

INTRODUZIONE

lunedì 5 agosto 2024 10:34

Problemi decisionali

Schema di processo decisionale

- 1) Individuazione del problema decisionale
- 2) Analisi della realtà e raccolta dei dati
- 3) Definizione di un modello matematico
- 4) Risoluzione del modello matematico mediante un algoritmo risolutivo
- 5) Analisi dei risultati ottenuti

modello matematico → è la descrizione di un problema mediante strumenti di tipo logico-matematico

modelli analitici → il problema è descritto mediante relazioni matematiche tra variabili decisionali. si cercano valori che soddisfano i vincoli e ottimizzano la funzione obiettivo

Rete logistica bipartita

$G = (V_1 \cup V_2, A)$	dati di input
V_1 : insieme dei pazienti	d_i : domanda del paziente i , $\forall i \in V_1$
V_2 : insieme dei centri di assistenza	q_j : capacità di servizio del centro j , $\forall j \in V_2$
A : insieme dei possibili collegamenti	c_{ij} : costo unitario di servizio $\forall (i,j) \in A$

Problema decisionale
Decidere come servire i pazienti in modo da soddisfare la loro domanda e rispettando la capacità dei centri di assistenza (vincoli), con l'obiettivo di minimizzare il costo totale di servizio (f. obiettivo). È un problema di ottimizzazione

var. decisionali → x_{ij} : numero di richieste di i servite da j $\forall (i,j) \in A$

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$
$$\sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = d_i \quad \forall i \in V_1$$

↳ stella uscente di i

$$\sum_{(i,j) \in BS(j)} x_{ij} \leq q_j \quad \forall j \in V_2$$

↳ stella entrante di j

Definizioni

Problema → domanda generica, solitamente espressa mediante parametri

Istanza di un problema → domanda specifica, dando un valore a ogni parametro

F insieme ammissibile → insieme delle possibili sol del problema, descritto mediante parametri

$c: F \rightarrow \mathbb{R}$ **funzione obiettivo** → c'è nel caso di problemi di ottimizzazione

Modello analitico generale per problemi di ottimizzazione

minimizzazione

• $(P): \min \{ c(x) \mid x \in F \}$
parametri: ↳ vettore delle var decisionali

• $z(P) = \min \{ c(x) \mid x \in F \}$: valore ottimo di P

• $x^* \in F$ t.c. $c(x^*) = z(P)$ soluzione ottima di P ⚠ non sempre ∃

massimizzazione

• $(P): \max \{ c(x) \mid x \in F \}$
parametri: ↳ vettore delle var decisionali

• $z(P) = \max \{ c(x) \mid x \in F \}$: valore ottimo di P

• $x^* \in F$ t.c. $c(x^*) = z(P)$ soluzione ottima di P ⚠ non sempre ∃

$\min \{ c(x) \mid x \in F \} = - \max \{ -c(x) \mid x \in F \}$ " i pt di min di c coincidono con quelli di max di $-c$ "

problema di ottimizzazione ↳ discreto (numero finito di sol ammissibili)
↳ continuo

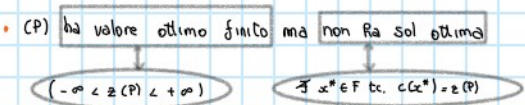
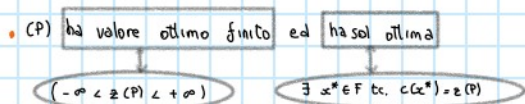
↳ continuo

esiti di risoluzione di un modello di ottimizzazione

minimizzazione

$$(P): \min \{c(x) \mid x \in F\}$$

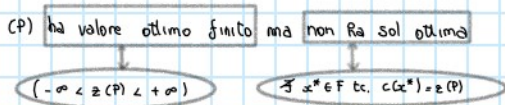
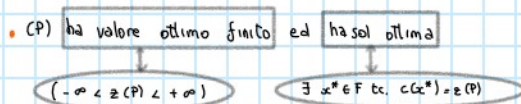
- (P) vuoto ovvero $F = \emptyset \rightsquigarrow z(P) = +\infty$
- (P) inf. illimitato ovvero $\forall M \in \mathbb{R} \exists x \in F \text{ t.c. } c(x) \leq M \rightsquigarrow z(P) = -\infty$



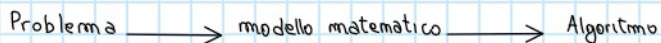
massimizzazione

$$(P): \max \{c(x) \mid x \in F\}$$

- (P) vuoto ovvero $F = \emptyset \rightsquigarrow z(P) = -\infty$
- (P) sup. illimitato ovvero $\forall M \in \mathbb{R} \exists x \in F \text{ t.c. } c(x) \geq M \rightsquigarrow z(P) = +\infty$

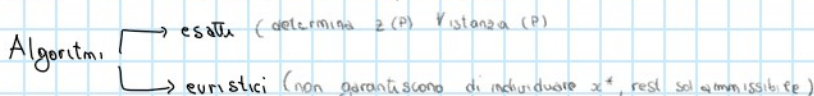
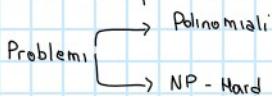


Come si risolve un problema di ottimizzazione



Algoritmo

Prende in input un'istanza del modello (P) e restituisce $z(P)$ e se \exists anche x^*



↳ bontà di una sol $\bar{x} \in F$

errore assoluto

$$E_{\bar{x}} = c(\bar{x}) - z(P) \geq 0$$

$$\max E_{\bar{x}} = z(P) - c(x)$$

errore relativo

$$R_{\bar{x}} = \frac{E_{\bar{x}}}{z(P)} \quad z(P) > 0$$

dato $\epsilon > 0$:
 • se $R_{\bar{x}} \leq \epsilon$ \bar{x} è ϵ -ottima
 se $R_{\bar{x}} \leq \epsilon$ per ogni istanza \Rightarrow l'algo è ϵ -approssimato

nota

$z(P)$ non è gener. noto. Lo si stima risolvendo un'approssimazione di (P) considerando i rilassamenti di (P)

Def

Dato $(P): \min \{c(x) : x \in F\}$

$$(\bar{P}): \min \{\bar{c}(x) : x \in \bar{F}\}$$

(\bar{P}) è detto un rilassamento di (P) se:
 1) $F \subseteq \bar{F}$
 2) $\bar{c}(x) \leq c(x) \forall x \in F$ (\geq se in forma max)

Proprietà

$z(\bar{P}) \leq z(P)$ ovvero è una valutazione inferiore \ lower bound di $z(P)$
Sup upper se n.f. max

Conseguenza 1 (solo nel caso lower bound)

$$R_{\bar{x}} = \frac{c(\bar{x}) - z(P)}{z(P)} \leq \frac{c(\bar{x}) - z(\bar{P})}{z(\bar{P})} \quad (\text{posso usare } z(\bar{P}) \text{ al posto di } z(P))$$

$$\text{se } \frac{c(\bar{x}) - z(\bar{P})}{z(\bar{P})} \leq \varepsilon \Rightarrow \bar{x} \text{ è } \varepsilon\text{-ottima}$$

Conseguenza 2 (Teorema)

Se (\bar{P}) ha sol ottima x^* e x^* è tale che: 1) $x^* \in F$ (ovvero è amm per P)
2) $\bar{c}(x^*) = c(x^*)$

$\Rightarrow x^*$ è sol ottima di (P)

dim

$$\bar{c}(x^*) \stackrel{\text{è sol ottima per } \bar{P}}{=} z(\bar{P}) \stackrel{\text{lower bound}}{\leq} z(P) \leq c(x^*) \stackrel{\text{hp 2}}{=} \bar{c}(x^*)$$

Risolvendo il rilassamento \Rightarrow risolvo il modello