PL DUALE ALGEBRICO

mercoledì 14 agosto 2024 09:45

05-06-2024
05-06-2023

04-02-2019
20-02-2019
10-06-2019
14-01-2020
09-01-2018
21-11-2018
17-09-2018
17-07-2018
05-06-2018

08-11-2017
08-09-2017
27-06-2017
20-02-2017
12-01-2017
21-07-2016
11-06-2016
16-02-2016
08-01-2016
26-01-2015
09-06-2015

1) Si risolva il seguente problema di PL applicando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplesso Duale, a partire dalla base B. Per ogni iterazione si indichino:

- la base,
- la matrice di base e la sua inversa,
- la coppia di soluzioni di base,
- l'indice entrante k,
- il vettore n_B
- il passo di spostamento $\bar{\theta}$
- l'indice uscente h.

2) Discutere l'eventuale degenerazione primale e duale della base ottima

3) In caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima primale e/o duale individuata sia unica

4) In caso di ottimo finito, si individui l'insieme delle soluzioni ottime del problema duale e primali.
    - e si verifichi se y = [0, 0, 0, 3, 2] sia una soluzione ottima duale alternativa a quella individuata dall'algoritmo.

5) Se il problema duale risultasse inferiormente illimitato (in caso di ottimo non finito), quale sarebbe la direzione di decrescita illimitata individuata dall'algoritmo?

6) Al termine si dimostri formalmente la correttezza della risposta fornita dall'algoritmo.

7) Si consideri quindi il caso in cui cambiano i costi di alcune variabili o del termine noto , come cambia il risultato?

SOL 1

se $B = \{1\,2\}$ e (P) $\max\ 3x_1 + 2x_2$

$$\Rightarrow A_B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 1.\ \ 5x_1 + 6x_2 \le 3 \\ 2.\ \ \quad\quad\ \ 3x_2 \le 1 \\ 3.\ \ 7x_1 \quad\quad\ \ \le 4 \\ 4.\ \ 2x_1 + 4x_2 \le 5 \end{cases}$$

$b_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c^T = (3\ \ 2)$

$A_N = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad b_N = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

1) $A_B = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$

2) $A_B^{-1} = \dfrac{1}{\det A_B} \begin{pmatrix} v & -t \\ -u & s \end{pmatrix}$

3) $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$

4) $\bar{y}_B = c^T A_B^{-1} \qquad \bar{y}_N^T = 0 \quad \Rightarrow y^T = [\ \bar{y}_B^T \ \ \bar{y}_N^T\ ] = [\ \bar{y}_B^T \ \ 0\ ]$

5) $A_N \bar{x}$

ho 2 casi

5 A) se $A_N \bar{x} \le b_N \Rightarrow$ STOP $\Rightarrow$ $\boxed{\bar{x} \text{ è sol ottima di (P) e } \bar{y} \text{ sol ottima di (D)}}$

5 B) se $A_N \bar{x} \nleq b_N \Rightarrow$ procedo con l'alg.

l'alg det. una direz di crescita d per $\bar{y}$

$$d = \begin{bmatrix} -\eta_B \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \in B \\ i = k \\ i \in N \end{matrix}$$

6) $k = \min \{ i \in N \mid A_i \bar{x} > b_i \}$

7) $\eta_B^T = A_k A_B^{-1}$

ho 2 casi

7 A) se $\eta_B \le 0 \Rightarrow$ $\boxed{(D) \text{ è inf illim} \Rightarrow (P) = \emptyset}$ d dir. di cr. illimitata

7 B) $\exists\, i \in B$ t.c. $\eta_i > 0$ l'alg continua

8) $\bar{\theta} = \min \left\{ \dfrac{\bar{y}_i}{\eta_i} \,\middle|\, i \in B, \eta_i > 0 \right\}$

9) $h = \min \left\{ i \in B \mid \eta_i > 0 \ \ \bar{\theta} = \dfrac{\bar{y}_i}{\eta_i} \right\}$

10) $B = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$

Ripeto il procedimento con la nuova base partendo da 1)

SOL 2

1) caratterizzare la sol. di base primale

(*) $\bar{x}$ sol di base primale è
1) ammissibile se $A_i \bar{x} \le b_i \ \ \forall i \in N$
2) non ammissibile se $\exists\, i \in N$ t.c. $A_i \bar{x} > b_i$
3) non degenere se $A_i \bar{x} \ne b_i \ \ \forall i \in N$
4) degenere se $\exists\, i \in N$ t.c. $A_i \bar{x} = b_i$

2) caratterizzare la sol di base duale

(**) $\bar{y}$ sol di base duale è
1) ammissibile se $\bar{y}_i \ge 0 \ \ \forall i \in B$
2) non ammissibile se $\exists\, i \in B$ t.c. $\bar{y}_i < 0$
3) non degenere se $\bar{y}_i \ne 0 \ \ \forall i \in B$
4) degenere se $\exists\, i \in B$ t.c. $\bar{y}_i = 0$

SOL 3

Per quanto riguarda l'unicità delle soluzioni ottime determinate

1) se la soluzione ottima duale è non degenere allora la soluzione ottima del primale è necessariamente unica.

2) se la soluzione ottima primale è non degenere allora la soluzione ottima del duale è necessariamente unica.

3) se la soluzione ottima primale è degenere (guardare gli intorni attivi di $\bar{x}$) allora la soluzione ottima duale potrebbe non essere unica.

risolvo DR

- Aiutandosi con considerazioni di carattere geometrico, si può verificare che il vettore dei costi c è esprimibile come combinazione lineare non negativa dei vettori riga corrispondenti a tali vincoli attivi in infiniti modi. In particolare, c ∈ cono{Ai, Aj}
- Segue che la soluzione ottima duale non è unica.

SOL 4

Con gli scarti complementari

SOL 5

Capita quando $\eta_B \leq 0 \Rightarrow$ (D) è inf. ill. e $(P) = \emptyset$

La direzione di decrescita illimitata individuata dall'algoritmo è un vettore d i cui elementi sono:

- 0 in corrispondenza degli indici non in base (ultima base dell'iterazione) eccetto k(indice entrante)
- $-\eta_B$ in corrispondenza degli indici in base
- Nella posizione k (indice entrante) si ha d(k)=1

SOL 6

Poiché $\eta_B \leq 0$, l'algoritmo termina dichiarando che il duale è inferiormente illimitato e di conseguenza il primale è vuoto. Per mostrare che questo è vero basta esibire la direzione $d = [0, 2/3, 0, 1/3, 1]$. È facile verificare algebricamente che $db < 0$, ovvero d è una direzione di decrescita. Inoltre $dA = 0$ e $y(\theta) = \bar{y} + \theta d \geq 0$ per ogni $\theta \geq 0$. Pertanto, $y(\theta)$ è una soluzione ammissibile per ciascun $\theta \geq 0$, e quando $\theta \to +\infty$ si ha $y(\theta)b \to -\infty$; ciò dimostra la correttezza della risposta dell'algoritmo.