ALCUNE QUESTIONI SULLE SERIE

MAURIZIO MONGE

Problema 1. *Sia* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successione a valori nell'intervallo* $(0,1]$. *Siano le somme parziali* $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$*, e* $t_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$. *Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{t_n}$$

converge.

Dimostrazione. Scriviamo la serie come

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n|s_n \in (k,k+1]} \frac{a_n}{t_n} \right),$$

in cui abbiamo 'selezionato' gli addendi relativi agli n tali che s_n cade nell'intevallo $(k, k+1]$. Charamente mettendo insieme le somme interne per $k = 0, 1, 2, ...$ tutti i termini della somma originale saranno stati presi una e una sola volta.

Osserviamo che siccome gli incrementi degli s_n sono $a_n = s_n - s_{n-1}$, ed essendo gli $a_n \leq 1$, la somma degli a_n per tutti gli n tali che $s_n \in (k, k+1]$ può essere al più 2, dato che stiamo sommando gli incrementi necessari per passare da un numero che è $> k-1$ a uno che è $\leq k+1$.

D'altra parte abbiamo che t_n è la somma di tutti gli s_i per $i = 1, 2, \ldots, n$, e se s_n cade nell'intervallo $(k, k+1]$ abbiamo che almeno un altro s_i con $i < n$ doveva cadere nell'intervallo $(j, j+1)$ per ogni $j < k$, dato che l'incremento degli s_i è dato da quantità (gli a_i) che sono ≤ 1 (e quindi nessun intervallo ampio 1 può essere scavalcato).

Quindi fra gli $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ce n'è sempre almeno uno che cade in $(j, j+1]$ per tutti i $j = 0, \ldots, k$, e quindi la loro somma deve essere almeno $1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Per quando riguarda gli n tali che $s_n \in (0,1]$ questa stima non funziona dato che ci dice che $t_n \geq 0$, ma abbiamo che i t_n corrispondenti sono comunque almeno a_1.

Quindi possiamo stimare le varie somme interne per $k = 0$ e $k = 1, 2, 3, \ldots$ con

$$\frac{2}{a_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k(k+1)} < \infty. \qquad \square$$

Problema 2. *Dimostrare che*

$$\sum \frac{1}{n-1} = 1,$$

dove la somma è su tutti gli n *che sono un potenza intera non banale* $n = a^b$ *con* $a, b > 1$.

Dimostrazione. Si noti che possiamo manipolare formalmente la somma senza preccuparci dell'ordine in cui vengono sommati i termini, essendo essi tutti positivi.

Date: 15 aprile 2009.

Osserviamo che la somma può essere vista come una somma su tutti gli $n = a^b$, per $a, b > 1$ dove a non è una potenza non banale di nessun altro intero

$$\sum_{\substack{a,b \geq 2 \\ a \text{ non pot.}}} \frac{1}{a^b - 1}.$$

In particolare possiamo espandere

$$\frac{1}{a^b - 1} = \frac{1}{a^b} + \frac{1}{a^{2b}} + \frac{1}{a^{3b}} + \cdots + \frac{1}{a^{ib}} + \ldots,$$

e osserviamo che espandendo ogni addendo $1/(a^b - 1)$ il contributo al termine $1/a^k$ è dato da tutti i modi in cui è possibile ottenere $1/a^k$ come $1/a^{ib}$ per $b > 1$, ed è quindi il numero di divisori > 1 di k, $\delta(k)$ poniamo.

La somma può quindi essere scritta come

$$\sum_{\substack{a,k \geq 2 \\ a \text{ non pot.}}} \delta(k) \frac{1}{a^k},$$

e osserviamo che se scriviamo

$$\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \ldots \right)$$

anche in questo modo otteniamo ogni termine $1/a^k$ precisamente $\delta(k)$ volte. Raggruppando le serie geometriche abbiamo che la nostra somma vale

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right),$$

che è uguale a 1 dato che la somma dei primi n termini della serie è precisamente $1 - 1/n$ e tende a 1 per $n \to \infty$. $\square$

SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA - PIAZZA DEI CAVALIERI, 7 - 56126 PISA
E-mail address: maurizio.monge@gmail.com