso, per continuità anche l'immagine di h lo deve essere, dunque tale immagine deve necessariamente essere della forma $\{k_0\}$ per un qualche $k_0 \in \mathbb{Z}$, ossia h deve essere costante k_0. Dunque è

$$g(z) = f(z) + 2\pi k_0 i.$$

Il viceversa è ovvio. □

Definizione 3.2.7: Per ogni numero complesso $z \in \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ esiste un solo elemento di $\operatorname{Arg}(z)$ compreso tra $(-\pi, \pi)$ chiamiamo tale elemento **argomento principale di** z e lo denotiamo con $\arg(z)$.

Definizione 3.2.8 (Branca principale del logaritmo complesso): Definisco **branca principale del logaritmo** di un numero complesso $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$$\log(z) := \log(|z|) + i \arg(z)$$

3.3 La 1-Forma $\frac{dz}{z}$

Qui studiamo la 1-forma complessa $\frac{dz}{z}$ che ci sarà molto utile nel seguito.

Proposizione 3.3.1: *Sia $f(z)$ una branca del logaritmo su $U \subset \mathbb{C}^*$ aperto. f è olomorfa su U con*

$$f'(z) = \frac{1}{z}.$$

In particolare $df(z) = \frac{dz}{z}$ per ogni $z \in U$.

Dimostrazione. Vale che $\exp \circ f = Id$, dunque per la regola di differenziazione delle funzioni composte (ricordando che il differenziale dell'identità in ogni punto lo avevamo chiamato dz) $\forall z \in U$

$$dz = d(\exp \circ f)(z) = e^{f(z)} df(z) = z df(z)$$

cioè

$$df(z) = \frac{dz}{z}.$$

□

Proposizione 3.3.2: *La 1-forma complessa continua su $\mathbb{C}^*$ $\omega(z) = \frac{dz}{z}$ è chiusa ma non esatta.*

Dimostrazione. Si ha che $\mathbb{C}^* = (\mathbb{C} - (-\infty, 0]) \cup (\mathbb{C} - [0, +\infty))$ e su questi due insiemi aperti è definita una branca del logaritmo. Dunque $\forall z \in \mathbb{C}^*$ esiste un aperto $V \subset \mathbb{C}^*$, $z \in V$, su cui è definita una branca del logaritmo L la quale è t.c. $dL(z) = \frac{dz}{z}$ per la proposizione precedente, dunque questa è una forma localmente esatta, cioè chiusa. Ma per quanto visto nella sezione precedente la forma $\frac{dz}{z}$ è esatta se e solo se ha integrale nullo lungo un qualsiasi cammino in $\mathbb{C}^*$, C^1 a tratti, chiuso. Dunque prendo il cammino chiuso $\gamma : [0, 1] \to S^1 \subset \mathbb{C}^*$ t.c.

$$\gamma(t) = e^{2\pi it}$$

ed essendo $\gamma'(t) = 2\pi ite^{2\pi it}$ (per la regola di derivazione delle funzioni composte) vale che

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{dz[2\pi ite^{2\pi it}]}{e^{2\pi it}} dt = \int_0^1 \frac{2\pi ite^{2\pi it}}{e^{2\pi it}} dt = 2\pi i \neq 0$$

□

Osservazione 3.3.3 (Non esiste un logaritmo su tutto $\mathbb{C}^*$): Questo fatto ci permette di affermare che non esiste un logaritmo definito su tutto $\mathbb{C}^*$, in quanto se questo esistesse sarebbe olomorfo con differenziale $\frac{dz}{z}$ su tutto $\mathbb{C}^*$ che quindi sarebbe una 1-forma esatta su $\mathbb{C}^*$ che è un assurdo per quanto appena provato.

Proposizione 3.3.4: *Se $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}^*$ (cioè non passa dall'origine) è un cammino chiuso C^1 a tratti allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} \quad \text{è un intero.}$$

Dimostrazione. Sia $\gamma_p : [0, 1] \to \mathbb{C}^*$ il cammino t.c. $\gamma_p(t) = pe^{i2\pi t}$. Ogni cammino chiuso C^1 a tratti in $\mathbb{C}^*$ passante per p è omotopo ad estremi fissi ad un cammino del tipo $n\gamma_p$ con $n \in \mathbb{Z}$, in cui ho concatenato n cammini γ_p se $n \in \mathbb{N}$ o n cammini γ_p^{-1} se $-n \in \mathbb{N}$. Dunque per invarianza per omotopia per ogni cammino γ in $\mathbb{C}^*$ C^1 a tratti esiste un $n \in \mathbb{Z}$ t.c.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma = \frac{n}{2\pi i} \int_{\gamma_p} \frac{dz}{z}.$$

Inoltre vale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{i2\pi pe^{i2\pi t}}{pe^{i2\pi t}} dt = 1$$

da cui segue la tesi. □

Osservazione 3.3.5: Tutto quello che abbiamo provato in questa sezione vale, attraverso un'immediata generalizzazione, per ogni 1-forma del tipo

$$\frac{dz}{z - z_0}$$

definita su $\mathbb{C} - \{z_0\}$.

Infatti prendendo $U \subset \mathbb{C} - \{z_0\}$ un aperto ed un logaritmo L su $\{z - z_0 | z \in U\} \subset \mathbb{C}^*$ ho che $\forall z \in U$

$$e^{L(z-z_0)} = z - z_0$$

dunque pongo $f(z) = L(z - z_0)$ ed ho come prima (per la regola di differenziazione delle funzioni composte)

$$df(z) = \frac{dz}{z - z_0}$$

dunque $\frac{dz}{z-z_0}$ è localmente esatta, cioè chiusa.

Per vedere che non è esatta, si prende il cammino $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C} - \{z_0\}$ t.c. $\gamma(t) = z_0 + e^{2\pi it}$ per il quale vale che $\gamma'(t) = 2\pi ie^{2\pi it}$ e quindi

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^1 \frac{2\pi ite^{2\pi it}}{e^{2\pi it}} = 2\pi i \neq 0$$

Per vedere che per ogni cammino chiuso C^1 a tratti $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C} - \{z_0\}$ l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

è un intero, basta prendere come $\gamma_p : [0, 1] \to \mathbb{C} - \{z_0\}$ il cammino $\gamma_p(t) = z_0 + (p - z_0)e^{i2\pi t}$ e ricalcare la dimostrazione della proposizione precedente.

Capitolo 4

Formula integrale di Cauchy

4.1 Indice di un cammino

Definizione 4.1.1 (Indice di un cammino): Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} - \{z_0\}$ un cammino C^1 a tratti chiuso. Si definisce l'**indice di** γ **rispetto ad** $\mathbf{z_0}$ la quantità

$$I(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Vediamo delle proprietà importanti dell'indice

Proposizione 4.1.2: *Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} - \{z_0\}$ un cammino C^1 a tratti chiuso.*

(1) $I(\gamma, z_0)$ è un intero.

(2) Se z_0 è fissato $I(\gamma, z_0)$ rimane costante finché il cammino chiuso è deformato, in modo continuo, senza passare per z_0.

(3) Se γ è fissato $I(\gamma, z_0)$ è quando z_0 varia una una componente connessa del complementare dell'immagine di γ.

(4) Se l'immagine di γ è contenuta in un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{C}$ che non contiene il punto z_0 allora $I(\gamma, z_0) = 0$.

(5) Se γ è un cammino che parametrizza $S^1 \subset \mathbb{C}$ in senso antiorario (t.c. $I(\gamma, 0) = +1$) allora $I(\gamma, z_0) = 0$ per z_0 fuori dal cerchio e $I(\gamma, z_0) = 1$ per z_0 dentro al cerchio.

Dimostrazione. 1) Già visto.

2) Segue dall'invarianza per omotopia dell'integrale di 1-forme chiuse.

3) Essendo $\mathbb{C} - Im(\gamma) \ni z_0$ aperto si ha che esiste un $r > 0$ t.c. $B(z_0, r) \subset \mathbb{C} - Im(\gamma)$, dunque $\forall h \in B(0, r) \subset \mathbb{C}$ si ha

$$I(\gamma, z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - (z_0 + h)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{(z - h) - z_0}$$

dunque ponendo $z - h = z'$ si ha (usando la differenziazione delle funzioni composte, notando che la derivata della trasformazione $z \mapsto z - h$ uguale a 1, e chiamando dz' sempre la funzione identità)

$$I(\gamma, z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{dz'}{z' - z_0}$$

in cui $\gamma'(t) = \gamma(t) - h$ per $t \in [0, 1]$ (non è la derivata attenzione, l'apostrofo è solo una notazione per distinguere le variabili), ma γ e γ' sono omotopi, dunque mettendo insieme su ottiene per l'invarianza per omotopia

$$I(\gamma, z_0) = I(\gamma, z_0 + h)$$

per ogni $h \in B(0, r) \subset \mathbb{C}$.

Dunque l'indice fissata γ è localmente costante in delle palle, dunque essendo $\mathbb{C} - Im(\gamma)$ aperto, ogni sua componente connessa è aperta (perché le palle sono convesse e quindi connesse) e quindi prendendo per ogni punto di una componente connessa una pallina (prendo un ricoprimento di palle aperte della componente connessa) in cui l'indice è costante si ha necessariamente che queste si intersecano "a catena", dunque l'indice è costante su tutta la componente connessa.

4) Nel semplicemente connesso non c'è z_0, dunque γ può essere deformato in modo continuo ad un punto non passando mai per z_0, dunque la tesi segu eper l'invarianza per omotopia.

5) Conseguenza degli altri punti. □

Osservazione 4.1.3: Dalle proprietà appena mostrate si deduce che $I(\gamma, z_0)$ indica quante volte il cammino γ "ruota in senso antiorario attorno a z_0".

Adotteremo la seguente notazione, date due curve continue $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ indicheremo

$$\gamma_1\gamma_2 : t \mapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 t \mapsto \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$$

dunque si hanno le seguenti utili proprietà (le dimostrazioni sono semplici e sono sul Cartan alle pagine 63,64, prima o poi verranno riportate anche qui).

Proposizione 4.1.4: *Siano $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ due curve continue, se $z_0 \notin Im(\gamma_1) \cap Im(\gamma_2)$ vale che*

$$I(\gamma_1\gamma_2, z_0) = I(\gamma_1, z_0) + (\gamma_2, z_0)$$

Proposizione 4.1.5: *Siano $\gamma, \gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ due curve continue, se $z_0 \notin Im(\gamma)$ e se per ogni $t \in [0, 1]$ $|\gamma_1(t)| < |\gamma(t)|$ allora $\gamma + \gamma_1$ non passa mai per z_0 e*

$$I(\gamma + \gamma_1, z_0) = I(\gamma, z_0)$$

4.2 Teorema di Cauchy

Teorema 4.2.1 (di Cauchy): *Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora la 1-forma complessa $f(z)dz$ è chiusa su U.*

Dimostrazione. Se R' è un qualsiasi rettangolo in U allora denotiamo $\alpha(R') = \int_{\partial R'} f(z)dz$. Dimostriamo che per ogni $z \in U$, se $r > 0$ è t.c. $B(z,r) \subset U$ allora $f(z)dz$ è esatta in $B(z,r)$. Supponiamo per assurdo che $f(z)dz$ non sia esatta in $B(z,r)$, allora per il Teorema 2.2.9 esiste un rettangolo $R \subset B(z,r)$ t.c

$$\alpha(R) = \int_{\partial R} f(z)dz \neq 0$$

Dividiamo R in 4 rettangoli uguali A_1, A_2, A_3, A_4 con lati paralleli a quelli di R e con il centro di R vertice in comune, si ha

$$0 \neq \alpha(R) = \alpha(A_1) + \alpha(A_2) + \alpha(A_3) + \alpha(A_4)$$

dunque esiste un $i \in \{1,2,3,4\}$ t.c. $\alpha(A_i) \geq \frac{\alpha(R)}{4}$ e poniamo $R_1 = A_i$. Dunque divido R_1 allo stesso modo di quanto fatto con R e analogamente trovo un R_2 t.c. $\alpha(R_2) \geq \frac{\alpha(R_1)}{4} \geq \frac{\alpha(R)}{4^2}$ e itero il procedimento trovando una successione di rettangoli "inscatolati" t.c.

$$\alpha(R_n) \geq \frac{\alpha(R_{n-1})}{4} \geq \frac{\alpha(R)}{4^n}$$

per ogni $n \geq 1$, in cui si è posto $R_0 = R$. Dalla disuguaglianza precedente si deduce che

$$|\alpha(R_n)| \geq \frac{|\alpha(R)|}{4^n}$$

Ora sia $z_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n \neq \emptyset$ in quanto intersezione decrescente di compatti chiusi non vuoti. Poichè f è olomorfa si ha

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \text{ per } z \to z_0$$

cioè

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)|z - z_0| \text{ con } \varepsilon(z) \to 0 \text{ per } z \to z_0$$

dunque $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\alpha(R_n) = \int_{\partial R_n} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)|z - z_0|]dz =$$

$$= \int_{\partial R_n} f(z_0)dz + \int_{\partial R_n} f'(z_0)(z - z_0)dz + \int_{\partial R_n} \varepsilon(z)|z - z_0|dz$$

ma dz e $(z - z_0)dz$ sono 1-forme esatte con primitive rispettivamente z e $\frac{(z-z_0)^2}{2}$, in particolare sono chiuse, dunque i primi due integrali sono nulli. Quindi

$$\alpha(R_n) = \int_{\partial R_n} \varepsilon(z)|z - z_0|dz.$$

Ora se indico con $diam(R_n)$ la massima distanza tra due punti in R_n, essendo che i lati di R_n hanno lunghezza $\frac{a}{2^n}, \frac{b}{2^n}$ ho che $diam(R_n) \to 0$ per $n \to +\infty$, di conseguenza per ogni $\delta > 0$ esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq n_0$ $R_n \subset B(z_0, \delta)$. E poichè $\varepsilon(z) \to 0$ per $z \to z_0$, $\forall \eta > 0$ posso trovare un $\delta > 0$ t.c. $\forall z \in B(z_0, \delta)$

$$|\varepsilon(z)| < \eta$$

e per questo δ posso trovare un $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq n_0$ $R_n \subset B(z_0, \delta)$ per quanto detto prima, dunque in particolare prendendo $\varepsilon_n = \sup_{z \in R_n} |\varepsilon(z)|$ ho che $\forall n \geq n_0$ $\varepsilon_n < \eta$. In sostanza si è detto che $\forall \eta > 0$ si ha $\varepsilon_n < \eta$ definitivamente, cioè che $\varepsilon_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Ora ∂R_n ha lunghezza $\frac{2a+2b}{2^n} = \frac{a+b}{2^{n-1}}$, dunque si parametrizza con una curva chiusa $\gamma_n : [0,1] \to \partial R_n$ di lunghezza $\frac{a+b}{2^{n-1}}$. Inoltre

$$diam(R_n) = \text{la lunghezza della diagonale di } R_n \leq$$

$$\leq base(R_n) + altezza(R_n) = \frac{a+b}{2^n}.$$

Dunque mettendo insieme abbiamo

$$|\alpha(R_n)| = \left| \int_{\partial R_n} \varepsilon(z)|z - z_0| dz \right| = \left| \int_0^1 \varepsilon(\gamma_n(t))|\gamma_n(t) - z_0| \gamma_n'(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |\varepsilon(\gamma_n(t))||\gamma_n(t) - z_0||\gamma_n'(t)| dt \leq \varepsilon_n \frac{a+b}{2^n} \int_0^1 |\gamma_n'(t)| dt \leq$$

$$\leq \varepsilon_n \frac{a+b}{2^n} \frac{a+b}{2^{n-1}} = \frac{2\varepsilon_n (a+b)^2}{4^n}.$$

Dunque si hanno le due disuguaglianze

$$|\alpha(R_n)| \geq \frac{|\alpha(R)|}{4^n}$$

$$|\alpha(R_n)| \leq \frac{2\varepsilon_n (a+b)^2}{4^n}$$

che si contraddicono a vicenda, infatti dalla prima si ha

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} 4^n |\alpha(R_n)| \geq |\alpha(R)| > 0$$

mentre dalla seconda

$$4^n |\alpha(R_n)| \leq 2(a+b)^2 \varepsilon_n \to 0 \text{ per } n \to +\infty$$

cioè essendo $4^n |\alpha(R_n)| \geq 0$ per ogni n che $\inf_{n \in \mathbb{N}} 4^n |\alpha(R_n)| = 0$, assurdo. □

Corollario 4.2.2: *Sia $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, U aperto, olomorfa su U.*

$\forall z_0 \in U$ esiste un intorno di z_0 V ed una $F : V \to \mathbb{C}$ olomorfa con $dF = f dz$, cioè con $F' = f|_V$.

Dimostrazione. Segue banalmente dal teorema di Cauchy, infatti $f(z)dz$ è chiusa (loc. esatta). □

Teorema 4.2.3 (di Cauchy generalizzato): *Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa su $U - r$ con r una retta orizzontale parallela all'asse reale. Allora la 1-forma complessa $f(z)dz$ è chiusa su U.*

Dimostrazione. Dimostriamo che per ogni $z \in U$, se $\rho > 0$ è t.c. $B(z, \rho) \subset U$ allora $f(z)dz$ è esatta in $B(z, \rho)$. Sia R un rettangolo in $B(z, \rho)$ con due lati paralleli all'asse reale (per il Teorema 2.2.9 basta controllare questo tipo di rettangoli). Se $R \cap r = \emptyset$ allora $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ segue dal Teorema di Cauchy. Supponiamo quindi che $R \cap r \neq \emptyset$, senza perdere di generalità si può assumere che r passi sopra ad un lato di R, in quanto se così non fosse R sarebbe diviso in due rettangoli con due lati paralleli all'asse reale con un lato sopra r e chiaramente la somma di degli integrali sul bordo di questi due rettangoli è l'integrale sul bordo di tutto R, dunque mi potrei restringere a studiare questi due. Dunque se R ha vertici $u, u + a, u + ib, u + a + ib$. con $a, b \in \mathbb{R}_+$, supponiamo ad esempio che r passi sopra al lato inferiore di R, cioè quello di vertici $u, u + a$. Sia $R(\varepsilon)$ il rettangolo di vertici

$$u + i\varepsilon \ , \ u + a + i\varepsilon \ , \ u + ib \ , \ u + a + ib$$

con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo per far si che $R(\varepsilon) \subset R$. Ora

$$\int_{\partial R(\varepsilon)} f(z)dz = 0$$

e per $\varepsilon \to 0$ si ha che

$$\int_{\partial R(\varepsilon)} f(z)dz \to \int_{\partial R} f(z)dz$$

che dunque è nullo, infatti una parametrizzazione di $\partial R(\varepsilon)$ tende uniformemente ad una di R. □

4.3 Formula integrale di Cauchy

Teorema 4.3.1 (Formula integrale di Cauchy): *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa su U. Siano $z_0 \in U$ e $\gamma : [0, 1] \to U$ un cammino C^1 a tratti chiuso che non passa da z_0 omotopo ad un punto di U. Allora vale la formula*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = I(\gamma, z_0) f(z_0)$$

Dimostrazione. Sia $g : U \to \mathbb{C}$ t.c.

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{per } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{per } z = z_0 \end{cases}$$

g è continua per definizione di derivata essendo f olomorfa in $U \ni z_0$. Inoltre è olomorfa in $U - r_{z_0}$ con r_{z_0} retta che parallela all'asse reale che passa per z_0, dunque per il teorema di Cauchy generalizzato la 1-forma complessa $g(z)dz$ è chiusa in U. Dunque essendo γ C^1 a tratti, chiuso, omotopo ad un punto e $g(z)dz$ chiusa si ha

$$0 = \int_\gamma g(z)dz = \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} - f(z_0)\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}dz$$

dunque la tesi dividendo per $2\pi i$. $\square$

Capitolo 5

Funzioni analitiche

5.1 Serie di potenze

Definizione 5.1.1 (Serie di potenze): Una serie di potenze è una serie del tipo

$$\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$$

in cui $z_0 \in \mathbb{C}$ è detto centro, $\{a_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$ sono detti coefficienti e $z \in \mathbb{C}$.

Osservazione 5.1.2: Si nota che qualunque serie di potenze può essere ricondotta ad un centrata in 0 con un cambio di variabile.

Teorema 5.1.3 (Disco di convergenza): *Sia $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ una serie di potenze. Esiste un $R \in [0, +\infty]$ t.c. se $|z| < R$ allora la serie è assolutamente convergente, mentre se $|z| > R$ allora la serie non converge. Tale R è detto* ***raggio di convergenza della serie****.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$, t.c. la serie $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ converge, dunque deve essere

$$|a_n z_0^n| \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

dunque esiste necessariamente un $M \geq 0$ t.c. $|a_n z_0^n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ora, se $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < |z_0|$ allora

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

ma $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, dunque per confronto la serie $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge assolutamente. Dunque se la serie converge per un qualche $z_0 \neq 0$ allora è assolutamente convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < |z_0|$. Sia ora $z \in \mathbb{C}$ e

$$R := \sup \left\{ |z| \geq 0 \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n < +\infty \right\} \in [0, +\infty]$$

Se $|z| > R$ chiaramente la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ non converge, in quanto se convergesse allora R con sarebbe l'estremo superiore. Se $|z| < R$ allora esiste $s > 0$ t.c. $|z| < s < R$ e $\sum_{n\geq 0} |a_n s^n|$

converge (in quanto, per la proprietà di estremo superiore di R, deve esistere un $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$, per la quale la serie converge e con $|s| < |z_0|$), dunque, come prima, esiste un $M \geq 0$ t.c. $|a_n s^n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi

$$|a_n z^n| = |a_n||z^n| = |a_n| s^n \frac{|z^n|}{s^n} \leq$$
$$\leq M \left(\frac{|z|}{s} \right)^n$$

e $\frac{|z|}{s} < 1$, dunque

$$\sum_{n \geq 0} |a_n z^n| \leq M \sum_{n \geq 0} \left(\frac{|z|}{s} \right)^n = \frac{M}{1 - \frac{|z|}{s}} < +\infty$$

cioè la serie è assolutamente convergente. □

Osservazione 5.1.4: Il caso $|z| = R$ va studiato caso per caso.

Proposizione 5.1.5 (Criterio di D'Alembert): *Se esiste il limite*

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R \in [0, +\infty]$$

allora R è il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Dimostrazione. Se esiste il limite dell'enunciato allora

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{z a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|z|}{R} \quad \text{per } n \to +\infty$$

Ora se $\frac{|z|}{R} < 1$, cioè $|z| < R$, allora la serie converge assolutamente (per il criterio del rapporto), dunque il raggio di convergenza è $\geq R$.

Nel caso $\frac{|z|}{R} > 1$, cioè $|z| > R$, allora la serie dei moduli diverge positivamente, dunque il raggio di convergenza della serie è necessariamente $\leq R$, in quanto per moduli minori di tale raggio (di convergenza) la serie deve essere assolutamente convergente, cioè la serie dei moduli deve convergere.

Dunque il raggio di convergenza è proprio R. □

Purtroppo questo criterio non è sempre applicabile, infatti si deve avere l'esistenza del limite che lo definisce.

Ma il metodo della radice ci fornisce una caratterizzazione del raggio di convergenza che è sempre vera

Proposizione 5.1.6 (Criterio di Cauchy-Hadamard): *Sia*

$$\frac{1}{R} := \limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n}$$

allora R è il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Dimostrazione. Sia
$$r = \limsup_{n\to+\infty} |a_n z^n|^{1/n} = |z| \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{|z|}{R}$$
se $r < 1$, cioè $|z| < R$ per il criterio della radice la serie converge assolutamente, dunque il raggio di convergenza è $\geq R$.

Se invece $r > 1$, cioè $|z| > R$, allora la serie dei moduli diverge positivamente e si conclude come nella proposizione precedente. □

Osservazione 5.1.7: Sia $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza R. Considero la serie
$$\sum_{n\in\geq 1} n a_n z^{n-1}$$
allora anche questa ha raggio di convergenza R. Infatti
$$\limsup_{n\to+\infty} |na_n|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} |n|^{1/n} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$$
essendo $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}$.

Teorema 5.1.8 (del cambio di centro): *Sia $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Sia $z_1 \in B(z_0, R)$, allora preso $R_1 = R - |z_0 - z_1| > 0$ si ha che per ogni $z \in B(z_1, R_1)$*
$$\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n = \sum_{k\geq 0} b_k (z-z_1)^k$$
con $b_k = \sum_{n\geq k} a_n \binom{n}{k}(z_1-z_0)^{n-k}$.

Dimostrazione. La serie $\sum_{n\geq k} a_n \binom{n}{k}(z-z_0)^{n-k}$ ha raggio di convergenza uguale ad R, infatti la serie $\sum_{n\geq k} a_n n(z-z_0)^{n-k}$ ha raggio di convergenza R per la formula di Hadamard, e reiterando il procedimento si trova che la serie
$$\sum_{n\geq k} a_n n(n-1)...(n-k+1)(z-z_0)^{n-k}$$
ha raggio di convergenza R e quindi anche $\sum_{n\geq k} a_n \binom{n}{k}(z-z_0)^{n-k}$. Dunque essendo $|z_1 - z_0| < R$ si ha che
$$b_k = \sum_{n\geq k} a_n \binom{n}{k} (z_1 - z_0)^{n-k}$$
converge. Sia dunque $z \in \mathbb{C}$ t.c. $|z - z_1| < R_1$ allora
$$\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n\geq 0} a_n((z-z_1) + (z_1 - z_0))^n =$$
$$= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k} (z-z_1)^k (z_1-z_0)^{n-k}$$

adesso vorrei invertire l'ordine di somma, ma questo è fattibile se e solo se la famiglia che si sta sommando è assolutamente sommabile, vediamolo

$$\sum_{n,k\geq 0} |a_n \binom{n}{k}(z-z_1)^k(z_1-z_0)^{n-k}| = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} ||a_n| \binom{n}{k}|z-z_1|^k|z_1-z_0|^{n-k} =$$

essendo $\binom{n}{k} = 0$ se $k > n$

$$= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} ||a_n| \binom{n}{k}|z-z_1|^k|z_1-z_0|^{n-k} = \sum_{n\geq 0} |a_n|(|z-z_1|+|z_1-z_0|)^n$$

che converge in quanto

$$|z-z_1|+|z_1-z_0| < R_1 + R - R_1 = R$$

dunque posso scambiare l'ordine di somma nella serie d prima e scrivere

$$\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n = \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq k} a_n \binom{n}{k}(z_1-z_0)^{n-k}(z-z_1)^k =$$

$$= \sum_{k\geq 0} b_k(z-z_1)^k$$

per $z \in B(z_1, R_1)$. □

Inoltre si ha il seguente fatto, che è applicabile anche alle serie di potenze.

Proposizione 5.1.9 (Prodotto alla Cauchy): *Siano $\sum_{n\geq 0} a_n$ e $\sum_{n\geq 0} b_n$ due serie assolutamente convergenti allora anche*

$$\sum_{n\geq 0} c_n$$

con $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ è assolutemente convergente e vale

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n$$

Dimostrazione. Vediamo intanto la convergenza della serie. Chiamo $A_h = \sum_{n\geq h} |a_n|$ e $B_h = \sum_{n\geq h} |b_n|$

$$\left|\sum_{n\geq 0} c_n\right| \leq \sum_{p\geq 0}\sum_{q\geq 0} |a_p||b_q| = A_0 B_0 \leq +\infty$$

dunque la serie è assolutamente convergente. Inoltre

$$\left|\sum_{n=0}^{m} c_n - \left(\sum_{n=0}^{m} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{m} b_n\right)\right| =$$

$$= \left| \sum_{\substack{0\le p,q\le m \\ p+q\le m}} a_p b_q - \sum_{0\le p,q\le m} a_p b_q \right| \le \sum_{\substack{0\le p,q\le m \\ p+q>m}} |a_p||b_q|$$

e l'ultima somma tende a 0 per $m \to +\infty$. Infatti, per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\nu > 0$ t.c. $\forall k \ge \nu$ $A_k, B_k \le \varepsilon$. Inoltre sia $M > 0$ t.c. $A_0 \le M$ e $B_0 \le M$, esiste per ipotesi di convergenza assoluta delle due serie. Inoltre se $p + q > m$ allora necessariamente o $p > \frac{m}{2}$ o $q > \frac{m}{2}$. Dunque per $m \ge 2\nu$ si ha $\frac{m}{2} \ge \nu$ e quindi

$$\sum_{\substack{0\le p,q\le m \\ p+q>m}} |a_p||b_q| \le \left(\sum_{\substack{0\le p,q\le m \\ p>m/2}} |a_p| \right) \left(\sum_{0\le q\le m} |b_q| \right) + \left(\sum_{0\le p\le m} |a_p| \right) \left(\sum_{\substack{0\le p,q\le m \\ q>m/2}} |b_q| \right) \le 2M\varepsilon$$

□

Osservazione 5.1.10: Date due serie di potenze con raggio di convergenza $\ge R$ allora anche la somma e il prodotto di queste due serie è una serie di potenze con raggio di convergenza $\ge R$.

5.2 Funzioni analitiche e olomorfia

Definizione 5.2.1 (Funzione analitica): Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto. Una $f : U \to \mathbb{C}$ è detta **analitica in** $z_0 \in U$ se e solo se

- esiste una serie di potenze $\sum_{n\ge 0} a_n(z - z_0)^n$ centrata in z_0 che converge assolutamente in una palla $B(z_0, \rho)$ per un qualche $\rho > 0$;
- $f(z) = \sum_{n\ge 0} a_n(z - z_0)^n$ in $B(z_0, \rho)$.

Iniziamo con un risultato tecnico molto importante.

Proposizione 5.2.2: *Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\sum_{n\ge 0} a_n(z - z_0)^n$ un serie di potenze assolutamente convergente sulla palla $B(z_0, \rho)$ per un qualche $\rho > 0$. Allora la funzione $f : B(z_0, \rho) \to \mathbb{C}$ definita da*

$$f(z) = \sum_{n\ge 0} a_n(z - z_0)^n$$

è una funzione analitica.

Dimostrazione. Conseguenza del Teorema del Cambio di Centro. □

Proposizione 5.2.3: *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f, g : U \to \mathbb{C}$ due funzioni analitiche allora*

- *$f + g$ è analitica in U*
- *fg è analitica in U*

- $\frac{f}{g}$ *è analitica in un qualunque aperto di* $\{z \in U \mid g(z) \neq 0\}$.

Proposizione 5.2.4 (Analitica ⇒ olomorfa): *Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora f è olomorfa e la sua derivata f' è ancora una funzione analitica in U.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in U$, per ipotesi esiste una serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n$ che converge assolutamente a $f(z)$ per $|z-z_0| < R$ per un qualche $R > 0$.

Sia $z \in B(z_0, R)$ e $\delta > 0$ t.c. $|z-z_0| + \delta < R$, dunque per ogni $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$, $|h| < \delta$, si ha che $z + h \in B(z_0, R)$ e

$$f(z+h) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z+h-z_0)^n =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \left[(z-z_0)^n + nh(z-z_0)^{n-1} + h^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2}(z-z_0)^{n-k}\right]$$

che ponendo $P_n(z,h) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2}(z-z_0)^{n-k}$ diventa

$$f(z+h) - f(z) - \sum_{n\in\mathbb{N}} nh(z-z_0)^{n-1} = h^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n P_n(z,h)$$

ed essendo la somma nel LHS convergente assolutamente anche quella nel RHS lo è. Dividiamo per h ottenendo

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n\geq 1} n(z-z_0)^{n-1} = h \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n P_n(z,h)$$

e

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n P_n(z,h)\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \left|\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2}(z-z_0)^{n-k}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \delta^{k-2}|z-z_0|^{n-k}$$

che non dipende da h e converge per quanto detto precedentemente, dunque

$$h \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n P_n(z,h) \to 0 \ \text{ per } h \to 0.$$

Quindi effettivamente per $z \in B(z_0, R)$

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} na_n(z-z_0)^{n-1}$$

da cui si deduce, per l'arbitrarietà di z_0, che f è olomorfa su tutto U ed inoltre anche che f' è analitica su tutto U. □

Corollario 5.2.5: *Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : U \to \mathbb{C}$ analitica in U. Allora f è C^∞ su U, cioè ammette derivata di ogni ordine in ogni punto di U.*

Osservazione 5.2.6: In particolare se $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ aperto è analitica in $z_0 \in U$

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z - z_0)^n$$

allora

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} na_n(z - z_0)^{n-1}$$

e quindi

$$a_1 = f'(z_0)$$

e iterando

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

dunque effettivamente la serie che corrisponde ad f nell'intorno di z_0 è proprio la serie di Taylor di f in z_0.

Inoltre vale anche il viceversa cioè l'olomorfia è condizione necessaria e sufficiente per l'analiticità, che dunque per funzioni complesse sono nozioni equivalenti.

Proposizione 5.2.7 (Olomorfa ⇒ analitica): *Sia $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ aperto, una funzione olomorfa nella palla aperta $B(z_0, R) \subset U$. Allora f è analitica in $B(z_0, R)$, in particolare esiste una serie di potenze $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z - z_0)^n$ con raggio di convergenza $\rho \geq R$ t.c. per $z \in B(z_0, R)$*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z - z_0)^n$$

Dimostrazione. Per semplicità supporremo WLOG che $z_0 = 0$. Sia $0 < r_0 < R$ e $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ t.c. $\gamma(t) = r_0e^{2\pi it}$. Sia ora $z \in B(0 = z_0, r_0)$, diciamo $|z| = r$, allora $I(\gamma, z) = 1$ e grazie alla formula integrale di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}dw$$

ora facciamo un magheggio

$$\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w}\frac{\left(\frac{z}{w}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z}{w}} = \frac{1}{w}\frac{1 - \left(\frac{z}{w}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z}{w}} = \frac{1}{w}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z}{w}\right)^k$$

dunque

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z}{w}\right)^k + \frac{1}{w}\frac{\left(\frac{z}{w}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z}{w}}$$

e sostituendolo nell'integrale si ottiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_\gamma \frac{f(w)}{w}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z}{w}\right)^k dw + \int_\gamma \frac{f(w)}{w}\frac{\left(\frac{z}{w}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z}{w}}dw\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{k=0}^{n} z^k \int_\gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}dw + \int_\gamma \frac{f(w)}{w}\frac{\left(\frac{z}{w}\right)^{n+1}}{1-\frac{z}{w}}dw\right]$$

cioè chiamando $a_k := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}dw$ e $R_n := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w}\frac{\left(\frac{z}{w}\right)^{n+1}}{1-\frac{z}{w}}dw$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + R_n$$

A questo punto vogliamo stimare R_n

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w}\frac{\left(\frac{z}{w}\right)^{n+1}}{1-\frac{z}{w}}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)}\frac{\left(\frac{z}{\gamma(t)}\right)^{n+1}}{1-\frac{z}{\gamma(t)}} r_0 2\pi i e^{2\pi i t}dt$$

dunque

$$|R_n| \leq \int_0^1 \frac{|f(\gamma(t))}{|\gamma(t)|}\frac{\left|\frac{z}{\gamma(t)}\right|^{n+1}}{\left|1-\frac{z}{\gamma(t)}\right|} r_0 dt$$

ora ricordando che $|\gamma(t)| = r_0$ e $r = |z|$ si ha che

$$\left|1 - \frac{z}{\gamma(t)}\right| \geq 1 - \frac{r}{r_0}$$

e quindi se $M(r_0) = \sup_{t\in[0,1]} |f(\gamma(t))|$ (dipende da r_0 per come è fatta γ)

$$|R_n| \leq \int_0^1 |f(\gamma(t))| \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n+1}}{1-\frac{r}{r_0}}dt \leq M(r_0)\frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n+1}}{1-\frac{r}{r_0}}$$

da cui essendo $\frac{r}{r_0} < 1$

$$|R_n| \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

Quindi per $z \in B(0, R)$

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k z^k$$

Ora

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}dw$$

dunque analogamente a prima

$$|a_k| \leq M(r_0)\frac{1}{r_0^k}$$

e la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k z^k$ converge assolutamente per $|z| \leq r$, per ogni $r < r_0$ infatti

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_k||z|^k \leq M(r)\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{r}{r_0}\right)^k < +\infty$$

dunque, per l'arbitrarietà di $r_0 < R$, la serie converge assolutamente in $B(0, R)$, ossia ha raggio di convergenza $\rho \geq R$. □

Corollario 5.2.8 (Disuguaglianze di Cauchy): *Sia* $z_0 \in \mathbb{C}$ *e* $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$ *con raggio di convergenza* $R > 0$. *Allora* $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ *e per ogni* $0 < r < R$ *si ha*

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

con $M(r) = \sup\{|f(z)| \mid z \in \partial B(z_0, r)\}$

Dimostrazione. Per la prima affermazione segue dall'Osservazione 27. La seconda segue da quanto detto nella dimostrazione del teorema precedente.

□

Da quanto appena dimostrato nelle ultime due proposizioni segue che, sorprendentemente, per una funzione complessa condizione necessaria e sufficiente per essere liscia (in senso complesso, cioè infinitamente olomorfa) è la sola olomorfia.

Corollario 5.2.9: *Sia* $U \subset \mathbb{C}$ *un aperto e* $f : U \to \mathbb{C}$. f *è olomorfa in* U *se e solo se è analitica in* U. *In particolare la sua serie di Taylor in uno* $z_0 \in U$ *ha raggio di convergenza*

$$\rho \geq \{r > 0 \mid B(z_0, r) \subset U\}$$

Dimostrazione. Segue da quanto detto nella dimostrazione precedente. □

Corollario 5.2.10: *Sia* $U \subset \mathbb{C}$ *aperto e* $f : U \to \mathbb{C}$ *olomorfa. Allora* f *è* C^∞ *su* U, *cioè ammette derivata di ogni ordine in ogni punto di* U.

Corollario 5.2.11: *Siano* $U \subset \mathbb{C}$ *aperto,* $f : U \to \mathbb{C}$ *olomorfa,* $z_0 \in U$, $R > 0$ *t.c.* $B(z_0, R) \subset U$ *e* γ *una curva che parametrizza* $\partial B(z_0, R)$ *in senso antiorario. Allora*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

5.3 Zeri di funzioni analitiche e prolungamento analitico

In questa sezione supporremo sempre $U \subset \mathbb{C}$ aperto connesso.

Teorema 5.3.1: *Sia* $f : U \to \mathbb{C}$ *una funzione analitica. Sono equivalenti*

(1) esiste uno $z_0 \in U$ *t.c.* $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(z_0) = 0$;

(2) esiste un aperto $V \subset U$ *in cui* f *è identicamente nulla;*

(3) f *è identicamente nulla su* U.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Essendo f analitica esiste un $R > 0$ t.c. in $B(z_0, R) \subset U$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$$

con $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Dunque se $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(z_0) = 0$ allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 0$ e quindi f è identicamente nulla in $B(z_0, R)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Consideriamo l'insieme

$$S = \{z \in U \mid \exists R > 0 \text{ t.c. } B(z, R) \subset U \text{ e } f \text{ è identicamente nulla in } B(z, R)\}$$

per (2) si ha $S \neq \emptyset$. Ora S è aperto in quanto se $z \in S$ allora esiste un intorno aperto di z in cui f è nulla ed ogni punto di tale intorno è in S essendo aperto. Vediamo che S è anche chiuso: sia $z \in U$ con

$$z = \lim_{n \to +\infty} z_n$$

$z_n \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(z_n) = 0$ dunque anche $f^{(k)}(z) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ in quanto le derivate f sono continue essendo analitica.

A questo punto si usa l'implicazione già dimostrata (1) $\Rightarrow$ (2).

Dunque S è sia chiuso che aperto in U connesso ed $S \neq \emptyset$, allora $S = U$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Ovvia. □

Corollario 5.3.2 (Prolungamento analitico): *Siano $f, g : U \to \mathbb{C}$ analitiche. Allora sono equivalenti*

(1) Esiste uno $z_0 \in U$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$;

(2) Esiste un aperto $V \subset U$ in cui $f = g$;

(3) $f = g$ su U.

Dimostrazione. Si applica il teorema precedente alla funzione $f - g$. □

Osservazione 5.3.3: Quindi se ho un aperto connesso $U \subset \mathbb{C}$, $V \subset U$ aperto e ho una funzione $f : V \to \mathbb{C}$ analitica, allora la sua estensione analitica a U è unica per quanto mostrato nel Corollario precedente.

Adesso passiamo ad una discussione sugli zeri di funzioni analitiche.

Definizione 5.3.4 (Ordine e zeri): Sia $f : U \to \mathbb{C}$ analitica non identicamente nulla. Allora si definisce $\forall z \in U$

$$ord_z(f) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(z) \neq 0\}$$

l'**ordine di f in z**.

Vale che $f(z_0) = 0 \iff ord_{z_0}(f) \geq 1$ e se $ord_{z_0}(f) = 1$ z è detto **zero semplice**, se $ord_{z_0}(f) > 1$ è detto **zero multiplo**.

Osservazione 5.3.5: Per il teorema precedente, essendo f non identicamente nulla in U si ha che $\forall z \in U$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(z) \neq 0\} \neq \emptyset$$

dunque la definizione è ben posta.

Inoltre se z_0 è uno zero di f e

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n$$

allora essendo $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ si ha che

$$ord_{z_0}(f) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

Proposizione 5.3.6: *Sia $f : U \to \mathbb{C}$ analitica non identicamente nulla e $z_0 \in U$. Allora $\exists R > 0$ t.c. $B(z_0, R) \subset U$ e $\forall z \in B(z_0, R)$*

$$f(z) = (z-z_0)^{ord_{z_0}(f)} g(z)$$

con $g : B(z_0, R) \to \mathbb{C}$ analitica e t.c. $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in B(z_0, R)$.

Dimostrazione. Chiamo $n_0 = ord_{z_0}(f)$. Esiste $R' > 0$ t.c. $B(z_0, R') \subset U$ ed in cui

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n\geq n_0} a_n(z-z_0)^n$$

allora

$$f(z) = (z-z_0)^{n_0} \sum_{n\geq n_0} a_n(z-z_0)^{n-n_0} = (z-z_0)^{n_0} \sum_{n\geq 0} a_{n+n_0}(z-z_0)^n$$

posto $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_{n+n_0}(z-z_0)^n$ si ha che è analitica in $B(z_0, R')$ e t.c. $g(z_0) \neq 0$, dunque per continuità di g è non nulla in tutta una palla $B(z_0, R)$ con $R \leq R'$. □

Corollario 5.3.7: *Sia $f : U \to \mathbb{C}$ analitica non identicamente nulla. L'insieme*

$$S = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$$

è discreto e chiuso in U (ma non necessariamente in $\mathbb{C}$).

Dimostrazione. Sia $z_0 \in S$ allora $n_0 = ord_{z_0}(f) \geq 1$ ed in un intorno V di z_0

$$f(z) = (z-z_0)^{ord_{z_0}(f)} g(z)$$

con $g(z) \neq 0 \ \ \forall z \in V$. Dunque se $z \in V\{z_0\}$ si ha

$$(z-z_0)^{n_0} \neq 0 \quad \text{e} \quad g(z) \neq 0$$

allora $f(z) \neq 0 \ \ \forall z \in V - \{z_0\}$. Quindi $S \cap V = \{z_0\}$, ma V è aperto in U allora $\{z_0\}$ è aperto nella topologia di sottospazio di S in U, cioè i singoletti sono aperti in S, cioè è discreto. Inoltre è chiuso in quanto $S = f^{-1}(\{0\})$ con f è continua e $\{0\}$ che è chiuso in $\mathbb{C}$. □

Capitolo 6

Alcuni teoremi importanti

6.1 Teorema di Morera

Abbiamo visto nelle sezioni precedenti che se $f : U \subset \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa allora la 1-forma $f(z)dz$ è chiusa, adesso possiamo formulare anche un viceversa sotto l'ipotesi di continuità di f.

Teorema 6.1.1 (di Morera): *Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : U \to \mathbb{C}$ continua. Se $\omega = f(z)dz$ è chiusa in U allora f è olomorfa in U.*

Dimostrazione. Essendo ω chiusa, per ogni $z_0 \in U$ esiste un intorno aperto V di z_0 in cui $\omega = dF$ con F di classe C^1 in V essendo f continua. Ora

$$dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

dunque $f(z)dz = dF$ se e solo se

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = f$$

e $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$ se e solo se F è olomorfa, ma allora anche F' è olomorfa e

$$F'(z) = f(z)$$

□

Corollario 6.1.2: *Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : U \to \mathbb{C}$ continua. Se f è olomorfa su $U - r$ con r una retta orizzontale, allora f è olomorfa su tutto U.*

Dimostrazione. Segue dal Teorema di Cauchy Generalizzato e dal Teorema di Morera. □

6.2 Teorema di Liouville

Adesso un altro importante teorema sorprendente.

Teorema 6.2.1 (di Liouville): *Una funzione intera limitata è costante.*

Dimostrazione. Sia f intera allora è analitica su tutto $\mathbb{C}$, in particolare

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$$

con raggio di convergenza $+\infty$. Allora per le disuguaglianze di Cauchy

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

per ogni $r \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, in cui $M(r) = \sup\{|f(z)| \mid z \in \partial B(0, r)\}$. Ma f è limitata, dunque esiste $M \geq 0$ t.c. $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, e quindi per ogni $r \geq 0$

$$M(r) \leq M$$

da cui

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

per ogni $r \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Mandando $r \to +\infty$ si ottiene

$$|a_n| \longrightarrow 0$$

per ogni $n \geq 1$, dunque f è costante di valore a_0. $\square$

Ora un'interessante applicazione del Teorema di Liouville

Teorema 6.2.2 (Fondamentale dell'algebra): *Dato un polinomio $p \in \mathbb{C}[z]$ non costante, esso ammette almeno uno zero.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $p(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$, allora la funzione $\frac{1}{p(z)}$ è intera. Ora

$$p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$

con $a_n \neq 0$, allora

$$p(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n} \right)$$

da cui si deduce che

$$\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$$

dunque

$$\lim_{|z| \to +\infty} \left| \frac{1}{p(z)} \right| = 0$$

in particolare esiste $R > 0$ t.c. $\left| \frac{1}{p(z)} \right|$ è limitata in $\mathbb{C} - B(0, R)$. Inoltre non avendo p zeri in $\mathbb{C}$ $\left| \frac{1}{p(z)} \right|$ è limitata anche in $B(0, R)$. Allora $\left| \frac{1}{p(z)} \right|$ è limitata su tutto $\mathbb{C}$ e intera dunque è costante per il Teorema di Liouville, assurdo. $\square$

6.3 Principio del massimo modulo

Definizione 6.3.1 (Proprietà del valor medio): Siano $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : U \to \mathbb{C}$ funzione continua. Diciamo che f ha la **proprietà del valor medio** se e solo se $\forall z_0 \in U \quad \exists R > 0$ t.c.

- $B(z_0, R) \subset U$;
- $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta \quad \forall r \in [0, R)$

Lemma 6.3.2: *Se $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa allora ha la proprietà del valor medio.*

Dimostrazione. Essendo f olomorfa vale la Formula Integrale di Cauchy, la quale ci assicura che f ha la proprietà del valor medio, infatti preso $R > 0$ t.c. $B(z_0, R) \subset U$ e $\gamma : [0, 1] \to U$ t.c. $\gamma_r(t) = z_0 + re^{i2\pi t}$ si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(z_0 + re^{i2\pi t})}{re^{i2\pi t}} r2\pi ie^{i2\pi t}dt =$$

ponendo $\theta = 2\pi t$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})dt$$

□

Osservazione 6.3.3: Osserviamo che se f ha la proprietà del valor medio allora anche $\Re(f)$ e $\Im(f)$ l'hanno.

Teorema 6.3.4 (Principio del massimo modulo per funzioni olomorfe): *Siano $U \subset \mathbb{C}$ aperto connesso e $f : U \to \mathbb{C}$ funzione olomorfa. Se $\exists z_0 \in U$ t.c.*

$$|f(z_0)| = \max_{z \in U} |f(z)|$$

allora f è costante su tutto U.

Dimostrazione. f è analitica e U è aperto connesso, dunque ci basta mostrare che è costante in un intorno di z_0, infatti se così fosse grazie al principio del prolungamento analitico sarebbe costante su tutto U.

Possiamo assumere che $f(z_0) \in \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}$, infatti se così non fosse esisterebbe comunque un $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ t.c. $\alpha f(z_0) \in \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}$ e osserviamo che f è costante sse lo è αf e che f è olomorfa sse lo è αf.

Ora se $f(z) = u(z) + iv(z)$ con $u, v : U \to \mathbb{R}$ allora

$$|f(z)| = \sqrt{u(z)^2 + v(z)^2}$$

e che quindi $|u(z)|$ ha un massimo in z_0, infatti $\forall z \in U$ $|u(z)| \leq |f(z)|$ e grazie al'assunzione fatta si ha che $u(z_0) = f(z_0)$, dunque $\forall z \in U$

$$|u(z)| \leq |f(z_0)| = |u(z_0)|$$

Ora grazie al lemma precedente f ha la proprietà dal valor medio e quindi in particolare l'ha anche $u = \Re(f)$, dunque esiste $R > 0$ t.c. $B(z_0, R) \subset U$ e $\forall r \in [0, R)$

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Dimostriamo che per ogni $r \in [0, R)$ vale $u(z_0 + re^{i\theta}) = u(z_0)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$.

Infatti se per assurdo esistessero $r_0 \in [0, R)$ e $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ t.c. $u(z_0 + r_0 e^{i\theta_0}) \neq u(z_0)$ allora essendo z_0 un massimo anche per u si avrebbe $u(z_0 + r_0 e^{i\theta_0}) < u(z_0)$, ma allora per continuità per θ vicino a θ_0 in $[0, 2\pi)$ varrebbe $u(z_0 + r_0 e^{i\theta}) < u(z_0)$ e di conseguenza (essendo già $u(z_0 + r_0 e^{i\theta}) \leq u(z_0)$ su tutto $[0, 2\pi)$ e $u(z_0 + r_0 e^{i\theta}) < u(z_0)$ in un intornino di θ_0 in $[0, 2\pi)$)

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r_0 e^{i\theta}) d\theta < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0) d\theta = u(z_0)$$

che è un assurdo, dunque per ogni $r \in [0, R)$ vale $u(z_0 + re^{i\theta}) = u(z_0)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$, cioè u è costante uguale a $u(z_0)$ su tutto $B(z_0, R) \subset U$.

Ora $|f(z)| = \sqrt{u(z)^2 + v(z)^2} \leq |f(z_0)| = |u(z_0)|$ su U ma si è detto che $u(z) = u(z_0)$ su $B(z_0, R)$, quindi necessariamente $v(z) = 0$ su $B(z_0, R)$, ossia $f(z) = u(z_0)$ su $B(z_0, R) \subset U$. $\square$

Capitolo 7

Serie di Laurent e teorema dei residui

7.1 Serie di Laurent

Definizione 7.1.1 (Serie di Laurent): Una **serie di Laurent** è un'espressione del tipo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

a questa si possono associare le due serie di potenze

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n \qquad \sum_{n<0} a_n z^{-n}$$

e chiamati $\rho_1 > 0$ e $\frac{1}{\rho_2} > 0$ i raggi di convergenza della prima e della seconda serie rispettivamente (si suppone che tali raggi di convergenza siano non nulli) si considerano le due serie assolutamente convergenti

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad \text{per } |z| < \rho_1$$

$$f_2(z) = \sum_{n<0} a_n z^n \quad \text{per } |z| > \rho_2$$

Chiaramente f_1 è analitica nella palla $B(0,\rho_1) \subset \mathbb{C}$.

Proposizione 7.1.2: *f_2 è olomorfa, dunque anche analitica, in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \rho_2\}$.*

Dimostrazione. Sia $z = \frac{1}{u}$ e $g(u) = f_2\left(\frac{1}{u}\right) = \sum_{n<0} a_n u^{-n}$, che è assolutamente convergente per $u \in B(0, 1/\rho_2)$.

Ora per la regola di derivazione delle funzioni composte

$$f_2'(z) = -\frac{g'(1/z)}{z^2}$$

ma

$$g'(u) = -\sum_{n<0} a_n n u^{-n-1}$$

dunque

$$-g'(1/z) = \sum_{n<0} a_n n z^{n+1}$$

da cui

$$f_2'(z) = \sum_{n<0} a_n n z^{n-1}$$

che ancora assolutamente convergente per $|z| > \rho_2$.

Duqnue f_2 è olomorfa in quanto f_2' esiste.

$\square$

Teorema 7.1.3: *Sia $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ una funzione definita da una serie di Laurent. Supponiamo che*

- $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *e* $\sum_{n<0} a_n z^{-n}$ *siano assolutamente convergenti con raggi di convergenza* $\rho_1 > 0$ *e* $\frac{1}{\rho_2} > 0$ *rispettivamente;*
- $\rho_2 < \rho_1$

allora la somma che definisce $f(z)$ è assolutamente convergente per $z \in \mathbb{C}$, $r_2 \leq |z| \leq r_1$ per ogni $\rho_2 < r_2 < r_1 < \rho_1$ ed è olomorfa nella corona circolare $\{z \in \mathbb{C} \mid \rho_2 < |z| < \rho_1\}$.

Dimostrazione. Segue da quanto detto fin'ora. $\square$

Definizione 7.1.4: Diciamo che una funzione $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ aperto che contiene la corona circolare $\{z \in \mathbb{C} \mid \rho_2 < |z| < \rho_1\}$ vi ammette uno **sviluppo o espansione di Laurent** se e solo se esiste una serie di Laurent convergente nella corona e la cui somma sia uguale a $f(z)$ in ogni punto della corona.

Osservazione 7.1.5: Dal teorema precedente si ha che se f ammette un'espansione di Laurent in una corona circolare allora f è olomorfa in tale corona.

Tutto quello detto fino ad'ora vale anche per corone non necessariamente centrate nell'origine con una banale generalizzazione dei conti fatti.

Teorema 7.1.6 (di Laurent): *Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e f olomorfa nella corona circolare*

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_2 < |z - z_0| < \rho_1\}$$

Allora f ha un'espansione di Laurent in questa corona, ossia per ogni $z \in \mathcal{A}$

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

con γ una qualsiasi curva chiusa C^1 a tratti a valori in $\mathcal{A}$.

Dimostrazione. Prendiamo wlog $z_0 = 0$.

Ora siano $\rho_2 < r_2 < r_1 < \rho_1$ e

$$\gamma_1(t) = r_1 e^{2\pi i t}$$

$$\gamma_2(t) = r_2 e^{2\pi i t}$$

con $t \in [0,1]$.

Sia $z \in \mathbb{C}$, $r_2 < |z| < r_1$ e

- α un cammino che parametrizza $\partial B(z,r)$, con $r > 0$ t.c.

  $$\overline{B}(z,r) \subset \{w \in \mathbb{C} \mid r_2 < |w| < r_1\}$$

  in senso antiorario partendo dal polo nord e indichiamo α_1 la parte che parametrizza il primo semicerchio (andando in senso antiorario, dal polo nord al polo sud) e α_2 la parte che parametrizza l'altra parte (sempre in senso antiorario, dal polo sud al polo nord). Dunque $\alpha = \alpha_1 * \alpha_2$;

- l_1 che parametrizza il segmento verticale che collega il polo nord di $\partial B(0,r_1)$ al polo nord di $\partial B(z,r)$;

- l_2 che parametrizza il segmento verticale che collega il polo sud di $\partial B(z,r)$ al polo nord di $\partial B(0,r_2)$.

Dunque per la formula integrale di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f(w)}{w-z}dw$$

ed essendo il cammino $l_1 * \alpha_1 * \overline{l_2} * \gamma_2 * l_2 * \alpha_2 * \overline{l_1} * \overline{\gamma_1}$ omotopicamente banale in $\mathcal{A} - B(z,r)$ (basta aprire tale cammino da l_1 e l_2 e contrarre tutto poi ad un punto "allontanando le due ali" da $B(z,r)$ tenendone una ferma) dunque essendo la 1-forma $\frac{f(w)}{w-z}dw$ chiusa in $\mathcal{A} - \{z\} \supset \mathcal{A} - B(z,r)$ si ha che

$$\int_\alpha \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}dw + \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw = 0$$

cioè

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw\right)$$

Ora $\forall t \in [0,1]$ $\ |\gamma_1(t)| = r_1 > |z|$, cioè $\left|\frac{z}{\gamma_1(t)}\right| < 1$, dunque se $w \in Imm(\gamma_1)$ si ha

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w}\frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{f(w)}{w}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{f(w)}{w^{n+1}}z^n$$

che ha raggio di convergenza

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f(w)}{w^{n+1}}\frac{w^{n+2}}{f(w)}\right| = |w| = r_1$$

in particolare converge assolutamente nella corona di raggi $r_2 < r_1$ di conseguenza, per $z \in \mathbb{C}$ con $r_2 < |z| < r_1$, si possono invertire i segni di somma ed integrale per scrivere

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\gamma_1} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n \right) dw = \sum_{n\geq 0} \left(\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \right) z^n = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

con $b_n = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$ (per computare il coefficiente si può scegliere un qualunque cammino liberamente omotopo a γ_1 nella corona circolare di raggi $\rho_2 < \rho_1$, su cui $\frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$ è chiusa).

Analogamente $\forall t \in [0,1] \quad |\gamma_2(t)| = r_2 < |z|$, cioè $\frac{r_2}{|z|} < 1$, dunque se $w \in Imm(\gamma_2)$

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{z} \frac{1}{\frac{w}{z} - 1} = -\frac{f(w)}{z} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{w}{z} \right)^k = -\sum_{k\geq 0} f(w) \frac{w^k}{z^{k+1}} =$$

reindicizzando e invertendo

$$= -\sum_{k>0} f(w) \frac{z^{-k}}{w^{-k+1}} = -\sum_{n<0} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n$$

e

$$\lim_{k\to+\infty} \left| \frac{f(w)}{w^{-k+1}} \frac{w^{-(k+1)+1}}{f(w)} \right| = \frac{1}{|w|} = \frac{1}{r_2}$$

dunque la serie sopra converge assolutamente per $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{r_2}$, cioè se $|z| > r_2$, in particolare converge assolutamente nella corona circolare di raggi $r_2 < r_1$.

Di conseguenza anche qui per $z \in \mathbb{C}$ con $r_2 < |z| < r_1$, si possono invertire i segni di somma ed integrale per scrivere

$$-\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n<0} b_n z^n$$

con $b_n = \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$ (per calcolare il coefficiente si può scegliere un qualunque cammino liberamente omotopo a γ_2).

Dunque per quanto detto precedentemente per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $r_2 < |z| < r_1$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n$$

essendo $r_2 < r_1$ arbitrari tra $\rho_2 < \rho_1$ si ha la tesi. □

Osservazione 7.1.7: Dunque lo sviluppo in serie di Laurent gioca il ruolo delle serie di Taylor per funzioni olomorfe solo in una corona circolare e chiaramente nel caso in cui la corona è una palla, la serie di Laurent coincide con la serie di Taylor.

Teorema 7.1.8 (Unicità dello sviluppo di Laurent): *Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : U \to \mathbb{C}$ che ammette uno sviluppo di Laurent assolutamente convergente nella corona $\{z \in \mathbb{C} \mid \rho_2 < |z - z_0| < \rho_1\}$. Allora tale sviluppo è unico.*

Dimostrazione. Sia wlog $z_0 = 0$ ed f con sviluppo

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Siano $k \in \mathbb{Z}$ e γ un cammino chiuso C^1 a tratti con $I(\gamma, 0) = 1$, allora

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz = \int_\gamma \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n}{z^{k+1}} dz = \int_\gamma \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{n-k-1} \right) dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_\gamma z^{n-k-1} dz.$$

Ora $z^i dz$ è una 1-forma esatta per $i \neq -1$, dunque per $n - k - 1 \neq -1 \iff n \neq k$

$$\int_\gamma z^{n-k-1} dz = 0$$

e da quanto detto prima

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz = a_k \int_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi i a_k$$

ossia i coefficienti dello sviluppo di Laurent sono univocamente determinati da f, da cui l'unicità. □

7.1.1 Singolarità

Definizione 7.1.9 (Singolarità eliminabile): Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto, $z_0 \in U$ e $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. z_0 è detta **singolarità eliminabile** per f se e solo se esiste una $g : U \to \mathbb{C}$ olomorfa che estende f.

Teorema 7.1.10: *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto, $z_0 \in U$ e $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Se f è limitata in un intorno di z_0 allora z_0 è singolarità eliminabile.*

Dimostrazione. Se è eliminabile allora esiste $g : U \to \mathbb{C}$ olomorfa e quindi continua in z_0, dunque è localmente limitata in un intorno di z_0, ma g estende f, dunque l'implicazione è provata.

Viceversa se f è limitata in un intorno di z_0 allora esistono $\varepsilon, M > 0$ t.c. $\forall z \in B(z_0, \varepsilon)$ $|f(z)| < M$.

Inoltre f ammette uno sviluppo di Laurent in $B(z_0, \varepsilon) - \{z_0\}$

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

con

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right| \leq \frac{M(R)}{R^n} \leq \frac{M}{R^n}$$

in cui $R < \varepsilon$ e $M(R) = \sup\{f(z) \mid z \in B(z_0, R)\}$ (dove si è preso γ essere il cerchio di raggio R dentro a $B(z_0, \varepsilon) - \{z - 0\}$).

Dunque per $n < 0$, si ha che

$$\frac{M}{R^n} \longrightarrow 0 \quad \text{per } R \to 0^+$$

e quindi $a_n = 0$ per ogni $n < 0$.

Dunque la serie di Laurent di f ha solo addendi di indice non negativo, tale serie definisce una funzione analitica g su tutto $B(z_0, \varepsilon)$ che estende f.

□

Definizione 7.1.11 (Singolarità isolate): Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto, $z_0 \in U$ e $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Se z_0 non è eliminabile è detta **singolarità isolata**.

Sia $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z - z_0)^n$ lo sviluppo di Laurent di f in $D - \{z_0\}$ con $D \subset U$ un disco centrato in z_0. Allora z_0 si dice

- **polo di ordine** n_0 se $I = \{n < 0 \mid a_n \neq 0\}$ è finito e $n_0 = -\min I$;
- **singolarità essenziale** se I è infinito.

Teorema 7.1.12: *Siano $U \subset \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in U$ e $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa con z_0 singolarità isolata. Sono equivalenti:*

(1) z_0 è un polo di ordine n_0 per f;

(2) $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_0}}$ su una palla bucata $B(z_0, R) - \{z_0\} \subset U - \{z_0\}$, in cui $g : B(z_0, R) \to \mathbb{C}$ è olomorfa e t.c. $g(z_0) \neq 0$;

(3) $1/f$ si estende ad una funzione olomorfa $k : B(z_0, R) \to \mathbb{C}$, in una palla $B(z_0, R) \subset U$, per la quale z_0 è uno zero di ordine n_0.

Dimostrazione. (1) ⇒ (2). Per definizione di polo di ordine n_0

$$f(z) = \sum_{n=-n_0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

in una palla bucata $B(z_0, R) - \{z_0\} \subset U - \{z_0\}$, dunque

$$f(z) = (z - z_0)^{-n_0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-n_0}(z - z_0)^n$$

dunque la tesi segue con $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-n_0}(z - z_0)^n$ per $z \in B(z_0, R)$.

(2) ⇒ (3). In un $B(z_0, R) - \{z_0\} \subset U$ si ha che $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_0}}$, dunque

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z - z_0)^{n_0}}{g(z)}$$

e poichè $g(z_0) \neq 0$ si ha che $1/g(z)$ è olomorfa in tutto $B(z_0, R)$. Dunque $1/f$ si è estesa ad una funzione olomorfa in tutto $B(z_0, R)$ per la quale z_0 è zero di ordine n_0.

(3) ⇒ (1). Se $k(z) = (z - z_0)^{n_0} h(z)$ con $h(z_0) \neq 0$ estende $1/f$ a z_0 su $B(z_0, R)$, allora per $z \in B(z_0, R) - \{z_0\}$ si ha

$$f(z) = \frac{(z - z_0)^{-n_0}}{h(z)} = (z - z_0)^{-n_0} \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n\geq -n_0} a_{n+n_0}(z - z_0)^n$$

in quanto $1/h$ è olomorfa e quindi analitica, dunque z_0 è un polo di ordine n_0 per f.

□

Corollario 7.1.13: *Siano $U \subset \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in U$ e $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. z_0 è un polo per f se e solo se*

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$ in un intorno bucato di z_0 si ha

$$|f(z)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

dunque esiste necessariamente $\exists n_0 < 0$ t.c. $a_{n_0} \neq 0$.

Viceversa se z_0 è un polo di ordine n_0, per la proposizione di prima si ha

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^{n_0}} = +\infty$$

in quanto $g(z_0) \neq 0$.

□

Teorema 7.1.14 (di Casorati-Weierstrass): *Siano $U \subset \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in U$ e $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Se z_0 è una singolarità essenziale per f allora $\forall V \subset U$ intorno di z_0 si ha che $f(V - \{z_0\})$ è denso in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Se per assurdo esistesse una palla $B = B(z_0, R) \subset U$ per la quale $f(B - \{z_0\})$ non fosse denso in $\mathbb{C}$, allora esisterebbe un $a \in \mathbb{C}$ ed un $r > 0$ t.c.

$$B(a, r) \cap f(B - \{z_0\}) = \emptyset$$

cioè $\forall z \in B - \{z_0\} \quad |f(z) - a| \geq r$.

Considero la funzione $g : B - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ definita da

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

dunque per quanto detto sopra $\forall z \in B - \{z_0\}$

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

ossia g è limitata ed olomorfa in $B - \{z_0\}$. Allora z_0 è singolarità eliminabile per g che si estende quindi ad una funzione olomorfa su tutto B. In particolare per il teorema precedente $f(z) - a$ ha un polo in z_0, ciò implica che anche $f(z)$ ha un polo in z_0, in quanto $f(z) = a + (f(z) - a)$ (e lo sviluppo di Laurent di $f(z)$, in $B - \{z_0\}$, sarà quello di $f(z) - a$, con a che si aggiunge al coefficiente corrispondente a $n = 0$ mentre gli altri rimangono invariati). Ma questo è un assurdo in quanto z_0 è singolarità essenziale per f. □

Corollario 7.1.15: *Siano $U \subset \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in U$ e $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. z_0 è singolarità essenziale per f se e solo se non esiste il limite $\lim_{z\to z_0} |f(z)|$.*

Più precisamente $\forall a \in \mathbb{C}$ esiste una successione di numeri complessi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $z_n \to z_0$ per $n \to +\infty$ e

$$\lim_{n\to+\infty} f(z_n) = a$$

in particolare

$$\lim_{n\to+\infty} |f(z_n)| = |a|$$

Dimostrazione. In un intorno bucato di z_0 si ha

$$|f(z)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$$

se il limite non esiste finito o infinito allora necessariamente $\forall n < 0 \;\; a_n \neq 0$, altrimenti il limite sarebbe esisterebbe uguale a $+\infty$.

Viceversa, sia $a \in \mathbb{C}$ e $n_0 > 0$ t.c. $B(z_0, 1/n) \subset U \;\; \forall n \geq n_0$, per il Teorema di Casorati-Weierstrass, $\forall n \geq n_0 \; f(B(z_0, 1/n) - \{z_0\})$ è denso in $\mathbb{C}$, in particolare esiste

$$f(z_n) \in B(a, 1/n) \cap f(B(z_0, 1/n) - \{z_0\})$$

allora prendendo $(z_n)_{n\geq n_0}$ si ha che per costruzione $z_n \to z_0$ e $f(z_n) \to a$ per $n \to +\infty$.

□

Riassumendo possiamo enunciare il seguente.

Corollario 7.1.16 (Caratterizzazione delle singolarità): *Siano $U \subset \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in U$ e $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora*

- *z_0 è singolarità eliminabile $\iff \lim_{n\to+\infty} |f(z_n)|$ esiste finito;*
- *z_0 è polo $\iff \lim_{n\to+\infty} |f(z_n)| = +\infty$;*
- *z_0 è singolarità essenziale $\iff \lim_{n\to+\infty} |f(z_n)|$ non esiste.*

Funzioni meromorfe

Definizione 7.1.17 (Funzione meromorfa): Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto, una *funzione meromorfa* è una $f : U - S \to \mathbb{C}$ olomorfa t.c. S è discreto e chiuso (in U) e $\forall z_o \in S \; f$ ha un polo in z_0.

Proposizione 7.1.18 (Rapporto di funzioni olomorfe è funzione meromorfa): *Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto connesso e $f, g : U \to \mathbb{C}$ olomorfe con g non identicamente nulla su U. Allora $\frac{f}{g}$ è una funzione meromorfa su U.*

Dimostrazione. Essendo g non identicamente nulla in U aperto connesso si ha che l'insieme

$$S = \{z \in U \mid g(z) = 0\}$$

è discreto e chiuso in U. Chiaramente $\frac{f}{g}$ è olomorfa in $U - S$.

Ora sia $z_0 \in S$ e prendiamo

$$n(z_0) := ord_{z_0}(f) \qquad m(z_0) := ord_{z_0}(g) \geq 1$$

inoltre esistono due funzioni $h, k : U \to \mathbb{C}$ olomorfe con $h(z_0), k(z_0) \neq 0$ t.c. in un intorno di z_0

$$f(z) = (z - z_0)^{n(z_0)} h(z)$$

$$g(z) = (z - z_0)^{m(z_0)} k(z)$$

e quindi in tale intorno

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{n(z_0) - m(z_0)} \frac{h(z)}{k(z)}$$

con chiaramente $\frac{h(z)}{k(z)}$ olomorfa in quanto $k(z_0) \neq 0$ ed a meno di restringerlo posso considerare, per continuità, che nell'intorno k non abbia zeri. Allora se consideriamo l'insieme

$$S' := \{z \in S \mid m(z) > n(z)\}$$

se $z_0 \in S'$ allora $\frac{f}{g}$ ha un polo di ordine $n(z_0) - m(z_0)$ in z_0, mentre in caso contrario z_0 risulta singolarità eliminabile. Dunque $\frac{f}{g}$ definisce una funzione olomorfa su $U - S'$ con S' discreto e chiuso (in quanto sottoinsieme di un discreto chiuso) avente solamente poli nei punti di S'. □

7.2 Teorema dei Residui

Definizione 7.2.1 (Residuo): Siano $U \subset \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in U$ e $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora f ammette sviluppo di Laurent vicino a z_0 con coefficienti $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, definisco **residuo di f in z_0**

$$Res(f, z_0) := a_{-1}$$

Osservazione 7.2.2: Se $\gamma : [0,1] \to U$ è una parametrizzazione del bordo di un disco $B(z_0, R)$ t.c. f sia olomorfa in $B(z_0, R) - \{z_0\}$ percorso in senso antiorario allora

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dunque in particolare

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz$$

che può essere riscritta in

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i Res(f, z_0)$$

Vogliamo usare l'ultima uguaglianza scritta nell'osservazione precedente per calcolare integrali su regioni più complicate di dsichetti centrati in z_0.

Definizione 7.2.3 (Regione): Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto. $R \subset U$ è detto **regione** se è un sottoinsieme chiuso con le seguenti proprietà

- $R^\circ \neq \emptyset$;
- ∂R è C^1 a tratti, cioè se $\Gamma = \partial R$ e $\{\Gamma_i\}_i$ sono le componenti connesse di Γ, per ogni i esiste una curva C^1 a tratti $\gamma_i : [0,1] \to \Gamma_i$ che sia surgettiva ed iniettiva eccetto al più agli estremi.

Una parametrizzazione come sopra $\gamma_i : [0,1] \to \Gamma_i$ è detta **positiva** se $\forall t \in [0,1]$ per cui il vettore $\gamma_i'(t)$ è definito e non nullo vale che $i\gamma_i'(t)$ "punta dentro ad R", cioè se esiste un $\varepsilon > 0$ per il quale

$$\gamma_i(t) + si\gamma_i'(t) \in R \quad \forall s \in [0, \varepsilon)$$

Ed in generale se R è una regione, $\Gamma_1, ..., \Gamma_k$ sono le componenti connesse di ∂R e ω è una 1-forma definita su ∂R definiamo

$$\int_{\partial R} \omega := \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} \omega$$

con $\gamma_i : [0,1] \to \Gamma_i$ una parametrizzazione positiva di Γ_i per ogni $i = 1, ..., k$.

Teorema 7.2.4 (dei residui): *Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : U - S \to \mathbb{C}$ olomorfa con S discreto e chiuso in U. Sia $R \subset U$ una regione omeomorfa ad un disco chiuso (in particolare compatta) t.c. $S \cap \partial R = \emptyset$ e sia $\{z_1, .., z_k\} = R \cap S$ (è finito in quanto S è discreto e chiuso e R è compatta). Allora vale la formula*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} Res(f, z_i)$$

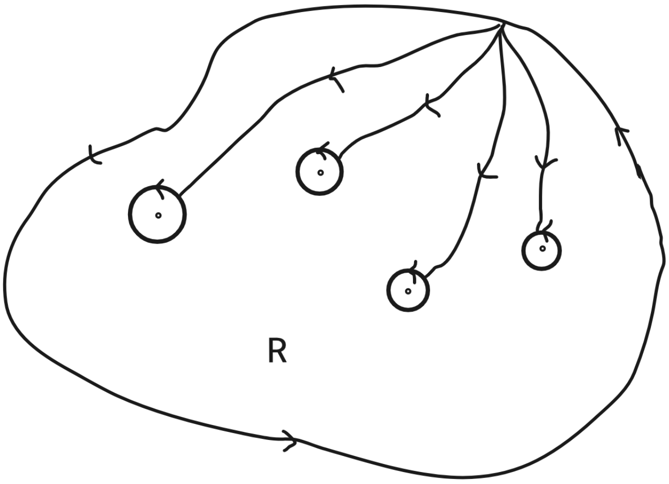
Dimostrazione. Sia γ una parametrizzazione positiva di ∂R che parte da un punto $p \in \partial R$ e $\forall i = 1, ..., k$ siano β_i cammini che parametrizzano dei cerchietti contenuti in R in senso antiorario (esistono perchè $\forall i = 1, ..., k \;\; z_i \in R - \partial R = R^\circ$ aperto) e α_i dei cammini che partono da p ed arrivano alle circonferenze parametrizzate dai β_i (vedi figura). Il cammino

$$\delta = \gamma * \alpha_k * \beta_k^{-1} * \alpha_k^{-1} * \alpha_{k-1} * \beta_{k-1}^{-1} * \alpha_{k-1}^{-1} * ... * \alpha_1 * \beta_1^{-1} * \alpha_1^{-1}$$

che descrive il percorso a partire da p, percorrendo ∂R in senso antiorario e quindi percorrendo gli $\alpha_i * \beta_i^{-1} * \alpha_i^{-1}$ a partire da destra verso sinistra nel disegno, è omotopicamente banale, in quanto descrive il bordo di un insieme che è omeomorfo ad una sfera.

Poiché f è olomorfa su $R - \{z_1, ..., z_k\}$ si ha che la 1-forma $f(z)dz$ è chiusa su $R - \{z_1, ..., z_k\}$, dunque, essendo δ omotopicamente banale

$$0 = \int_{\delta} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \sum_{i=1}^{k} \left(\int_{\alpha_i} f(z)dz + \int_{\beta_i^{-1}} f(z)dz + \int_{\alpha_i^{-1}} f(z)dz \right) =$$



$$= \int_\gamma f(z)dz + \sum_{i=1}^{k} \int_{\beta_i^{-1}} f(z)dz$$

da cui

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{k} \int_{\beta_i} f(z)dz = \sum_{i=1}^{k} 2\pi i Res(f, z_i)$$

□

Calcolo dei residui

Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa con $z_0 \in U$ polo semplice (di ordine 1) per f. Essendo z_0 un polo semplice, in un suo intorno

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

e quindi

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

In particolare se $f = \frac{p}{q}$ con z_0 zero semplice per q allora z_0 è polo semplice per f ed il residuo è

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)p(z)}{q(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z) - q(z_0)}{z - z_0}} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Ora se z_0 è polo di ordine k per f allora in un intorno di z_0

$$f(z) = \sum_{n \geq -k} a_n (z - z_0)^n$$

da cui

$$(z - z_0)^k f(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n-k} (z - z_0)^n$$

ma $n-k=-1 \iff n=k-1$ dunque derivando $k-1$ volte si ottiene

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)] = \sum_{n\geq k-1} a_{n-k} n(n-1)...(n-k)(z-z_0)^{n-k+1}$$

e quindi

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)] = (k-1)! a_{-1}$$

cioè

$$Res(f,z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)].$$

Funzioni meromorfe e residui

Vediamo alcuni casi particolari di applicazione del Teorema dei Residui quando si ha a che fare con funzioni meromorfe.

Proposizione 7.2.5: *Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : U - S \to \mathbb{C}$ una funzione meromorfa con polo semplice in $z_0 \in S$. Sia $\gamma_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{C} - \{z_0\}$ t.c. $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{i\pi t} + z_0$ con $\varepsilon > 0$. Allora*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = \pi i Res(f,z_0)$$

Dimostrazione. Avendo polo semplice in z_0 si ha in un intorno V di quest'ultimo

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + g(z)$$

con g olomorfa in V. Sia G primitiva locale in un intorno di z_0 (contenuto in V) della 1-forma chiusa $g(z)dz$. Allora si ha

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\gamma_\varepsilon}\frac{a_{-1}}{z-z_0}dz + \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz$$

per $\varepsilon \to 0$ ad un certo punto $Imm(\gamma_\varepsilon)$ sarà contenuta nell'intorno di z_0 su cui $g(z)dz$ ha primitiva G, dunque

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = a_{-1}I(\gamma_\varepsilon, z_0) + \lim_{\varepsilon\to 0}[G(\gamma_\varepsilon(1)) - G(\gamma_\varepsilon(0))] = \pi i a_{-1}$$

□

Ora una proposizione che nelle applicazioni risulta molto utile.

Proposizione 7.2.6: *Sia $f : \mathbb{C} - S \to \mathbb{C}$ una funzione meromorfa e sia*

$$M(R) := \max\{|f(z)| \mid |z| = R\ ,\ \Im(z) \geq 0\}$$

Se $\lim_{R\to+\infty} M(R) = 0$, allora

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)e^{iz}dz = 0$$

in cui $\gamma_R(t) = Re^{i\pi t}$ con $t \in [0,1]$.

Dimostrazione. Se $z = \gamma_R(t) = R\cos(\pi t) + iR\sin(\pi t)$ allora $\gamma'_R(t) = Ri\pi e^{i\pi t}$

$$|e^{iz}| = |e^{iR\cos(\pi t)}e^{-R\sin(\pi t)}| = e^{-R\sin(\pi t)}$$

dunque

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \int_0^1 |f(\gamma_R(t))e^{i\gamma_R(t)}||\gamma'_R(t)|dz \leq$$

$$\leq M(R)\int_0^1 e^{-R\sin(\pi t)}\pi R dt$$

Vediamo che l'integrale appena scritto è limitato indipendentemente da R.

La funzione $g(\tau) = \frac{\sin\tau}{\tau}$ è estendibile con continuità in 0 col valore $g(0) = 1$, dunque definisce in $[0, \pi/2]$ una funzione strettamente positiva e limitata (continua su un compatto).

Sia $K > 0$ t.c. $|g(\tau)| \leq K$ per ogni $\tau \in [0, \pi/2]$.

Allora

$$\int_0^1 e^{-R\sin(\pi t)}\pi R dt = \int_0^\pi e^{-R\sin(s)} R ds = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin(\tau)} R d\tau =$$

$$= 2R\int_0^{\pi/2} e^{-R\frac{\sin(\tau)}{\tau}\tau} d\tau = \leq 2R\int_0^{\pi/2} e^{-RK\tau}d\tau = 2R\left[-\frac{e^{-RK\tau}}{RK}\right]_{\tau=0}^{\tau=\pi/2} = \frac{2}{K}(1 - e^{-RK\frac{\pi}{2}}) \leq \frac{2}{K}$$

da cui riprendendo quanto fatto precedentemente

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq M(R)\int_0^1 e^{-R\sin(\pi t)}\pi R dt \leq \frac{2}{K}M(R) \longrightarrow 0$$

per $R \to +\infty$.

$\square$

7.3 Teorema di Rouché

Definizione 7.3.1 (Derivata logaritmica): Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : U - S \to \mathbb{C}$ una funzione meromorfa. La **derivata logaritmica di f** è la funzione $\frac{f'}{f}$.

Osservazione 7.3.2: Si usa questo nome in quanto

$$d(\log(f))(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

La derivata logaritmica è olomorfa eccetto al più nei poli o negli zeri di f.

Sia z_0 un polo o uno zero di f, sia $k \in \mathbb{Z}$ il primo indice non nullo nello sviluppo di Laurent di f in z_0, allora in un intorno di z_0

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

con $g(z) \neq 0$ olomorfa e $k > 0$. Allora

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z)$$

da cui

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Ma $\frac{g'}{g}$ è olomorfa in un intorno di z_0, quindi (per l'unicità dello sviluppo di Laurent) l'espressione scritta sopra ci dice che $\frac{f'}{f}$ ha un polo semplice in z_0 con residuo

$$Res\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = k.$$

Lemma 7.3.3 (Principio dell'argomento): *Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : U - S \to \mathbb{C}$ una funzione meromorfa. Sia $R \subset U$ una regione omeomorfa ad un disco chiuso. R contiene un numero finito di zeri o poli di f (insieme discreto in un compatto) e supponiamo che nessuno di questi stia in ∂R. Allora vale*

$$\int_{\partial R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (Z - P)$$

dove Z e P sono rispettivamente il numero di zeri e di poli di f in R contati con molteplicità.

Dimostrazione. Segue dal Teorema dei Residui e dai conti fatti sopra. □

Teorema 7.3.4 (di Rouché): *Siano $U \subset \mathbb{C}$ aperto, $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa e $R \subset U$ una regione omeomorfa ad un disco chiuso. Sia $g : U \to \mathbb{C}$ olomorfa t.c.*

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \partial R$$

Allora f e $f + g$ hanno lo stesso numero di zeri (contati con molteplicità) in R.

Dimostrazione. Consideriamo per ogni $t \in [0, 1]$ le funzioni

$$h_t = f + tg$$

vale che $\forall z \in \partial R$

$$|h_t(z)| = |f(z) - tg(z)| \geq |f(z) - g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$$

cioè per ogni $t \in [0, 1]$ h_t non si annulla mai su ∂R. Inoltre chiaramente per ogni $t \in [0, 1]$ h_t è olomorfa. Dunque applicando il lemma precedente ad h_t otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{h_t'(z)}{h_t(z)} dz = Z_t$$

in cui Z_t sono il numero di zeri di h_t in R. Ora il LHS varia in maniera continua al variare di $t \in [0, 1]$, mentre il RHS è un intero, dunque è necessariamente costante, in particolare

$$Z_0 = Z_1$$

che è la tesi. □

Grazie al Teorema di Rouché si ottiene il seguente importante risultato.

Lemma 7.3.5: *Siano $U \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa non costante. Allora $f(U)$ è aperto in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Sia $w_0 = f(z_0)$ un punto in $f(U)$. Sia

$$g(z) = f(z) - w_0$$

notiamo che g è olomorfa e non costante, dunque i suoi zeri sono isolati (altrimenti sarebbe identicamente nulla su tutto il connesso U per prolungamento analitico), in particolare lo è w_0, dunque esiste $\delta > 0$ t.c. $\overline{B(z_0, \delta)} \subset U$ e $f(z) \neq w_0 \quad \forall z \in \overline{B(z_0, \delta)}$.

Ora sia

$$\varepsilon = \min_{z \in \partial B(z_0, \delta)} |g(z)| > 0$$

questo minimo esiste in quanto g è continua su $\partial B(z_0, \delta) \subset U$ che è compatto. Dato $w \in B(w_0, \frac{\varepsilon}{2})$ si ha che

$$f(z) = w \iff g(z) = w - w_0 \iff g(z) - w + w_0 = 0$$

e considerando la funzione

$$h(z) = -w + w_0$$

si ha che $\forall z \in B(z_0, \delta)$

$$|h(z)| = |-w + w_0| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \leq |g(z)|$$

quindi posso applicare il Teorema di Rouché alle funzioni h, g sulla regione $\overline{B(z_0, \delta)}$ e dire che la funzione $g + h$ ha anch'essa uno zero su $\overline{B(z_0, \delta)}$, ossia esiste uno $z \in B(z_0, \delta)$ t.c.

$$g(z) + h(z) = g(z) - w + w_0 = 0$$

(su $\partial B(z_0, \delta)$ $g+h$ è non nulla per quanto detto sopra), ossia t.c. $f(z) = w$. Dunque $B(w_0, \frac{\varepsilon}{2}) \subset f(U)$ e f è allora una mappa aperta per l'arbitrarietà di U. $\square$

Adesso il teorema della sezione.

Teorema 7.3.6 (della mappa aperta): *Siano $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa non costante. Allora f è aperta.*

Dimostrazione. Dato che le palle formano una base per l'usuale topologia euclidea su $\mathbb{C}$, si ha facilmente la tesi. Infatti ogni aperto di U è scrivibile per definizione di topologia di sottospazio come $A \cap U$ con A aperto di $\mathbb{C}$, dunque in particolare è anche un aperto di $\mathbb{C}$. Quindi

$$A \cap U = \bigcup_{z \in A \cap U} B(z, r_z)$$

con $r_z > 0$ t.c. $B(z, r_z) \subset A \cap U \quad \forall z \in A \cap U$, ma $\forall z \in A \cap U \quad B(z, r_z)$ è connesso, dunque

$$f(A \cap U) = \bigcup_{z \in A \cap U} f(B(z, r_z))$$

è aperto in quanto unione di aperti. $\square$

Appendice A

Integrale su curve continue

Vogliamo definire, nel caso di 1-forme chiuse l'integrale su una qualsiasi curva C^0.

Definizione A.0.1: Sia ω una 1-forma complessa continua chiusa (per questa definizione in realtà non servirebbe) su un aperto $U \subset \mathbb{C}$.

Sia $\gamma : [a, b] \to U$ un cammino C^0 in U.

Diciamo che $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ è una **primitiva di ω lungo** γ se e solo se $\forall t_0 \in [a, b]$ esiste un intorno $V \subset U$ di $\gamma(t_0)$, una primitiva di ω su V, F t.c. $dF = \omega$ su V, ed un $\varepsilon > 0$ t.c.

$$F(\gamma(t)) = f(t) \qquad \forall |t - t_0| < \varepsilon$$

Osservazione A.0.2: F è definita su tutto V ma sui punti della curva γ coincide con f.

La scelta dell'ε serve ad assicurarci che $\gamma(t) \in V$ insieme di definizione di F.

Lemma A.0.3: *Sia ω una 1-forma chiusa su $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $\gamma : [a, b] \to U$ una curva continua.*

Esiste una primitiva di ω lungo γ e tale primitiva è unica a meno di costanti additive.

Dimostrazione. (Esistenza). Per compattezza di [a,b], in particolare per il teorema del numero di Lebesgue, posso trovare una suddivisione di tale intervallo

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

t.c. $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset V_i$ con V_i una palla su cui ω ha una primitiva.

Infatti essendo ω chiusa $\forall z \in \gamma([a, b])$ esiste una palla aperta con centro z, V_z, in cui ω ha una primitiva, dunque se prendo $\{V_z\}_{z \in \gamma([a,b])}$ ho che questo è un ricoprimento aperto di $\gamma([a, b])$ che è compatto per continuità di γ, dunque ne estraggo un ricoprimento finito $\{V_h\}_{h=1,...,m}$ e se prendo le controimmagini rispetto a γ di tali insiemi ottengo un ricoprimento di $[a, b]$, dunque se prendo il numero di Lebesgue di tale ricoprimento ho che ogni sottointervallino di tale diametro è tutto contenuto nella controimmagine di un V_i, ora prendendo il ricoprimento aperto di $[a, b]$ formato da tutti questi intervallini ho che posso estrarne uno finito $\{B_j\}_{j=1,...,n}$ t.c.

$$t_0 := a \in B_1 \ \ , \ t_n := b \in B_n \ \ , \ \forall j = 1, ..., n-1 \ \ \exists t_j \in B_j \cap B_{j+1}$$

per costruzione si ha $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset V_i$ con V_i una palla su cui ω ha una primitiva.

Dunque $\forall t \in [t_0, t_1]$, scelgo una primitiva $F_1 : V_1 \to \mathbb{C}$ e pongo

$$f(t) = F_1(\gamma(t))$$

scelgo poi una primitiva su V_2, $F_2 : V_2 \to \mathbb{C}$, t.c. $F_2(\gamma(t_1)) = F_1(\gamma(t_1))$ e pongo $\forall t \in [t_1, t_2]$

$$f(t) = F_2(\gamma(t))$$

posso dunque iterare il procedimento fino $[t_{n-1}, t_n]$ e costruire quindi una funzione f continua (è continua sul ricoprimento chiuso $\{[t_{i-1}, t_i]\}_{i=1,\dots,n}$ e si attacca bene sui punti d'intersezione) ed è una primitiva di ω lungo γ.

(Unicità). Siano $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{C}$ due primitive di ω lungo γ dunque per ogni $t_0 \in [a, b]$ esiste un $\varepsilon > 0$ ed un intorno connesso (convesso volendo) di $\gamma(t_0)$ per i quali

$$f_1(t) = F_1(\gamma(t)) \qquad f_2(t) = F_2(\gamma(t))$$

$\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ con $F_1, F_2 : U \to \mathbb{C}$ due primitive di ω su U.

Ora $d(F_1 - F_2) = 0$ su U connesso dunque $F_1 - F_2$ è costante su U e quindi $f_1 - f_2$ è costante su $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

Dunque $f_1 - f_2$ è localmente costante su $[a, b]$ che è connesso e quindi è costante su tutto $[a, b]$ per un lemma precedente.

$\square$

Definizione A.0.4: Sia ω una 1-forma chiusa su $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $\gamma : [a, b] \to U$ una curva continua e sia $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ una primitiva di ω lungo γ.

Definisco l'integrale di ω lungo γ

$$\int_\gamma \omega := f(b) - f(a)$$

Osservazione A.0.5: Valgono sempre le usuali proprietà

- $\int_{\gamma_1 * \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$
- $\int_{\gamma^{-1}} \omega = -\int_\gamma \omega$

Inoltre nel caso di curva C^1 a tratti si ha che questa definizione coincide con la definizione data precedentemente, infatti se dividiamo $[a, b]$ nei pezzi in cui si ha che la restizione di γ è C^1, ossia prendiamo la suddivisione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ t.c. $\gamma|_{[t_i, t_i+1]}$ è C^1 e se prendiamo una primitiva su $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ di ω, F_i, si ha che

$$\int_\gamma \omega = \sum_i \int_{\gamma_i} \omega = \sum_i [F_i(\gamma(t_{i+1})) - F_i(\gamma(t_i))]$$

e con la definizione data adesso

$$\int_\gamma \omega = \sum_i \int_{\gamma_i} \omega = \sum_i [f(t_{i+1}) - f(t_i)] = \sum_i [F_i(\gamma(t_{i+1})) - F_i(\gamma(t_i))]$$

Teorema A.0.6 (Invarianza per omotopia per cammini C^0): *Sia ω una 1-forma chiusa su $U \subset \mathbb{C}$ aperto e siano $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to U$ cammini continui omotopi a estremi fissi. Allora*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

Inoltre, quindi, c'è anche un invarianza per omotopia libera.

Dimostrazione. Sia $H : [0,1] \times [0,1] \to U$ l'omotopia a estremi fissi tra γ_1 e γ_2 t.c. $H(0)$.

Voglio costruire una "primitiva di ω lungo H", cioè una funzione

$$G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$$

t.c. per ogni (t_0, s_0) esista un intorno di $H(t_0, s_0)$ in U e una primitiva F di ω in tale intorno per i quali $G(t,s) = F(H(t,s))$ per ogni (t,s) in un intorno di (t_0, s_0).

Per compattezza di $[0,1] \times [0,1]$, con ragionamento analogo a quello fatto nel teorema precedente, si ha che esistono delle suddivisioni di $[0,1]$

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1 \quad 0 = s_0 < s_1 < ... < s_m = 1$$

t.c. $\forall i = 1, ..., n \;\; \forall j = 1, ..., m \quad H([t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]) \subset V_{i,j}$ aperto connesso di $U \subset \mathbb{C}$ su cui ω ha una primitiva.

Occupiamoci della prima riga di quadratini $\{[t_{i-1}, t_i] \times [s_0, s_1]\}_{i=1,...,n}$, prendo una primitiva di ω sul primo quadratino V_{11}

$$F_{1,1} : V_{1,1} \to \mathbb{C}$$

dunque pongo $\forall (t,s) \in [t_0, t_1] \times [s_0, s_1]$

$$G(t,s) = F_{1,1}(H(t,s))$$

poi prendo su $V_{2,1}$ la primitiva di ω $F_{2,1} : V_{2,1} \to \mathbb{C}$ t.c.

$$F_{2,1}(H(t_1, s_0)) = F_{1,1}H((t_1, s_0))$$

(questa è unica per connessione di $V_{2,1}$, infatti se prendo due primitive di ω su $V_{2,1}$ uguali in $H((t_1, s_0))$ a $F_{1,1}(H(t_1, s_0))$ si ha che il differenziale della differenza tra queste due primitive in $V_{2,1}$ è nullo, dunque per un lemma precedente la differenza tra le due primitive è costante, ma in $H((t_1, s_0))$ tale differenza è nulla, dunque le primitive sono uguali su tutto $V_{2,1}$) ed ho che in realtà

$$F_{2,1}(H(t_1, s)) = F_{1,1}(H(t_1, s)) \;\; \forall s \in [s_0, s_1]$$

infatti basta applicare il ragionamento precedente al connesso (è immagine continua di un connesso)

$$\{H(t_1, s) | s \in [s_0, s, 1]\} = H(\{(t_1, s) | s \in [s_0, s, 1]\}) \subset V_{1,1} \cap V_{2,1}$$

su cui entrambe $F_{1,1}, F_{2,1}$ sono primitive di ω e pongo $\forall (t, s) \in [t_1, t_2] \times [s_0, s_1]$

$$G(t, s) = F_{2,1}(H(t, s))$$

ed ho che si incolla bene con la precedente.

Dunque continuo in questo modo per tutti i quadratini $\{[t_{i-1}, t_i] \times [s_0, s_1]\}_{i=1,\dots,n}$.

Poi prendo la seconda riga di quadratini $\{[t_{i-1}, t_i] \times [s_1, s_2]\}_{i=1,\dots,n}$ e scelgo per ogni quadratino $[t_{i-1}, t_i] \times [s_1, s_2]$ una primitiva di ω, su $V_{i,2}$, che sia uguale a quella precedente in $H(t_{i-1}, s_1)$ (se $i > 1$, altrimenti è il primo della riga e questo passaggio non è necessario), che ci da, con ragionamento analogo a prima, che è uguale alla primitiva precedente su tutto $\{H(t_i, s) | s \in [s_1, s_2]\}$ e che sia uguale alla primitiva del quadratino sotto di lui sempre in $H(t_{i-1}, s_1)$ che ci da l'uguaglianza tra le due su tutto l'insieme $\{H(t, s_1) | t \in [t_{i-1}, t_i]\}$, cosa che ci garantisce che le parti si incollino bene.

Questo procedimento ci permette di definire G continua su tutto $[01] \times [0, 1]$ che sia per costruzione una "primitiva di ω lungo H".

Ora si nota che la funzione $G(0, s)$ è una primitiva di ω lungo il cammino costante (l'omotopia è ad estremi fissi) $H(0, s)$, dunque è costante, infatti ho che preso un intorno V di $h = H(0, s)$, punto immagine della curva costante, esiste una primitiva F di ω su V ed essendo $\forall s \in [0, 1] \quad H(0, s) = h \in V$ si ha che $\forall s \in [0, 1]$

$$G(0, s) = F(h)$$

dunque in particolare

$$G(0, 0) = G(0, 1)$$

Analogamente dall'altro estremo si ottiene

$$G(1, 0) = G(1, 1)$$

Inoltre chiaramente $G(t, 0)$ è una primitiva di ω lungo γ_1 e $G(t, 1)$ è una primitiva di ω lungo γ_2 dunque

$$\int_{\gamma_1} \omega = G(1, 0) - G(0, 0) = G(1, 1) - G(0, 1) = \int_{\gamma_2} \omega$$

□

Corollario A.0.7 (Domini semplicemente connessi): *Sia ω una $1-$forma continua complessa su $U \subset \mathbb{C}$ semplicemente connesso. Vale che ω è esatta $\iff$ ω è chiusa.*

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$. ovvio, questa implicazione è vera sempre.

($\Leftarrow$). Sia $\gamma : [0,1] \to U$ un cammino chiuso allora γ è omotopo ad estremi fissi al cammino costante $\delta(t) = \gamma(0) \ \ \forall t \in [0,1]$ dunque

$$\int_\gamma \omega = \int_\delta \omega = 0$$

dunque ω è esatta.

□

Si ha la seguente caratterizzazione per le 1-forme chiuse.

Teorema A.0.8: *Sia ω una 1-forma su $U \subset \mathbb{C}$ aperto. Sono equivalenti*

(1) ω è chiusa

(2) $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni cammino continuo (o C^1 a tratti) γ omotopo (in U, cioè tutti i cammini dell'omotopia devono essere in U) ad un cammino costante

(3) $\int_{\partial R} \omega = 0$ per ogni rettangolo $R \subset U$ con ∂R percorso da un cammino continuo (o C^1 a tratti)

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Vera per l'invarianza per omotopia.

(2) $\Rightarrow$ (3). Un cammino continuo che percorre un rettangolo è omotopo ad un laccio costante.

(3) $\Rightarrow$ (1). Per ogni $z_0 \in U$ prendo una palla centrata in z_0 e contenuta in U, dunque in questa palla ω è esatta se e solo se vale (3) per un teorema precedente, dunque ω è localmente esatta, cioè chiusa.

□

Osservazione A.0.9: Precedentemente si era osservato che per controllare l'esattezza sulle palle di una forma era sufficiente controllare i rettangoli con due lati paralleli all'asse reale, dunque, osservando la dimostrazione appena fatta, si nota che per controllare la chiusura di una 1-forma complessa in un aperto basta controllare che abbia integrale nullo lungo i bordi di rettangoli con due lati paralleli all'asse reale.

Inoltre vale la seguente formula.

Teorema A.0.10 (Formula di Green-Riemann-Stokes): *Sia $\omega = Pdx + Qdy$ una 1-forma C^1 su $U \subset \mathbb{C}$ un aperto. Sia $R \subset U$ un rettangolo con lati paralleli agli assi, allora*

$$\int_{\partial R} \omega = \int_R (\partial_x Q - \partial_y P)\, dxdy$$

in cui nel RHS si considera l'usuale integrale su $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione.
$$\int_R (\partial_x Q - \partial_y P)\, dxdy = \int_R \partial_x Q dxdy - \int_R \partial_y P dxdy$$
Ora se $(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_2)$ sono i vertici del rettangolo a partire da quello in basso a destra e girando in senso antiorario si ha

$$\int_R \partial_x Q dxdy - \int_R \partial_y P dxdy =$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} \partial_x Q dx \right) dy - \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \partial_y P dy \right) dx =$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} \left(Q(a_2, y) - Q(a_1, y)\right) dy - \int_{a_1}^{a_2} \left(P(x, b_2) - P(x, b_1)\right) dx =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} P(x, b_1) dx + \int_{b_1}^{b_2} Q(a_2, y) dy + \int_{a_2}^{a_1} P(x, b_2) dx + \int_{b_2}^{b_1} Q(a_1, y) dy =$$

$$= \int_{\partial R} \omega$$

□

Proposizione A.0.11: *Sia $\omega = Pdx + Qdy : U \to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ 1-forma C^1 a valori complessi su $U \subset \mathbb{C}$ aperto. Allora ω è C^1-chiusa se e solo se è chiusa.*

Dimostrazione. Chiaramente se ω è chiusa (cioè localmente esatta) allora ha localmente una primitiva e localmente è C^1-chiusa per una proposizione vista, ma allora è C^1-chiusa anche su tutto U.

Viceversa se ω è C^1-chiusa allora $\partial_x Q - \partial_y P = 0$ e per la formula di Green-Riemann-Stokes l'integrale sul bordo di un qualsiasi rettangolo contenuto in U con lati paralleli agli assi è nullo, dunque ω è chiusa per il Teorema 5 e l'Osservazione 34.

□

Appendice B

Principio del massimo modulo per funzioni continue

Teorema B.0.1 (Principio del massimo modulo): *Siano $U \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : U \to \mathbb{C}$ funzione continua con la proprietà del valor medio. Se $|f|$ ha un massimo relativo in $z_0 \in U$, allora f è costante in un intorno di z_0.*

Dimostrazione. Se $f(z_0) = 0$ allora essendo z_0 un massimo relativo

$$|f(z)| \leq f(z_0)| = 0$$

in tutto un intorno di z_0, ma allora $|f(z)| = f(z) = 0$ in quest'intorno.

Se invece $f(z_0) \neq 0$ allora esistono $\rho \in [0, +\infty),\ \phi \in [0, 2\pi)$ t.c.

$$f(z_0) = \rho e^{i\phi}$$

in particolare quindi

$$e^{-i\phi} f(z_0) = \rho \in [0, +\infty)$$

dunque a meno di rimpiazzare f con $e^{-i\phi} f$ si può assumere che $f(z_0) \in [0, +\infty)$.

Ora valendo la proprietà del valor medio per f si può scegliere un $R > 0$ t.c.

(1) $B(z_0, R) \subset U$;

(2) $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \quad \forall r \in [0, R)$;

(3) $|f(z)| \leq |f(z_0)| \ \ \forall z \in B(z, R)$.

E sia $\forall r \in [0, R)$

$$M(r) = \sup\{|f(z)| \mid |z - z_0| = r\} < +\infty$$

Per la (3) si ha $\forall r \in [0, R)$

$$M(r) \leq |f(z_0)| = f(z_0)$$

mentre per la (2) si ha per $r \in [0, R)$

$$f(z_0) = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq M(r)$$

dunque $\forall r \in [0, R)$

$$f(z_0) = M(r)$$

Ora

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M(r)d\theta = M(r) = f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

dunque

$$\int_0^{2\pi} M(r)d\theta = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

ma essendo $M(r) \in \mathbb{R}$ posso integrare solo la parte reale di f, $\Re(f) =: u$

$$\int_0^{2\pi} M(r)d\theta = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

dunque definendo $g(\theta) = u(z_0 + re^{i\theta}) - M(r)$ per $\theta \in [0, 2\pi)$ si ha

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = 0$$

ma per definizione

$$M(r) \geq |f(z_0 + re^{i\theta})| \geq |u(z_0 + re^{i\theta})|$$

dunque

$$|g(\theta)| = |u(z_0 + re^{i\theta}) - M(r)| \geq |f(z_0 + re^{i\theta})| - |u(z_0 + re^{i\theta})| \geq 0$$

e allora dovendo avere integrale nullo deve essere $g(\theta) = 0$ (sarebbe per quasi ogni $\theta \in [0, 2\pi)$, ma essendo g continua si ha l'uguaglianza ovunque), cioè $\forall \theta \in [0, 2\pi)$

$$u(z_0 + re^{i\theta}) = M(r)$$

Ora

$$M(r) \geq |f(z_0 + re^{i\theta})| = [u(z_0 + re^{i\theta})^2 + v(z_0 + re^{i\theta})^2]^{1/2} = [M(r)^2 + v(z_0 + re^{i\theta})^2]^{1/2}$$

dunque $v(z_0 + re^{i\theta}) = 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi)$.

Valendo quanto detto per ogni $r \in [0, R)$ si ha che $\forall z \in B(z_0, R)$

$$f(z) = \Re(f)(z) = M(|z - z_0|) = f(z_0)$$

□

Corollario B.0.2: *Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto connesso e limitato. Sia $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ continua su $\overline{U}$ e con la proprietà del valor medio su U. Sia $M = \sup_{z \in \partial U} |f(z)|$, allora*

- $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in U$;
- *se esiste uno $z_0 \in U$ t.c. $|f(z_0)| = M$ allora f è costante.*

Dimostrazione. Sia $\overline{M} = \sup_{z \in \overline{U}} |f(z)|$, allora

$$M \leq \overline{M} < +\infty$$

ed esiste almeno un punto $z_0 \in \overline{U}$ t.c. $|f(z_0)| = \overline{M}$ (esiste perché U è limitato, dunque precompatto).

Distinguiamo adesso due casi.

($\exists z_0 \in U$ *t.c.* $|f(z_0)| = \overline{M}$)

Per il principio del massimo modulo f è costante in un intorno aperto di z_0.

Sia dunque

$$V = \{z \in U \mid |f(z)| = |f(z_0)| = \overline{M}\}$$

vediamo che V è chiuso e aperto in U connesso allora essendo non vuoto per quanto detto sopra si avrà $V = U$.

Innanzitutto si nota che V è chiuso, in quanto preimmagine di un chiuso mediante una funzione continua.

Mentre ripetendo il ragionamento della seconda parte della dimostrazione del Principio del Massimo Modulo si ottiene che se $w \in V$, cioè $|f(w)| = \overline{M}$, allora esiste una palla $B(w, R)$ t.c. $B(w, R) \subset V$, da cui V aperto.

($\nexists z_0 \in U$ *t.c.* $|f(z_0)| = \overline{M}$)

In questo caso necessariamente $z_0 \in \partial U$ allora

$$M \geq |f(z_0)| = \overline{M}$$

dunque $M = \overline{M}$ e $\forall z \in U$

$$|f(z)| \leq \overline{M} = M$$

che è il primo punto (il secondo punto in questo caso non vale in quanto $\nexists z_0 \in U$ *t.c.* $|f(z_0)| = \overline{M}$)).

□