PL

lunedì 5 agosto 2024 10:34

Cosa è la Programmazione lineare ?

Sono problemi di ottimizzazione caratterizzati da:

1) la funzione obiettivo $c(x): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare

cioè $\boxed{c(x) = c^T x}$ con $\underset{\downarrow}{c} \in \mathbb{R}^n$, $\underset{\downarrow}{x} \in \mathbb{R}^n$

vettore dei costi, vettore delle var. decisionali

2) l'insieme ammissibile F è definito da un insieme di vincoli lineari del tipo:

- $\alpha^T x = \beta$
- $\alpha^T x \le \beta$
- $\alpha^T x \ge \beta$

$\alpha \in \mathbb{R}^n$ vettore dei coeff.

$\beta \in \mathbb{R}^n$ termine noto

nota: PL è polinomiale

Forma standard di PL

$$\boxed{\max \{ c^T x : Ax \le b \}} \; *$$

$x \in \mathbb{R}^n$: vettore delle var.

$c \in \mathbb{R}^n$: vettore dei costi

A: matrice reale dei coeff. $m \times n$ con $m \ge n$

$b \in \mathbb{R}^n$: vettore dei termini noti

Qualsiasi problema di PL può essere ricondotto alla forma standard* tramite le trasformazioni sintattiche

1) $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \equiv - \min \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$

2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \equiv \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \ge b_i \end{cases}$

3) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \equiv \sum (-a_{ij}) x_j \le -b_i$

4) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \equiv \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i \\ s_i \ge 0 \end{cases}$

var. strutturale — s_i: var. di scarto

5) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \equiv \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i \\ s_i \ge 0 \end{cases}$

6) x_i non vincolata in sgn $\equiv \begin{cases} x_i = x_i^+ - x_i^- \\ x_i^+ \ge 0 , \; x_i^- \ge 0 \end{cases}$

Esempio

$\min(-2x_1 + 3x_2) \overset{1}{\equiv} -\max(2x_1 - 3x_2)$

$x_1 - x_2 \ge -1 \overset{3}{\equiv} -x_1 + x_2 \le 1$

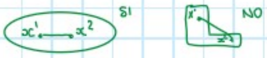
$2x_1 + x_2 = 3 \overset{2}{\equiv} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \ge 3 \end{cases} \overset{3}{\equiv} -2x_1 - x_2 \le -3$

$x_2 \le 0 \overset{5}{\equiv} x_2 + s_i = 0 \Rightarrow x_2 \le 0$

Geometria della PL

Definizioni

- Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ si dice **convesso** se comunque si scelgano $x^1, x^2 \in K$ si ha $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in K$ con $\lambda \in [0,1]$



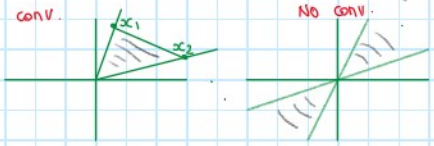
- Un pto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice **combinazione convessa** di $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$
  con $\boxed{\lambda_i \in [0,1] \quad i = 1, \dots, m}_1$ e $\boxed{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1}_2$

  la comb. conv. è **propria** se $0 < \lambda_i < 1 \ \forall i$

- L'**involucro convesso** di un insieme K **conv (K)** è l'insieme di tutte le possibili comb. convesse di elt. di K
- conv (K) è il più piccolo insieme convesso che contiene K $(K \subseteq \text{conv}(K))$
- se K è convesso $\Rightarrow K = \text{conv}(K)$

- Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ si dice **cono** se $\forall x \in K$ e $\forall \lambda \geq 0$ si ha $\lambda x \in K$

  Se K contiene un pto $x_1 \neq$ dall'origine $\Rightarrow K$ contiene tutta la semiretta uscente dall'origine e passante per x_1



⚠ non tutti i coni sono convessi!

- Un pto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice **comb. conica** di $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$ $\quad \lambda_i \geq 0 \ \forall i$ 1

  La comb conica è **propria** se $\lambda_i > 0 \ \forall i$
- L'**involucro conico** di un insieme K **cono (K)** è l'insieme di tutte le possibili comb. coniche di elt. di K
- cono (K) è il più piccolo cono convesso che contiene K $(K \subseteq \text{cono}(K))$
- K è un cono convesso $\Leftrightarrow$ cono(K) $= K$

Poliedri

Un semispazio chiuso in $\mathbb{R}^n$ può essere descritto algebricamente come l'insieme delle soluzioni di una diseq. lin in n var.
$\alpha^T x \leq \beta \quad \alpha \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}$

- Un **poliedro** di $\mathbb{R}^n$ è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di $\mathbb{R}^n$. Quindi $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ $\quad b \in \mathbb{R}^m \quad A\,(m \times n)$
  (rapp. per facce)

  nota: P è convesso in quanto $P = \bigcap^{\text{finito}}$ semispazi chiusi (che sono conv)

- Un Poliedro che è anche un cono è detto **cono poliedrico**

Prop 1

Se P è un cono poliedrico $\Rightarrow \exists\ Q$ matrice t.c. $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}$

dim

P è un poliedro $\Rightarrow P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Qx \leq q\}$ Mostriamo che $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Qx \leq q\} \stackrel{?}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid Qx \leq 0\}$

$\supseteq$ P è un cono quindi contiene l'origine cioè $0 = Q \cdot 0 \leq q$ quindi se $Qx \leq 0 \Rightarrow Qx \leq q$

$\subseteq$ se $Qx \leq q$ cioè $x \in P \underset{\text{Pcono}}{\Rightarrow} \lambda x \in P \ \forall \lambda > 0 \Rightarrow Q(\lambda x) \leq q \Leftrightarrow \lambda Qx \leq q \Leftrightarrow Qx \leq \frac{q}{\lambda} \Rightarrow Qx \leq 0 \quad \forall \lambda > 0$

- Un vertice di un poliedro e' un pto di P che non può essere espresso come comb conv. propria di altri pti di P
  Vert(P) = l'insieme dei vertici di P

- Una direzione di recessione per P e' un vettore d tale che $\boxed{x + \lambda d \in P \quad \forall x \in P, \forall \lambda \geq 0}$
  1
  rec(P) = l'insieme delle direzioni di recessione di P
  Quindi d e' una direz di recessione se P contiene tutte le semirette di direz d uscenti da pti di P.

- $0 \in rec(P)$
- se P e' limitato $\Rightarrow \{0\} = rec(P)$

Teo 1 "rec(P) e' un cono poliedrico"

Dato $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \Rightarrow rec(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$

- Dati due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}^n \Rightarrow A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

Prop 2

Dato un Poliedro P si ha che $P + rec(P) = P$

- Una direzione di linealita' per P e' un vettore d tale che $d \in rec(P)$, $-d \in rec(P)$
  ovvero P contiene tutte le rette di direzione d passanti per P
  lineal(P) =: insieme delle direzioni di linealita' di P
  lineal(P) e' ssp vett.

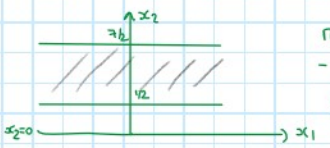
Teo 2

Dato $P = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } Ax \leq b\} \Rightarrow lineal(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } Ax = 0\}$

dim

$lineal(P) \underset{\text{def di dir. di linealità}}{=} rec(P) \cap (-rec(P)) \underset{\text{Teo 1}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } Ax \leq 0, Ax \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } Ax = 0\}$

es $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } 2x_2 \leq 7, -2x_2 \leq -3\}$



$rec(P) = x_2 \leq 0$
$-rec(P) = x_2 \geq 0$
$lineal(P) = rec(P) \cap -rec(P) = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x_2 = 0\}$

Caratterizzazione geometrica dei Poliedri

Lemma 1 "cono $(e^1, \dots, e^p)$ = cono poliedrico"

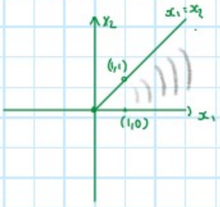
L'involucro conico di un insieme finito di punti $\{e^1, \dots, e^p\}$ è un cono poliedrico, cioè $\exists$ Q mat. t.c. $\text{cono}(\underbrace{e^1, \dots, e^p}_{\text{generatori del cono}}) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } Qx \le 0\}$ ↳ def di cono pol.

Lemma 2 cono poliedrico = cono (pti finiti di P)

Un cono poliedrico $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le 0\}$ è l'involucro conico di un insieme finito di suoi pti

es: $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } -x_1 \le 0,\ -x_2 \le 0,\ -x_1 + x_2 \le 0\}$

$-x_1 \le 0 \to x_1 \ge 0$, $-x_2 \le 0 \to x_2 \ge 0$, $-x_1 + x_2 \le 0 \to x_1 \ge x_2$



$P = \text{cono}(\{(1,0), (1,1)\})$

rapp mediante generatori

Teo 1 "Decomposizione di Poliedri"

$P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro $\iff$ 1) $\exists\ V \subseteq P$ finito $V = \{v^1, \dots, v^m\}$
2) $\exists$ E insieme finito $E = \{e^1, \dots, e^p\}$

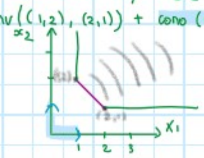
tali che $\boxed{P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E)}$

V, E possono essere $\emptyset$

es

$P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 \le -1,\ -x_2 \le -1,\ -x_1 - x_2 \le -3\}$ ($\to x_2 \ge 3 - x_1$)

$P = \text{conv}((1,2), (2,1)) + \text{cono}((0,1), (1,0))$



$x_2 = 3 - x_1$ ↓ $\text{conv}((1,2),(2,1))$

Teo 2 "cono(E) = rec(P)"

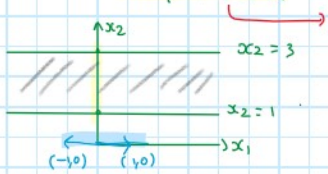
$P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro $\iff$ 1) $\exists\ V \subseteq P$ finito $V = \{v^1, \dots, v^m\}$

tali che $\boxed{P = \text{conv}(V) + \text{rec}(P)}$

$P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_2 \le -1,\ x_2 \le 3\}$

$P = \text{conv}\{(0,1), (0,3)\} + \text{cono}((1,0), (-1,0))$

↳ non sono vertici di P.



Teo 3 "Se P non contiene rette"

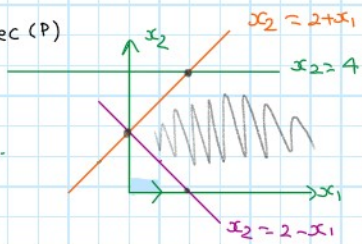
Se P è un poliedro con $\text{lineal}(P) = \{0\} \Rightarrow P = \text{conv}(\text{vert}(P)) + \text{rec}(P)$

$P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \le 4,\ -x_1 - x_2 \le -2,\ -x_1 + x_2 \le 2,\ -x_2 \le 0\}$

$-x_1 - x_2 \le -2 \to x_1 + x_2 \ge 2,\ x_2 \ge 2 - x_1$; $-x_1 + x_2 \le 2 \to x_2 \le 2 + x_1$

$P = \text{conv}(\{(0,2), (2,0), (2,4)\}) + \text{cono}\{(1,0)\} = \text{conv}(\text{vert}(P)) + \text{rec}(P)$

" "



Corollario colleg. tra linealità e mancanza di vertici

Corollario colleg. tra linealità e mancanza di vertici

$\forall P \neq \emptyset$ si ha $vert(P) \neq \emptyset \Leftrightarrow lineal(P) = \{0\}$

dim

$\Rightarrow$

Sia $\bar{x}$ vertice di P. Se per ass $lineal(P) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, d \in lineal(P)$ con $d \neq 0$. e cioè

$d \in rec(P)$ e $-d \in rec(P)$

$\bar{x} + \lambda d \in P$ $\quad \bar{x} - \lambda d \in P$ $\quad (\lambda \geq 0)$

Quindi prendendo $\lambda = 1$ si ha $\bar{x} + d \in P$ e $\bar{x} - d \in P$

Inoltre $\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x} + d) + \frac{1}{2}(\bar{x} - d)$ ↯ ho scritto un vertice di P $\bar{x}$ come comb conv. propria di elt di P

$\Leftarrow$

Se $lineal(P) = \{0\} \overset{\text{Teo 3}}{\Rightarrow} P = conv(vert(P)) + rec(P)$ $\quad (P \neq \emptyset$ per hp$)$

Ora ho 2 casi
1) $vert(P) \neq \emptyset$
2) $rec(P) = P \Rightarrow 0 \in rec(P) \Rightarrow$ l'origine è un vertice di P

Osservazioni

1) Dal punto di vista computazione si usa la rappresentazione per facce di un poliedro
2) Il numero di vertici e generatori può essere esponenziale rispetto alla dim del problema di PL
   Es cubo : n=3 --> facce 2.n=6
   --> vertici $2^n = 8$
3) Usiamo il teorema di decomposizione di poliedri per dimostrare che su un problema di PL ha sol ottima allora almeno un vertice del poliedro che rappresenta le sue sol ammissibili è sol ottima.

Teo fondamentale della PL

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax \leq b\}$ un poliedro non vuoto tale che $lineal(P) = \{0\}$

Siano $\{v^1, \dots, v^m\}$ i vertici di P

Siano $\{e^1, \dots, e^p\}$ tali che $P = conv(\{v^1, \dots, v^m\}) + cono(\{e^1, \dots, e^p\})$

Si consideri il problema di PL : $(\mathcal{P}) : \max\{c^T x : \underbrace{Ax \leq b}_{x \in P}\}$

Allora $\mathcal{P}$ ha ottimo finito $\Leftrightarrow c^T e^j \leq 0 \quad j = 1, \dots, p$

In tal caso $\exists\, K \in \{1, \dots, m\}$ tale che il vertice v^K è una sol. ottima di $\mathcal{P}$

dim

$(\mathcal{P}) : \max\{c^T x : Ax \leq b\}$ può essere riformulato come $\max\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (c^T v^i) + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j (c^T e^j)\right)$ con $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $\gamma_j \geq 0$ $\quad j = 1, \dots, p$ $\quad$ rapp. per pti e generatori

$\Rightarrow$ per hp $\mathcal{P}$ ha valore ottimo finito. Se per ass. $\exists\, j \in \{1, \dots, p\}$ tale che $c^T e^j > 0$ facendo crescere γ_j il valore ottimo tenderebbe a $+\infty$ ↯

$\Leftarrow$ Supponiamo ora che $c^T e^j \leq 0 \quad j = 1, \dots, p$.

Sia x una qualunque sol ammissibile cioè $x \in P$

$c^T x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (c^T v_i) + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \underbrace{(c^T e^j)}_{\leq 0} \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (c^T v^i) \leq c^T v^K \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right) = c^T v^K$

dove v^K è un vertice t.c. $c^T v^K = \max\{c^T v^i$ t.c. $i = 1, \dots, m\}$

Quindi $c^T x \leq c^T v^K$ mi dice che $\mathcal{P}$ ha ottimo finito ed $\exists$ un vertice che è sol ottima di $(\mathcal{P})$

Corollario

$\max\{c^T x : Ax \leq b\}$ è sup. illim. $\Leftrightarrow \exists\, e^j$ diret. di recess. di $P = \{x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax \leq b\}$. tale che $c^T e^j > 0$ (diret. di crescita illimitata)

Inserire es. Pintel.

TEORIA DELLA DUALITA'

Coppia simmetrica di problemi duali

$\max c^T x$ | $\min y^T b$
$Ax \le b$ | $y^T A \ge c^T$
 | $y \ge 0$

Dato un problema di PL nella forma primale $\max\{c^T x : Ax \le b, x \ge 0\}$

ad esso è associato il problema di PL nella forma duale $\min\{y^T b : y^T A \ge c^T, y \ge 0\}$

Teo 1

Il duale del duale è il primale

dim (→ P. duale, → def duale)

$\min\{y^T b : y^T A \ge c^T, y \ge 0\} = -\max\{-y^T b : -y^T A \le -c^T, y \ge 0\} = -\max\{(-b)^T y : (-A^T) y \le -c, y \ge 0\} = -\min\{x^T(-c) : x^T(-A^T) \ge (-b)^T, x \ge 0\}$

$= \max\{c^T x : Ax \le b, x \ge 0\} =:$ primale

Consideriamo la seguente coppia (P) $\max c^T x$, $Ax \le b$ (D) $\min y^T b$, $y^T A = c^T$, $y \ge 0$

questa si chiama coppia asimmetrica di problemi duali ed è equiv. alla def. precedente

Corrispondenza primali - duali

max	min
c	b
b	c
$A_i x \le b_i$	$y_i \ge 0$
$A_i x \ge b_i$	$y_i \le 0$
$A_i x = b_i$	$y_i \gtrless 0$
$x_j \ge 0$	$yA^j \ge c_j$
$x_j \le 0$	$yA^j \le c_j$
$x_j \gtrless 0$	$yA^j = c_j$
x	y
una per ogni colonna di A	una per ogni riga di A

es

$\min (2x_1 + 3x_2)$

y_1: $1x_1 - 1x_2 \ge 2$

y_2: $2x_1 + 1x_2 \le 3$

y_3: $4x_1 - 1x_2 = 1$

$x_1 \ge 0$

$\max (2y_1 + 3y_2 + 1y_3)$

$1y_1 + 2y_2 + 4y_3 \le 2$

$-1y_1 + 1y_2 - 1y_3 = 3$

$y_1 \ge 0$

$y_2 \le 0$

$y_3 \gtrless 0$

Ho tante var. nel duale quanti i vincoli non di sgn. $(x_i \ge 0)$ nel primale

Ho tanti vincoli nel duale quanti il numero di colonne della matrice

Devo dare event. limit. di sgn.

Teorema 2 "debole della dualità"

Consideriamo la coppia asimmetrica di problemi duali

(P) $\max c^T x$, $Ax \le b$ (D) $\min y^T b$, $y^T A = c^T$, $y \ge 0$

Se $\bar{x}$ è sol ammissibile per (P) e $\bar{y}$ è sol amm. per (D) $\Rightarrow$ $\boxed{c^T \bar{x} \le \bar{y}^T b}$

dim

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y}^T A = c^T \Rightarrow c^T \bar{x} = (\bar{y}^T A)\bar{x} \\ A\bar{x} \le b,\ \bar{y} \ge 0 \Rightarrow \bar{y}^T (A\bar{x}) \le \bar{y}^T b \end{array}\right\} \Rightarrow c^T \bar{x} \le \bar{y}^T b$$

Corollario 1

Se (P) è sup. illimitato $\Rightarrow$ (D) è $\emptyset$

Se (D) è inf illimitato $\Rightarrow$ (P) è $\emptyset$

Corollario 2

Se (P), (D) $\ne \emptyset \Rightarrow \max\{c^T x : Ax \le b\} \le \min\{y^T b : y^T A = c^T, y \ge 0\}$

Corollario 3 "certificato di ottimalità"

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se 1) } \bar{x} \text{ è sol amm. per (P)} \\ \text{2) } \bar{y} \text{ è sol amm. per (D)} \\ \text{3) } c^T \bar{x} = \bar{y}^T b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{x} \text{ è sol ottima per (P)} \\ \bar{y} \text{ è sol ottima per (D)} \end{array}$$

Come det una sol ottima per (P) se $\exists$

Sia $(P) \neq \emptyset$, sia $\bar{x}$ sol amm. per (P)

- $\xi \in \mathbb{R}^n$ e' una direzione ammissibile per $\bar{x}$ se $\exists\ \bar{\lambda} > 0$ tale che $\bar{x}(\lambda) = \bar{x} + \lambda \xi$ e' ammissibile per (P) $\forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$

algebricamente $\xi \in \mathbb{R}^n$ e' una direz. ammissibile per $\bar{x} \iff A\bar{x}(\lambda) \leq b \ \forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$

ovvero: $A_i \bar{x}(\lambda) \leq b_i \quad \forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}] \quad \forall i = 1,..,m$

ovvero $A_i(\bar{x} + \lambda \xi) \leq b_i$

ovvero $A_i(\bar{x}) + \lambda A_i \xi \leq b_i$

L'insieme dei vincoli attivi in $\bar{x}$ e' l'insieme dei vincoli soddisfatti in forma di uguaglianza

$I(\bar{x}) = \{ i \in \{1,..,m\} \text{ t.c. } A_i \bar{x} = b_i \}$

osserv. 1) se $i \in I(\bar{x}) \rightarrow A_i(\bar{x} + \xi\lambda) = \underbrace{A_i \bar{x}}_{b_i} + \underbrace{\lambda}_{\lambda > 0} A_i \xi = b_i + \lambda A_i \xi \leq b_i \iff A_i \xi \leq 0$

2) se $i \notin I(\bar{x})$ (vincolo non attivo in $\bar{x}$) $\rightarrow A_i(\bar{x} + \xi\lambda) = \underbrace{A_i \bar{x}}_{< b_i} + \lambda A_i \xi \leq b_i \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ purche' si scelga λ suff. piccolo.

Caratterizzazione alg. delle direzioni ammissibili

$\xi \in \mathbb{R}^n$ e' una direz ammissibile per $\bar{x} \iff \boxed{A_i \xi \leq 0} \quad \forall i \in I(\bar{x})$, ovvero $A_{I(\bar{x})} \xi \leq 0$
dove $A_{I(\bar{x})}$ e' la sottomatrice di A formata dalle sole righe di coeff corr ai vincoli attivi

Quindi l'insieme delle direz. ammissibili per $\bar{x}$ e' il cono poliedrico $C(\bar{x}) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid A_{I(\bar{x})} \xi \leq 0 \}$

oss
Se $\bar{x}$ e' interno a $P \Rightarrow I(\bar{x}) = \emptyset$ e $C(\bar{x}) = \mathbb{R}^n$ cioè ogni direz è ammissibile per $\bar{x}$

- Una direzione $\xi \in \mathbb{R}^n$ e' di crescita per $\bar{x}$ se $c^T \bar{x}(\lambda) = c^T \bar{x} + \lambda c^T \xi > c^T \bar{x}$ per $\lambda > 0$
$\bar{x}(\lambda) = \bar{x} + \lambda \xi$

Caratt alg. delle direz di crescita

$\xi \in \mathbb{R}^n$ e' una direz di crescita $\iff \boxed{c^T \xi > 0}$
nota non dipende da $\bar{x}$

oss
Se $c = 0$ $\nexists$ direz di crescita (ogni sol ammissibile e ottima per (P))

Se $c \neq 0$

Lemma
Sia $(P) \neq \emptyset$ e $c \neq 0$.

Una sol ammissibile $\bar{x}$ e' ottima per $(P) \iff \nexists$ direz ammissibili per $\bar{x}$ che siano anche direz. di crescita
dim
$\Rightarrow$ Sia $\bar{x}$ ottimo. Se per ass $\exists$ una direz amm. per (P) che sia anche di crescita, spostandomi di un opportuno λ lungo ξ otterrei una sol ammissibile di costo maggiore $\nexists$ $\bar{x}$ era ottima

$\Leftarrow$ Se per ass $\bar{x}$ non e' ottima $\Rightarrow \exists\ x'$ amm per (P) tale che $c^T x' > c^T \bar{x}$ ovvero $c^T(x' - \bar{x}) > 0$

Considero la direzione $\xi = (x' - \bar{x})$

1) ξ e' di crescita perche' $c^T \xi > 0$
2) ξ e' ammissibile per $\bar{x}$ in quanto $\bar{x}(\lambda) = \bar{x} + \lambda \xi = \bar{x} + \lambda(x' - \bar{x}) = \bar{x} + \lambda x' - \lambda \bar{x} = \lambda x' + (1 - \lambda)\bar{x}$

$\Rightarrow \bar{x}(\lambda) \in$ al poliedro che def la regione amm. di P $\forall \lambda \in [0,1]$ essendo un insieme convesso

$\Rightarrow \bar{x}$ e' sol ottima di (P)

Quindi se $c \neq 0$, $\bar{x}$ interno al poliedro non puo' essere sol ottima di (P)

Quindi se $c \neq 0$, $\bar{x}$ interno al poliedro non può essere sol ottima di (P)
in quanto $\xi = c$ è ammissibile per $\bar{x}$ e anche di crescita $c^T\xi = c^Tc = \|c\|_2^2 > 0$

Il lemma precedente può essere così riformulato

Sia $(P) \neq \emptyset$ e $c \neq 0$ una sol $\bar{x}$ amm. è ottima per (P) $\iff$ $\begin{cases} A_{I(\bar{x})}\xi \leq 0 \\ c^T\xi > 0 \end{cases}$ non ha sol

Come rafforzare il legame con il problema duale

Lemma di Farkas

Data A mat reale $m \times n$, dato $c \in \mathbb{R}^n$. I due sistemi (S_P): $\begin{cases} A\xi \leq 0 \\ c^T\xi > 0 \end{cases}$ (S_D): $\begin{cases} y^TA = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$
sono mutuamente esclusivi (ovvero solo uno dei due ha sol)

Primale Ristretto (ai soli vincoli attivi)
(PR): $\begin{cases} A_I\xi \leq 0 \\ c^T\xi > 0 \end{cases}$

Duale Ristretto ai soli vincoli attivi
(DR) $\begin{cases} y_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases}$

Corollario

Sia $(P) \neq \emptyset$ e $c \neq 0$. Una sol ammissibile $\bar{x}$ è ottima per (P) $\iff$ (DR) ha sol.

Teorema forte della dualità

Se $(P), (D) \neq \emptyset \Rightarrow \max\{c^Tx : Ax \leq b\} = \min\{y^Tb : y^TA = c^T, y \geq 0\}$
OSS
$(D) \neq \emptyset \Rightarrow$ (P) non è super. illimitato e $(P) \neq \emptyset \Rightarrow$ (P) ha ottimo finito

dim
caso $c = 0$
$\max\{0^Tx : Ax \leq b\} = 0$
$\min\{y^Tb : y^TA = 0, y \geq 0\}$ $\Rightarrow$ ① $\bar{y} = 0$ è sol ammissibile per (D) con $y^Tb = 0$, ② $\bar{x} = 0$ è sol. amm. per (P)
③ $y^Tb = 0 = c^Tx$
Per un corollario 3 del teo debole di dualità e il v. ottimo sia di (P) che di (D)

caso $c \neq 0$
Sia $\bar{x}$ una sol ottima di (P) e I l'insieme degli indici attivi in $\bar{x}$
($I \neq \emptyset$ in quanto $c \neq 0$, altrimenti avrei che $\bar{x} \in \text{Int}(P)$ che non sono mai sol ottimali)

Per il corollario precedente DR ha sol $\bar{y}_I$: $\begin{cases} \bar{y}_I^T A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases}$

Completiamo $\bar{y}_I$ con uno 0 per ogni componente in $\bar{I}$

Sia $\bar{y}^T = [\,\bar{y}_I \quad 0\,]$

1) $\bar{y}$ è ammissibile per D $\rightarrow$ $\bar{y}^TA = \bar{y}_I^T A_I = c^T$
$\bar{y} \geq 0$ in quanto $\bar{y}_I \geq 0$

2) $\bar{y}^Tb = \bar{y}_I^T b_I = \bar{y}_I^T \underbrace{(A_I\bar{x})}_{b_I} = \underbrace{(\bar{y}_I^T A_I)}_{c^T}\bar{x} = c^T\bar{x}$

Da un corollario del Teo debole di dualità segue che $\bar{y}$ è ottima per (D) e
$c^T\bar{x} = \max\{c^Tx : Ax \leq b\} = \min\{y^Tb : y^TA = c^T, y \geq 0\} = \bar{y}^Tb$

Teorema

Se (P) ha ottimo finito allora anche (D) ha ottimo finito e viceversa
dim
$(P) \neq \emptyset \Rightarrow$ (D) non è inf illimitato
Se per ass $(D) = \emptyset$ allora il sistema $\begin{cases} y^TA = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$ non ha sol Per il lemma di Farkas il sistema $\begin{cases} A\xi \leq 0 \\ c^T\xi > 0 \end{cases}$ ha sol $\bar{\xi}$

Si ha 1) $c^T\bar{\xi} > 0$ cioè $\bar{\xi}$ direz. di crescita

2) $A(x+\lambda\bar{\xi}) = Ax + \underbrace{\lambda A\bar{\xi}}_{\leq 0} \leq Ax \leq b$ $\forall x$ amm per (P), $\forall \lambda \geq 0$

e cioè ξ è direz. ammissibile di recessione $\forall x$ ammissibile per (P)

Segue che ξ è una direz di crescita illimitata $\Rightarrow$ (P) sup illim $\}$

Legame semantico tra P e D

(P) $\max c^T x$
$Ax \leq b$

(D) $\min y^T b$
$y^T A = c^T$
$y \geq 0$

c'è il $\leq \Rightarrow =$

(P)

		Ottimo finito	Sup. illimitato	vuoto
	Ottimo finito	*		
(D)	Inf illimitato			*
	vuoto		*	*

(P) e (D) vuoti

(P) $\max (x_1 + 2x_2)$

$-x_1 - x_2 \leq -1$

$x_1 + x_2 \leq -1$

$x_1 \leq 0$

(D) $\min (-y_1 - y_2)$

$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ -y_1 + y_2 = 2 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$

(P) $\emptyset$ (D) $\emptyset$

Caratterizzazione algebrica dei vertici

(P) $\max c^T x$
$Ax \leq b$

(D) $\min y^T b$
$y^T A = c^T$
$y \geq 0$

Caso 1 se $\mathrm{rnk}(A) < n$ $\Rightarrow$ il sist. lin $Ax = 0$ ammette ∞ sol. non nulle ciascuna è direz. di linealità di $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$
Un Poliedro $P \neq \emptyset$ ha vertici $\Leftrightarrow$ lineal$(P) = \{0\}$ $\Rightarrow$ $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ non ha vertici

Caso 2 se $\mathrm{rnk}(A) = n$ $\Rightarrow$ l'unica sol di $Ax = 0$ è la sol nulla cioè l'unica dir. di linealità del poliedro primale è 0 $\Rightarrow$ $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ha vertici

Inoltre A contiene una sottomatrice quadrata $n \times n$ invertibile

Definizioni

- Una base è un insieme B di indici di riga $B \subseteq \{1, \dots, m\}$ tale che la sottomatrice A_B ottenuta da A estraendo le righe A_i, $i \in B$, sia invertibile
- $A_B =:$ matrice di base
- $N = \{1, \dots, m\} \setminus B =:$ indici fuori base

  $A = \begin{bmatrix} A_B \\ A_N \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} b_B \\ b_N \end{bmatrix}$

- $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ è una sol. di base primale
- $\bar{x}$ è: 1) ammissibile se $A_i \bar{x} \leq b_i$ $\forall i \in N$

  2) non ammissibile se $\exists i \in N$ t.c. $A_i \bar{x} > b_i$

  3) non degenere se $A_i \bar{x} \neq b_i$ $\forall i \in N$

  4) degenere se $\exists i \in N$ t.c. $A_i \bar{x} = b_i$

Teorema 1

Si consideri un poliedro nella forma $\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tc } Ax \le b\} = P$
Allora $\bar{x}$ e' un vertice di P $\iff$ $\bar{x}$ e' una sol di base primale ammissibile
dim

$\Rightarrow$ sia $\bar{x}$ vertice di P e sia $I = I(\bar{x}) = \{i \text{ tc } A_i = b_i\}$
supponiamo per assurdo che $rk(A_I) < n \Rightarrow \exists\, d \neq 0$ tale che $A_I d = 0$
definiamo $z = \bar{x} + \lambda d$ e $w = \bar{x} - \lambda d$ con $\lambda > 0$ suff. piccolo
si ha $z \neq w$ e $z, w \in P$ infatti $A_I z = A_I(\bar{x} + \lambda d) = A_I \bar{x} + A_I \lambda d = \begin{cases} A_I \bar{x} = b_i & \text{se } i \in I \\ < b_i & \text{se } i \notin I \end{cases}$
(idem per w)

Pertanto $\bar{x} = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} w$ ↯ ho scritto un vertice $\bar{x}$ come comb conv. propria di elt di P

$\Leftarrow$ Per hp. $\underbrace{\bar{x} = A_B^{-1} b_B}_{\text{sol di base primale}}$, $\underbrace{A_N \bar{x} \le b_N}_{\text{ammissibile}}$

supp. per assurdo che $\bar{x}$ non sia un vertice $\Rightarrow \exists\, z \neq w$ $z, w \in P$ tali che $x = \lambda z + (1-\lambda) w$ $\lambda \in (0,1)$

$\forall i \in B$ si ha $A_i \bar{x} = \lambda \underbrace{A_i z}_{\le b_i} + (1-\lambda) \underbrace{A_i w}_{\le b} \overset{\text{base ammissibile}}{=} b_i$ accade $\iff$ $A_i z = A_i w = b_i$ $\forall i \in B$

$\iff A_B z = A_B w = b_B \iff z = w = A_B^{-1} b_B = \bar{x}$ ↯ per hp $z \neq w$

- Data una base B $\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T A_B^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$ e' una sol di base duale
- $\bar{y}$ e'
  1) ammissibile se $\bar{y}_i \ge 0$ $\forall i \in B$
  2) non ammissibile se $\exists i \in B$ tc. $\bar{y}_i < 0$
  3) non degenere se $\bar{y}_i \neq 0$ $\forall i \in B$
  4) degenere se $\exists i \in B$ tc $\bar{y}_i = 0$

Teorema 2

$\bar{y}$ e' una Soluzione di base duale ammissibile $\iff$ $\bar{y}$ e' un vertice del poliedro duale

lemma

Un vertice $\bar{x}$ e' sol ottima per (P) $\iff$ $\exists$ $B \subseteq I(\bar{x})$, B base, tale che (D_B) $\begin{cases} y_B^T A_B = c^T \\ y_B \ge 0 \end{cases}$ ha soluzione

ovvero $\iff$ $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} \ge 0$.

In tal caso $\bar{y}^T = [\bar{y}_B^T \;\; 0]$ e' sol ottima di D

Come si comporta l'algoritmo nel caso di un vertice degenere?

Se (D_B) ha sol $\Rightarrow$ (D_R) ha sol : $\bar{x}$ sol ottima

Altrimenti (P_B) ha sol $\not\Rightarrow$ (P_R) ha sol

ALGORITMO DEL SIMPLESSO PRIMARIO

Schema

(P) $\max c^T x$ $\quad Ax \le b$ non vuoto $\qquad$ (D) $\min y^T b$ $\quad y^T A = c^T$ $\quad y \ge 0$

Sia B base iniziale e $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ soluzione di base primale ammissibile ovvero un vertice del poliedro primale

Tipica iterazione

$(P_B): \begin{cases} A_B \xi \le 0 \\ c^T \xi > 0 \end{cases} \qquad (D_B): \begin{cases} y_B^T A_B = c^T \\ y_B \ge 0 \end{cases}$

$\overline{y_B}^T = c^T A_B^{-1}$ unica sol candidata a risolvere (D_B)

1) se $\overline{y_B} \ge 0 \Rightarrow \overline{y_B}$ risolve (D_B) e quindi (D_R)

$\bar{x}$ è sol ottima per (P)

$\bar{y}^T = [\overline{y_B}^T \;\; 0] = [c^T A_B^{-1} \;\; 0]$ è sol ottima per D

stop

2) se $\overline{y_B} \not\ge 0 \Rightarrow \exists\, h \in B$ tale che $\bar{y}_h = c^T A_B^{-1} u_{B(h)} < 0$

Sia $\bar{\xi} = -A_B^{-1} u_{B(h)}$

si ha che I $c^T \bar{\xi} = -c^T A_B^{-1} u_{B(h)} = -\bar{y}_h > 0 \Rightarrow \bar{\xi}$ è direz. di crescita

II $A_B \bar{\xi} = -u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \le 0$

posizione indice h in B

Conseguenze

2.1 se $\bar{x}$ è non degenere ovvero $I = B \Rightarrow A_B \bar{\xi} = A_I \bar{\xi} \le 0 \Rightarrow \bar{\xi}$ è una direz ammissibile per $\bar{x}$

2.2 se $\bar{x}$ è degenere ovvero $B \subset I \Rightarrow A_B \bar{\xi} \le 0 \not\Rightarrow A_I \bar{\xi} \le 0 \Rightarrow$ potrebbe $\exists\, i \in I \setminus B$ t.c. $A_i \bar{\xi} > 0$

in tal caso $\bar{\xi}$ non è una dir. ammis. per $\bar{x}$

Sia nel caso (2.1) che nel caso (2.2) l'alg. calcola il max passo di spostamento lungo $\xi = A_B^{-1} u_{B(h)}$

$\bar{x}(\lambda) = \bar{x} + \lambda \xi$

(1) se $i \in B \Rightarrow A_i \bar{x}(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda \underbrace{A_i \xi}_{\le 0} \le A_i \bar{x} = b_i \qquad \forall \lambda \ge 0$

(2) se $i \in N \Rightarrow$ (2A) se $A_i \bar{\xi} \le 0 \Rightarrow A_i \bar{x}(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda \underbrace{A_i \bar{\xi}}_{\le 0} \le A_i \bar{x} \le b_i \qquad \forall \lambda > 0$

(2B) se $A_i \bar{\xi} > 0 \Rightarrow A_i \bar{x}(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda A_i \bar{\xi} \le b_i \iff \lambda \le \dfrac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i \bar{\xi}}$

max passo di spost. lungo $\bar{\xi}$ è $\bar{\lambda} = \begin{cases} \min \left\{ \dfrac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i \bar{\xi}} : i \in N, A_i \xi > 0 \right\} & \text{se } \exists\, i \in N \text{ t.c. } A_i \xi > 0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

Osservazioni

① se $A_i \bar{\xi} \le 0 \; \forall i \in N$ ovvero $A_N \bar{\xi} \le 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = +\infty \Rightarrow$ (P) e' sup. illimitato $\Rightarrow$ $(D) = \emptyset$

② se $A_N \bar{\xi} \nleq 0 \Rightarrow \bar{\lambda} \ge 0$ finito

2.1 se $\bar{\lambda} > 0 \Rightarrow \bar{\xi}$ e' una dir. amm per $\bar{x}$
l'alg si sposta in $\bar{x}(\bar{\lambda}) = \bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}$ (nuovo vertice)
e l'alg cambia base $B : B \setminus \{h\} \cup \{k\}$
indice diventato attivo dopo lo spostamento

2.2 se $\bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \bar{\xi}$ non e' dir. amm per $\bar{x}$

3) cambio di base degenere

Solo se $\bar{x}$ e' degenere $\Rightarrow \exists K \in I \setminus B$ tale che $A_K \bar{\xi} > 0$ e $\bar{\lambda} = \frac{0}{A_K \bar{\xi}} = 0$
l'alg non cambia vertice ($\bar{\lambda} = 0$)
ma cambia base $B : B \setminus \{h\} \cup \{K\}$

Formalmente

Algoritmo simplesso primale $(\underbrace{A, b, c, B}_{\text{input}}, \underbrace{\bar{x}, \bar{y}, \text{stato}}_{\text{output}})$

```
begin
stato = " ";
repeat
  x̄ = A_B^{-1} b_B;
  ȳ_B^T = c^T A_B^{-1};
  ȳ_N^T = 0;
  if ȳ_B ≥ 0 then stato = "ottimo"
    else begin
      h = min { i ∈ B : ȳ_i < 0 };
      ξ̄ = -A_B^{-1} u_{B(h)};
      if A_N ξ̄ ≤ 0 then stato = "P illimitato"
        else begin
          λ̄ = min { (b_i - A_i x̄) / (A_i ξ̄) : i ∈ N, A_i ξ̄ > 0 };
          K = argmin [ λ̄_i : i ∈ N, A_i ξ̄ > 0 ];
          B = B \ {h} ∪ {K};
        end
until stato ≠ " "
end
```

regola anticiclo di Bland

La regola anticiclo di Bland garantisce che ogni base venga visitata al più una volta
Poiche' il numero delle basi e' finito, ciò assicura la terminazione dell'algoritmo

Teorema 1

Sia $k \in N$ tale che $\bar{\lambda} = \frac{b_k - A_k \bar{x}}{A_k \bar{\xi}}$. Allora 1) $B' = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$ e' una base
2) $\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}$ e' una sol di base primale ammissibile, ovvero un vertice rispetto a B'

dim ①

- I vettori A_i, $i \in B \setminus \{h\}$ sono lin. indip. in quanto B e' una base
- A_k e' lin. indip rispetto ad A_i, $i \in B \setminus \{h\}$: * poiche' $A_i \bar{\xi} = 0$ $\forall i \in B \setminus \{h\} \Rightarrow \bar{\xi}$ è ortog al ssp. generato dai vettori A_i, $i \in B \setminus \{h\}$
  * poiche' $A_k \bar{\xi} > 0$ (perchè $k \in N$, $A_k \bar{\xi} > 0$ in quanto per hp. $\bar{\lambda} = \frac{b_k - A_k \bar{x}}{A_k \bar{\xi}}$) $A_k \notin$ ssp

Segue che A_k non e' esprimibile come comb. lineare dei vettori A_i, $i \in B \setminus \{h\}$
$B' = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$ e' quindi una base e $A_{B'}$ e' una mat. di base

dim 2

Dim che $A_{B'}(\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}) = b_{B'}$ e cioe' che $\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}$ e' una sol di base primale rispetto a B'

* $A_k(\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}) = A_k \bar{x} + \bar{\lambda} A_k \bar{\xi} = A_k \bar{x} + \left(\frac{b_k - A_k \bar{x}}{A_k \bar{\xi}}\right) A_k \bar{\xi} = b_k$

* $i \in B \setminus \{h\} \Rightarrow A_i(\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}) = A_i \bar{x} + \bar{\lambda} \underbrace{A_i \bar{\xi}}_{0} = A_i \bar{x} = b_i$

Poiche' $\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}$ e' una sol ammissibile per (P), per def di $\bar{\lambda}$ segue che $\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}$ e' un vertice di P primale avente B' come base

CONDIZIONE DEGLI SCARTI COMPLEMENTARI

(P) $\max c^T x$ $\quad Ax \leq b$ (D) $\min y^T b$ $\quad y^T A = c^T$ $\quad y \geq 0$

Per i teoremi debole e forte della dualità, $\bar{x}$ sol ammissibile per (P) e $\bar{y}$ sol ammissibile per (D) sono ottime $\Leftrightarrow$ $\boxed{c^T\bar{x} = \bar{y}^T b}$

Oss che $\boxed{c^T\bar{x} = \bar{y}^T b \Leftrightarrow \bar{y}^T A\bar{x} = \bar{y}^T b \Leftrightarrow \bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0}$ vale a prescindere dell'ammissibilità di $\bar{x}$ e $\bar{y}$ purché $\bar{y}^T A = c^T$

Definizioni

$(\bar{x}, \bar{y})$ tale che $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{y}^T A = c^T$ è una coppia di sol complementari se $\bar{y}^T(b - Ax) = 0$

Teorema 1 "degli scarti complementari"

condizione degli scarti complementari

$\bar{x}$ sol ammissibile per (P) e $\bar{y}$ sol amm per (D) sono ottime $\Leftrightarrow$ $\boxed{\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0}$

Poiché $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0$, se $\bar{x}$ è amm per (P) e $\bar{y}$ è amm per (D),

le condizioni degli s.c. possono essere espresse come:

$\underset{0}{\underset{\text{VI}}{\bar{y}_i}}(\underset{0}{\underset{\text{IV}}{b_i - A_i\bar{x}}}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m$ ovvero
- $\bar{y}_i > 0 \Rightarrow A_i\bar{x} = b_i$ ovvero l'i-esimo vincolo deve essere attivo in $\bar{x}$ cioè $i \in I(\bar{x})$
- $A_i\bar{x} < b_i \Rightarrow \bar{y}_i = 0 \quad i = 1, \ldots, m$

Proposizione 1

Sia $\bar{x}$ una sol ammissibile per (P). Allora $\bar{x}$ è ottima $\Leftrightarrow$ $\exists\, \bar{y}$ sol ammissibile per (D) tale che $(\bar{x}, \bar{y})$ è una coppia di sol complem.

dim

$\Leftarrow$ Dal Teo degli scarti complementari

$\Rightarrow$ Supp che $\bar{x}$ sia ottima per (P). Allora (D) ha ottimo finito e sia $\bar{y}$ una sua sol ottima

Per il Teo forte della dualità $c^T\bar{x} = \bar{y}^T b$

Poiché $c^T\bar{x} = \bar{y}^T b \Leftrightarrow \bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$ segue che $(\bar{x}, \bar{y})$ è una coppia di sol complementari

Osservazione

se $\bar{x}$ è amm per (P) e $\bar{y}$ è amm per (D) le cond degli s.c. implicano $\bar{y}_i = 0 \quad \forall i \notin I(\bar{x})$

poiché $\bar{y}^T A = c^T \Rightarrow \bar{y}_I^T A_I = c^T$ con $\bar{y}_I \geq 0$. Ovvero $\bar{y}_I$ deve essere sol di (DR): $\begin{cases} y_I A_I = c^T \\ y_I \geq 0 \end{cases}$

Quindi ritroviamo che $\bar{x}$ è ottima per (P) $\Leftrightarrow$ $\exists$ una sol $\bar{y}_I$ di (DR) come già mostrato

Proposizione 2

Sia $\bar{y}$ sol amm per (D). $\bar{y}$ è ottima $\Leftrightarrow$ $\exists\, \bar{x}$ sol amm per (P) tale che $(\bar{x}, \bar{y})$ è una coppia di sol compl

Proprietà

Data una base B e una mat di base A_B, le sol di base $\begin{cases} \bar{x} = A_B^{-1} b_B \\ \bar{y}^T = [\bar{y}_B^T \ \bar{y}_N^T] = [c^T A_B^{-1} \ 0] \end{cases}$ soddisfano le condiz degli s.c. e $\bar{x}$ e $\bar{y}^T$ vengono chiamate sol di base complementari

dim

$$\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = [c^T A_B^{-1} \quad 0]\begin{bmatrix} b_B - A_B\bar{x} \\ b_N - A_N\bar{x} \end{bmatrix} = 0$$

ALGORITMO DEL SIMPLESSO DUALE

(P) $\max\ c^T x$
$Ax \le b$

(D) $\min\ y^T b$
$y^T A = c^T$
$y \ge 0$

Si tratta dell'algoritmo del Simplesso Primale applicato a (D), riscritto in forma primale.
Le operazioni fanno riferimento al poliedro primale

Schema dell'algoritmo

Input: B base duale o

Tipica iterazione: $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$

$\bar{y}^T = [\bar{y}_B^T \ 0]$ dove $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} \ge 0$ (vertice del poliedro duale ovvero sol di base duale ammis.)

se $A_N \bar{x} \le b_N \Rightarrow \bar{x}$ e' una sol di base primale amm STOP

- $\bar{x}$ sol ottima di (P)
- $\bar{y}$ sol ottima di (D)

altrimenti $\exists\, k \in N$ t.c. $A_k \bar{x} > b_k$

L'alg det. una direzione di crescita $d = \begin{bmatrix} -\eta_B \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{array}{l} \rightsquigarrow \text{posizione indici in base} \\ \rightsquigarrow i = k \\ \rightarrow i \in N\ i \ne k \end{array}$, $\eta_B = A_k A_B^{-1}$

Proprietà

d e' una direzione di crescita per $\bar{y}$

dim

$$\bar{y}(\theta) = \bar{y} + \theta d = \begin{bmatrix} \bar{y}_B^T \\ 0 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} -\eta_B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_B^T - \theta\eta_B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \theta \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}(\theta) b = [\bar{y}_B - \theta\eta_B]^T b_B + \theta b_k = \bar{y}_B^T b_B + \theta(b_k - \eta_B^T b_B) = \bar{y}^T b + \theta(b_k - \overbrace{A_k A_B^{-1}}^{\eta_B} \underbrace{\ b_B}_{\bar{x}}) = \bar{y}^T b + \theta \underbrace{(b_k - A_k\bar{x})}_{<0} < \bar{y}^T b \quad \forall \theta > 0$$

Calcola quindi il max passo di spostamento lungo d

1) $\bar{y}^T(\theta) A = [\bar{y}_B - \theta\eta_B]^T A_B + \theta A_k = \bar{y}_B^T A_B - \theta\eta_B^T A_B + \theta A_k = \bar{y}_B^T A_B - \cancel{\theta A_k \overbrace{A_B^{-1} A_B}^{I}} + \cancel{\theta A_k} = \bar{y}_B^T A_B = c^T \quad \forall \theta$

2) $\bar{y}(\theta) \ge 0 \quad \begin{cases} \theta \ge 0 \\ \bar{y}_B - \theta\eta_B \ge 0 \end{cases}$

Oss

1) Se $\eta_B \le 0 \Rightarrow \bar{y}_B - \theta\eta_B \ge 0 \quad \forall \theta \ge 0 \Rightarrow$ d e' una dir. di crescita illimitata STOP: (D) è inf. illim $\Rightarrow$ (P) $= \emptyset$

2) altrimenti $\exists\, i \in B$ t.c. $\eta_i > 0$

$i \in B$ t.c. $\eta_i < 0 \Rightarrow \bar{y}_i - \theta\eta_i \ge 0 \quad \forall \theta$

$i \in B$ t.c. $\eta_i > 0 \Rightarrow \bar{y}_i - \theta\eta_i \ge 0 \iff \theta \le \dfrac{\bar{y}_i}{\eta_i}$

max passo di spost lungo d: $\bar{\theta} = \min\left\{ \dfrac{\bar{y}_i}{\eta_i} : i \in B,\ \eta_i > 0 \right\}$ criterio del min. rapporto

Formalmente

Algoritmo simplesso duale $(\overbrace{A, b, c, B}^{\text{input}}, \overbrace{\bar{x}, \bar{y}, stato}^{\text{output}})$

begin

stato = " ";

repeat

$\bar{x} = A_B^{-1} b_B$;
$y_B^T = c^T A_B^{-1}$;
$\bar{y}_N^T = 0$;

if $A_N \bar{x} < b_N$ then stato = "ottimo"

else begin

regola anticiclo di Bland

$K = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\}$;
$\eta_B = A_K A_B^{-1}$

if $\eta_B \le 0$ then stato = "P vuoto"

else begin

$h = \arg\min\{\frac{\bar{y}_i}{\eta_i} \; i \in B, \; \eta_i > 0\}$;

$B = B \setminus \{h\} \cup \{K\}$;

end

until stato ≠ " "

end