PL SCARTI COMPLEMENTARI

mercoledì 14 agosto 2024 11:59

Nota: 01-02-2017 e 27-06-2017 sono particolari

TIPO 1 PL - parametrico

11-02-2021
01-07-2021
17-02-2022
18-07-2022
08-09-2021

24-02-2020
17-07-2018
21-07-2016
21-07-2015
16-02-2015

20-02-2017

Dato (P) $\max\ c^T x$
$Ax \le b$

1) Si determinino tutte le terne di valori dei parametri reali α, β e γ per i quali $\bar{x}$ e $\bar{y}$ (fornite dal problema) sono rispettivamente una soluzione ottima del problema e del suo duale.
   - 1A Fissati quindi dei valori di α, β e γ , si dimostri che in tale scenario $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile ma non ottima per (P), e si determini una direzione ammissibile di crescita per $\bar{x}$
   - 1B Tra le terne individuate, si determinino quelle per cui il problema duale ammette una soluzione ottima $\hat{y}$ tale che $\hat{y}_1 > 0$.

2) Si determini per quali valori di α la soluzione di base duale associata alla base B = {1, 2} sia ottima per il problema duale,
   - discutendo l'unicità di tale soluzione ottima al variare di α.
   - Si dimostri inoltre che il problema (Pα) non può essere superiormente illimitato per nessun valore di α

3) si determini per quali valori del parametro reale α la soluzione $\bar{x}$ (fornita dal problema) sia ottima
   - per quali valori di α la soluzione $\bar{x}$ sia l'unica soluzione ottima
   - per quali valori di α la soluzione $\bar{x}$ sia una soluzione di base, discutendone l'eventuale degenerazione.

4) se ne scriva il duale e, utilizzando il teorema debole della dualità, si individuino i valori del parametro α per cui la soluzione $\bar{x}$ (fornita dal problema) è ottima per il problema.

In generale gli esercizi di PL parametrici si svolgono come gli esercizi di tipo 3 ((P)-->(D)) oppure di tipo 2 ((D)-->(P)) con l'unica differenza che ci sono dei parametri.

- per discutere l'esistenza di soluzioni ottime devo usare la condizione degli scarti complementari

Data la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P)\quad \max\{\, c^T x \,:\, Ax \le b \,\} \qquad\qquad (D)\quad \min\{\, y^T b \,:\, y^T A = c^T ,\ y \ge 0 \,\}$$

il teorema forte della dualità e il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per (P) è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per (D) complementare a $\bar{x}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verificano le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m.$$

(P) → (D)

$A_i\bar{x} < b_i \Rightarrow \bar{y}_i = 0$

il testo mi chiede per quali α $\bar{x}$ è ottima

- Per quanto riguarda l'unicità della soluzione ottima determinata

  1) se $\bar{y}$ soluzione ottima (di base)non degenere per (D)allora $\bar{x}$ soluzione ottima del primale è necessariamente unica.

- per discutere l'esistenza di soluzioni ottime devo usare la condizione degli scarti complementari

Per la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P)\quad \max\{\, cx \,:\, Ax \le b \,\} \qquad\qquad (D)\quad \min\{\, yb \,:\, yA = c,\ y \ge 0 \,\}$$

il teorema forte della dualità ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per (D) è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per (P) complementare a $\bar{y}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verificano le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m.$$

(D) → (P)

$\bar{y}_i > 0 \Rightarrow A_i\bar{x} = b_i$

il testo mi chiede per quali α $\bar{y}$ è ottima

- Per quanto riguarda l'unicità della soluzione ottima determinata

  1) Fisso valore di α ammissibile (α interno all'intervallo e α agli estremi)
  2) Studio l'insieme dei vincoli attivi $I(\bar{x}(\alpha))$ = { i ∈ {1, . . . , m} : $A_i\,\bar{x}(\alpha) = b_i$ } per ogni valore di (α) (che fisso io)nell'intervallo
     i. Se la base B (scelgo B ⊂ $I(\bar{x}(\alpha))$) è primale ammissibile e non degenere (x è una soluzione di base primale ottima non degenere) allora $\bar{y}$ è l'unica soluzione ottima del duale
     ii. Se la base B finale è duale ammissibile e non degenere allora $\bar{x}(\alpha)$ è l'unica soluzione ottima del primale
     iii. se ¯x `e una soluzione di base primale ottima degenere, (Se # $I(\bar{x}(\alpha)) > 2$) cerco un'altra sol ottima duale $\bar{y}'$ corrispondente a una base B' ammissibile e che rispetti la condizione degli scarti complementari con $\bar{x}(\alpha)$. Segue che $\bar{y}'$ è anch'essa ottima. (cioè faccio l'esercizio da (P) a (D))

direzioni ammissibiei

$\bar{x}$ amm per (P) e' ottima $\Leftrightarrow$ (DR) ha sol

Come det. diret di crescita $\bar{\xi}$?

$\bar{x}$ ottima per (P) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} A_I \xi \leq 0 \\ c^T \xi > 0 \end{cases}$ non ha sol

(∄ dir. ammiss. che sono anche di crescita)

$I(\bar{x}) = \{i, j\}$
$\|$
$\{i \text{ t.c. } A_i \bar{x} = b_i\}$

$\Rightarrow \begin{cases} A_i \bar{\xi} \leq 0 \\ A_j \bar{\xi} \leq 0 \\ c^T \bar{\xi} > 0 \end{cases}$ e poi provo a indovinare $\bar{\xi}$

Trovare sol. di base associata a una base data

Calcolo A_B , A_B^{-1}

$\bar{y}_B = c^T A_B^{-1}$

$\bar{x}_B = A_B^{-1} b_B$

e poi continuo e/es

(P_α) sup. illimitato

Se il problema duale ammette la soluzione ammissibile $\bar{y}$ con valore della funzione obiettivo duale pari a $\bar{y}b = 5$ (ovvero indipendente da α), dal Teorema debole della dualità segue che la funzione obiettivo di (Pα) è superiormente limitata dal valore 5 . Quindi (Pα) non può essere superiormente illimitato per nessun valore di α.

Sol di base

L'insieme degli indici dei vincoli attivi in ¯x `e I(¯x) = { i ∈ {1, . . . , m} : Aix¯ = bi } = {i, j} per ogni α 6= 2, mentre I(¯x) = {i, l, j} per α = 2. Si osservi che, essendo le righe Ai e Aj linearmente indipendenti, ¯x `e una soluzione di base per ogni α, `e ammissibile per α ≥ 2, ed `e degenere per α = 2.

Tipo 2 da (D) a (P)

08-09-2021
20-02-2019
04-02-2019
30-06-2015

$$(D)\ \min\ y^T b \qquad * $$
$$y^T A = c^T$$
$$y \geq 0$$

1) si verifichi se la soluzione $\bar{y}$ (fornita dal testo) sia ottima per il problema.
   - Nel caso in cui lo sia, si discuta se $\bar{y}$ sia l'unica soluzione ottima del problema.
   - Inoltre, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato.

2) si individui l'insieme di tutti i vertici ottimi del poliedro primale.

RISOLUZIONE

Sia $\bar{y}$ una sol amm per (D). Allora $\bar{y}$ e' ottima per (D) $\Leftrightarrow \exists\, \bar{x}$ amm per (P) complementare a $\bar{y}$ ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soddisfino la condiz. degli scarti compl. $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$

Step 0

Scrivere (P) corr a (D)

Step 1

Verifico che $\bar{y}$ sia amm per (D) $\hookrightarrow$ sost qui $*$

Step 2

uso C.S. $\hookrightarrow$ $\bar{y}_i > 0 \Rightarrow A_i \bar{x} = b_i$ $\Rightarrow$ prendo la i-esima riga di (P) e impongo la c. sc. e risolvo l'eq.

es $x_1 + 2x_2 = 4$, pongo $x_2 = \alpha$ $\Rightarrow$ $x_1 = 4 - 2\alpha$ $\quad \bar{x} = (4 - 2\alpha,\ \alpha)$

Step 3

Affinche' $\bar{x}$ sia amm per (P) deve soddisfare il sist. (P) sost $\bar{x}$ ottenuta sopra in (P) ottengo delle cond sui

Step 4

Risolvo quindi il sistema

se ($\bar{x}$) e' amm per (P)
$\downarrow$
$\bar{y}$ sol ottima di (D)
{insieme delle sol ottime per (P)}

se $\bar{x}$ non e' amm per (P)
$\Downarrow$
$\bar{y}$ non e' sol ottima di (D)

Step 5

fisso un valore di α amm. e faccio es tipo 3 quindi parto da (P) per vedere se ci sono altre sol di (D) ottime

Si noti che ¯x `e soluzione ottima di base, ovvero un vertice del poliedro primale, in quanto la sottomatrice dei vincoli attivi `e di rango 2. ¯x `e quindi l'unico vertice ottimo del poliedro primale

TIPO 3 da (P) a (D)

21-11-2018
30-01-2018
08-09-2017
08-01-2016
16-02-2016
09-01-2015
02-09-2015
20-02-2019

$$(P)\quad \max\ c^T x \qquad Ax \le b$$

1) Si verifichi se la soluzione $\bar{x}$ (fornita dal testo) sia ottima per il problema.
   - Nel caso in cui lo sia, si discuta se $\bar{x}$ sia l'unica soluzione ottima del problema.
   - Discutere inoltre se è una soluzione di base e l'eventuale degenerazione
   - Inoltre, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato.

RISOLUZIONE

Sia $\bar{x}$ una sol amm per (P). Allora $\bar{x}$ e' ottima per (P) $\Leftrightarrow \exists\, \bar{y}$ amm per (D) complementare a $\bar{x}$ ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soddisfino la condiz. degli scarti compl. $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$

step 0

Scrivere (D) corr a (P)

step 1

Verifico che $\bar{x}$ sia amm per (P) $\longleftrightarrow A_i\bar{x} \le b_i \ \forall i \in N$ prendo come base $I(\bar{x})$

step 2

uso C.S. $\longrightarrow A_i\bar{x} < b_i \Rightarrow \bar{y}_i = 0 \quad \Rightarrow * \ \boxed{\bar{y}^T = (\bar{y}_B, 0)^T}$ una sol duale $\bar{y}$ che formi con $\bar{x}$ una coppia di sol. complementari deve essere di questa forma *

step 3

Affinche' $\bar{y}$ sia amm per (D) deve soddisfare il sist. (DR) $\begin{cases} y_I^T A = c^T \\ y_I \ge 0 \end{cases}$

tolgo da (D) le $\bar{y}_i = 0$

step 4

Risolvo quindi il sistema

- (DR) ha un unica sol che e' della forma * quindi $\bar{y}$ amm $\Downarrow$ $\bar{x}$ sol ottima di (P), $\bar{y}$ l'unica sol ottima di (D)
- (DR) non ha sol $\Downarrow$ $\bar{x}$ non e' sol ottima di (P)
- (DR) ha ∞ sol $\Downarrow$ $\bar{x}$ sol ottima di (P), $J = \{$insieme di tutte le sol ottime di (D)$\}$

Per quanto riguarda l'unicità della soluzione ottima determinata

1) se $\bar{y}$ soluzione ottima (di base) non degenere per (D) allora $\bar{x}$ soluzione ottima del primale è necessariamente unica.

degenerazione

L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ \`e $I(\bar{x}) = \{ i \in \{1, \dots, m\} : A_i\bar{x} = b_i \} = \{l, s\}$. Pertanto, essendo le righe $A_s$ e $A_l$ linearmente indipendenti, $\bar{x}$ \`e una soluzione di base; \`e inoltre ammissibile e non degenere, in quanto $I(\bar{x})$ non contiene altri indici oltre a quelli in base.

poiché la sottomatrice dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è di rango massimo, segue che $\bar{x}$ \`e una soluzione di base (ammissibile) non degenere