

ESERCITAZIONE 8

Calcolo numerico di integrali

Per questa esercitazione verrà corretto l' **esercizio 3**. Create un file `.tar` o `.zip` contenente la function `simpson` e lo script che risolve l'esercizio, e caricatelo sulla pagina di e-learning del corso.

Supponiamo di avere una funzione reale continua di variabile reale

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ci poniamo il problema di approssimare numericamente l'integrale

$$\int_a^b f(x) dx.$$

In questa esercitazione vedremo alcuni metodi classici concepiti per risolvere il problema. L'idea generale alla base di questi metodi consiste nel suddividere l'intervallo $[a, b]$ in tanti piccoli sottointervalli e, su ciascun sottointervallo, approssimare f per mezzo di una funzione più semplice (per esempio lineare o polinomiale). Osserviamo che, per applicare questi metodi, non è necessario conoscere esplicitamente l'espressione della funzione f ; è sufficiente saperla valutare in certi punti dell'intervallo $[a, b]$.

1. Metodo dei trapezi

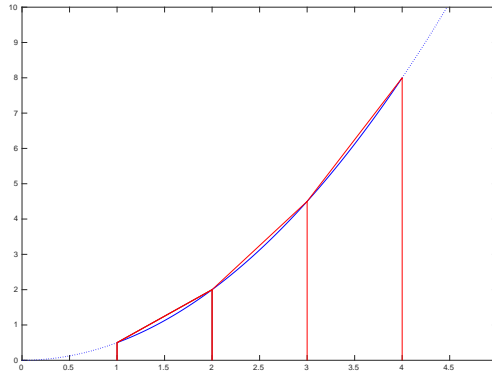
Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in N sottointervalli $[t_i, t_{i+1}]$, ciascuno di ampiezza $h = \frac{b-a}{N}$. Avremo quindi

$$t_i = a + i h, \quad i = 0, \dots, N.$$

In ciascun sottointervallo l'integrale viene approssimato come l'area del trapezio di altezza h le cui basi sono il segmento di estremi $(t_i, 0)$, $(t_i, f(t_i))$ e il segmento di estremi $(t_{i+1}, 0)$, $(t_{i+1}, f(t_{i+1}))$. Le aree dei trapezi così determinati vengono sommate per approssimare l'integrale cercato. La formula che ne deriva è

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh) \right).$$

Un esempio con $f(x) = 0.5x^2$, $a = 1$, $b = 4$ e $N = 3$ è illustrato nella figura a pagina seguente.



Esercizio 1 Scrivere una function $S=\text{trapezi}(f,a,b,N)$ che prenda in ingresso una handle di funzione f , gli estremi di integrazione a e b , e il numero N di sottointervalli da usare, e restituisca l'approssimazione S dell'integrale di f tra a e b ottenuta con il metodo dei trapezi.

Ricordiamo che una handle è un tipo di variabile usato in Matlab, che identifica una function. Tale function può essere predefinita (come `exp`, `sin` o `cos`), oppure definita in modo anonimo o in un file separato. Notate l'uso del simbolo `@` per creare una handle.

Verificate la correttezza dell'implementazione su un integrale noto, per esempio

$$\int_0^1 e^x dx,$$

che vale $e - 1$. Sullo stesso esempio potete controllare che, come è ragionevole aspettarsi, l'accuratezza dell'approssimazione ottenuta migliora al crescere di N .

Esercizio 2 Scrivere uno script, basato sull'esempio qui sopra, che calcoli e rappresenti graficamente l'errore di approssimazione del metodo dei trapezi per N crescente.

Se la funzione da integrare è sufficientemente regolare, la teoria afferma che l'errore decresce proporzionalmente a h^2 (o, il che è equivalente, $1/N^2$). Verificate sperimentalmente questa proprietà. Starà a voi scegliere dei valori di N opportuni.

(Suggerimento: potete rappresentare i valori di N e gli errori in scala log-log, applicare un fit lineare e constatare che la pendenza della retta è vicina a 2).

2. Metodo di Simpson

Come il metodo dei trapezi, anche il metodo di Simpson parte da una suddivisione di $[a, b]$ in sottointervalli. In questo caso, però, la funzione da integrare è approssimata localmente da un polinomio quadratico, anziché da una funzione lineare. La formula di approssimazione associata al cosiddetto *metodo di Simpson composito* è:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{N/2-1} f(a + 2jh) + 4 \sum_{j=1}^{N/2} f(a + (2j-1)h) \right),$$

dove si suppone che N sia pari e, come al solito, si definisce $h = \frac{b-a}{N}$.

Esercizio 3 Come nell'Esercizio 1, scrivere una funzione $S=\text{simpson}(f,a,b,N)$ che approssimi l'integrale di f tra a e b usando il metodo di Simpson con suddivisione in N intervalli, dove si assume che N sia pari.

Scrivere quindi uno script che, come nell'Esercizio 2, permetta di stimare sperimentalmente la convergenza dell'errore di approssimazione all'aumentare di N , cioè al diminuire di h . Che risultato trovate?

3. Funzioni di quadratura in Matlab

In Matlab e Octave sono disponibili vari comandi per integrare numericamente una funzione, in particolare:

- **trapz**, che implementa il metodo dei trapezi;
- **quad**, che usa un metodo di Simpson adattivo (cioè con opportuna scelta automatica dei sottointervalli di integrazione);
- **integral** (consigliato) che sceglie autonomamente quale metodo applicare.

Osserviamo che anche **Inf** e **-Inf** sono ammessi come estremi di integrazione.

Esercizio 4 Consideriamo la curva parametrica nel piano di equazioni

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^t \cos(u^2) du, \\ y(t) &= \int_0^t \sin(u^2) du.\end{aligned}$$

Scrivere uno script in Matlab che disegni il grafico della curva $(x(t), y(t))$, con $t \in [-4\pi, 4\pi]$, calcolando gli integrali con le funzioni **quad** oppure **integral**.

4. Funzioni periodiche (facoltativo)

In generale, i metodi di quadratura convergono più velocemente se la funzione da integrare è periodica. Sia $f(x) = e^{\cos(x)}$ e supponiamo di voler calcolare numericamente¹

$$I = \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

Esercizio 5 Scrivere uno script in Matlab che:

- definisca f in modo anonimo,
- in una prima figura tracci il grafico di f sull'intervallo $[0, 2\pi]$,
- calcoli una buona approssimazione di I per mezzo del comando **integral**; per i nostri scopi, questo sarà il valore “esatto” di I ,
- per $N = 2, 3, \dots, 10$ calcoli l'errore commesso approssimando I con il metodo dei trapezi e N sottointervalli,

¹L'idea per questo esercizio viene da J. A. C. Weideman, *Numerical Integration of Periodic Functions: A Few Examples*, The American Mathematical Monthly Vol. 109, No. 1 (Jan 2002), pp. 21-36.

- *in una seconda figura, esegua un'opportuna rappresentazione grafica degli errori in funzione di N o di h .*

Che cosa osservate?

Che cosa succede ripetendo l'esperimento con il metodo di Simpson? E con altre funzioni periodiche?