DIMOSTRAZIONE TOPOLOGICA DEL PRINCIPIO DI COMPATTEZZA COMBINATORIO

MAURIZIO MONGE

Vale il seguente

Teorema 1 (principio di compattezza combinatorio)**.** *Sia X un insieme, e $\mathscr{A} = \{A_\alpha\}$ una collezione r-regolare di sottoinsiemi finiti di X , ovvero tale che per ogni colorazione*

$$X = c_1 \sqcup \cdots \sqcup c_r$$

di X con r colori, esiste un $A \in \mathscr{A}$ monocromatico, cioè tale che $A \subseteq c_i$ per qualche $i \in \{1,\ldots,r\}$.

Allora esiste un sottoinsieme $Y \subseteq X$ finito tale che $\mathscr{A} \cap \mathscr{P}(Y)$ è r-regolare, ovvero per ogni r-colorazione di Y esiste un $A \in \mathscr{A}$ contenuto in Y e monocromatico.

Diamo del teorema la seguente dimostrazione puramente topologica:

Dimostrazione. Sia $K = \{1,\ldots,r\}^X$ lo spazio di tutte le possibili r-colorazioni di X, che è un compatto nella topologia del prodotto topologico di $\{1,\ldots,r\}$ con la topologia discreta. Indicheremo un elemento di tale spazio come un vettore infinito $x = (x_\tau)_{\tau \in X}$ con le componenti $x_\tau \in \{1,\ldots,r\}$ e indicizzate su X. Se $\pi_\tau : x \mapsto x_\tau$ è la proiezione sulla τ-esima componente, abbiamo che la topologia di K è generata da intersezioni finite di insiemi della forma $\pi_\tau^{-1}(i)$, essendo $\{1,\ldots,r\}$ discreto.

In particolare per ogni $A \in \mathscr{A}$, e $i \in \{1,\ldots,r\}$ gli insiemi

$$U_{A,i} = \{x : x_\tau = i \ \forall \tau \in A\}$$

sono degli aperti di K, e $U_{A,i}$ è anche l'insieme costituito da tutte le colorazioni in cui A è colorato uniformemente del colore i. Sia quindi

$$U_A = \bigcup_{i=1}^{r} U_{A,i}$$

che è l'insieme delle colorazioni che rendono A monocromatico.

Siccome $\mathscr{A}$ è r-regolare, abbiamo per ipotesi che ogni r-colorazione di X rende qualche $A \in \mathscr{A}$ monocromatico, e questo equivale precisamente a dire che ogni $x \in K$ appartiene a qualche U_A. Quindi

$$K = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} U_A.$$

Ma gli U_A sono aperti e K compatto, e quindi possiamo estrarre un sottoricoprimento finito

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} U_{A_i}$$

per un insieme finito $\{A_i\}_{1 \le i \le n} \subseteq \mathscr{A}$.

Quindi per qualunque colorazione di X qualcuno degli A_i è monocromatico, e possiamo concludere prendendo $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, che è finito. $\square$

SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA - PIAZZA DEI CAVALIERI, 7 - 56126 PISA
E-mail address: maurizio.monge@gmail.com

Date: 15 aprile 2009.