PL PRIMALE ALGEBRICO

mercoledì 14 agosto 2024 09:44

Es 1 16-02-2015
Es 1 30-06-2015
Es 1 02-09-2015
Es 1 13-09-2016
Es 1 28-01-2016
Es 1 01-02-2017
Es 1 06-06-2017
Es 1 18-07-2017
Es 1 09-01-2018
Es 1 15-02-2018
Es 1 28-06-2018
Es 1 03-07-2019
Es 1 14-01-2019
Es 1 19-09-2019
Es 1 24-02-2020
Es 1 08-11-2022
Es 1 20-09-2023
Es1 10-11-2023

Domanda principale

Dato (P) $\max c^T x$, $Ax \le b$ e data una base B

① Per ogni iterazione fornire
- A_B, A_B^{-1} =: matrice di base e inversa
- $\bar{x}$, $\bar{y}$ e dire se sono amm/non amm e deg/non deg → coppia di sol di base
- h =: indice uscente
- ξ =: la direzione di crescita
- $\bar{\lambda}$ =: passo di spostamento
- K =: indice entrante

Al termine discutere quali info si possono ricavare riguardo il duale del PL dato

se $y_B \ge 0 \Rightarrow$ STOP $\bar{x}$ sol ottima per (P) e $\bar{y}$ sol ottima per (D)

se $A_N \xi \le 0 \Rightarrow$ STOP $\bar{\lambda} = +\infty$, ξ dir. di crescita illimitata (P) è sup. illim $\Rightarrow$ (D) $= \emptyset$

Altre domande che possono capitare

② Se avessi c' al posto di c, nell'ultima iterazione ξ sarebbe ancora di crescita?

③ In caso di ottimo finito si discuta se la sol ottima primale sia unica

④ Si determini l'insieme di tutte le sol ottime del problema duale

SOL 1

1) $A_B = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$

se $B = \{1\ 2\}$ e (P) $\max 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 1.\ 5x_1 + 6x_2 \le 3 \\ 2.\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 3x_2 \le 1 \\ 3.\ 7x_1 \le 4 \\ 4.\ 2x_1 + 4x_2 \le 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow A_B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$b_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c^T = (3\ \ 2)$

$A_N = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

2) $A_B^{-1} = \frac{1}{\det A_B} \begin{pmatrix} v & -t \\ -u & s \end{pmatrix}$

3) $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$

3.1) caratterizzare la sol. di base primale vedi *

(*) $\bar{x}$ sol di base primale è
1) ammissibile se $A_i \bar{x} \le b_i \ \forall i \in N$
2) non ammissibile se $\exists i \in N$ t.c. $A_i \bar{x} > b_i$
3) non degenere se $A_i \bar{x} \ne b_i \ \forall i \in N$
4) degenere se $\exists i \in N$ t.c. $A_i \bar{x} = b_i$

4) $\bar{y}_B = c^T A_B^{-1}$ $\ \bar{y}_N^T = 0 \Rightarrow y^T = [\bar{y}_B^T \ \ \bar{y}_N^T] = [\bar{y}_B^T \ \ 0]$

4.1) caratterizzare la sol. di base duale vedi **

(**) $\bar{y}$ sol di base duale è
1) ammissibile se $\bar{y}_i \ge 0 \ \forall i \in B$
2) non ammissibile se $\exists i \in B$ t.c. $\bar{y}_i < 0$
3) non degenere se $\bar{y}_i \ne 0 \ \forall i \in B$
4) degenere se $\exists i \in B$ t.c. $\bar{y}_i = 0$

ho 2 casi 4A) se $\bar{y}_B \geq 0 \Rightarrow$ STOP $\Rightarrow$

$\bar{y}_B$ risolve (D_B) e quindi (D_R) ***
$\bar{x}$ è sol ottima per (P)
$\bar{y}^T = [\bar{y}_B^T \; 0] = [c^T A_B^{-1} \; 0]$ è sol ottima per D

4B) se $y_B \not\geq 0$ l'alg continua

5) $h = \min\{i \in B \mid \bar{y}_i < 0\}$, $B(h) =:$ indica la posizione dell'indice h in B (può essere 1 o 2 se B ha solo due elt)

6) $\bar{\xi} = -A_B^{-1} u_{B(h)}$
$\hookrightarrow$ è il vettore $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ se $B(h) = 1$; è $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ se $B(h) = 2$

OSS $c^T \bar{\xi} = -c^T A_B^{-1} u_{B(h)} = -\bar{y}_h > 0 \Rightarrow \bar{\xi}$ è una dir. di crescita

- se $\bar{x}$ è non deg cioè $I = B \Rightarrow \bar{\xi}$ è dir. amm
- se $\bar{x}$ è deg cioè $I \supset B \Rightarrow A_B \bar{\xi} \leq 0 \not\Rightarrow A_I \bar{\xi} \leq 0$
e quindi può esistere $i \in I \setminus B$ t.c. $A_i \bar{\xi} > 0 \Rightarrow \bar{\xi}$ non è dir. amm

7) $A_N \bar{\xi}$

ho 2 casi 7A) se $A_N \bar{\xi} \leq 0 \Rightarrow$ STOP $\Rightarrow$ $\boxed{\bar{\lambda} = +\infty, \; (P) \text{ è sup. illim} \Rightarrow (D) = \emptyset}$

7B) se $A_N \bar{\xi} \not\leq 0 \Rightarrow$ procedo con l'alg.

8) $J = \{i \in N \text{ t.c. } A_i \bar{\xi} > 0\}$

9) $\lambda_i = \dfrac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i \bar{\xi}}$

OSS $\bar{\lambda} \geq 0$ finito

$\to$ se $\bar{\lambda} > 0 \Rightarrow \bar{\xi}$ è dir amm per $\bar{x}$
l'alg. si sposta in un nuovo vertice
e cambia base

cambio di base non degenere

$\to$ se $\bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \bar{\xi}$ non è dir. amm per $\bar{x}$
questo accade $\Leftarrow \bar{x}$ è degenere
l'alg non cambia vertice
ma cambia base.

cambio di base degenere

10) $\bar{\lambda} = \min\{\lambda_i \mid i \in J\}$

11) $K = \min\{i \in J \mid \bar{\lambda} = \lambda_i\}$

12) $B = B \setminus \{h\} \cup \{K\}$

Ripeto il procedimento con la nuova base partendo da 1)

SOL 2

1) $\bar{\xi}$ è direzione di crescita $\Leftrightarrow c^T \bar{\xi} > 0$
2) $\bar{\xi}$ è direzione di decrescita $\Leftrightarrow c^T \bar{\xi} < 0$
3) se $c^T \bar{\xi} = 0 \Rightarrow \bar{\xi}$ non è né dir. di cresita né di decrescita.

$\bar{\xi}$ è dir amm $\Leftrightarrow A_i \bar{\xi} \leq 0 \; \forall i \in I(\bar{x})$

SOL 3 (capita se l'alg termina perché $y_B \geq 0$)

se $\bar{y}$ è sol ottima duale non degenere $\Rightarrow \bar{x}$ è l'unica sol ottima di (P)

SOL 4

si usa la condizione degli s.c. tipo $(P) \longrightarrow (D)$