Teorema (spettrale generalizzato). *Siano* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *matrici simmetriche, con* A *definita positiva. Allora esiste una base* $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ *di autovettori per* $A^{-1}B$ *ortonormali rispetto al prodotto scalare definito da* A.

Dimostrazione. Innanzitutto esiste $X \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ tale che $XAX^T = I$ e $XBX^T = \Lambda$, dove I è l'identità $n \times n$ e Λ è diagonale. Infatti, dal teorema di Sylvester, esiste $S \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ tale che

$$SAS^T = I$$

perché A è definita positiva. Consideriamo ora SBS^T: è una matrice simmetrica dato che $(SBS^T)^T = SB^TS^T = SBS^T$. Per il teorema spettrale, esiste $U \in \mathsf{O}_n(\mathbb{R})$ tale che $U(SBS^T)U^T = \Lambda$, con Λ diagonale. Definendo $X := US$ il lemma è dimostrato: si ha

$$XBX^T = USB(US)^T = U(SBS^T)U^T = \Lambda,$$

e d'altra parte

$$XAX^T = USA(US)^T = U(SAS^T)U^T = UU^T = I.$$

A questo punto notiamo che $X = X^{-T}A^{-1}$, e quindi $X^{-T}A^{-1}BX^T = \Lambda$. La base definita da X^T è dunque una base di autovettori per $A^{-1}B$. Dalla relazione $XAX^T = I$ possiamo concludere che i vettori di tale base sono ortonormali rispetto al prodotto scalare definito da A. $\square$