Sia fissato un campo $\mathbb{K}$, un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V e $f \in End(V)$. Supponiamo V a dimensione finita e studiamo la relazione di equivalenza indotta dall'azione di coniugio per un elemento del gruppo lineare:

$$\begin{aligned} GL(V) \times End(V) &\to End(V) \\ (h, f) &\mapsto h^{-1} f h \end{aligned}$$

detta relazione di coniugio tra endomorfismi, o equivalentemente la sua versione matriciale

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{K}) \times M(n, \mathbb{K}) &\to M(n, \mathbb{K}) \\ (P, A) &\mapsto P^{-1} A P \end{aligned}$$

detta relazione di similitudine tra matrici. Indichiamo entrambe queste relazioni con il simbolo $\sim$, per cui si ha, $\forall f, g \in End(V)$, $\forall A, B \in M(n, \mathbb{K})$

- $f \sim g \Leftrightarrow \exists h \in GL(V) : f = h^{-1} g h$
- $A \sim B \Leftrightarrow \exists P \in GL(n, \mathbb{K}) : A = P^{-1} B P$

Questa relazione ha un importante collegamento con il cambio di base, esplicitato dalla seguente:

<u>PROPOSIZIONE</u> Siano $f, g \in End(V)$. Allora sono equivalenti tra loro:

1) $f \sim g$

2) $\forall \mathcal{B}$ base di V: $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \sim \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g)$

3) $\exists\ \mathcal{B}, \mathcal{D}$ basi di V : $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{D}}(g)$

<u>Dim</u> 1) $\Rightarrow$ 2) Sia $f = h^{-1} g h$ e sia $\mathcal{B}$ base di V. Allora $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(h)^{-1} M_{\mathcal{B}}(g) M_{\mathcal{B}}(h)$

2) $\Rightarrow$ 3) Sia $M_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(g) P$ per un certo $P \in GL(n, \mathbb{K})$. Siano $P^1, \dots, P^n$ le colonne di P^{-1} e consideriamo la base $\mathcal{D} = [P^1]^{-1}_{\mathcal{B}}, \dots, [P^n]^{-1}_{\mathcal{B}}$. Allora $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(id) = P$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(id) = P^{-1}$, e si ha $M_{\mathcal{B}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(id) M_{\mathcal{B}}(g) M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(id) =$
$= M_{\mathcal{D}}(id)$

3) $\Rightarrow$ 1) Sia $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{D}}(g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(id) M_{\mathcal{B}}(g) \cdot$
$\cdot M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(id)$. Scritte $\mathcal{B} = v_1, \dots, v_n$, $\mathcal{D} = w_1, \dots, w_n$, consideriamo $h : v_i \to w_i\ \forall i = 1, \dots, n$ esteso per linearità. Allora si ha: $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(h^{-1} g h)$ ovvero, siccome $M_{\mathcal{B}}$ è isomorfismo $f = h^{-1} g h$ $\square$

Notiamo che, essendo $\sim$ una restrizione della relazione $\sim_{SD}$, il rango è ancora un invariante:

$\forall f, g \in End(V)\quad f \sim g \Rightarrow \operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g$

$\forall A, B \in M(n, \mathbb{K})\quad A \sim B \Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$

Però è ben lontano dall'essere completo. Si ha infatti il seguente:

<u>LEMMA</u> Siano $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. Allora $\lambda I \sim \lambda' I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = \lambda'$. Analogamente $\lambda id \sim \lambda' id \Leftrightarrow \lambda = \lambda'$.

Dim $\Leftarrow$) ovvia

$\Rightarrow$) Sia $P \in GL(n, \mathbb{K})$: $P^{-1}(\lambda I)P = \lambda' I$, allora $\lambda P^{-1}P = \lambda' \Rightarrow \lambda = \lambda'$. Il caso degli endomorfismi è analogo. $\square$

Questo ci dice ad esempio che, se char $\mathbb{K} \neq 2$, $I \not\sim 2I$ nonostante rank I = rank $2I$. Se char $\mathbb{K} = 2$, e $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$ abbiamo comunque un controesempio dato da $I \not\sim \lambda I$, $\lambda \neq 0, 1$. Per $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, produrremo un controesempio più in là dopo aver introdotto degli invarianti più forti. Un altro invariante elementare per questa relazione di equivalenza è l'operatore traccia: $A \sim B \Rightarrow \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$. Infatti se $B = P^{-1}AP$ allora $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(APP^{-1}) = \operatorname{tr} A$. Questo permette di ben definire un operatore traccia anche su End(V): Sia infatti $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(M_{\mathcal{B}}(f))$ per ogni base $\mathcal{B}$ di V. La buona definizione segue dalla scorsa proposizione. In generale ogni invariante matriciale per similitudine diventa un invariante per coniugio di endomorfismi. È questo il caso che studieremo nella prossima sezione.

Il determinante

Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste un'unica applicazione

$$\det : M(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

tale per cui:

1) det è multilineare rispetto alle colonne
2) Se A ha due colonne adiacenti uguali, $\det A = 0$
3) $\det(I) = 1$

Inoltre det rispetta anche le seguenti proprietà:

- Se A ha due colonne uguali, $\det A = 0$
- Se $\tilde{A}$ è ottenuta da A trasponendo due colonne, $\det \tilde{A} = -\det A$
- Se $\bar{A}$ è ottenuta da A con un'operazione di Gauss del terzo tipo, $\det \bar{A} = \det A$

Inoltre l'insieme:

$$\Lambda^n(\mathbb{K}) = \{ d : M(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K} : d \text{ rispetta } 1) \text{ e } 2) \}$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbb{K}$, e $\{\det\}$ è una sua base privilegiata.

<u>Dim</u> Sia $d \in \Lambda^n(\mathbb{K})$. Vediamo che $d(\dots, X, Y, \dots) = -d(\dots, Y, X, \dots)$. Infatti: $0 = d(\dots, X+Y, X+Y, \dots) = d(\dots, X, Y, \dots) + d(\dots, Y, X, \dots)$. Poi $d(\dots, X, \dots, Y, \dots) = -d(\dots, Y, \dots, X, \dots)$: infatti se si ha

$d(\dots, X, \dots, Y, \dots) = (-1)^m d(\dots, X, Y, \dots) =$

$= (-1)^{m+1} d(\dots, Y, X, \dots) = (-1)^{2m+1} d(\dots, Y, \dots, X, \dots) =$

$= -d(\dots, Y, \dots, X, \dots)$. Analogamente $d(\dots, X, \dots, X, \dots) =$

$= (-1)^m d(\dots, X, X, \dots) = 0$. Infine $d(\dots, X+\lambda Y, \dots, Y, \dots) =$

$= d(\dots, X, \dots, Y, \dots) + \lambda d(\dots, Y, \dots, Y, \dots) = d(\dots, X, \dots, Y, \dots)$

Da qui possiamo dedurre che, se A è singolare allora tramite mosse di Gauss è possibile ricondurla a una matrice che abbia una colonna di 0, ovvero $d(A) = 0$.

Altrimenti si ha $d(A) = d\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdots a_n \, d(I)$

Si ha quindi, ponendo $\lambda = d(I)$, che se esiste una funzione det essa è unica, e $d = \lambda \det$. Resta quindi solo da dimostrare l'effettiva esistenza di una tale funzione. Definiamo induttivamente:

$(n=1)$ $D(A) = A \in \mathbb{K}$

$(n>1)$ $D(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{(ij)})$

Dove $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ e $A_{(ij)} = (a_{pq})_{p\neq i, q\neq j} \in$

$\in M(n-1, \mathbb{K})$. Mostriamo che $\forall i = 1, \dots, n$, D rispetta 1), 2), 3) ed è quindi $D = \det$

1) Basta mostrare che per ogni scelta dell'indice i $(-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{(ij)})$ è lineare rispetto alla k-esima colonna; $(-1)^{i+j}$ è un termine che non influisce

Se $k=j$ $D(A_{(ij)})$ è costante e a_{ij} varia in maniera lineare. Se $k\neq j$ a_{ij} è costante e $D(A_{(ij)})$ è multilineare per ipotesi induttiva, quindi lineare rispetto alla k-esima colonna.

2) Sia $A=(\dots,X,X,\dots)$, con le colonne X in posizione k e $k+1$. Se $j\neq k,k+1$ il termine $D(A_{(ij)})$ è nullo per ipotesi induttiva, quindi resta:
$D(A)=a_{ik}D(A_{(ik)})-a_{ik+1}D(A_{(ik+1)})=0$

3) Sviluppando secondo la prima riga abbiamo $D(I_n)=D(I_{n-1})$. Per ipotesi induttiva concludiamo.

Possiamo dunque concludere definendo $\det := D$ $\square$

Mostriamo ora la più importante proprietà del determinante, da cui faremo seguire altre importanti proprietà che ci saranno utili in seguito.

<u>TEOREMA (di Binet)</u>

Date $A,B\in M(n,\mathbb{K})$ si ha $\det AB=\det A\det B$

<u>Dim</u> Osserviamo che $\gamma: X\mapsto \det AX$ si ha $\gamma\in\Lambda^n(\mathbb{K})$

Infatti $\gamma(\dots,C+D,\dots)=\det(\dots,AC+AD,\dots)=$
$=\det(\dots,AC,\dots)+\det(\dots,AD,\dots)=\gamma(\dots,C,\dots)+\gamma(\dots,D,\dots)$

Inoltre $\gamma(\dots,\lambda C,\dots)=\lambda\det(\dots,AC,\dots)=\lambda\gamma(\dots,C,\dots)$

E $\gamma(\dots,C,C,\dots)=\det(\dots,AC,AC,\dots)=0$

Allora $\gamma(B) = \gamma(I)\det(B) = \det(A)\det(B)$ $\square$

Corollari:

- $\det AB = \det BA$
- $\det A \neq 0 \iff A$ è invertibile. In tal caso $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

  Dim se A non è invertibile sappiamo già che $\det A = 0$. Altrimenti: $\det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det I = 1$ $\square$
- $A \sim B \Rightarrow \det A = \det B$

  Dim Sia $A = P^{-1}BP$. Allora $\det A = (\det P)^{-1} \cdot \det P \cdot \det B = \det B$. $\square$

Questa proprietà permette di definire, $\forall f \in End(V)$ $\det f = \det M_B(f)$ per ogni base B, in virtù di quanto visto per la similitudine tra endomorfismi.

Valutazioni polinomiali

Osserviamo che sono naturalmente definite le mappe:

$$val_f : \mathbb{K}[t] \longrightarrow End(V)$$
$$p(t) \longmapsto p(f)$$

che è un omomorfismo di algebre,

$$val_v : End(V) \to V$$
$$f \longmapsto f(v),$$

$$val_{f,v} := val_v \circ val_f$$

che sono omomorfismi di spazi vettoriali.

<u>LEMMA</u> $\ker \mathrm{val}_{f,v}$ è un ideale di $\mathbb{K}[t]$

<u>Dim</u> Siano $p \in \ker \mathrm{val}_{f,v}$, $q \in \mathbb{K}[t]$. Allora
$pq(f)(v) = p(f)q(f)(v) = p(f)(0) = 0$ $\square$

Osserviamo che la mappa val_f ha come immagine un sottoanello commutativo di $\mathrm{End}(V)$, che viene chiamato $\mathbb{K}[f]$, lo spazio delle potenze di f, e come nucleo un ideale di $\mathbb{K}[t]$, detto $I(f)$.

<u>LEMMA</u> Se $f = h^{-1}gh$, e $p \in \mathbb{K}[t]$, $p(f) = h^{-1}p(g)h$

<u>Dim</u> per linearità di h basta mostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$
$f^n = h^{-1}g^n h$, ma questo è vero perché $f^n = h^{-1}ghh^{-1}gh \dots h^{-1}gh = h^{-1}g^n h$. $\square$

Corollario: Se $f \sim g$ $\mathbb{K}[f] \simeq \mathbb{K}[g]$

<u>Dim</u> Si ha infatti che $h(\mathbb{K}[f])h^{-1} = \mathbb{K}[g]$, e
$\ell \mapsto h\ell h^{-1}$ è un isomorfismo $\square$

Corollario: Se $f \sim g$, $I(f) = I(g)$. Questo produce un nuovo invariante per coniugio.

<u>Dim</u> Sia $p \in I(f)$. Allora $p(f) = h^{-1}p(g)h = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow p(g) = 0$. Si conclude per simmetria. $\square$

Siccome $\mathbb{K}[t]$ è un dominio euclideo, esso è in particolare un dominio a ideali principali, e quindi si ha $I(f) = (\mu(t))$ per un certo $\mu \in \mathbb{K}[t]$ che possiamo scegliere monico. Poniamo $\mu_f(t) = \mu(t)$ e chiamiamolo il <u>polinomio minimo</u> di f. Come $I(f)$ anche esso è invariante per coniugio. Come applicazione del polinomio minimo vediamo un controesempio al fatto che rank è un invariante completo per coniugio nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$. Consideriamo le matrici I e J, dove I è l'identità e $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Allora in entrambi i casi si verifica per calcolo diretto che $(t+1)^2 = t^2+1 \in$ $\in I(I), I(J)$, quindi $\mu_I(t) \mid t^2+1$ e $\mu_J(t) \mid t^2+1$. Ma anche $t+1 \in I(I)$, quindi $\mu_I(t) = t+1 \neq t^2+1$, mentre $t+1 \notin I(J)$, quindi $\mu_J(t) = t^2+1$. Possiamo quindi concludere che $I \nsim J$ nonostante rank I = rank J.

Osserviamo che $\mu_0(t) = 1$, e che se $f \neq 0$, $\deg \mu_f(t) > 0$ (se V è a dimensione finita), ovvero $I(J) \neq (0), (1)$. Se infatti si avesse $I(f) = 0$, val_f sarebbe iniettiva e $\mathbb{K}[t] \cong \mathcal{P}(f)$. Ma $\mathbb{K}[t]$ è infinito dimensionale, e questo è assurdo. Studiamo analogamente la mappa $\mathrm{val}_{f,v}$. La sua immagine è un sottospazio di V che si indica con $[v]_f$ e si chiama <u>orbita lineare</u> di V. Inoltre vale il seguente:

LEMMA $[v]_f$ è f-invariante. Inoltre, esso è il più piccolo sottospazio f-invariante che contiene v.

Dim $w \in [v]_f$ è tale che $w = p(f)(v)$ per qualche $p \in \mathbb{K}[t]$. Allora $f(p(f)(v)) = (p(f) \circ f)(v) \in [v]_f$.
Sia ora $W < V$ f-invariante con $v \in W$. Si ha che $v, fv, \dots, f^n v, \dots \in W \Rightarrow \mathrm{Span}\{f^n v, n \in \mathbb{N}\} \subseteq W$
Ma $\mathrm{Span}\{f^n v, n \in \mathbb{N}\} = [v]_f$ $\square$

Un sottospazio W per cui valga $W = [v]_f$ per qualche $v \in W$ è detto sottospazio ciclico, e un vettore v per cui valga $V = [v]_f$ è detto vettore ciclico per f. Lo studio dell'esistenza di vettori ciclici sarà un tema centrale nei prossimi capitoli.

Analogamente, definiamo $I(f,v) = \ker \mathrm{val}_{f,v}$, e definiamo $\mu_{f,v}(t)$ il suo generatore monico, detto il polinomio minimo locale di f in v. Si ha che

LEMMA • $\bigcap_{v \in V} I(f,v) = I(f)$

• $\underset{v \in V}{\mathrm{mcm}}\, \mu_{f,v} = \mu_f$

Dim il primo punto segue dalla definizione. Osserviamo poi che ogni $\mu_{f,v} \mid \mu_f$, quindi $\underset{v \in V}{\mathrm{mcm}}\, \mu_{f,v} \mid \mu_f$.
Se inoltre fosse $\mu_f = q \cdot \underset{v \in V}{\mathrm{mcm}}\, \mu_f$, con q non invertibile, si avrebbe che $\underset{v \in V}{\mathrm{mcm}}\, \mu_{f,v} \in I(f)$ ↯ $\square$

Questo lemma suggerisce una definizione:
Sia $W < V$ sottospazio. Allora $\mu_{f,W} := \operatorname{mcm}_{v \in W} \mu_{f,v}$.
Se W è f-invariante si ha $\mu_{f|W} = \mu_{f,W}$.
Inoltre, $\forall v \in V$ $\mu_{f,v} = \mu_{f,\operatorname{span}(v)}$.
Vediamo ora la seguente:
<u>PROPOSIZIONE</u> Se $W_1, W_2 < V$ sono f-invarianti,
si ha $\mu_{f,W_1+W_2} = \operatorname{mcm} \mu_{f,W_1}, \mu_{f,W_2}$
<u>Dim</u> Poniamo $p = \mu_{f,W_1+W_2}$, $q = \operatorname{mcm} \mu_{f,W_1}, \mu_{f,W_2}$
Mostriamo che $p | q$. Si ha che $\exists r, s \in \mathbb{K}[t]$:
$q = r \mu_{f,W_1} = s \mu_{f,W_2}$. Sia $w \in W_1 + W_2$. Allora
$\exists w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 : w = w_1 + w_2$. Si ha quindi che
$q(f)(w) = q(f)(w_1) + q(f)(w_2) = r\mu_{f,W_1}(f)(w_1) + s\mu_{f,W_2}(f)$
$(w_2) = 0 + 0 = 0$, ovvero $q \in I(f, W_1 + W_2)$. Viceversa
siano $\mu_{f,W_1} = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $\mu_{f,W_2} = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, con
i p_i primi $\forall i = 1, \ldots, k$. Allora $q = p_1^{\max \alpha_1 \beta_1} \cdots$
$\cdots p_k^{\max \alpha_k \beta_k}$. Vediamo che $\forall i = 1, \ldots, k$ $p_i^{\max \alpha_i \beta_i} | p$.
Infatti $\exists w_1 \in W_1 : p_i^{\alpha_i} | \mu_{f,w_1}$, $\exists w_2 \in W_2 :$
$: p_i^{\beta_i} | \mu_{f,w_2}$. Facendo la scelta opportuna si conclude $\square$
Abbiamo visto in che modo associare ad un sottospazio
un invariante polinomiale che descriva il comportamen-
to di f su di esso. Facciamo ora il processo inverso.

Sia $p \in \mathbb{K}[t]$. Definiamo $V_p = V_p(f) = \ker p(f)$, detto lo spazio nullo di p rispetto a f. Vediamo qualche proprietà degli spazi nulli:

- Ogni V_p è f-invariante

  Dim Sia $v \in V_p$. Allora $p(f)(v) = 0$. Si ha che $p(f)(f(v)) = f(p(f)(v)) = f(0) = 0 \Rightarrow f(v) \in V_p$ □

- $V_p = V \ \forall p \in I(f)$. In particolare $V_0 = V$, $V_{\mu_f} = V$
- $V_p = \{v \in V : p \in I(f,v)\}$
- $p \mid q \Rightarrow V_p \subseteq V_q$
- $V_p = V_{MCD\, \mu_f, p}$

  Dim $\boxed{\supseteq}$ Ovvia dal punto precedente

  $\boxed{\subseteq}$ Sia $v \in V_p$. Allora $\mu_{f,v} \mid p$, $\mu_{f,v} \mid \mu_f \Rightarrow$
  $\Rightarrow \mu_{f,v} \mid MCD\, p, \mu_f \Rightarrow v \in V_{MCD\, p, \mu_f}$ □

- $V_1 = 0$, $V_t = \ker f$
- $V_p = 0 \iff MCD\, \mu_f, p = 1$

Sarà usato in diverse occasioni il seguente:

TEOREMA (Decomposizione primaria debole)

Se $MCD\, p, q = 1$, allora $V_{pq} = V_p \oplus V_q$

Dim Sia $v \in V_p \cap V_q$. Per il Lemma di Bezout $\exists a, b \in \mathbb{K}[t]$: $ap + bq = 1 \Rightarrow ap(f)(v) + bq(f)(v) = v$ $\Rightarrow v = 0$. Sia ora $W = V_p \oplus V_q$. Mostriamo che $W \subseteq V_{pq}$.

Sia $w = w_1 + w_2 \in \bar{W}$, con $w_1 \in \bar{V}_p$, $w_2 \in \bar{V}_q$. Allora $pq(f)(w) = pq(f)(w_1) + pq(f)(w_2) = 0$. Sia ora $z \in \bar{V}_{pq}$. Scriviamo $z = a\,p(f)(z) + b\,q(f)(z)$. Ma $a\,p(f)(z) \in$ $\in \bar{V}_q$ perché $a\,pq(f)(z) = 0$, e simmetricamente $b\,p(f)(z)$ $\in \bar{V}_p$. Quindi $\bar{V}_{pq} = \bar{V}_p \oplus \bar{V}_q$. $\square$

<u>Corollario</u> Inducendo su $m \geq 2$ si ha che $p_1, \dots, p_m$ sono a due a due coprimi $\Rightarrow \bar{V}_{p_1 \dots p_m} = \bigoplus_{i=1}^{m} \bar{V}_{p_i}$

<u>Corollario</u> Se $\mu_f = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, con i p_i primi, abbiamo la decomposizione $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_{p_i^{\alpha_i}}$, in somma diretta di sottospazi f-invarianti. Questa decomposizione verrà analizzata meglio in seguito.

<u>LEMMA</u> Sia $v \in \bar{V} \setminus \{0\}$ e $p \in \mathbb{K}[t]$, $p \mid \mu_{f,v}$. Allora $p \cdot \mu_{f, p(f)(v)} = \mu_{f,v}$

<u>Dim</u> Sia $\mu_{f,v} = p \cdot q$. Mostriamo che $\mu_{f,p(f)(v)} \mid q$. Infatti $q\,p(f)(v) = \mu_{f,v}(f)(v) = 0$. Supponiamo ora $q = r \cdot \mu_{f,p(f)(v)}$. Allora $p \cdot \mu_{f,p(f)(v)}(f)(v) = 0$, ovvero $p \cdot \mu_{f,p(f)(v)} \in I(f,v)$, ovvero r è invertibile $\square$

Concludiamo la sezione con il seguente teorema, di importanza fondamentale nel seguito.

<u>TEOREMA</u> (di ottenimento locale)

$\exists v \in V : \mu_{f,v} = \mu_f$. Inoltre, $\forall p \mid \mu_f \ \exists w \in \bar{V}$:

$: \mu_{f,w} = p$.

<u>Dim</u> Sia $\mu_f = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, con i p_i primi.

Siccome $\mu_f = \operatorname{mcm}_{v \in V} \mu_{f,v}$, si ha che $\forall i = 1, \dots k \; \exists w_i \in V : p_i^{\alpha_i} \mid \mu_{f,v}$. Sia ora $q_i = \mu_f / p_i^{\alpha_i}$ e sia $v_i = q_i(f)(w_i)$. Allora per il lemma visto $\mu_{f,v_i} = p_i^{\alpha_i}$.

Sia $v = v_1 + \dots + v_k$. Vogliamo dimostrare che $\mu_{f,v} = \mu_f$, ovvero che $I(f,v) \subseteq I(f)$. Sia quindi $q \in I(f,v)$.

Osserviamo che per decomposizione primaria gli spazi $V_{p_1^{\alpha_1}}, \dots, V_{p_k^{\alpha_k}}$ sono linearmente indipendenti e f-invarianti, quindi $q(f)$-invarianti. Si ha che quindi $q(f)(v_1), \dots, q(f)(v_k)$ sono linearmente indipendenti. Dalla relazione $0 = q(f)(v) = q(f)(v_1) + \dots + q(f)(v_k)$ abbiamo che $q(f)(v_1) = \dots = q(f)(v_k) = 0$, ovvero $p_i^{\alpha_i} \mid q \; \forall i = 1, \dots, k$. Ma i $p_i^{\alpha_i}$ sono a due a due coprimi, quindi $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \mid q$, ovvero $q \in I(f)$. Sia infine $p \mid \mu_f$. Allora per il lemma precedente $v_p = \mu_f/p\,(v)$ è tale che $\mu_{f,v_p} = p$ $\square$

Fattori lineari del polinomio minimo

Sia $p \in \mathbb{K}[t]$ monico di grado 1. Allora $p(t) = t - \lambda$ per un certo $\lambda \in \mathbb{K}$. In questo caso poniamo $V_\lambda(f) := V_p(f)$. Se $V_\lambda = V_\lambda(f) \neq 0$ diciamo che V_λ è l'<u>autospazio</u> di f relativo all'<u>autovalore</u> λ.

$v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ si chiama <u>autovettore</u> di f relativo all'autovalore λ e l'insieme degli autovalori di f si indica con $Sp(f)$ e si chiama <u>spettro di autovalori</u> di f. Vediamo cosa significano nella pratica queste affermazioni: v è autovettore di f rispetto a $\lambda \Leftrightarrow fv = \lambda v$, ovvero se $\operatorname{span} v$ è f-invariante. Osserviamo poi che $\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \lambda$ è radice in $\mathbb{K}$ di μ_f, come segue dal teorema di Ruffini e da quanto visto sulle proprietà degli spazi V_p. Si ha in particolare:

- $V_0 = \ker f$, quindi $0 \in Sp(f) \Leftrightarrow f$ è singolare $\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow t \mid \mu_f(t)$
- $V_1 = \operatorname{Fix} f$, quindi $1 \in Sp(f) \Leftrightarrow f$ ha un punto fisso.

Conosciamo quindi già un polinomio le cui radici in $\mathbb{K}$ sono tutti e soli gli autovalori, ovvero μ_f, ma non conosciamo un procedimento algoritmico per calcolarlo. Osserviamo però che $\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow$ $f - \lambda id$ è singolare $\Leftrightarrow \det(f - \lambda id) = 0$. Per le proprietà del determinante, abbiamo che $\chi_f(t) :=$ $= \det(f - t\,id) \in \mathbb{K}[t]$ e $\deg \chi_f(t) = n$. $\chi_f(t)$ così definito è detto il <u>polinomio caratteristico</u> di f, e ha la proprietà che le sue radici sono tutti e soli gli autovalori di f. Ci chiediamo dunque che relazione esista tra χ_f e μ_f. Sicuramente non sono uguali, visto che $\chi_{id} = (t-1)^n \neq (t-1) = \mu_{id}$.

Vale però il seguente:

<u>TEOREMA</u> (Hamilton - Cayley)

$\chi_f \in I(f)$, ovvero $\mu_f \mid \chi_f$, ovvero $\chi_f(f) \equiv 0$.

Prima di poter dimostrare questo teorema servono però alcuni fatti su una classe particolare di endomorfismi, caratterizzata dalla seguente:

<u>PROPOSIZIONE</u>

I seguenti fatti sono tra loro equivalenti:

1) $\exists \mathcal{B}$ base di V : $M_{\mathcal{B}}(f)$ è triangolare superiore

2) $\exists \mathcal{B} = v_1, \dots, v_n$ base di V : $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ è f-invariante $\forall k = 1, \dots, n$

3) $\chi_f(t)$ si spezza in fattori lineari

Se f soddisfa queste condizioni equivalenti è detto <u>triangolabile</u>.

<u>Dim</u> 1) $\Leftrightarrow$ 2) Sia $\mathcal{B} = v_1, \dots, v_n$. $\forall k = 1, \dots, n$ sia $v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$. Per la forma di $M_{\mathcal{B}}(f)$ sappiamo che $f(v) = a_1 f(v_1) + \dots + a_k f(v_k) \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$

il viceversa è analogo.

1) $\Rightarrow$ 3) Ovvio perché $\det(f - t\,id) = \det(M_B(f) - tI)$ che è ancora triangolare superiore.

3) $\Rightarrow$ 1) Per induzione su $n := \dim V \geq 1$, con il caso $n = 1$ ovvio. Supponiamo ora la tesi vera per ogni $g \in End(W)$, con $\dim W = n-1$. Sappiamo che f ha un autovalore μ_1 relativo ad un autovettore v_1. Completiamo v_1 a base $D = v_1, \dots, v_n$ di V e sia $W = Span\, v_2, \dots, v_n$. Osserviamo che:

$$M_D(f) = \begin{pmatrix} \mu_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

e che $B = M_{v_2, \dots, v_n}(\pi_W \circ f|_W)$. Si ha che $\chi_f(t) = (t - \mu_1)\chi_B(t)$, quindi $\chi_B(t)$ è completamente fattorizzabile e posso applicare l'ipotesi induttiva. $\square$

Dato $\lambda \in Sp(f)$ definisco la sua <u>molteplicità algebrica</u> $m.a.(\lambda)$ come la molteplicità che ha come radice del polinomio caratteristico, e la sua <u>molteplicità geometrica</u> $m.g.(\lambda) = \dim V_\lambda(f)$. Osserviamo che certamente vale $m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$ perché $V_\lambda \subseteq \ker(f - \lambda\,id)^{m.a.(\lambda)}$. Nel caso f sia triangolabile abbiamo poi il seguente:

LEMMA Se $M_B(f)$ è triangolare gli elementi sulla diagonale sono tutti e soli gli autovalori di f, ripetuti ciascuno con la sua molteplicità algebrica.

Dim Segue dal fatto che $\chi_f(t) = \chi_{M_B(f)}(t)$ e da come si calcola il determinante di una matrice triangolare. $\square$

Passiamo ora alla dimostrazione di Hamilton-Cayley:

Dim Supponiamo in primo luogo f sia triangolabile, e rappresentiamola con una matrice $A = M_B(f)$ triangolare. In particolare sia $\chi_f(t) = (t-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (t-\lambda_k)^{\alpha_k}$, sia $B = v_1, \dots, v_n$ e

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

Dove $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} = Sp(f)$, ripetuti con molteplicità.

Basta verificare che $\chi_f(f)(v_i) = 0 \ \forall i = 1, \dots, n$

Osserviamo che $(f - \lambda_1 id) v_1 = 0$, e $\forall i = 2, \dots, n$, $(f - \mu_i id) v_i \in Span\ v_1, \dots, v_{i-1}$. Concludiamo per induzione. Nel caso f non sia triangolabile, consideriamo l'estensione di campi $\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{F}$, dove $\mathbb{F}$ è il campo di spezzamento di $\chi_f(t)$. Possiamo quindi pensare f come un endomorfismo su uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$, che avrà lo stesso polinomio caratteristico perché sarà rappresentato dalla stessa matrice. In questo caso sarà però triangolabile. Si conclude allora usando il caso precedente. $\square$

Vediamo come corollario il seguente:

<u>FATTO</u> Sono equivalenti:

1) f è triangolabile

2) μ_f si spezza in fattori lineari.

<u>Dim</u> 1) $\Rightarrow$ 2) segue da Hamilton Cayley.

2) $\Rightarrow$ 1) Procediamo per induzione su $n = \dim V \geq 1$, con il caso $n=1$ ovvio. Supponiamo la tesi vera per spazi vettoriali di dimensione minore a n. Siccome μ_f si spezza in fattori lineari, f ha un autovettore, sia esso λ. Allora $\ker(f-\lambda id) \neq 0$, ovvero $\operatorname{Im}(f-\lambda id) \neq V$. Ma $\operatorname{Im}(f-\lambda id)$ è un sottospazio f-invariante e $\mu_{f|} \mid \mu_f$. Quindi $f|$ è triangolabile per ipotesi induttiva, e ammette una base a bandiera (i.e. una in cui la matrice è triangolare superiore), sia essa $v_1, \dots, v_k$. Estendiamola ad una base $v_1, \dots, v_n$ di V e notiamo che è ancora a bandiera: $\forall i = k+1, \dots, n$ $f(v_i) = (f-\lambda id)v_i + \lambda v_i \in$
$\in \operatorname{Im}(f-\lambda id) + \operatorname{Span} v_i \subseteq \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_i)$. $\square$

In una prossima sezione vedremo come questo fatto dipenderà da un fatto più forte riguardo alla relazione esistente tra polinomio minimo e polinomio caratteristico. Prima di concludere questa sezione vediamo un po' di fatti su una classe particolare di endomorfismi triangolabili, caratterizzata dalla seguente:

PROPOSIZIONE Sono equivalenti:

1) f ammette una base di autovettori
2) $\exists \mathcal{B}$ base di V ; $M_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale
3) V si scrive come somma diretta dei suoi autospazi
4) μ_f si spezza in fattori lineari distinti.
5) $\forall \lambda \in Sp(f)$, $m.a.(\lambda) = m.g(\lambda)$

Se valgono queste condizioni f si dice diagonalizzabile

Osserva che f diagonalizzabile $\Rightarrow$ f triangolabile perché una base di autovettori è in particolare a bandiera.

Dim 1) $\Leftrightarrow$ 2) è ovvio per definizione di autovettore

1) $\Rightarrow$ 3) Segue adattando la base di autovettori agli autospazi, viceversa 3) $\Rightarrow$ 1) segue prendendo una base di ogni autospazio e facendone l'unione

2) $\Rightarrow$ 4) si verifica facilmente a mano.

4) $\Rightarrow$ 3) segue dalla decomposizione primaria.

2) $\Rightarrow$ 5) si verifica a mano calcolando $\chi_f(t)$

5) $\Rightarrow$ 3) segue dalla decomposizione primaria. $\square$

Osserva infine che se f è triangolabile valgono:

$$\det f = \prod_{\lambda \in Sp(f)} \lambda^{ma(\lambda)} \qquad tr f = \sum_{\lambda \in Sp(f)} m.a.(\lambda)\, \lambda$$

Endomorfismi ciclici

Come corollario del teorema di Hamilton-Cayley, abbiamo che $\deg \mu_f \leq \deg \chi_f = n$. Un problema naturale a questo punto è vedere se e quando si ha $\deg \mu_f = n$. In questa sezione analizzeremo questo problema e vedremo che è equivalente ad un altro.

Diciamo che f è un endomorfismo ciclico se $\exists v \in V$: $V = [v]_f$. In tal caso v viene detto vettore ciclico, e i vettori $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ formano una base di V, detta base ciclica. Calcoliamo la matrice associata ad un endomorfismo ciclico in una sua base ciclica:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = M$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Osserviamo ora che il polinomio $p(t) = t^n - \alpha_{n-1}t^{n-1} - \dots - \alpha_0 \in I(M)$. Infatti detti $v_1 = v$, $v_2 = f(v)$, $\dots$, $v_n = f^{n-1}(v)$ si ha che

$p(f)(v_1) = f^n(v) - f^n(v) = 0$

$p(f)(v_2) = f(p(f)(v_1)) = 0$

$\vdots$

$p(f)(v_n) = f^{n-1}(p(f)(v_1)) = 0$

Inoltre, osserviamo che $\deg \mu_{f,v} = n$, perché se $q \in I(f,v)$ con $\deg q = d < n$ e $q(t) = t^d + \beta_{d-1} t^{d-1} + \ldots + \beta_0$, si avrebbe $f^d(v) = -\beta_{d-1} f^{d-1}(v) - \ldots - \beta_0 v$, contro l'ipotesi che $v, \ldots, f^d(v)$ sono linearmente indipendenti.
Quindi abbiamo che $\mu_{f,v} \mid p$, ma $\deg \mu_{f,v} = \deg p$, ovvero $\mu_{f,v} = p$. Allora $\mu_f = \mu_{f,v} = p$.
Quindi per Hamilton-Cayley si ha che $\chi_M(t) = (-1)^n \cdot t^n - a_{n-1} t^{n-1} - \ldots - \alpha_0$. Vediamo cosa abbiamo ottenuto:
Per ogni polinomio monico $p \in \mathbb{K}[t]$ esiste una matrice M, detta la matrice compagna di p, tale per cui $\mu_M(t) = p(t)$, $\chi_M(t) = (-1)^n p(t)$, ovvero, scelta una base $v_1, \ldots, v_n$ di V, esiste un endomorfismo f, rappresentato in quella base dalla matrice compagna, per cui valga $\mu_f(t) = (-1)^n \chi_f(t) = p(t)$. Inoltre tale endomorfismo è ciclico e la base ciclica è generata da v_1, e vale $\mu_{f,v_1} = \mu_f$. Viceversa dato un endomorfismo ciclico, esso si rappresenta in una base ciclica con una matrice compagna

relativa al suo polinomio minimo, che è uguale al polinomio caratteristico.

<u>Corollario</u> $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso $\Leftrightarrow$ Ogni endomorfismo su ogni spazio vettoriale finito-dimensionale su $\mathbb{K}$ è triangolabile.

<u>Dim</u> $\Rightarrow$) Sia $f \in End(V)$. Allora χ_f si fattorizza completamente.

$\Leftarrow$) Sia $p \in \mathbb{K}[t]$ irriducibile e sia M la sua matrice compagna. Allora $\chi_M(t) = (-1)^n p(t)$, che è irriducibile, e quindi M non è triangolabile. $\square$

Facciamo ora la costruzione inversa e completiamo la dimostrazione del seguente:

<u>TEOREMA</u> (sulle basi cicliche) Sono equivalenti:

1) f ammette base ciclica

2) $\deg \mu_f = \deg \chi_f$

<u>Dim</u> 1) $\Rightarrow$ 2) già vista (calcolo del polinomio minimo della matrice compagna)

2) $\Rightarrow$ 1) Sia $v \in V : \mu_{f,v} = \mu_f$ (la sua esistenza ci è garantita da un precedente teorema). Osserviamo che $[v]_f = V$, perché se ci fosse $d < n : f^d(v) = \alpha_{d-1} f^{d-1}(v) + \ldots + \alpha_0 v$ si avrebbe $t^d - \alpha_{d-1} t^{d-1} - \ldots - \alpha_0 \in I(f, v)$ $\square$

Concludiamo questa sezione con un'applicazione di questo teorema:

PROPOSIZIONE Se $p \mid \chi_f$ primo, allora $p \mid \mu_f$

Dim Procediamo per induzione su $n = \dim V \geq 1$.
Il caso $n=1$ è banale. Supponiamo la tesi vera per spazi di dimensione $< n$. Sia $v \in V \setminus \{0\}$, $W = [v]_f$, U complementare di W. Scriviamo la matrice associata a f in una base adattata alla decomposizione $V = W \oplus U$.

$$m(f) = \left(\begin{array}{c|c} m(f_{|W}) & \star \\ \hline 0 & m(g) \end{array}\right)$$

Dove $g = \pi_U \circ f_{|U}$. Allora $\chi_f = \chi_{f|W} \cdot \chi_g$. Distinguiamo due casi: se $p \mid \chi_{f|W}$, si ha che $\chi_{f|W} = \mu_{f|W}$, e quindi $p \mid \mu_{f|W} \mid \mu_f$. Altrimenti $p \mid \chi_g$. Per ipotesi induttiva, dunque, $p \mid \mu_g = \mu_{f,U} \mid \mu_f$ $\square$

La decomposizione di Fitting

Definiamo una decomposizione di Fitting di V rispetto a f una scrittura $V = F_0 \oplus F_1$, dove F_0, F_1 sono f-invarianti e $f_{|F_0}$ è nilpotente e $f_{|F_1}$ è invertibile.
Dimostreremo in questa sezione unicità ed esistenza costruttiva di una tale decomposizione.

↳

Consideriamo la successione crescente:

$$0 = \ker f^0 \subseteq \ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \dots \subseteq \ker f^k \subseteq \dots$$

cui è associata una successione di dimensioni

$$\downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad \dim$$

$$0 = d_0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_k \leq \dots$$

e la successione decrescente:

$$\dots \subseteq \operatorname{Im} f^k \subseteq \dots \subseteq \operatorname{Im} f^2 \subseteq \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} f^0 = V$$

$$\dim \qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\dots \leq e_k \leq \dots \leq e_2 \leq e_1 \leq e_0 = n$$

Dove si ha $\forall j \in \mathbb{N}$, $e_j = n - d_j$, e quindi, siccome $e_j \geq 0$, $d_j \leq n$. Si ha quindi che in corrispondenza di un qualche $k_0 \in \mathbb{N}$ la successione dei nuclei si stabilizza, ma vale di più:

<u>LEMMA</u> $\ker f^k = \ker f^{k+1} \Rightarrow \ker f^{k+1} = \ker f^{k+2}$, ovvero la successione si stabilizza appena non è più strettamente crescente.

<u>Dim</u> L'inclusione $\ker f^{k+1} \subseteq \ker f^{k+2}$ è ovvia. Sia ora $v \in \ker f^{k+2}$. Allora $0 = f^{k+2}v = f^{k+1}(fv)$, ovvero $fv \in \ker f^{k+1} = \ker f^k \Rightarrow f^k(fv) = f^{k+1}v = 0$ $\square$

Per la relazione $e_j = n - d_j$, la successione delle immagini si stabilizza anch'ella esattamente in corrispondente di k_0.

<u>TEOREMA</u> (della decomposizione di Fitting)

$V = \ker f^{k_0} \oplus \operatorname{Im} f^{k_0}$ esiste ed è una decomposizione di Fitting. Inoltre per ogni altra decomposizione di Fitting $V = F_0 \oplus F_1$ si ha $F_0 = \ker f^{k_0}$, $F_1 = \operatorname{Im} f^{k_0}$

<u>Dim</u> Sappiamo già che $\ker f^{k_0}$ e $\operatorname{Im} f^{k_0}$ sono f-invarianti. Mostriamo che sono in somma diretta. Se $v \in \ker f^{k_0} \cap \operatorname{Im} f^{k_0}$, allora $\exists w \in V : v = f^{k_0}(w)$. Però $f^{k_0}(v) = f^{k_0+1}(w) = 0$, ovvero $w \in \ker f^{k_0+1} = \ker f^{k_0}$, ovvero $f^{k_0}(w) = v = 0$. Si ha poi chiaramente che $f|_{\ker f^{k_0}}$ è nilpotente con indice di nilpotenza k_0, e inoltre $f|_{\operatorname{Im} f^{k_0}}$ è invertibile perché $\operatorname{Im} f^{k_0} = \operatorname{Im} f^{k_0+1}$. Sia ora $V = F_0 \oplus F_1$ una decomposizione di Fitting. Se $f|_{F_0}$ è nilpotente con indice di nilpotenza k vediamo che $F_0 = \ker f^k$. Sia $v \in F_0$. Allora $f^k v = 0$. Sia ora $v \in \ker f^k$. Scriviamo $v = v_0 + v_1$, con $v_0 \in F_0$, $v_1 \in F_1$. Allora $f^k(v) = f^k(v_1) = 0 \iff v_1 = 0$ (perché $f|_{F_1}$ è invertibile) $\iff v \in F_0$. Vediamo ora che $F_1 = \operatorname{Im} f^k$. Sia $v \in F_1$. Allora posto $w = f^{-k}(v)$ si ha che $v = f^k(w)$. Sia ora $v \in \operatorname{Im} f^k$. Allora $\exists w \in V$:

$v = f^k(w)$. Sia $w = w_0 + w_1$, con $w_0 \in F_0$, $w_1 \in F_1$. Allora $v = f^k(w_1) \in F_1$ perché F_1 è f-invariante. $\square$

Forma normale di Jordan nilpotente

Da ora e per questa sezione sia $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotente. Consideriamo la successione delle dimensioni dei nuclei di f, definita come sopra: $0 = d_0, d_1, \dots, d_r = n$, dove $\forall j = 1, \dots, r$, $d_j = \dim \ker f^j$. Sappiamo che si stabilizza a $d_r = n$ perché per l'unicità della decomposizione di Fitting $V = F_0 = \ker f^r$. Si ha quindi $\chi_f(t) = (-1)^n t^n$, $\mu_f(t) = t^r$. Studiamo prima alcuni casi particolari:

Se $r = 1$ abbiamo il caso diagonalizzabile, ovvero quello per cui $f = 0$. Se $n = r$, invece, sappiamo che esiste un vettore ciclico v. In una base ciclica $\mathcal{B}$, f sarà rappresentato dalla matrice compagna:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per rendere più esplicito il fatto che f è triangolabile, effettuiamo un cambio di base invertendo l'ordine dei vettori. Abbiamo quindi che $J(0,n) := M^T$ è una matrice triangolare superiore detta <u>blocco di Jordan di taglia n relativo all'autovalore 0</u>.

$$J(0,n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siamo pronti per enunciare e dimostrare costruttivamente il seguente:

<u>TEOREMA</u> (Forma normale di Jordan)

Esiste una base $\mathcal{B}$ di V per cui f si scrive come somma diretta di blocchi di Jordan relativi all'autovalore 0. Questa base viene detta una base di Jordan, e la matrice associata viene detta una forma di Jordan di f. Date due forme di Jordan di f, esse differiscono tra loro solo per una permutazione dei blocchi. Inoltre, una forma di Jordan di f è interamente determinata dalla successione $d_0 < \ldots < d_r$ dei nuclei, che risulta quindi essere un invariante completo per coniugio nel caso particolare in cui f è nilpotente.

$\longrightarrow$

<u>Dim</u> Consideriamo la successione $D_0 \subseteq \ldots \subseteq D_r$, dove $\forall j = 0, \ldots, r$, $D_j = \mathrm{Ker}\, f^j$. Consideriamo un frammento di tre termini $D_j \subseteq D_{j+1} \subseteq D_{j+2}$.
Sia $v_1, \ldots, v_k$ base di D_{j+1} ed estendiamola a base $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_s$ di D_{j+2}. Osserviamo che $f(u_1), \ldots, f(u_s) \in D_{j+1}$ e sono linearmente indipendenti.
Se infatti $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{K}$, con $a_1 f(u_1) + \ldots + a_s f(u_s) = 0$ allora $a_1 u_1 + \ldots + a_s u_s \in \mathrm{Ker}\, f \subseteq D_{j+1}$. Ma $a_1 u_1 + \ldots + a_s u_s$ sta in un complementare di D_{j+1}, quindi $a_1 u_1 + \ldots + a_s u_s = 0 \Rightarrow a_1 = \ldots = a_s = 0$ perché $u_1, \ldots, u_s$ sono linearmente indipendenti. Vediamo ora che $f(u_1), \ldots, f(u_s) \notin D_j$. Se infatti lo fossero si avrebbe $u_1, \ldots, u_s \in D_{j+1}$.
Allora, sia detto $D_{j+1} \oplus \bar{U} = D_j$, con $f(u_1), \ldots, f(u_s) \in \bar{U}$, estendiamo $f(u_1), \ldots, f(u_s)$ ad una base $f(u_1), \ldots, f(u_s), u_{s+1}, \ldots, u_q$ di $\bar{U}$, e iteriamo fin quando necessario il procedimento. Iniziando con $j = r-2$, alla fine otteniamo una base di $\bar{V}$ disposta in una tabella a scalini come vista nella prossima pagina.
Una siffatta tabella è detta <u>diagramma di Young</u>.
Verifichiamo prima che questa è effettivamente una base di Jordan. Infatti ogni colonna del diagramma

$$\begin{matrix} v_1 & \dots & v_s & & & \\ f(v_1) & \dots & f(v_s) & v_{s+1} & \dots & v_q \\ \vdots & & & & \ddots & \\ f^{r-1}(v_1) & \dots & f^{r-1}(v_s) & \dots & v_l & \dots & v_i \end{matrix}$$

di Young genera un sottospazio ciclico, e quindi V si scrive come somma diretta delle sue colonne, ovvero di sottospazi ciclici. Vediamo ora come si ricava il diagramma di Young (ovvero la forma di Jordan) data la successione $d_0 < \dots < d_r$:
Gli elementi della riga più in basso formano una base di $\ker f$, mentre gli elementi delle j righe più in basso formano una base di $\ker f^j$, quindi d_j è il numero di elementi nelle j righe più in basso (Osserviamo come la forma a scalini del diagramma ci fornisce la disuguaglianza $d_{j+1} - d_j \geqslant d_{j+2} - d_j \quad \forall j = 1, \dots, r-1$). $\square$

Vediamo come esempio le possibili forme normali di Jordan nilpotenti per $n = 2, 3, 4$.

$(n=2)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} * \\ * \end{matrix}$ $\qquad\qquad$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $* \; *$

$d_j = (1, 2)$ $\qquad\qquad$ $d_j = (2, 2)$

$(n=3)$ $\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l}\star\\\star\\\star\end{array}$ $\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{ll}\star&\\\star&\star\end{array}$ $\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$ $\star\ \star\ \star$

$d_i = (1,2,3)$ $d_i = (2,3,3)$ $d_i=(3,3,3)$

$(n=4)$ $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l}\star\\\star\\\star\\\star\end{array}$ $\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$ $\star\ \star\ \star\ \star$

$d_i = (1,2,3,4)$ $d_i=(4,4,4,4)$

$\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{ll}\star&\star\\\star&\star\end{array}$ $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{ll}\star&\\\star&\\\star&\star\end{array}$ $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{lll}\star&&\\\star&\star&\star\end{array}$

$d_i=(2,4,4,4)$ $d_i=(2,3,4,4)$ $d_i=(3,4,4,4)$

Forma normale di Jordan triangolabile

Sia $f \in End(V)$, non necessariamente nilpotente, non necessariamente triangolabile. Se si ha $\mu_f = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, con p_i primo e $\alpha_i \geq 1$ $\forall i = 1, \dots, n$, abbiamo visto che si ha anche $\chi_f = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, con $\beta_1 + \dots + \beta_k = n = \dim V$ e $\forall i = 1, \dots n$, $\alpha_i \leq \beta_i$. Sappiamo per la forma debole della decomposizione primaria che esistono decomposizioni $V = V_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \dots \oplus V_{p_k^{\alpha_k}} = V_{p_1^{\beta_1}} \oplus \dots \oplus V_{p_k^{\beta_k}}$. Vediamo però che:

TEOREMA (Decomposizione primaria forte)
Queste due decomposizioni sono la stessa, ovvero $\forall i = 1, \dots, k$, $V_{p_i^{\alpha_i}} = V_{p_i^{\beta_i}}$. Si pone quindi $V'_{p_i} := V_{p_i^{\alpha_i}}$.
Nel caso $p_i = (t-\lambda)$ sia un fattore lineare si pone $V'_\lambda = V_{(t-\lambda)^{\alpha_i}}$, che viene detto autospazio generalizzato.
Corollario: f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ V è la somma diretta dei suoi autospazi generalizzati.
Dim Sappiamo già che $V_{p_i^{\alpha_i}} \subseteq V_{p_i^{\beta_i}}$. Supponiamo ora $\exists i = 1, \dots, k$: $\dim V_{p_i^{\beta_i}} > \dim V_{p_i^{\alpha_i}}$. Allora $\dim V = \sum_{i=1}^{k} \dim V_{p_i^{\alpha_i}} < \sum_{i=1}^{k} \dim V_{p_i^{\beta_i}} = \dim V$, assurdo $\square$
Sia da ora f triangolabile e sia $V = V'_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V'_{\lambda_k}$.
Chiamiamo $f_i = f|_{V'_{\lambda_i}}$. Si ha allora $\mu_{f_i} = (t-\lambda_i)^{\alpha_i}$, $\chi_{f_i} = (t-\lambda_i)^{\beta_i}$. Osserviamo che, posto $g_i := f_i - \lambda_i id$, si ha che $f_i = g_i + \lambda_i id$ e g_i è nilpotente, con $\mu_{g_i}(t) = (t)^{\alpha_i}$, $\chi_{g_i}(t) = (t)^{\beta_i}$. Possiamo quindi considerare una base di Jordan $\mathcal{B}_i$ per g_i. Nel caso particolare in cui $\alpha_i = \beta_i$ si ha $M_{\mathcal{B}_i}(f_i) = J(0, \beta_i) + \lambda_i I_{\beta_i} =: J(\lambda_i, \beta_i)$, detto il blocco di Jordan di taglia β_i relativo all'autovalore λ_i. Altrimenti, $M_{\mathcal{B}_i}(f_i) = M_{\mathcal{B}_i}(g_i) + \lambda I_{\beta_i}$, dove $M_{\mathcal{B}_i}(g_i)$ è in forma di Jordan, quindi $M_{\mathcal{B}_i}(f_i)$ è somma diretta di

blocchi del tipo $J(\lambda_i, q)$. Si ha quindi:

<u>TEOREMA</u> (Forma normale di Jordan, caso triangolabile)
Esiste una base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ di V, detta base di Jordan, per cui $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ è somma diretta di blocchi di Jordan relativi ai suoi autovalori.
Questa forma è inoltre unicamente determinata da
- gli autovalori di f
- $\forall \lambda \in Sp(f)$, la forma normale di Jordan di $f|_{V'_\lambda} - \lambda\, id$, che risulta nilpotente

ed è quindi un invariante completo per coniugio di endomorfismi triangolabili.

<u>Dim</u> Segue direttamente dalle considerazioni fatte e dalla forma di Jordan nilpotente. $\square$

Estensione del campo degli scalari

Sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ un'estensione di campi. Allora abbiamo $\forall n, m \in \mathbb{N}$ $\mathbb{K}^n \subseteq \mathbb{F}^n$ e $M(m,n,\mathbb{K}) \subseteq M(m,n,\mathbb{F})$.
Sia quindi $x \in \mathbb{K}^n$, $A \in M(m,n,\mathbb{K})$. Indichiamo con $\bar{x} := x$, $\bar{A} := A$ pensati su $\mathbb{F}$. Osserviamo che le mosse di Gauss su $\mathbb{K}$ lo sono anche su $\mathbb{F}$, quindi la forma di A a scalini è anche la forma di $\bar{A}$ a scalini, e $\operatorname{rank} \bar{A} = \operatorname{rank} A$. Inoltre vale $\det \bar{A} =$

$= \det \bar{A}$ perché il determinante è fatto di somme e prodotti delle entrate di A, che sono anche le entrate di $\bar{A}$. Quindi si ha anche che $\chi_A = \chi_{\bar{A}}$.
Vediamo ora che $\mu_A = \mu_{\bar{A}}$. Sicuramente $\mu_{\bar{A}} \mid \mu_A$ perché $\mu_A(\bar{A}) = 0$. Osserviamo poi che, dato $b \in \mathbb{K}^n$, il sistema $Ax = b$ ha soluzioni $x \in \mathbb{K}^n \Leftrightarrow \bar{A}x = \bar{b}$ ha soluzioni $x \in \mathbb{F}^n$ per il criterio di Rouché Capelli, e si ha $\dim_{\mathbb{K}} Sol(Ax=b) = \dim_{\mathbb{F}} Sol(Ax=b)$. Definiamo ora $j \in \mathbb{N}$, S_j il sistema lineare $A^{j+1} = x_0 I + \dots + x_j A^j$, nell'incognita $(x_0, \dots, x_j)$. Posto $j_0 = \deg \mu_A - 1$ si ha che S_j non ha soluzione $\forall j < j_0$, ha un'unica soluzione per $j = j_0$ e ammette soluzioni multiple per $j > j_0$. Dato che $\bar{S}_j$, definito da $\bar{A}^{j+1} = x_0 I + \dots + x_j \bar{A}^j$ si comporta allo stesso modo, abbiamo che $\deg \mu_{\bar{A}} = \deg \mu_A$ e quindi $\mu_{\bar{A}} = \mu_A$. Vediamo che un processo simile si può avere se V è un generico $\mathbb{K}$-spazio vettoriale: si può trovare un $\mathbb{F}$-spazio vettoriale che "estenda" V, indicato con $\bar{V}_{\mathbb{F}}$.
La costruzione esplicita di un tale spazio richiede però nozioni teoriche che vanno oltre lo scopo di queste note. In particolare si ha $\bar{V}_{\mathbb{F}} := V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{F}$,

per cui servirebbe aver definito il prodotto tensoriale di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Vediamo però, in vista di una futura applicazione, un caso particolare di questa costruzione, se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ e $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. Tale procedura viene detta "complessificazione". Dato V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale definiamo $V_\mathbb{C} := V + iV = \{v+iw \mid v,w\in V\}$.
$V_\mathbb{C}$ ha una naturale struttura di $\mathbb{C}$ spazio vettoriale data da $\forall v,w,x,y\in V$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $(v+iw)+(x+iy) = (v+x)+i(w+y)$, $(\alpha+i\beta)(v+iw) = (\alpha v-\beta w)+i(\beta v+\alpha w)$.
In particolare si ha $(\mathbb{R}^n)_\mathbb{C} = \mathbb{C}^n$ e $M(m,n,\mathbb{R})_\mathbb{C} = M(m,n,\mathbb{C})$, permettendoci, nel caso degli spazi standard, di appoggiarci ai fatti visti all'inizio della sezione. Inoltre, data $v_1,\dots,v_n \subseteq V$ base di V, allora $v_1,\dots,v_n \subseteq V_\mathbb{C}$ è base di $V_\mathbb{C}$ e $\dim_\mathbb{R} V = \dim_\mathbb{C} V_\mathbb{C}$. Data poi $f\in \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V,W)$, definiamo $f_\mathbb{C}\in\mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V_\mathbb{C},W_\mathbb{C})$ con $\forall v,w\in V$, $f(v+iw) = f(v)+if(w)$. In particolare, siccome $V_\mathbb{C}\simeq\mathbb{C}^n$ e $\mathrm{Hom}(V_\mathbb{C},W_\mathbb{C})\simeq M(m,n,\mathbb{C})$ valgono i risultati della prima parte della sezione.

Il centralizzatore di una matrice

Sia $A\in M(n,\mathbb{K})$. Definiamo il centralizzatore di A come $\mathcal{C}(A) = \{M\in M(n,\mathbb{K}) : MA = AM\}$. Osserviamo che

$\mathcal{C}(A)$ è un sottospazio lineare di $M(n,\mathbb{K})$ per le proprietà del prodotto tra matrici. Inoltre valgono, $\forall A, B \in M(n,\mathbb{K})$:

- $A \in \mathcal{C}(B) \Leftrightarrow B \in \mathcal{C}(A)$
- $B \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow B \in \mathcal{C}(p(A)) \quad \forall p \in \mathbb{K}[t]$
- $B \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow p(B) \in \mathcal{C}(A) \quad \forall p \in \mathbb{K}[t]$

Da cui si deduce che $\mathbb{K}[A] \subseteq \mathcal{C}(A)$ e $\dim \mathcal{C}(A) \geq \dim \mathbb{K}[A] = \deg \mu_A$.

Osserviamo poi che si ha

- $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A + \lambda I) \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$
- $A \sim B \Rightarrow \mathcal{C}(A) \simeq \mathcal{C}(B)$

Utilizziamo queste conoscenze, insieme alla conoscenza sulla forma di Jordan per calcolare $\dim (\mathcal{C}(A))$. Iniziamo dal caso più semplice: $A \sim J(\lambda, n)$. Allora $\mathcal{C}(A) \simeq \mathcal{C}(J(\lambda,n)) = \mathcal{C}(J(0,n))$. Calcoliamo ora esplicitamente. Sia $M \in \mathcal{C}(J(0,n))$. Allora:

$$MJ(0,n) = \begin{pmatrix} 0 & M^1 & \cdots & M^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_2 \\ \vdots \\ M^n \\ 0 \end{pmatrix} = J(0,n)M$$

Da cui si osserva che M_1 è libera di assumere qualsiasi valore, M_2 inizia con uno 0 e poi aggiunge gli stessi valori di π_1, e iterando si trova

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_n \\ 0 & m_1 & m_2 & \cdots & m_{n-1} \\ 0 & 0 & m_1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_1 \end{pmatrix}$$

Da cui: $\dim \mathcal{C}(A) = n = \dim \mathbb{K}[A]$, ovvero $\mathcal{C}(A) = \mathbb{K}[A]$. Sia ora in generale A triangolabile e $Sp(A) = \lambda_1, \dots, \lambda_k$. Allora per decomposizione primaria scriviamo:

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix} = \bar{A}$$

Dove $\forall j = 1, \dots, k$ A_j è la forma di Jordan di $A|_{\ker(A-\lambda_j I)^{n_j}}$. Se però $M \in \mathcal{C}(A)$, $M \in \mathcal{C}((A-\lambda_j I)^{n_j})$ e quindi i $\ker(A-\lambda_j I)^{n_j}$ sono π-invarianti.

Si ha quindi che ogni $M \in \mathcal{C}(\bar{A})$ è della forma:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_k \end{pmatrix}$$

Dove ogni $M_j \in \mathcal{C}(A_j)$. Ci si può ridurre quindi al caso con un autovalore e da qui al caso nilpotente. Vediamo quindi come calcolare la dimensione di $A = J(n_1, 0) \oplus J(n_2, 0)$, $n_1 \geq n_2$.

Sia $M \in \mathcal{C}(A)$, $M = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix}$, $N_1 \in M(n_1, \mathbb{K})$, $N_4 \in$ $\in M(n_2, \mathbb{K})$. Allora abbiamo che:

$$AM = \begin{pmatrix} J(n_1,0)N_1 & J(n_2,0)N_2 \\ J(n_2,0)N_3 & J(n_2,0)N_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 J(n_1,0) & N_2 J(n_2,0) \\ N_3 J(n_3,0) & N_4 J(n_4,0) \end{pmatrix} = MA$$

Da cui: $N_1 \in \mathbb{K}[J(n_1,0)]$, $N_4 \in \mathbb{K}[J(n_2,0)]$ e, grazie ad osservazioni analoghe a quelle sul caso di un blocco di Jordan si ha che anche N_2, N_3 hanno n_1 gradi di libertà. Quindi si ha che $\dim \mathcal{C}(A) =$ $= 3n_1 + n_2$. In generale, se A è fatta da l blocchi di Jordan, ciascuno di taglia n_i $\forall i = 1, \dots, l$, si ha che $\dim \mathcal{C}(A) = \sum_{i=0}^{l} (2i+1) n_{l-i} = n_l + 3n_{l-1} +$ $+ 5n_{l-2} + \dots$. Nel caso A non sia triangolabile, osserviamo che $\mathcal{C}(A)$ è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, e secondo le osservazioni della precedente sezione, la sua dimensione viene preservata dalle estensioni di campo. Si può quindi immergere A nel campo di spezzamento di χ_A e trovare la soluzione al problema di determinare $\dim \mathcal{C}(A)$ in questo campo dove A è triangolabile ed ha dunque una forma di Jordan, per cui dunque si conosce la soluzione.

$\hookrightarrow$

Forma canonica di Jordan reale

Per questo capitolo restringeremo la nostra attenzione al campo $\mathbb{R}$ e alla sua chiusura algebrica $\mathbb{C}$, che ha la peculiare proprietà di avere grado 2 su $\mathbb{R}$. Vediamo prima di tutto il seguente:

<u>LEMMA</u> Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$. Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

1) $\exists P \in GL(n, \mathbb{R}) : P^{-1} A P = B$

2) $\exists P \in GL(n, \mathbb{C}) : P^{-1} A P = B$

<u>Corollario</u> Dati $f, g \in End(V)$ con V spazio vettoriale reale, $f \sim g$ su $\mathbb{R} \Leftrightarrow f_{\mathbb{C}} \sim g_{\mathbb{C}}$ su $\mathbb{C}$

<u>Dim</u> 1) $\Rightarrow$ 2) segue dall'inclusione $GL(n, \mathbb{R}) \subseteq$ $\subseteq GL(n, \mathbb{C})$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sia $P = X + iY$, con $X, Y \in M(n, \mathbb{R})$. Allora si ha che $A(X+iY) = (X+iY)B \Leftrightarrow AX = XB$ e $AY =$ $= YB$. Se almeno una tra X e Y è invertibile abbiamo concluso. Altrimenti $\det(X+tY) \in \mathbb{R}[t] \setminus \{0\}$, quindi ha $\leq n$ radici, quindi $\exists k \in \mathbb{R} : \det(X+kY) \neq 0$. Allora $A(X+kY) = (X+kY)B$, ovvero $A \sim B$ tramite la matrice reale $X+kY$. $\square$

Questo risolve il problema della similitudine di endomorfismi reali. Vediamo ora che dalla forma canonica di Jordan, che su $\mathbb{C}$ è un invariante completo in quanto $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, si può far discendere un invariante completo anche su $\mathbb{R}$, che si può ottenere direttamente dalla forma canonica di Jordan. Vedremo poi, assumendo alcuni fatti noti sui prodotti Hermitiani definiti positivi, ed in particolare il teorema spettrale, si possono far discendere dalla forma normale di Jordan reale anche delle forme canoniche per le matrici ortogonali e antisimmetriche.

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $f \in \operatorname{End} V$. Consideriamo $f_{\mathbb{C}} \in \operatorname{End} V_{\mathbb{C}}$. Per il teorema fondamentale dell'algebra si ha che $\chi_f(t) = (t-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (t-\lambda_k)^{\alpha_k} (q_1(t))^{\beta_1} \dots (q_l(t))^{\beta_l}$, con $\deg q_i = 2$ $\forall i = 1, \dots, l$ e $\forall i = 1, \dots, l$ q_i è primo in $\mathbb{R}[t]$.

Si ha allora che $\chi_{f_{\mathbb{C}}}(t) = (t-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (t-\lambda_k)^{\alpha_k} \cdot (t-\mu_1)^{\beta_1}(t-\bar{\mu}_1)^{\beta_1} \dots (t-\mu_l)^{\beta_l}(t-\bar{\mu}_l)^{\beta_l}$, con ogni $\mu_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Per decomposizione primaria abbiamo che $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V'_{\lambda_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{l} V'_{q_i}$, $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i=1}^{k} V'_{\lambda_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{l} (V'_{\mu_i} \oplus V'_{\bar{\mu}_i})$

e quindi $\forall i = 1, \dots, l$ $(V_{q_i}^1)_{\mathbb{C}} = V_{\mu_i}^1 \oplus V_{\bar{\mu}_i}^1$ per questioni dimensionali. Possiamo quindi ridurci al seguente caso: $\chi_f = q^\beta$, con q irriducibile di grado 2, e $\chi_{f_{\mathbb{C}}}(t) = (t-\mu)^\beta (t-\bar{\mu})^\beta$. Per decomposizione primaria quindi $V_{\mathbb{C}} = V_\mu^1 \oplus V_{\bar{\mu}}^1$, e siccome le stringhe invarianti di $f|_{V_\mu^1}$ e $f|_{V_{\bar{\mu}}^1}$ sono le stesse per simmetria (infatti non c'è modo di distinguere una radice dall'altra) si ha che in una base $\mathcal{B}$ di Jordan per $f_{\mathbb{C}}$ la matrice di $f_{\mathbb{C}}$ ha la forma

$$\begin{pmatrix} J+\mu I & 0 \\ 0 & J+\bar{\mu} I \end{pmatrix}$$

Con J una certa matrice in forma di Jordan nilpotente. Inoltre $\mathcal{B}$ può essere presa della forma $\mathcal{B} = v_1, \dots, v_\beta, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_\beta$, quindi si ha che la base $\bar{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(v_1 + \bar{v}_1), -\frac{i}{2}(v_1 - \bar{v}_1), \dots, \frac{1}{2}(v_\beta + \bar{v}_\beta), -\frac{i}{2}(v_\beta - \bar{v}_\beta)$ è una base di V e di $V_{\mathbb{C}}$. Calcoliamo ora $\mathfrak{M}_{\bar{\mathcal{B}}}(f)$

Per semplicità vediamo come viene trasformato un blocco di Jordan semplice da questo cambio di base:

$$
\begin{pmatrix}
\mu & 1 & & & & & & & & \\
 & \mu & 1 & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & \mu & 1 & & & & & \\
 & & & & \mu & & & & & \\
 & & & & & \bar{\mu} & 1 & & & \\
 & & & & & & \bar{\mu} & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & \bar{\mu} & 1 \\
 & & & & & & & & & \bar{\mu}
\end{pmatrix}
\longrightarrow
\begin{pmatrix}
R\mu & I\mu & 1 & 0 & & & & & & \\
-I\mu & R\mu & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & R\mu & I\mu & 1 & 0 & & & & \\
 & & -I\mu & R\mu & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & R\mu & I\mu & 1 & 0 \\
 & & & & & & -I\mu & R\mu & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & R\mu & I\mu \\
 & & & & & & & & -I\mu & R\mu
\end{pmatrix}
$$

Infatti, posto $\forall i = 1, \dots, \beta$ $w_i = \frac{v_i + \bar{v}_i}{2}$, $w^i = \frac{v_i - \bar{v}_i}{2i}$

Si ha: $f(w_1) = f(\frac{1}{2}(v_1 + \bar{v}_1)) = \frac{1}{2}(\mu v_1 + \bar{\mu}\bar{v}_1) =$

$= \frac{1}{2}(\mu + \bar{\mu}) w_1 - \frac{1}{2i}(\mu - \bar{\mu}) w^1$

$f(w^1) = f(\frac{1}{2i}(v_1 - \bar{v}_1)) = \frac{1}{2i}(\mu v_1 - \bar{\mu}\bar{v}_1) = \frac{1}{2i}(\mu - \bar{\mu}) w_1 +$

$+ \frac{1}{2}(\mu + \bar{\mu}) w^1$

e $\forall i \geq 2$ $f(w_i) = f(\frac{1}{2}(v_i + \bar{v}_i)) = \frac{1}{2}(v_{i-1} + \mu v_i + \bar{v}_{i-1} +$

$+ \bar{\mu} v_i) = w_{i-1} + \frac{1}{2}(\mu + \bar{\mu}) w_i - \frac{1}{2i}(\mu - \bar{\mu}) w^i$

$f(w^i) = f(\frac{1}{2i}(v_i - \bar{v}_i)) = \frac{1}{2i}(v_{i-1} + \mu v_i - \bar{v}_{i-1} - \bar{\mu}\bar{v}_i) =$

$= w^{i-1} + \frac{1}{2i}(\mu - \bar{\mu}) w_i + \frac{1}{2}(\mu + \bar{\mu}) w^i$

Questo ci permette di associare per ogni classe di coniugio di endomorfismi reali un elemento privilegiato che dipende soltanto dalla forma di Jordan del suo complessificato, e ci permette anche di riottenere il risultato visto all'inizio della sezione.

Dimostriamo ora il seguente:

<u>TEOREMA</u> V uno spazio vettoriale reale, $f \in \operatorname{End} V$, $\mathcal{B}$ una base di Jordan di $f_{\mathbb{C}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ la corrispondente base di Jordan reale. Se $\mathcal{B}$ è unitaria allora $\tilde{\mathcal{B}}$ è ortogonale.

<u>Dim</u> Sia $\mathcal{B} = v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_r, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_r$, con $\forall i = 1, \dots, k \quad v_i = \bar{v}_i$. Scriviamo quindi:

$$\tilde{\mathcal{B}} = v_1, \dots, v_k, \frac{w_1 + \bar{w}_1}{2}, \frac{w_1 - \bar{w}_1}{2i}, \dots, \frac{w_r + \bar{w}_r}{2}, \frac{w_r - \bar{w}_r}{2i}$$

Calcoliamo allora $\forall i = 1, \dots, k, \ \forall j = 1, \dots, r$:

$$\langle v_i, \frac{w_j + \bar{w}_j}{2} \rangle = \frac{1}{2} \langle v_i, w_j \rangle + \frac{1}{2} \langle v_i, \bar{w}_j \rangle = 0$$

$$\langle v_i, \frac{w_j - \bar{w}_j}{2i} \rangle = \frac{1}{2i} \langle v_i, w_j \rangle + \frac{1}{2i} \langle v_i, \bar{w}_j \rangle = 0$$

Inoltre $\forall i, j = 1, \dots, k, \ i \neq j$

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0$$

e $\forall i, j = 1, \dots, r, \ i \neq j$:

$$\langle \frac{w_i + \bar{w}_i}{2}, \frac{w_j - \bar{w}_j}{2i} \rangle = \frac{1}{2} \langle w_i, \frac{w_j - \bar{w}_j}{2i} \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{w}_i, \frac{w_j - \bar{w}_j}{2i} \rangle =$$

$$= -\frac{1}{4i} \langle w_i, w_j \rangle + \frac{1}{4i} \langle w_i, w_j \rangle + \dots = 0$$

e analogamente per gli altri casi. $\square$

<u>Corollario</u> (segue dal Teorema spettrale) Se f è normale, allora f si rappresenta attraverso una

base ortogonale con una matrice a blocchi di taglia massima 2×2.