INTRODUZIONE

lunedì 5 agosto 2024 10:34

Problemi decisionali

Schema di processo decisionale

1) Individuazione del problema decisionale
2) Analisi della realtà e raccolta dei dati
3) Definizione di un modello matematico
4) Risoluzione del modello matematico mediante un algoritmo risolutivo
5) Analisi dei risultati ottenuti

modello matematico → e' la descrizione di un problema mediante strumenti di tipo logico-matematico

modelli analitici → il problema è descritto mediante relazioni matematiche tra variabili decisionali. si cercano valori che soddisfano i vincoli e ottimizzano la funzione obiettivo

Rete logistica bipartita

$G = (V_1 \cup V_2, A)$

V_1 :: insieme dei pazienti

V_2 :: insieme dei centri di assistenza

A :: insieme dei possibili collegamenti

dati di input

d_i :: domanda del paziente i, $\forall i \in V_1$

q_j :: capacità di servizio del centro j, $\forall j \in V_2$

c_{ij} :: costo unitario di servizio $\forall (i,j) \in A$

Problema decisionale

Decidere come servire i pazienti in modo da soddisfare la loro domanda e rispettando la capacità dei centri di assistenza (vincoli), con l'obiettivo di minimizzare il costo totale di servizio (f. obiettivo). E' un problema di ottimizzazione

var. decisionali → x_{ij} : numero di richieste di i servite da j $\forall (i,j) \in A$

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\underbrace{\sum_{(i,j) \in FS(i)}}_{\text{stella uscente di } i} x_{ij} = d_i \qquad \forall i \in V_1$$

$$\underbrace{\sum_{(i,j) \in BS(j)}}_{\text{stella entrante di } j} x_{ij} \le q_j \qquad \forall j \in V_2$$

Definizioni

Problema → domanda generica, solitamente espressa mediante parametri

Istanza di un problema → domanda specifica, dando un valore a ogni parametro

F insieme ammissibile → insieme delle possibili sol del problema, descritto mediante parametri

$c: F \to \mathbb{R}$ funzione obiettivo → c'è nel caso di problemi di ottimizzazione

Modello analitico generale per problemi di ottimizzazione

minimizzazione

- $(P): \min \{ \underbrace{c}_{\text{parametri}}(\underbrace{x}_{\text{vettore delle var decisionali}}) \mid x \in F \}$
- $z(P) = \min \{ c(x) \mid x \in F \}$ :: valore ottimo di P
- $\boxed{x^* \in F \text{ t.c. } c(x^*) = z(P)}$ soluzione ottima di P ⚠ non sempre ∃

massimizzazione

- $(P): \max \{ \underbrace{c}_{\text{parametri}}(\underbrace{x}_{\text{vettore delle var decisionali}}) \mid x \in F \}$
- $z(P) = \max \{ c(x) \mid x \in F \}$ :: valore ottimo di P
- $\boxed{x^* \in F \text{ t.c. } c(x^*) = z(P)}$ soluzione ottima di P ⚠ non sempre ∃

$\min \{ c(x) \mid x \in F \} = -\max \{ -c(x) \mid x \in F \}$ "i pti di min di c coincidono con quelli di max di -c"

problema di ottimizzazione
- discreto (numero finito di sol ammissibili)
- continuo

↳ continuo

esiti di risoluzione di un modello di ottimizzazione

minimizzazione

(P): $\min \{ c(x) \mid x \in F \}$

- (P) vuoto ovvero $F = \emptyset$ ⇝ $z(P) := +\infty$
- (P) inf. illimitato ovvero $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists x \in F$ t.c. $c(x) \le M$ ⇝ $z(P) := -\infty$
- (P) ha valore ottimo finito ($-\infty < z(P) < +\infty$) ed ha sol ottima ($\exists x^* \in F$ t.c. $c(x^*) = z(P)$)
- (P) ha valore ottimo finito ($-\infty < z(P) < +\infty$) ma non ha sol ottima ($\nexists x^* \in F$ t.c. $c(x^*) = z(P)$)

massimizzazione

(P): $\max \{ c(x) \mid x \in F \}$

- (P) vuoto ovvero $F = \emptyset$ ⇝ $z(P) := -\infty$
- (P) sup. illimitato ovvero $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists x \in F$ t.c. $c(x) \ge M$ ⇝ $z(P) := +\infty$
- (P) ha valore ottimo finito ($-\infty < z(P) < +\infty$) ed ha sol ottima ($\exists x^* \in F$ t.c. $c(x^*) = z(P)$)

(P) ha valore ottimo finito ($-\infty < z(P) < +\infty$) ma non ha sol ottima ($\nexists x^* \in F$ t.c. $c(x^*) = z(P)$)

Come si risolve un problema di ottimizzazione

Problema ⟶ modello matematico ⟶ Algoritmo

Algoritmo

Prende in input un'istanza del modello (P) e restituisce $z(P)$ e se $\exists$ anche x^*

Problemi → Polinomiali / NP - Hard

Algoritmi → esatti (determina $z(P)$ $\forall$ istanza (P)) / euristici (non garantiscono di individuare x^*, rest. sol ammissibile)

↓

bontà di una sol $\bar{x} \in F$

errore assoluto

min

$$\boxed{E_{\bar{x}} = c(\bar{x}) - z(P) \ge 0}$$

max

$$E_{\bar{x}} = z(P) - c(x)$$

errore relativo

$$\boxed{R_{\bar{x}} = \frac{E_{\bar{x}}}{z(P)}} \qquad z(P) > 0$$

dato $\varepsilon > 0$: • se $R_{\bar{x}} \le \varepsilon$ $\bar{x}$ è ε-ottima

se $R_{\bar{x}} \le \varepsilon$ per ogni istanza ⇒ l'alg è ε-approssimato

noto

$z(P)$ non è gener. noto. Lo si stima risolvendo un'approssimazione di (P) considerando i rilassamenti di (P)

Def

Dato (P): $\min \{ c(x) : x \in F \}$

$(\bar{P})$: $\min \{ \bar{c}(x) : x \in \bar{F} \}$

$(\bar{P})$ è detto un rilassamento di (P) se: 1) $F \subseteq \bar{F}$

2) $\bar{c}(x) \le c(x)\ \forall x \in F$ ($\ge$ se in forma max)

Proprietà

$z(\bar{P}) \le z(P)$ ovvero è una valutazione inferiore \ lower bound di $z(P)$
sup upper se in f. max

Conseguenza 1 (solo nel caso lower bound)

$$R_{\bar{x}} = \frac{c(\bar{x}) - z(P)}{z(P)} \underset{z(\bar{P}) \le z(P)}{\le} \frac{c(\bar{x}) - z(\bar{P})}{z(\bar{P})}$$ (posso usare $z(\bar{P})$ al posto di $z(P)$)

se $\dfrac{c(\bar{x}) - z(\bar{P})}{z(\bar{P})} \le \varepsilon \Rightarrow \bar{x}$ è ε- ottima

Conseguenza 2 (Teorema)

Se $(\bar{P})$ ha sol ottima x^* e x^* è tale che: 1) $x^* \in F$ (ovvero è amm per P)
2) $\bar{c}(x^*) = c(x^*)$

$\Rightarrow x^*$ è sol ottima di (P)

dim

$$\bar{c}(x^*) \underset{\text{è sol ottima per hp}}{=} z(\bar{P}) \underset{\text{lower boun}}{\le} z(P) \le c(x^*) \underset{\text{hp 2}}{=} \bar{c}(x^*)$$

Risolvendo il rilassamento $\Rightarrow$ risolvo il modello