

ESERCITAZIONE 1

Trasformazioni nel piano complesso

1. Introduzione: numeri complessi e rappresentazioni grafiche

L'obiettivo di questa sezione è di acquisire familiarità con l'uso dei numeri complessi in MATLAB.

- L'unità immaginaria si indica in MATLAB con `1i`. Provate a dare i seguenti comandi e assicuratevi di capire che cosa succede in ciascun caso.

```
i
j
sqrt(-1)
x=2+1i;
y=1+3i;
z=x+y
```

- Le funzioni `conj`, `abs`, `real`, `imag` calcolano rispettivamente il coniugato, il modulo, la parte immaginaria e la parte reale di un numero complesso. Esempio: sia $x = 1 + 3i$ e verifichiamo sperimentalmente che $|x| = (x\bar{x})^{1/2}$.

```
x=1+3i           % definisco x
lhs=abs(x)       % left-hand side dell'uguaglianza
rhs=sqrt(x*conj(x)) % right-hand side dell'uguaglianza
abs(lhs-rhs)     % vale 0
```

- Sia $\theta = 6$. Verificate sperimentalmente che $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Potete usare le funzioni `exp`, `cos`, `sin`.
- Le funzioni `abs` e `angle` permettono di passare dalla rappresentazione cartesiana di un numero complesso a quella polare. Provate a dare i comandi seguenti:

```
x=-3+2i         % definisco x
r=abs(x)        % modulo di x
theta=angle(x)  % argomento di x
y=r*exp(i*theta) % osservo che y=x
```

- Passiamo alla rappresentazione grafica. Provate ad applicare i suggerimenti seguenti a punti, vettori e matrici definiti da voi.

Un numero complesso x si rappresenta sul piano per mezzo del comando

```
plot(real(x), imag(x), 'bo')
```

dove abbiamo usato un piccolo cerchio blu (cercate “supported marker symbols” nella documentazione di MATLAB per vedere quali sono gli altri simboli disponibili).

Un'altra possibilità è scrivere

```
plot(x, 'bo')
```

purché x abbia parte immaginaria non nulla. Se invece x è dato in coordinate polari, si può usare il comando

```
polarplot(theta, r, 'bo')
```

- Dato un vettore complesso v , si possono rappresentare i suoi elementi nel piano con i comandi

```
plot(v, 'r*-')
```

```
plot(v, 'k')
```

```
plot(v, 'bo')
```

Nel primo e secondo caso ciascun punto è collegato al seguente da un segmento (utile per disegnare poligoni), nel terzo caso no.

- Data una matrice (array) complessa A , il comando

```
plot(A)
```

traccia un grafico sul piano complesso per ogni colonna di A .

Esercizio 1 Scrivere una function `circonferenza(c,r)` che accetta in input un numero complesso c e un numero reale positivo r e traccia sul piano la circonferenza di centro c e raggio r . Scrivere una function `triangolo(z,a)` che accetta in input un numero complesso z e un numero reale positivo a e traccia sul piano un triangolo equilatero di centro z e lato a .

2. Traslazioni e rotazioni

Traslazioni e rotazioni sul piano si possono effettuare usando l'aritmetica complessa.

- Traslazione di vettore $w \in \mathbb{C}$:

$$z \longrightarrow z + w.$$

- Rotazione di angolo $\theta \in \mathbb{R}$ e centro l'origine:

$$z \longrightarrow ze^{i\theta}.$$

Esempio: costruiamo un quadrilatero.

```
z=[0 1 1+2i 3i 0];
```

```
plot(z, '*-')
```

```
axis([-1 4 -1 4], 'equal')
```

Ora vogliamo ruotare il quadrilatero di $\pi/6$ radianti intorno al suo baricentro. Per farlo, applichiamo dapprima al quadrilatero una traslazione per portarne il baricentro nell'origine, poi applichiamo una rotazione di $\theta = \pi/6$ e poi trasliamo nuovamente per riportare il baricentro nella posizione iniziale.

```

mu=mean(z(1:end-1))      % calcolo le coordinate del baricentro
theta=pi/6;
omega=exp(i*theta);
y=omega*(z-mu)+mu;      % traslazione, rotazione, traslazione
hold on      % scriviamo sul grafico precedente
plot(real(y),imag(y),'r-')

```

Osserviamo che in MATLAB è consigliabile usare il più possibile le operazioni vettoriali (anziché cicli for).

3. Trasformazioni di Möbius

Le funzioni di variabile complessa del tipo

$$z \longrightarrow \frac{az + b}{cz + d},$$

con $ad - bc \neq 0$, sono note come *trasformazioni di Möbius*. (Rotazioni e traslazioni sono casi particolari di queste trasformazioni).

Esercizio 2 Scrivere uno script MATLAB che esegua i compiti seguenti:

- definire un vettore v di numeri complessi che rappresentino “tanti” punti equispaziati sulla circonferenza di centro 1 e raggio 1,
- disegnare la circonferenza usando il vettore v ,
- applicare a ciascun elemento di v la trasformazione di Möbius

$$z \longrightarrow \frac{az + b}{z + 1},$$

dove a e b sono rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del vostro numero di matricola (se sono uguali prendete invece $a = 1$ e $b = 0$), ottenendo un nuovo vettore w ,

- rappresentare i punti di w sullo stesso grafico usato in precedenza.

Qual è la figura che ne risulta? Che cosa congetturate riguardo alle proprietà della trasformazione di Möbius che avete usato? Rispondete commentando lo script.

4. Logaritmo

La funzione `log` calcola il logaritmo del numero complesso z nel modo seguente. Se z è reale positivo, allora `log(z)` è il consueto logaritmo naturale reale. Altrimenti, dette rispettivamente x e y la parte reale e immaginaria di z , si ha `log(z)=log(abs(z))+i*atan2(y,x)`, dove la funzione `atan2` calcola l'arcotangente di y/x nell'intervallo $(-\pi, \pi)$. Così come le funzioni `exp`, `sin` o `cos`, anche la funzione `log` si può applicare ad un vettore, nel qual caso agisce componente per componente.

Esercizio 3 Scrivere uno script in MATLAB che esegua i compiti seguenti:

- Verificare graficamente che la funzione \log mappa la circonferenza di centro 0 e raggio 1 nel segmento $(-i\pi, i\pi)$, usando la stessa tecnica dell'esercizio precedente.
- Disegnare sul piano complesso le circonferenze di centro 0 e raggio $1, 2, \dots, 10$, applicare la funzione $\log(z)$ ai punti utilizzati per disegnare le circonferenze, e disegnare i nuovi punti sul piano complesso.

4. Esercizi facoltativi

(Da fare se avete finito tutta la parte precedente).

- Ci proponiamo di studiare sperimentalmente la *trasformata di Joukowski*

$$z \longrightarrow z + \frac{1}{z},$$

definita su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Che cosa si ottiene applicando la trasformata

- ad una circonferenza con centro nell'origine? (provate con diversi valori del raggio)
 - ad una circonferenza passante per il punto 1 e contenente il punto -1 nel suo interno? (La figura che si ottiene è nota come *Joukowski airfoil*).
- La *matrice della trasformata discreta di Fourier* di ordine n si costruisce in MATLAB con il comando `F=fft(eye(n))`.
Sia $n = 4$: costruite la matrice e verificate che i suoi elementi sono radici dell'unità (quali?).
Che grafico produce il comando `plot(F)`? Sperimentate vari valori di n .
 - I *tiling puzzles* sono giochi in cui alcuni tasselli poligonali vengono disposti sul piano per creare forme diverse. Due fra i più noti sono il *T-puzzle* e il *tangram*; potete cercare più dettagli su Wikipedia o con Google. Potete provare a usare i risultati della sezione 2 per simulare il vostro *tiling puzzle* preferito.

5. Istruzioni per inviare gli esercizi svolti

Per questa esercitazione verranno corretti gli **esercizi 2 e 3**. Create un file `.tar` o `.zip` contenente gli script che risolvono i due esercizi e le eventuali function ausiliarie, e caricatelo sulla pagina di e-learning del corso.

La creazione di un file `.tar` si può eseguire da terminale per mezzo del comando `tar -cvf` seguito dal nome scelto per il file (per esempio `Es1Cognome.tar`) e dai nomi dei file da includere.