STORIA DELLA MATEMATICA

LEZIONE 1→ 25-09-2020

Panoramica sul corso.
I parte del corso → matematica Greca **dal V sec a.C al VI sec d.C**
→ autori della matematica Greca :
→ **Euclide** → 340 a.C.
→ **Archimede**→ 212 a.C.
→ **Apollonio**→ III -II a.C.
→ **Pappo** → III-IV d.C
II parte del corso → fine dell'antichità, caduta dell'Impero Romano (V d.C.). Il mondo si divide in tre parti:

1. **L'Oriente**(Impero Romano con capitale Costantinopoli)
2. **L'Occidente**(regni romano-barbarici)
3. **Africa e Spagna**(musulmani)

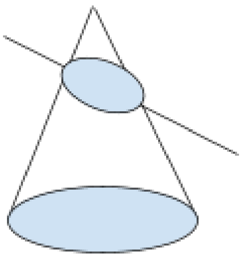
In Africa e Spagna a partire dal IX d. C. inizia uno sviluppo importante della matematica che ha due radici:

1. una radice è quella greca attraverso un processo di trasmissione e traduzione di opere greche in arabo.
2. l'altra radice consiste nel processo autoctono, cioè gli arabi inventano l'algebra, o meglio inventano un nuovo oggetto della matematica che è l'equazione.

Ad esempio **al-Khwarizmi** nel IX sec inventa l'equazione come un oggetto matematico a sé.
A partire dal XI-XII secolo la matematica araba si trasmette in Europa attraverso delle traduzioni in latino. Questo percorso si svilupperà soprattutto nell'Italia centro-settentrionale e darà luogo a un nuovo fenomeno detto delle scuole d'abaco in cui si insegnano gli algoritmi per l'uso delle cifre arabe, o meglio indiane; si insegna la matematica commerciale (quella che serve nel commercio). In questo fenomeno delle scuole d'abaco le traduzioni algebriche si sviluppano notevolmente. Nel 1540 queste traduzioni algebriche arrivano alle regole per la soluzione delle equazioni di 3° e 4° (da cui poi derivano i numeri complessi). Parallelamente a tutto questo si sviluppa l'Umanesimo. All'interno del movimento umanistico si cerca di accedere e ritornare alle fonti greche. Intorno al 400 e al 500 vengono recuperati i manoscritti greci e diffusi attraverso la stampa(nascita e diffusione della stampa).

III parte del corso→ Alla fine del 500 la tradizione algebrico-abachistica e la tradizione greca-umanistica confluiscono in un'opera del matematico francese

François Viète(1540-1603) e l’algebra dopo 7 secoli assume il ruolo di una disciplina matematica a tutti gli effetti come la geometria.
Questo nuovo punto di vista dell’algebra sarà alla base della rivoluzione cartesiana. Nel 1637 **Descartes** pubblica l’opera ’’Il Discorso Sul Metodo’’ (Discorso sul metodo per un retto uso della propria ragione e per la ricerca della verità nelle scienze più la diottrica, le meteore e la geometria che sono saggi di questo metodo.) Il sistema del dubbio sistematico lo applica alla Geometria, alla diottrica(studio degli specchi, riflessione), e delle meteore(arcobaleno)
La vera rivoluzione sarà quella della geometria. Fino ad allora gli oggetti matematici erano oggetti singoli.
Per esempio l’ellisse era la curva che si ottiene tagliando un cono che incontri tutte e due le generatrici. Questa è la definizione di ellisse. Da Cartesio in poi, l’ellisse diventa un’ equazione in due variabili di 2° → f(x,y)=0



Dove è la differenza? Nella matematica pre-cartesiana ogni curva deve avere la sua generazione , cioè è una sformalizzazione del mondo concreto. Da Cartesio in poi assumono un aspetto generale. Prima di Cartesio ogni problema aveva una risoluzione particolare: data un’ellisse come trovo la tangente? Dopo cartesio ci chiediamo se esiste un metodo o un calcolo algebrico che mi permetta di trovare la tangente a una curva qualunque. Il problema della tangente si risolverà con la nascita del calcolo infinitesimale e con la nascita della matematica moderna. Quindi la Geometria è la più importante rivoluzione in Matematica.

LEZIONE 2 → 28-09-2020

La storia della matematica è una storia che si lega alla storia delle **culture umane** e in particolare alle civiltà in cui la matematica si è sviluppata. La matematica è una **letteratura** perché si trasmette con i testi al pari della poesia, del teatro, della storia. Questa si trasmette attraverso i testi proprio per le dimostrazioni e gli assiomi che ne fanno parte.
Per esempio la teoria delle coniche si comincia a sviluppare in Grecia a partire dal IV secolo a.C. Poi alla fine del III secolo arriva **Apollonio** che riformula completamente la teoria delle coniche, cambiando la definizione e introducendo nuovi oggetti come il cono generalizzato con base circolare o

obliqua ecc… **Archimede** che è vissuto prima di Apollonio , utilizza le conoscenze note a quell'epoca per descrivere la teoria delle coniche producendo scritti diversi da quelli di Apollonio. Noi sappiamo quali risultati erano noti ad Archimede ma non sappiamo come quei risultati erano dimostrati a quei tempi, in questo modo abbiamo perso tutti (quasi) gli scritti di Archimede, è come se gli scritti di Apollonio avessero fagocitato(inglobato) quelli archimedei.
Essendo la matematica una letteratura dobbiamo adottare le tecniche che si usano per studiare la storia in particolare la **filologia**. Se prendiamo Archimede dobbiamo distinguere che tipo di Archimede dobbiamo studiare: quello Greco(vissuto a Siracusa)? Quello che viene riscoperto nel rinascimento(ma anche Apollonio viene riscoperto e quindi studiare Archimede sotto la luce di Apollonio)? Oppure quello che abbiamo oggi (Ricostruito da **Heiberg** e dalla letteratura contemporanea)? Questi sono punti di vista molto diversi. La matematica è anche un prodotto letterario delle culture umane e quindi bisogna approcciarlo con gli strumenti necessari.

Perché si inizia dalla matematica Greca?

La civiltà egizia e babilonese hanno avuto una influenza decisiva sulla civiltà greca, perché non iniziare da loro? Per esempio il sistema sessagesimale deriva dai Babilonesi, così come gli studi astronomici.
Cominciamo da quella greca perché i greci hanno inventato la matematica con dimostrazione. Una matematica in cui per asserire qualcosa bisogna dimostrarlo. Questo non è stato un processo lineare, quello che avviene nella Grecia del VI-V secolo a.C. è che in Turchia si erano costituite una serie di colonie greche(le Ionie la cui città più importante era Mileto) in stretto contatto con il mondo mesopotamico(in particolare i Babilonesi). Proprio nella Ionia avviene un processo di razionalizzazione di miti e procedure del mondo occidentale, vedi ad esempio gli arché di Talete(acqua), Anassimandro ecc.. Questo tipo di matematica è un prodotto del mondo ellenico che si va raffinando via via fino a raggiungere i vertici della matematica ellenistica dal IV secolo fino al I secolo a.C. (con **Euclide, Archimede, Apollonio**), e diventare un corpus di scritti e di testi notevole. Quindi in qualche modo la matematica greca è l'antenata della nostra matematica. Il fatto che sussista questo non vuol dire che i greci facessero la nostra stessa matematica.

Esiste una matematica greca?

La matematica greca sembra essersi sviluppata dalla fine del V secolo a.C. fino al VI secolo d.C. (10-11 secoli) ha senso parlare di matematica greca per tutto questo periodo? **La matematica greca nell'arco di questi 10 secoli mostra una notevole unità interna.** **Pappo** che è uno degli ultimi matematici greci (III-IV sec d.C.) scrive un'opera intitolata ''Collezione Matematica'' fatta di otto libri, in cui riprende la matematica di Apollonio, Archimede, autori vissuti 500 anni prima. Oppure **Eutocio**(scrittore bizantino) scrive commenti alle opere di Archimede e di Apollonio (conosciamo Apollonio grazie a Eutocio). Quindi in qualche modo la matematica greca ha una notevole stabilità, i temi che vengono sviluppati in questi mille anni sono essenzialmente stabili. Ad esempio c'è un problema che attraversa tutti questi secoli, da **Ippocrate di Chio** (fine del V sec a.C) fino a **Pappo/Eutocio** (VI d.C.).

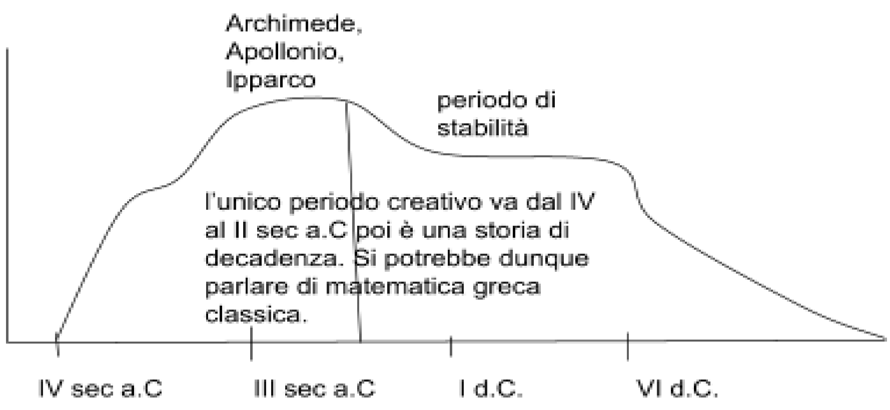
Problema di due medie proporzionali:

Date due grandezze A e B, trovare due grandezze x e y tali che rispettano la seguente proporzione→ $A : x = x : y = y : B$

E' un problema di terzo grado che non si risolve con righe e compassi.Ci sono quindi questioni che attraversano tutti il corso di questi 1000 anni, questo è uno degli elementi che ci permettono di parlare di esistenza di una matematica greca.

Un altro elemento importante è il fatto che la matematica greca sia scritta in greco, in un greco particolare. È un linguaggio altamente formalizzato, non conosce formule, ma per parlare di proporzioni di angoli, di quadrati di rettangoli si usa sempre lo stesso linguaggio.
Quindi la matematica greca ha una continuità di linguaggio e di problemi che attraversano questi mille anni.

Contro questa idea che sia esistita una matematica greca si potrebbe obiettare il fatto che l'unico periodo di creatività della matematica greca è molto ridotto. (Vedi grafico).



Chi erano i matematici greci?

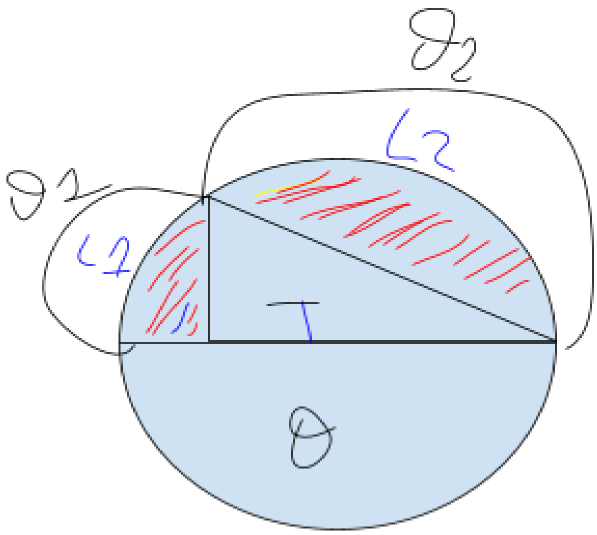
Nel mondo greco la matematica non sembra essere il linguaggio universale del sapere (come nel nostro), non è neppure chiaro che ruolo sociale abbia, qui dobbiamo introdurre un'altra distinzione. Se prendiamo **Archimede, Apollonio o Euclide** questi parlavano e trattavano di cose molto astratte.
Markus Asper (uno storico) dice che il mondo antico ha conosciuto due tipi di matematica differenti:
Nel mondo antico c'era una netta separazione tra **gli aspetti pratici e teorici.** La matematica di **Archimede, Apollonio** è quella teorica, di quella pratica(misure di campi) ci è arrivato ben poco, in particolare si vede anche dalle fonti che ci sono arrivate che si tratta di matematica nettamente diversa. Sarà all'inizio del '600 che queste due tradizioni si fonderanno in qualcosa di nuovo, dove il processo di dimostrazione subirà diversi colpi e il rigore dimostrativo calerà molto.
Una possibile risposta a cosa facevano chi erano i matematici greci è che la matematica greca era una sottobranca di discussioni filosofiche. È probabile che i matematici greci teorici costituissero una specie di nicchia dentro gli ambienti intellettuali.

Quanti erano, e in quale contesto si sviluppano?

Reviel Netz: studioso della matematica antica ha fatto una specie di conto basandosi sui fatti storici ed è pervenuto a dire che in 1000 anni ci siano stati 1000 matematici. La matematica essendo una letteratura ha bisogno di **testi scritti**. Un'altra caratteristica della matematica antica è il fatto che **si sviluppa attorno a comunità,** e queste comunità si sviluppano attorno a centri di potere che mettono a disposizione le cose per vivere, centri di questo tipo sono: Atene (IV sec) e Alessandria (III-II sec d.c.)(i Tolomei fanno la biblioteca di Alessandria e il museo cioè la casa delle muse che ospitava importanti intellettuali), Rodi, Pergamo.
Fino all'invenzione della stampa, (quando si riesce a svincolare dalla necessità della matematica vincolata ad un luogo) la matematica è legata all'esistenza di questa centri. Il problema è che se uno di questi centri viene a estinguersi, l'attività intellettuale scompare. Un esempio è Archimede (287 a.C - 212 a.C) alla corte di Gerone di Siracusa, e quindi è protetto e sostenuto da questo re. Con la fine di Siracusa si ha la fine anche della matematica a Siracusa. Quindi la matematica è legata a dei luoghi, proprio perché i matematici hanno bisogno di una nicchia ecologica in cui poter vivere, e sviluppare quindi le proprie idee.

Rapido Excursus sulla storia della matematica Greca

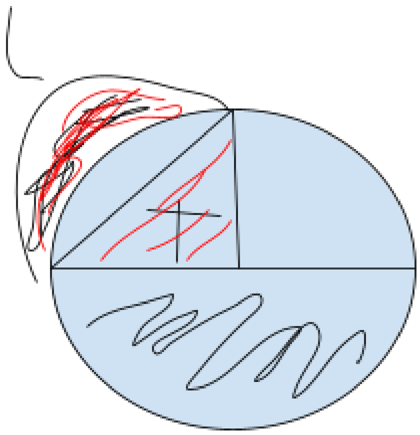
La matematica greca viene fatta iniziare con Talete e Pitagora (VI secolo a.C.). La maggior parte degli studiosi ritengono che **Pitagora** con la matematica avesse poco o niente a che fare. Pitagora era capo di una setta religiosa politica che coltivava dottrine della reincarnazione, sul mangiare le fave ecc.. Quindi è difficile pensare che quei fatti possano essere attribuiti a lui quanto bensì a una corrente di pensiero che si rifà a Pitagora.
Talete invece, vive a Mileto. Ci sono giunte notizie che lui abbia predetto una eclisse di sole, sapesse misurare la distanza dalle navi ecc…
Un'altra attribuzione importante di Talete è che *Il cerchio è diviso in due dal diametro,* Questo ci è pervenuto da un filosofo neoplatonico **Proclo** (V d.c) che a sua volta si rifà a una storia della geometria scritta da **Eudemo** vissuto nel IV secolo a.C. c'è da crederci? Che Talete fosse in grado di fare queste dimostrazioni? Quello che si può dire è che questi risultati vadano assegnati a un altro matematico: **Ippocrate di Chio** (forse il vero primo matematico) 50/60 anni successivo a Talete.
Succede che le colonie greche della Ionia finiscono sotto il dominio dell'impero Persiano. Poi queste colonie si ribellano, Mileto si pone a capo di queste colonie, e questo porta a una migrazione degli Ioni dalla Ionia ad Atene. Ippocrate si stabilisce quindi ad Atene e secondo Proclo è il primo a scrivere degli elementi, quindi possiamo dire che la matematica greca inizi (dopo un periodo di gestazione nelle Ionie) alla fine del V secolo a.C. con Ippocrate. Di Ippocrate di Chio ci è pervenuto tramite **Simplicio**, un testo in cui Ippocrate tratta della *quadratura delle lunule.*



Consideriamo un semicerchio e un triangolo rettangolo inscritto al semicerchio.costruisco delle lune sugli archi e ottengo sigma 1 e sigma 2. la cui somma fa sigma. Se tolgo la parte in comune ovvero quella in rosso. ottengo che la somma delle due mezze lune L1 +L2= T dove T è il triangolo

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \vartheta$$

$$L_1 + L_2 = T$$



considero un semicerchio. lo divido a metà ottengo un triangolo T che è uguale alla semiluna L e cioè L=T

Da qui si ha la prima quadratura di oggetti curvilinei che si conosca. Questa tendenza a articolare gli elementi inglobando risultati nuovi si va a sviluppare fino al V secolo. **In questo secolo si ha l'invenzione della teoria delle coniche da una parte, e dall'altra si ha la scoperta delle grandezze incommensurabili e in terzo luogo, una riformulazione della teoria delle proporzioni**. La scoperta di queste grandezze incommensurabili ha dei riflessi sulla teoria delle proporzioni:

cosa significava dire $a : b = c : d$?

si fa l'Algoritmo di Euclide:

$a = b \cdot q1 + r1$

$b = r1 \cdot q2 + r2$

$r1 = r2 \cdot q3 + r3$

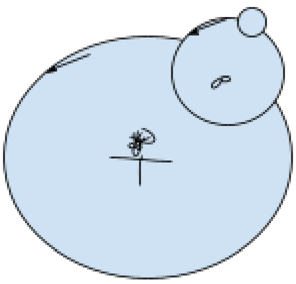
....

$r(n-2) = r(n-1) \cdot qn + rn$

se a e b sono commensurabili a un certo punto l'A.E. dovrà terminare in quanto la successione dei quozienti ci dice che a entra in b q1 volte e così via e cioè mi dice quante volte la prima grandezza entra nella seconda e quindi la successione dei quozienti mi da una definizione di rapporto. Questo si chiama **antanairesis** e sta alla base della definizione di rapporto. Due numeri sono in proporzione (antanairesis) se mi danno la stessa successione di quozienti

Con la diagonale del quadrato (incommensurabile) la successione dei quozienti non finisce (mi da sempre 1) quindi si cerca di cambiare la teoria della proporzioni. Questo viene fatto da **Eudosso di Cnido** metà del IV secolo. Eudosso inventa anche una tecnica dimostrativa per trattare questo tipo di problemi : **il metodo di esaustione**. Sempre in questo periodo grazie ad un allievo di Eudosso, **Menecmo,** si sviluppa la teoria delle coniche. In questo modo la matematica si va ampliando, sarà all'inizio del III secolo che tutti questi nuovi risultati verranno codificati da Euclide nei suoi Elementi.

Euclide vive ad Alessandria, legato alla corte dei Tolomei. E la teoria delle coniche si sviluppa molto ad Alessandria tanto che verso la fine del III secolo inizio del II, **Apollonio di Perga** riformula l'intera teoria delle coniche scrivendo molti testi che hanno a che fare con la geometria delle posizioni cioè lo studio delle possibili posizioni che rette e curve possono avere fra di loro . Sempre in questo periodo **Archimede** di Siracusa sviluppa la Geometria di misura meccanica teorica che era stata inaugurata prima da Ippocrate poi da Eudosso, ottenendo risultati impressionanti, trova la quadratura della parabola, la cubatura della sfera, il paraboloide, l'ellissoide, iperboloide.
In pochi secoli si passa da problemi elementari a problemi di notevole difficoltà. Un importante esponente della matematica ellenistica è **Ipparco**, che ha svolto diversi studi nel campo dell'astronomia. Egli sviluppa il sistema nel II sec a. C. per cui il moto di un pianeta viene descritto in questi termini:la terra sta al centro dell'universo e che tutti i pianeti girano attorno, sole compreso. Questo sistema verrà poi ripreso e riassunto da Tolomeo nel II d. C



il pianeta si muove su questo cerchietto chiamato epiciclo e il centro di questo cerchietto si muove sul deferente

Fino a Ipparco c'è un forte sviluppo, poi abbiamo un "buco" nello sviluppo della matematica. Questo buco è la curva di cui si parlava prima, ed è dovuto a cause esterne: finito il centro di potere finisce la matematica legata ad essa. I romani si stanno espandendo con guerre su guerre e saccheggi, poi nel I secolo a.C. l'impero romano è afflitto da guerre civili. Con Ottaviano Augusto nel 33 a.c. ritorna la pace, il mondo viene unificato dalla pace universale di Augusto. Quindi c'è una lenta ripresa delle arti delle scienze e della matematica stessa.

LEZIONE 3 → 2 -10-2020

Volta scorsa

Perché la matematica greca? Abbiamo osservato che la matematica greca è una delle radici della nostra matematica in quanto con lei nasce il metodo dimostrativo. È vero che la matematica greca è una delle radici della nostra matematica, ma non la sola. Abbiamo altri filoni di matematica non

dimostrativa che si intreccia con la matematica greca e questi filoni daranno un contributo fondamentale per la nascita della matematica moderna.
Si può parlare di matematica greca? La cosa all'inizio può sembrare strana perché è difficile pensare in maniera omogenea a un periodo di 1000 anni. Abbiamo però visto che c'è una forte continuità per quanto riguarda metodi dimostrativi, oggetti, problemi che percorrono tutto questo periodo.
Ippocrate di Chio: primo matematico greco e primo a dimostrare teoremi inseriti in una struttura dimostrativa.

Panoramica Matematica Greca:

1. *Nel IV secolo scoperta delle grandezze incommensurabili e quindi la necessità di riformare la teoria delle proporzioni.*
2. *L'invenzione di un nuovo oggetto di studio: le sezioni coniche*.

tutto questo confluisce da una parte negli Elementi di **Euclide** e l'inizio di uno studio sistematico della teoria delle sezioni coniche. Questo porterà ad **Apollonio**, mentre nel campo della geometria di misura e i risultati sviluppati da **Eudosso** con la tecnica dimostrativa della **doppia riduzione ad assurdo** saranno poi concetti ripresi da **Archimede** (III secolo a.c.) con risultati e dimostrazioni molto elaborate. Questi filoni, per quanto riguarda le sezioni coniche, gli aspetti di costruzione di elementi, aspetti di astronomia arrivano a maturazione con **Teodosio e Menelao** che scrivono dei trattati di geometria sferica, con **Ipparco** che applica queste teorie sviluppate all' astronomia.

A questo punto inizia la fase ultima della matematica greca, dove piuttosto che ottenere risultati nuovi ci si concentra sul commento e sull'elaborazione di risultati già studiati, l'opera per eccellenza di questo campo è la ''Collezione Matematica'' di **Pappo** (è una sorta di complementi ed esercizi della matematica precedente) in cui viene approfondito il corpus della matematica creato 4/5 secoli prima di Pappo stesso. Abbiamo anche **Eutocio** che farà l'edizione delle coniche di **Apollonio** e altri matematici minori.

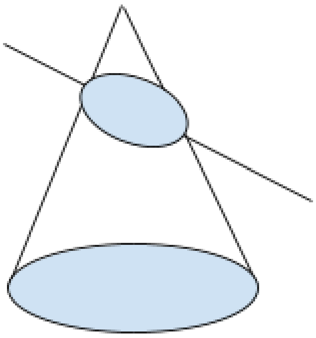
Come mai dopo Archimede Apollonio non c'è uno sviluppo ulteriore?
Osserviamo che dopo il III secolo a.C. quindi dopo che Roma sconfisse Cartagine con le guerre puniche e dopo le guerre civili fino alla pace di Augusto si ha un periodo di stasi dal punto di vista culturale. A spiegare questo andamento della matematica greca non bastano solo le cause esterne, c'è qualcosa nella matematica greca che l'auto-limita.

Di cosa si occupa la matematica greca?

Partiamo da un esempio: cosa è per noi un ellisse? Per noi è un luogo di zeri di un polinomio di secondo grado in due variabili che soddisfa certe condizioni.
Per i Greci è la curva che si ottiene sezionando un cono con un piano che incontri tutte le sue generatrici.

Quale è la differenza tra la nostra e la definizione greca?

Per noi una curva è un oggetto generale di cui a priori non sappiamo nemmeno se esista, noi prendiamo una certa proprietà e la oggettifichiamo. Per i greci il procedimento è il contrario. Si parte da una figura e si ottiene l'oggetto ellisse da cui poi se ne ricavano le proprietà.



per i Greci $f(x,y)=0$ per noi

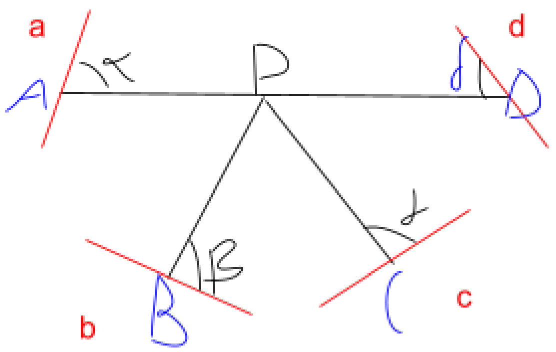
Per noi le proprietà vengono prima dell'oggetto, per i greci è il contrario. Se noi abbiamo un oggetto generale, ovvero la curva algebrica, possiamo anche porci problemi generali e inventarci dei metodi generali ad esempio con le tecniche di derivazione. Invece per i greci il problema è quello di trovare la tangente all'ellisse, al cerchio, alla parabola,(cioè a una curva specifica).
L'oggetto ha una sua individualità e questo deriva dal fatto che l'oggetto non appartiene ad una classe ma è generato da un procedimento costruttivo.
Per i greci la **retta** è ciò che giace ugualmente rispetto ai suoi estremi, oppure **punto** è ciò che non ha parti. Cosa vuol dire la prima definizione? Una retta si costruisce prendendo due chiodi e agganciando ad essa una corda e tirarla fino a che la corda smetta di toccare per terra e non sia tesa.
Oppure il **cerchio** nella Definizione di **Euclide**:
"Dicesi cerchio una figura piana delimitata da un'unica linea tale che tutte le rette che terminano su di essa a partire da un medesimo punto fra quelli interni alla figura siano uguali fra loro."
Per noi il cerchio è il luogo dei punti del piano equidistanti dal centro.
Quindi gli oggetti hanno la caratteristica di essere oggetti individui piuttosto che oggetti classe. Nella matematica greca si parla della sfera e del cilindro, della parabola e dell'iperbole, non esiste il concetto di curva

generale oltre le sezioni coniche e poche altre curve (spirale di Archimede o concoide).

Problema delle 3 / 4 linee

Molto importante per trattare di questo argomento è il problema di **Pappo:**
"Nel famoso problema di Pappo risolto da Cartesio bisogna individuare il luogo geometrico descritto da un punto C per il quale il prodotto tra le distanze tra C e due rette sia uguale (o sia k volte) al prodotto delle distanze da C verso altre due rette. "

Viene chiamato anche problema delle tre/quattro linee: determinare i punti P tali che se si conducono con angoli dati delle rette da uno di questi punti P alle quattro rette date, succeda che il rettangolo PAPB abbia un rapporto dato con il rettangolo PCPD



una retta nella geometria greca è quella che noi oggi chiamiamo segmento prolungabile. Non esiste la retta e neanche la linea infinita.

Date 4 rette (in rosso) determinare i punti P tali che se si conducono con angoli dati (alpha, beta, ganna,delta)delle rette da uno di questi punti {A,B,C,D} alle 4 rette date succede che il rettangolo compreso fra PA e PB abbia un rapporto dato

$$\frac{r(PA,PB)}{r(PC,PD)}$$

Si è dimostrato che per 3/4 rette i punti cadono su una delle sezioni coniche e sotto certe condizioni vanno a cadere su una parabola un'ellisse o un'iperbole.
C'è chi si è posto il problema per 5/6 rette, Pappo dice che in questo caso i punti vanno a cadere su luoghi ancora sconosciuti, che nessuno ha mai trovato e di questi luoghi nessuno è riuscito a trovarne nemmeno uno che fosse il più semplice di tutti.
Questo problema sarà alla base della **"rivoluzione cartesiana"**. **Cartesio** traduce le curve geometriche in curve algebriche, con Cartesio egli dice "non mi pongo il problema su quale oggetto cadano i punti", l'oggetto sarà il luogo

geometrico degli zeri di una opportuna equazione che mi rappresenti tale curva.
Questa stessa cosa avviene anche nel campo aritmetico, per esempio i numeri greci non sono i nostri numeri naturali(che sono dati dagli assiomi di Peano).
Per i greci la **definizione di numero** è:

1. *Unità: tutto ciò che è detto uno è uno. Quello che vuol dire è che l'unità è ciò su cui ci si mette d'accordo sia uno.*
2. *Numero è molteplicità di unità*

I numeri greci sono i numeri per contare. Quindi anche i numeri hanno questa natura individua, ogni numero fa "razza per se". Quindi questa matematica ha dei grossi limiti nello studiare oggetti generali, quindi questa mancanza si ripercuote nella mancanza di oggetti generali. **Un altro aspetto strettamente connesso è il fatto che nella matematica greca gli aspetti aritmetico algebrici e geometrici sono nettamente separabili**, per non dire incomunicabili.
Il numero è molteplicità di unità, non deriva da un processo di misura. In particolare tutti i risultati di teoria di misura di Archimede, Eudosso o altri, vengono ottenuti tramite il confronto diretto tra un oggetto ignoto e uno che viene considerato più noto, ad esempio:
La sfera è ⅔ del cilindro circoscritto oppure che il paraboloide è la metà del cilindro circoscritto a lui.
In questo caso la sfera è considerata più ignota del cilindro. Non si trova:
"area del triangolo si ottiene moltiplicando base per altezza e dividendo per due"
ma si trova: "il triangolo sta al rettangolo di egual base e altezza come 1 sta a 2".
Quindi un aspetto fondamentale è che non entrano in gioco quelle considerazioni di tipo aritmetico algebrico. Questo è dovuto anche al fatto che in tutto il mondo antico non esistono unità di misura (almeno fino alla rivoluzione francese), in quel periodo "città che vai misura che trovi" le misure cambiavano in luoghi talvolta molto vicini.
Quindi un teorema viene enunciato in termini di proporzioni tra oggetti, piuttosto che proporzioni tra numeri. **La teoria delle proporzioni quindi è il linguaggio fondamentale della geometria greca.**
La matematica Greca ha però sviluppato anche aspetti aritmetici e anche aspetti algebrici..

Ad esempio **Euclide**(nel 7-8-9 libro) ha ottenuti risultati sulle progressione geometriche, aritmetiche, algoritmo di Euclide(9 libro), l'infinità dei numeri primi, numeri perfetti.
La matematica greca è si una radice importantissima della matematica moderna ma non è l'unica radice, questa nasce dall'ibridazione tra due correnti molto diverse.
Diofanto (II a.C.-III/IV d.c) di Alessandria scrive un'opera intitolata Aritmetica di 13 libri(ce ne sono pervenuti 10, 3 in arabo e 7 in greco), in cui tratta problemi diofantei cioè di analisi indeterminata. Il più famoso di tutti è: *dividere un quadrato in due quadrati.Dato un quadrato a scriverlo come* $a = x^2 + y^2$
Diofanto traduce il problema in equazione. **Dato che l'opera di Diofanto si chiama Aritmetica, si limita a cercare le soluzioni razionali/intere al problema. Quindi è difficile vedere in Diofanto l'origine dell'algebra.**
Supponiamo questo, ovvero che i greci abbiano coltivato delle tecniche algebriche, rimane comunque il fatto che tali tecniche algebriche rimangono separate da molti campi matematici in particolare dalla geometria. Questo è l'altro filone(radice), quello algebrico di soluzione dei problemi da cui si alimenta la matematica moderna.

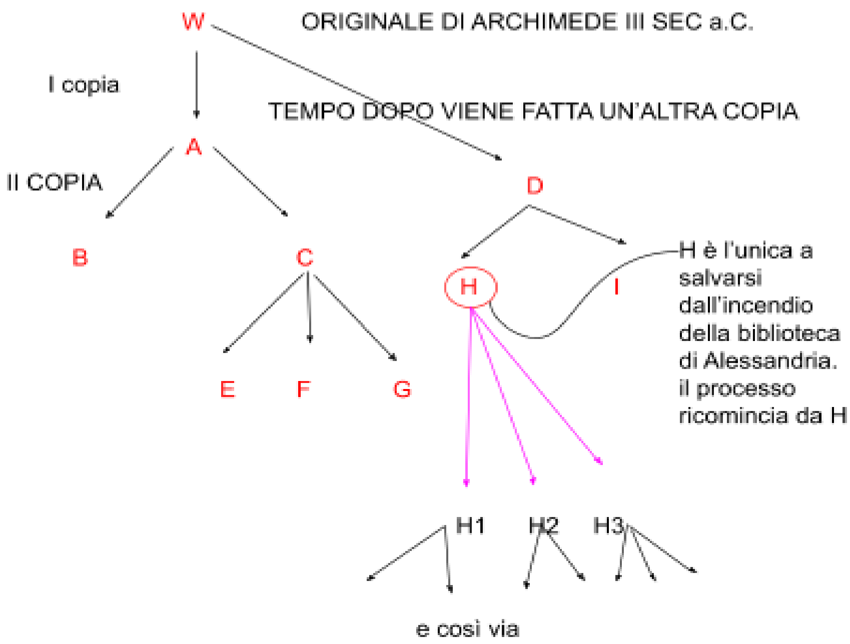
La matematica moderna ha due avi: la tradizione algebrica e la tradizione della geometria greca.

Osservazione: la maggior parte dei matematici greci non hanno datazioni certe. L'unico matematico greco di cui abbiamo delle datazioni più certe è **Archimede**, questo perché è strettamente legato alle attività della sua città natale: Siracusa.
Ad esempio per **Euclide** si è arrivato a pensare che si trattasse di un gruppo di matematici. Si riesce solo a collocare nella prima metà del terzo secolo.
Gli oggetti della geometria di misura sono oggetti che hanno una forma, una sfera non è pura quantità, ha una forma in quanto io posso confrontarla con un il suo cilindro circoscritto. Il fatto di avere una descrizione puramente quantitativa emergerà quando la nozione di numero, soprattutto grazie agli arabi, passano da numeri per contare a numeri per operare, cioè i numeri assumono un aspetto algebrico e dunque possono essere usati per misurare.

Come è arrivata fino a noi la matematica greca?

La matematica è considerata una letteratura. Quindi uno studioso della storia della matematica deve usare gli oggetti della filologia. Uno degli oggetti principali della filologia è il concetto di **TRADIZIONE**.

Tradizione: è il processo di trasmissione di un testo. Viene dal latino che vuol dire consegnare. Attraverso una catena di testimoni(lapidi, manoscritti) ci arriva il testo a noi.
Immaginiamo Archimede: inventa i teoremi della sfera e del cilindro, a questo punto chiama uno schiavo a cui detta cosa scrivere. Lo schiavo lo scrive su un rotolo di papiro e lo manda ad Alessandria al suo amico , ad Alessandria viene messo in biblioteca dove poi si fanno varie copie, da cui viene fuori una cosa del tipo:



Nel caso di Archimede noi conosciamo dei codici(tutti rinascimentali) D(codice del XV sec), E(codice di ½ XV sec), G(primo quarto del XVI sec), H, N(1544), Basilea 1544(prima edizione) ma non sappiamo la relazione tra questi codici. Ricostruire l'albero fino al codice w non è possibile, potremmo arrivare al più ad H, prima che la tradizione si interrompa. Quindi la matematica greca originaria, cioè cosa ha veramente scritto Euclide, Archimede è nella maggior parte dei casi un **"noumeno"** un qualcosa a cui non possiamo arrivare.

Ad esempio un testo come gli Elementi di **Euclide** è stato soggetto di potature e sviluppi, quali sono queste cause:

1. Cause naturali, perdita materiale del testimone
2. Tecnologia di scrittura: la scrittura sul papiro andrà avanti fino alla metà del II sec d.c. ma già si era sviluppata la scrittura su pergamena. Attenzione perché i papiri sono molto fragili quindi successivamente si è preferito passare oltre. Poi il rotolo ma questo è scomodo da leggere soprattutto per la matematica. Successivamente viene usato il codice, molto più comodo per

trovare le informazioni. In particolare a partire dall'inizio del tradizione volgare la tradizione del rotolo di papiro cade in disuso, quindi per l'esistenza del testo si ha la necessità di cambio di tecnologia di scrittura.

3. Tecniche di scrittura: prima si aveva la scrittura maiuscola continua successivamente a partire dal IV secolo si passa dalla maiuscola alla minuscola. E quindi i libri scritti in maiuscolo non li vuole più nessuno, in particolare non si sanno più leggere.
4. Le mode: le cose più nuove distruggono le vecchie. Gli elementi di Ippocrate non li possiamo più leggere perché dopo ci sono stati quelli di Euclide che erano molto più completi, quindi gli elementi di Ippocrate sono andati persi. La stessa cosa con Apollonio, egli riformula tutta la teoria delle coniche, quindi tutta la teoria pre-apolloniana viene andata persa.

Quindi ci sono una serie di cause che fanno si che l'albero della tradizione venga potato selvaggiamente. Questo è molto importante perché specialmente per la matematica fino alla diffusione della stampa, il possesso materiale del testimone tende a equivalere con il possesso del testo stesso. Succede che ho un manoscritto, leggo un teorema ad esempio il teorema di Pitagora:

- Lo leggo, vedo che si può trovare un risultato analogo anche per triangoli non rettangoli (Carnot) e lo dimostro
- Scrivo il risultato a margine di pagina
- Poi il manoscritto viene copiato, e la dimostrazione nel margine viene scritta nel corpo del testo

Morale, il processo di traduzione corrompe il testo. Anche negli elementi di Euclide è presente questo fenomeno.

Come leggiamo la matematica greca oggi?

La leggiamo grazie a **Johan Ludvig Heiberg** (1840-1925 circa). Costui era un filologo danese il quale nella sua tesi di dottorato fece una edizione dell'opera di **Archimede** e l'anno dopo fece la prima edizione critica (=edizione che tiene conto di tutta la tradizione accessibile del testo). Oltre che di Archimede ha fatto l'edizione critica anche di **Euclide, Apollonio, Tolomeo, Sereno, Teodosio** e altri ancora. Per fare l'edizione critica si spende moltissimo tempo, è un lavoro immenso. In un certo senso si può dire che Heiberg è il creatore della matematica greca che leggiamo noi oggi. Ovviamente l'autore non è neutro, nella costruzione delle sue edizioni ci mette del suo. Inoltre

Heiberg era amico di un matematico di un certo valore **Hieronymus Zeuthen** con cui insieme condividono diversi lavori. Questo ha avuto conseguenze importanti sullo studio della storia della matematica nel corso del 1900. Le uniche edizioni critiche disponibili ad oggi:
Archimede → **Heiberg**
Diofanto→ **Paul Tannery**
Pappo→ **Hultsch**
Apollonio →**De Corps Foulquier** (2008 che tiene conto anche della tradizione araba)
Tutto questo significa che la visione di questi filologi ha influito pesantemente sulla visione della matematica greca dalle loro edizioni critiche in poi, questa influenza ha portato a una parziale deformazione dell'idea della matematica greca quella che la matematica greca sia la nostra matematica moderna travestita.
Zeuthen addirittura pensa che il secondo libro degli Elementi di Euclide fosse un trattato algebrico travestito da geometria.

LEZIONE 4→5-10-2020

Dei matematici greci si sa poco o nulla, l'unico di cui sappiamo qualcosa è Archimede. Quello che si può ricavare lo abbiamo dalle lettere di accompagnamento nelle loro opere, questa caratteristica riguarda in maggior modo Euclide, noto come **Euclide di Alessandria.**

Euclide:
Proclo nel V secolo d.C. scrive un commento al primo libro degli Elementi. Egli era un filosofo neoplatonico e le notizie che forniscono vanno prese con le molle. Per quanto riguarda Euclide egli afferma che **visse prima di Archimede** perché Archimede cita Euclide. Questo è vero ma solo per una cosa ed inoltre si pensa che fosse colpa di uno studioso che lo aveva annotato sul testo. Prendendo comunque per buono ciò che ci è stato detto da Proclo otteniamo che il punto di maggior splendore di Euclide si verrebbe a collocare circa nel **300 a.C.**
Non abbiamo un'idea sicura di quali fossero i rapporti di Euclide con Alessandria. Pappo se la prende con Apollonio perché egli critica una dimostrazione di Euclide sulle tre line. Succede quindi che se Apollonio che è collocabile III- II sec a.c ha studiato con gli allievi di Euclide, questo tende a portare Euclide verso il **250 a.C**, questo è un indizio. Un altro indizio fa riferimento ad Archimede di cui abbiamo delle date abbastanza certe 287-212 a.c., Archimede non cita Euclide ma c'è di peggio perché in vari parti della sua

opera avrebbe potuto citare gli elementi di Euclide, non lo fa mai! Il che fa pensare che Archimede gli elementi di Euclide non li avesse a disposizione. Quindi intorno al 240 a.c. risulta strano che non cita mai Euclide anzi cita teoria dissimili se non discordanti, quindi la produzione di Euclide ce lo fa collocare intorno **al 270-260 a.C.**
Altro "indizio" lo troviamo in Elefantina, sono stati trovati dei cocci (per annotare) ostraka, che contengono dei teoremi del 13° libro di Euclide con un testo molto simile a ciò che si legge attualmente anch'essi **non posteriori alla metà del terzo secolo**.
Quindi si conclude che Euclide va collocato intorno alla metà del terzo secolo.
Cosa è un libro (degli Elementi di Euclide)? E' l'equivalente di un rotolo di capitolo che è l'equivalente di un nostro capitolo, ci entrano circa 50 teoremi. Poi abbiamo Ottica, Catottrica e i Data queste sono opere ritenute genuine. Ottica si occupa di raggi visuali, Catottrica della riflessione mentre l'ultima è una sorta di manuale che "data una cosa è data un'altra" una sorta di condizione necessaria per la costruzione di figure. Gli è attribuito anche un trattato di musica teorica, ovvero su come dividere l'intervallo musicale in terza quarta e quinta… poi ci sono opere non pervenute, ci sembra che Euclide abbia scritto Elementi di conica, un trattato intitolato Porismi, una sorta di corollario, questo è descritto se pure sommariamente da Pappo.

Grosso modo questo è il corpus Euclideo di cui disponiamo oggi.

Elementi: questi sono stati un'opera fondamentale nella storia della matematica, della cultura occidentale, islamica e in qualche modo anche della cultura cinese. D'altra parte gli Elementi sono costruiti con il **sistema ipotetico-deduttivo** (Da degli assiomi si deducono risultati) che è la principale eredità della matematica greca, questi diventano un paradigma del ragionamento corretto in contrapposizione al ragionamento filosofico.Fino al '700 la geometria euclidea diventa protagonista del ragionamento certo (poi vengono scoperte le geometrie non euclidee).

Come sono organizzati?

1. proprietà elementari del triangolo e del parallelogramma per finire con Teorema di Pitagora;
2. proprietà elementari di quadrati e rettangoli;
3. proprietà elementari del cerchio;
4. costruzione dei poligoni regolari fino all'esagono, decagono e pentadecagono;

5. teoria delle proporzioni tra grandezze;
6. similitudine tra triangoli e parallelogrammi;
7. **8**. e **9**. teoria dei numeri;
10. incommensurabilità, classificazione di grandezze incommensurabili;
11. geometria solida teoremi su rette come possono essere messe sullo spazio e prismi;
12. cono piramide e loro rapporti, cono- cilindro, piramide- prisma, rapporti tra le sfere;
13. costruzione dei poliedri regolari e dim. Che ne esistono solo 5 (solidi platonici);

Tradizione degli Elementi:

Euclide vive nel terzo secolo a. C. Nel I-II sec d.c. **Erone di Alessandria** scrive un commento agli elementi di Euclide e pubblica vari “articoli” che rappresentano dei riassunti della geometria elementare, quindi già al tempo di Erone vi era stato messo mano al testo. Nel quarto secolo **Teone di Alessandria** (padre di Ipazia: filosofa e matematica) che scrive vari commenti a diversi libri (in mezzo c’è Pappo), fa una edizione degli Elementi. Succede quindi che tutti i manoscritti greci di Euclide, Teone, sulla base di tutta la massa di materiale e di aggiunte varie costruisce la sua edizione, che ci è trasmessa da una serie di codici, e tutti tranne uno (codice P) dipendono dall’edizione di Teone. Anche nel codice P si capisce che l’editore di questo codice aveva a disposizione il testo tramandato da Teone, quindi questo codice non si discosta molto. Succede quindi che Heiberg costruisce la sua edizione critica di Euclide, verso la fine del ‘800. Heiberg ebbe una disputa con un arabista che sosteneva che anche la tradizione araba aveva la sua rilevanza nella edizione critica degli Elementi di Euclide, Heiberg non gli diede retta, ha fatto bene!
Perché? Perché gli arabi ,dopo la rivelazione di Maometto, nella metà dell’ottavo secolo si espansero moltissimo, e vennero in contatto con culture molto differenti e questi cominciarono a tradurre dal siriaco all’arabo molti testi, anche dal greco all’arabo. Queste traduzioni si diffondono in tutto il mondo arabo, per quanto riguarda gli Elementi succede che quasi sicuramente le traduzioni arabe dipendevano da quelle di Erone. Per esempio prendiamo il 10° libro: nella versione greca ha 110 proposizioni in quella araba ne ha una 90-ina, le traduzioni arabe tendevano a modificare il testo, i matematici arabi erano molto bravi per questo modificavano.
Heiberg quindi fece bene a fare la sua edizione critica solo dai manoscritti greci, per come ci è stato trasmesso.

Traduzioni latine:

Boezio aveva tradotto dal greco le opere di Euclide, che vennero ben presto perdute. Euclide risorge nel 11° secolo, dopo le ondate barbariche. In spagna avvennero scambi tra tradizione araba e latina in particolare vengono scambiati gli elementi di Euclide. Nel 13° secolo **Campano da Novara**, basandosi sulle varie traduzioni latine fa una sua versione degli Elementi che diventa la versione di riferimenti fino alla fine del 16° secolo. Questo ramo della tradizione arabo latina ha una importanza rilevante. Verso la fine del 15° secolo la tradizione umanistica ha presente l'antichità classica come un modello insuperabile di civiltà e di sapere, insuperato ma da superarsi, bisogna riscoprire il sapere classico greco. Verso il 1505 **Bartolomeo Zamberti** traduce tutte le opere di Euclide. Campano e Zamberti iniziano a essere concorrenti per la "giusta" traduzione di Euclide. Il problema diventa quindi un problema filologico ovvero di come ricostruire quello che Euclide aveva veramente scritto, problema che termina con Heiberg.

LEZIONE 5→9-10-2020

Volta scorsa:

Su Euclide, come sulla maggior parte dei matematici greci, abbiamo notizie scarsissime, collezionando vari elementi possiamo collocare Euclide ad Alessandria, circa a metà del III secolo a.C. Di Euclide ci sono pervenuti: gli Elementi, l'Ottica la Catottrica e i Data. Questi ultimi sono una sorta di riassunto di proposizioni fondamentali degli Elementi. Gli sono attribuiti anche Elementi di Conica, i Trattati Porismi (che vuol dire conseguenza) e un Trattato di Musica Teorica considerato apocrifo(non autentico). Abbiamo anche un trattato sulla Bilancia, i Fenomena, questi sono un trattato di Astronomia.

La tradizione del testo Euclideo.

Il concetto di tradizione è fondamentale nel concetto di storia in generale. La tradizione degli Elementi, comincia con Euclide ma per la natura del testo Euclideo questo va soggetto a modifiche nel corso dei secoli, anche perché diventa la base dello studio di qualunque tipo di matematica, da Euclide fino all'unità d'Italia (vedi Betti e Brioschi). Questa tradizione si svolge in una prima fase, in cui il testo subisce sicuramente dei rimaneggiamenti ad esempio sappiamo che **Teone d'Alessandria** ha tradotto il testo in greco nel IV secolo d.C. in questi anni i matematici piuttosto che concentrarsi sul cercare della nuova matematica si sono concentrati su traduzioni e commenti. Teone stesso oltre all'edizione degli Elementi scrive un commento dell'Almagesto di

Tolomeo. Il testo di Teone ci è stato trasmesso da tutti i manoscritti greci tranne uno, noto come il codice P di cui si ha sia una versione pre-teonina degli Elementi. Questo è diciamo contemporaneo della fase di Teone, ed è su questa base che **Heiberg** produrrà la sua edizione critica di Euclide.

Tradizione diretta: uno che vuole trasmettere il testo in quanto testo
Tradizione indiretta/parallela: uno che trasmette il testo in un'altra lingua o con parafrasi.

Una tradizione importante di Euclide è quella Araba. Questi espandendosi iniziano ad assimilare le culture che conquistano. All'inizio del IX secolo verranno fatte due traduzioni di Euclide e si diffonderanno per tutto il mondo Arabo, arriveranno in Spagna e verranno fatte altre traduzioni in arabo. Particolarmente importanti sono quelle di: **Adelardo di Bath, Ermanno di Carinzia, Gerardo da Cremona.** Oltre a queste circola nella Sicilia Normanna, una versione Greco-Latina. Sulla base di queste versioni, nel XIII secolo alla corte di Viterbo, che è la corte dei papi che hanno trionfato sugli imperatori nella battaglia di Benevento, **Campano da Novara** fa una sua edizione commentata di queste varie edizioni che circolavano ed è sulla base di questa versione che si studierà la geometria. A partire dal XV secolo inizia il movimento umanistico e quindi anche la riscoperta dei testi greci, tanto che **Zamberti** nel 1505 produce una nuova traduzione dell'opera omnia (Elementi, Data, Ottica e Catottrica) di Euclide, queste due edizioni circoleranno per tutto il XVI secolo in maniera affiancata. Fino a quando personaggi come **Commandino** o altri produrranno nuovi testi euclidei che ormai sono diversi, perché tengono conto di tutto quanto scoperto nel corso dei secoli precedenti. E da qui in poi la tradizione Euclidea si scinderà tra:
- Autori che cercano la restituzione filologica del testo
- Autori che cercano di produrre loro libri prendendo informazioni dagli Elementi

Gli Elementi.

Thomas Heath(contemporaneo di Heiberg) è un personaggio molto importante nella storia della matematica. Egli svolse un lavoro enorme nello studio della matematica Greca, tradusse gli Elementi, fece parafrasi delle coniche di Apollonio, lavorò su Diofanto, su Archimede. Heath è uno dei maggiori responsabili della formazione di un certo tipo di visione della matematica Greca.

1) I LIBRO

Postulati di Euclide:

Postulate 1.

To draw a straight line from any point to any point.

Un segmento di linea retta può essere disegnato unendo due punti a caso.

Postulate 2.

To produce a finite straight line continuously in a straight line.

Un segmento di linea retta può essere esteso indefinitamente in una linea retta

Postulate 3.

To describe a circle with any center and radius.

Dato un segmento di linea retta, un cerchio può essere disegnato usando il segmento come raggio ed uno dei suoi estremi come centro

Postulate 4.

That all right angles equal one another.

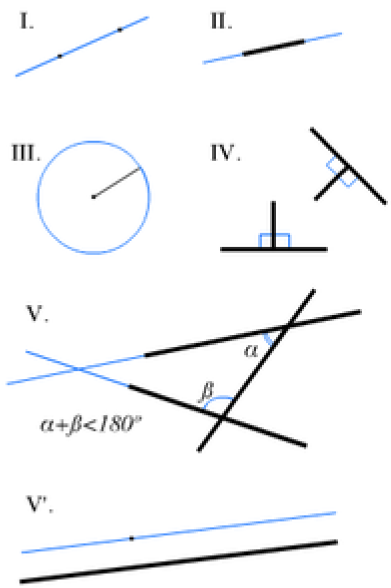
Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro

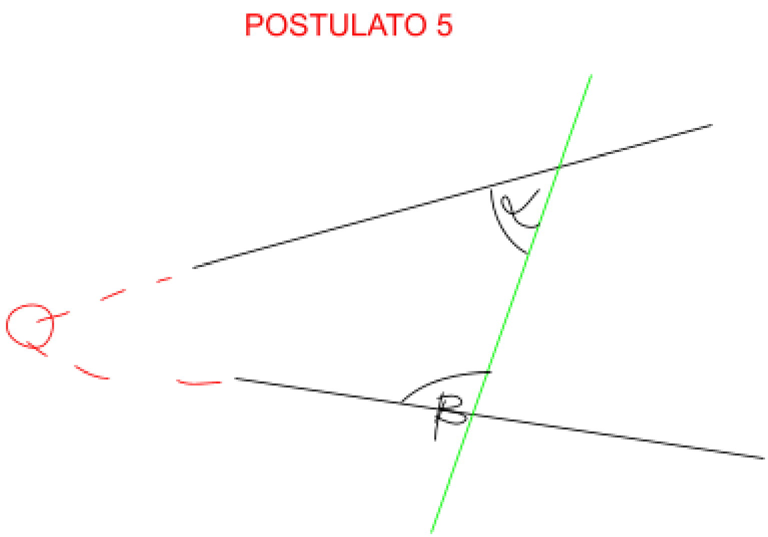
Postulate 5.

That, if a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles.

Se due linee sono disegnate in modo da intersecarne una terza in modo che la somma degli angoli interni, da un lato, sia minore di due angoli retti, allora le due linee si intersecheranno tra loro dallo stesso lato se sufficientemente prolungate.

Da <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/bookI.html>





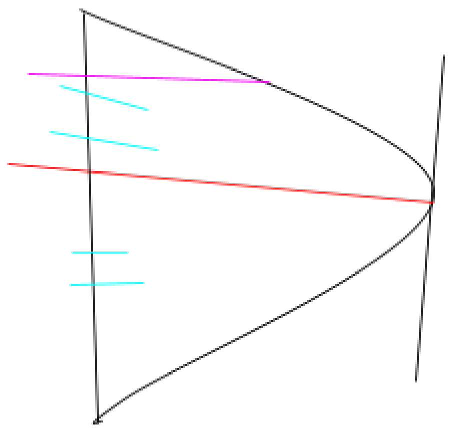
Se ho due rette(in nero), tagliate da una trasversale(verde); e ho due angoli (alfa e beta); ealfa e beta presi insieme sono minori di due angoli retti. Allora le due rette si incontrano dalla parte di alpha e beta(in rosso).

Tutto il resto della geometria è costruita su questo postulato , ad esempio serve a dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due retti. Questo postulato fin dall'antichità è stato criticato(cosa succede se le prolungo infinitamente?). Già Proclo nel V secolo proponeva di cambiare definizione di retta parallela e di parlare di rette equidistanti, bisogna aspettare un gesuita del 700. **Girolamo Saccheri** cambia approccio alla questione, fino ad allora i tentativi si basavano sull'idea di dimostrare il quinto postulato tramite gli altri postulati, Saccheri volle provare per assurdo. In tre casi funziona ma il terzo non funziona molto bene. La stessa idea viene ad altre persone, da lì l'idea di dimostrare per assurdo senza arrivare ad alcun assurdo.
Quindi dopo tali postulati iniziano le prime proposizioni.

2) II LIBRO:

Era considerato libro dell'algebra geometrica.Infatti, ad esempio:
La preposizione 2 algebricamente sta dicendo che   (a+b).c = a.c + b.c
Tuttavia la critica moderna afferma che queste proposizioni sono in realtà lemmi che servono nelle dimostrazione per sostituire costruzioni che renderebbero la dimostrazione ancora più complessa. Ad esempio se prendiamo il Teorema di Pitagora è chiaro e non c'è bisogno di altre costruzioni. Quindi questi lemmi sono attrezzi geometriche. Ad esempio prendiamo la proposizione 5 del II libro, che Apollonio nelle Coniche usa in continuazione. Questa proposizione equivale al prodotto notevole:
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$
Equivale vuol dire che dipende dai nomi che do ai vertici della figura. Viene usato nelle Coniche in Apollonio perché il diametro dimezza le corde:

supponiamo di avere una parabola. e (in rosso) questo è il diametro. viene usato perchè il diametro dimezza le corde e prendiamo un altro punto in cui l'ordinata è divisa e quindi avremo una retta che è divisa in parti naturalmente uguali e disuguali(fucsia) e quindi si potrebbe applicare il teorema di prima(preoposizione 5)

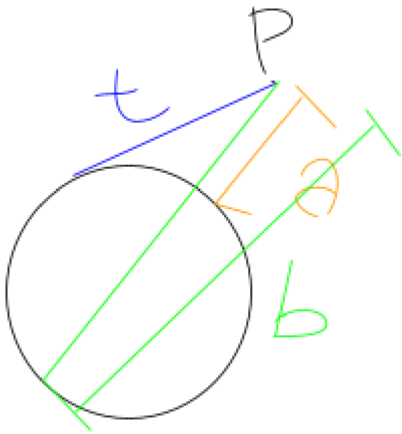


Ken Saito ha elaborato l'idea che questi Elementi siano una cassetta degli attrezzi, in particolare questi teoremi del secondo libro.

3) III LIBRO : riguarda il cerchio.

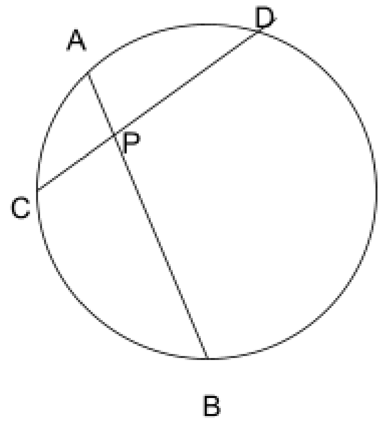
Tangenti a un cerchio:

q(t) = r(a,b)



dato un cerchio, e dato un punto P esterno al cerchio. tracciamo la tangente (in blu) , poi una secante(in verde). Allora la tangente è in media proporzionale fra a e b. Ma nel terzo libro non è espresso il linguaggio delle proporzioni. E allora si dice che il quadrato sulla tangente è uguale al rettangolo su a e b

Un altro teorema importante:



DATE DUE CORDE IN UN CERCHIO. IL RETTANGOLO SU PA E PB E' UGUALE AL RETTANGOLO SU PC E PD

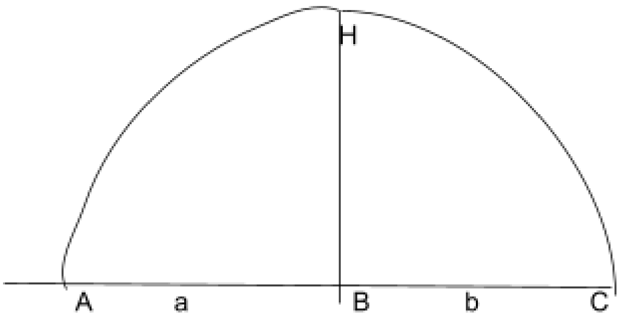
r(PA,PB) = r(PC.PD)

I primi 4 libri sono quelli di base, che saranno la base dell'istruzione elementare nei secoli successivi. Negli altri verranno sviluppate cose più raffinate.

4) Nel **IV libro** viene trattata la costruzione dei poligoni regolari inscritti e circoscritti

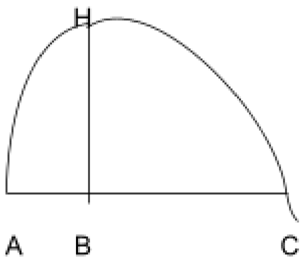
5) La teoria delle proporzioni del **V libro** è molto importante in quanto viene ripresa anche successivamente
6) (nel **libro VI** proporzioni fra triangoli e parallelogrammi e proporzionalità fra angoli e settori) e poi utilizzata nel 10,11,12,13 libro.

7) **VII, VIII , IX** sono dedicati alla teoria dei numeri. Questi tre libri e il 10°
8) costituiscono una sorta di interruzione nel discorso geometrico. Viene
9) definita l'unità. Viene inoltre sviluppata una teoria delle proporzioni tra i numeri, indipendente da quella sviluppata nel 5° libro, quasi a sembrare che i numeri siano due cose totalmente diversi dalle grandezze.
10) Nel **X libro** si sviluppa una teoria delle proporzioni dei numeri che differisce da quella introdotta precedentemente.



Siano a e b due rette. la media proporzionale tra AB e BC sarà BH

AB:BH=BH:BC



Tra i numeri non si può fare in quanto tra 8 e 9 non esiste un medio proporzionale che dovrebbe essere rad 72

Le proporzioni fra i numeri hanno le loro specificità e quelle delle grandezze hanno le loro ma allo stesso tempo hanno un concetto di proporzione che si è sviluppato nella matematica greca su due linee diverse: quello della matematica numerica cioè quante volte una grandezza sta in un’ altra e quella della matematica geometrica che dopo la scoperta delle grandezze incommensurabili porta a un tipo di teoria delle proporzioni che riesca a tener conto anche degli sviluppi diversi. Questo riprende il concetto che nella matematica greca geometria e algebra erano nettamente separati.

Il **X libro** è dedicato alla classificazione di grandezze incommensurabili. Studia le grandezze di questo tipo: le apotome di binomi

$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ quando è espresso in forma algebrica
Il 10° libro non parla esattamente di queste cose ma parla di rette commensurabili e incommensurabili. Ad esempio la diagonale e il lato del quadrato sono incommensurabili ma commensurabili in potenza e poi fissata una retta(quella retta rispetto a cui si confronta(unità)) ci sono rette esprimibili e quindi razionali, cioè il loro rapporto con la retta posta è esprimibile **(locos=rapporto e proporzione anologhia)**. Questa è un'idea del X libro (non è un trattato di teoria dei numeri razionali) è un trattato di geometria che si pone il problema fra quali rette che sono incommensurabili fra di loro quali tra queste siano esprimibili con una posta. Ad esempio se il lato è la retta posta allora la diagonale è quella esprimibile.

11) Nell'**XI libro** si torna alla geometria(definizione di solido, piano, come due rette nello spazio possono essere messe, parallelismo e perpendicolarità fra rette e piani)

12) **Il libro XII** tratta la misura dei solidi, la piramide, coni e cilindri ed è molto importante perché è qui che entra in gioco la tecnica della doppia riduzione ad assurdo, (tecnica di uguaglianza fra proporzioni o figure tramite questa tecnica) in particolare nella proposizione 2.

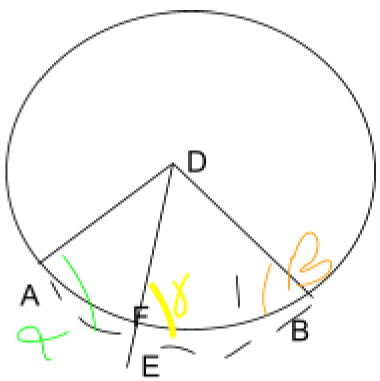
La doppia riduzione ad assurdo è equivalente alla tecnica di esaustione. Si capirà meglio in Archimede

13) Il **XIII libro** è dedicato allo studio dei poliedri e culmina nella dimostrazione che i poliedri regolari sono 5

Analisi di proposizione 2 libro III

PROPOSIZIONE II LIBRO 3

(La circonferenza è una figura convessa). Se vengono presi due punti A e B a caso sulla circonferenza allora la linea(in blu) che congiunge i due punti cade nel cerchio. Supponiamo che cada fuori(almeno un punto della retta cade fuori E). D è il centro del cerchio. AEB è un triangolo isoscele e alfa=beta. l'angolo DE^B(in giallo gamma) è l'angolo esterno di un triangolo quindi è maggiore dell'angolo DA^E(in verde alfa)=DB^E(arancione beta). E il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore. quindi dovra essere che DB e' maggiore di DE che è assurdo perché abbiamo supposto che E stia fuori dal cerchio e quindi che DE è maggiore di DF =DB… continua...



Nel margine gli autori segnano tutti i motivi per cui viene detta una certa cosa(in blu nella foto del libro.). Normalmente non si trovano ma si ritrovano delle espressioni che richiamano centre proposizioni che la gente deve aver memorizzato in precedenza

Una proposizione greca ha una sua struttura, in particolare lo ha quello degli Elementi:

Questo è stato studiato da Fabio Acerbi ‘’In Silenzio Delle Sirene La Matematica Greca’’.

- **Protasi**: asserzione generale →*if fino a circle*
- **Extesi:** esposizione(ri-enunciazione), viene ridetta la stessa cosa riferendosi a una figura →*let fino a circumference*
- **Determinazione(diorisma)**: in generale introdotta da "lego oti" dico che, si chiama diorisma in greco, e determina rispetto all'extesi ciò che si vuole dimostrare →*I say fino a circle*
- **Costruzione** o catasquée
- Dimostrazione
- **Super asma**:conclusione, viene ricapitolato tutto quanto →*therefore fino a circle*

almeno negli Elementi questa è una struttura molto rigida, e questo è uno dei motivi per cui si può parlare di matematica greca

LEZIONE 6→12-10-2020

Volta scorsa:

Rapida ricognizione dei libri di Euclide. Heath colui che studiò e scrisse il libro degli Elementi, ha scritto anche dei libri sulla storia greca.
Proprietà fantasma: è una proprietà priva di oggetto.
In questa lezione analizzeremo il Libro V (teoria delle proporzioni) e il XII dedicato alla geometria di misura in particolare a cono piramide e sfera.
L'analisi fatta la volta scorsa di una proposizione degli Elementi, ha messo in luca il fatto che le proposizioni seguono una struttura ben definita, inoltre le citazioni e i rinvii nelle proposizioni vengono fatti enunciando una proposizione già dimostrata, non viene fatto come faremo noi oggi ovvero "…come dimostrato nel teorema X…".
Almeno a partire da Euclide, una tipica dimostrazione assume una certa struttura: enunciato generale ad esempio il teorema di Pitagora, questo enunciato viene successivamente fatto riferire a una figura particolare ad esempio a uno specifico triangolo rettangolo. Attenzione: quel triangolo rettangolo vuole essere un rappresentante di tutti i triangoli rettangoli.
All'extesi segue una costruzione, a questa segue la dimostrazione e poi la conclusione in cui viene riproposto l'enunciato generale.

In questa lezione:

- Che tipo di teoria delle proporzioni propone
- Che problemi crea

- Come viene applicata ai problemi di misura

La teoria delle proporzioni è esposta da Euclide nel **V libro**. All'inizio di questo libro troviamo una serie di definizioni.
Viene definito il **rapporto**:
A ratio is a sort of relation in respect of size between two magnitudes of the same kind.
La cosa interessante è "relation". Questa definizione ci dice cosa non è il rapporto, questo non è un numero!

Definizione 4:
Magnitudes are said to have a ratio to one another which can, when multiplied, exceed one another.
Da <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/bookV/bookV.html>
Diremo noi che le grandezze devono essere archimedee.

Definition 5
Magnitudes are said to be in the same ratio, the first to the second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever are taken of the first and third, and any equimultiples whatever of the second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equimultiples respectively taken in corresponding order.

Analisi di questa definizione:
Date 4 grandezze A,B,C,D abbiamo che A:B = C:D. Se presi equimultipli della 1° e della 3° e presi equimultipli della 2° e della 4° mA e nB e mC e nD.
Succede che se $mA > nB \rightarrow mC > nD$
$mA < nB \rightarrow mC < nD$
$mA = nB \rightarrow mC = nD$
questa è anche vista come definizione di rapporto.
Se noi abbiamo due grandezze A e B e vogliamo definire il rapporto A/B allora possiamo immaginare che se A/B =C/D =m/n è razionale allora si può scrivere come m/n allora mA=nB e mC=nD. Se non è razionale dovranno essere maggiori o minori.
Notiamo che questa è piuttosto pesante come uguaglianza, in quanto ogni volta dovremmo ricorrere a molti confronti per dimostrare l'uguaglianza

Definition 9
When three magnitudes are proportional, the first is said to have to the third the duplicate ratio of that which it has to the second.

Siano a,b,c tali che a:b=b:c . La definizione ci dice che a:c =D(si dice duplicato)(a:b). Cosa vuol dire?

Se prendo $\frac{a}{b}$. $\frac{a}{b} = (\frac{a}{b})^2 = \frac{a}{c}\ perchè\ visto\ che\ \frac{a}{b} = \ \frac{b}{c}$

$allora\ andando\ a\ sostituire\ ho\ che\ \frac{a}{b}.\frac{b}{c} = (\frac{a}{b})^2 = \frac{a}{c}$

quindi il rapporto duplicato è come dire prendere il quadrato del rapporto. Osserviamo che dire prendere il "quadrato" nella geometria greca non ha senso, in quanto il rapporto non è né un numero né un grandezza, ma una relazione. Per questo che viene introdotto tale "duplicate ratio" o rapporto duplicato. (la relazione viene raddoppiata)

Libro VI

Proposition 17.

If three straight lines are proportional, then the rectangle contained by the extremes equals the square on the mean; and, if the rectangle contained by the extremes equals the square on the mean, then the three straight lines are proportional.

Questo teorema ci dice che se abbiamo tre rette proporzionali allora [questo è un rapporto fra linee]a:c=D(a:b)=q(a):q(b) [questo è un rapporto fra aree]

Questo ci fa capire quanto l'aspetto geometrico sia tenuto distinto in maniera rigida dall'aspetto aritmetico algebrico. Inoltre questo tipo di tecnica(il rapporto duplicato): passaggio di rapporti tra aree a rapporti tra linee e viceversa, è una tecnica usata molto da Archimede e Apollonio nelle loro opere.

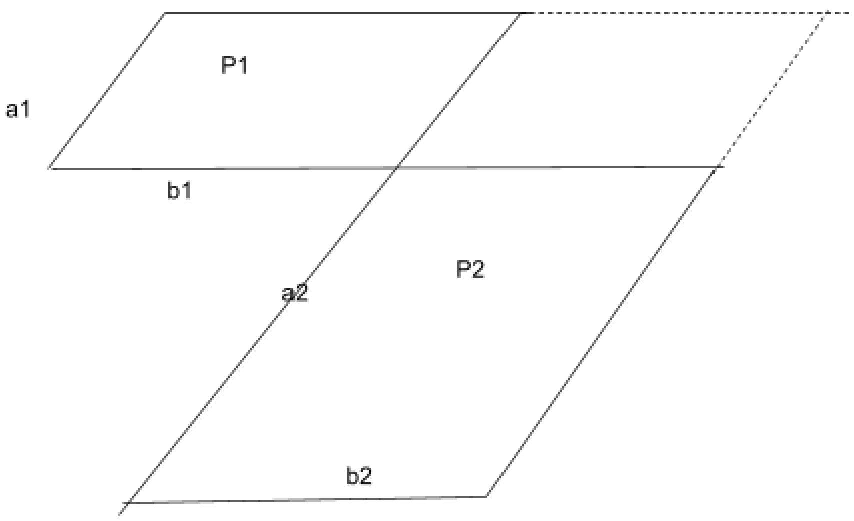
Legato a questo abbiamo il concetto di rapporto composto
Questa definizione viene chiamata spuria. Si pensa che sia stata introdotta postuma. Viene introdotto il concetto di quantità dei rapporti, vediamo un caso di uso di questo concetto.
def 5 del VI libro*: ci dice che un rapporto si compone di altri rapporti quando le quantità dei rapporti moltiplicate producono qualcosa*

Questa definizione viene chiamata spuria(non autentica). Si pensa che sia stata introdotta postuma. Viene introdotto il concetto di quantità dei rapporti, vediamo un caso di uso di questo concetto.

Proposition 23.

Equiangular parallelograms have to one another the ratio compounded of the ratios of their sides
Parallelogrammi equiangoli hanno fra loro il rapporto composto dei lati
Dimostrazione (del prof):

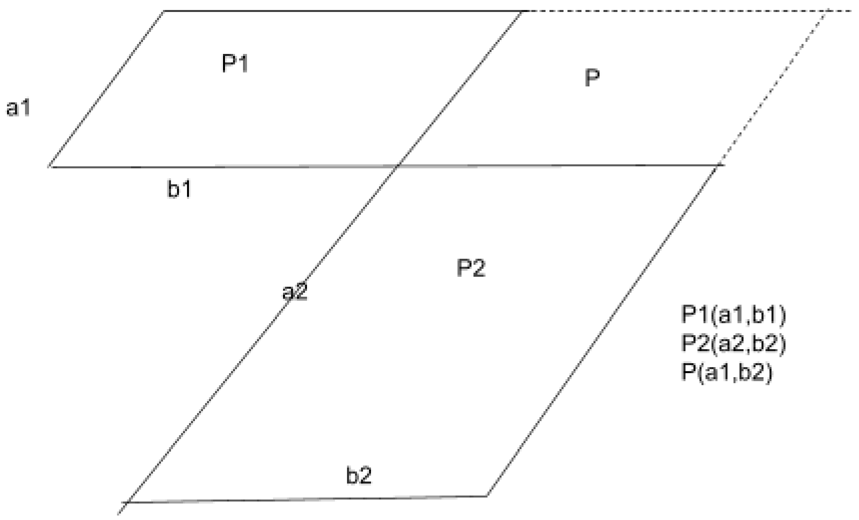
Dati due parallelogrammi,di lati a1, b1 e a2, b2. Si vuole dimostrare che
P1:P2=C(a1:a2, b1:b2) [rapporto composto dei lati]



il rapporto duplicato è un particolare caso di composizione i cui il rapporto si a:b viene composto con il rapporto di b:c, e cioè C(a:b , b:c) = a:c dando luogo al rapporto di a:c.
Come si farà a comporre il rapporto quando non hanno elementi in comune?
Se noi avessimo a:b e c:d per comporli basterà che esista un x tale che c : d = b : x allora se voglio fare C(a:b, c:d)=C(a:b, b:x)= a:x.
Cioè il rapporto composto tra due rapporti differenti è uguale al rapporto della prima grandezza con il quarto proporzionale dopo c d e b

In VI I *Euclide ha dimostrato che parallelogrammi di egual altezza stanno tra loro come le basi*
dimostrazione

Dati due parallelogrammi,di lati a1, b1 e a2, b2. Si vuole dimostrare che
P1:P2=C(a1:a2, b1:b2) [rapporto composto dei lati]



avremo che
P1:P = b1:b2
P:P2=a1:a2
Allora il rapporto composto C(P1:P, P:P2)=C(b1:b2 , a1:a2)
Ma C(P1:P, P:P2) = per definizione a P1:P2.
questa tecnica dimostrativa è molto versatile. Infatti se anziché avere un parallelogramma avremmo una qualsiasi altra grandezza che dipende da due altre grandezze. P(m,l). Tutte le altre volte che avremo questa proporzionalità diretta otteniamo lo stesso risultato applicando questa tecnica. Nel moto uniforme
spostamento :tempo
Spostamento : velocità.
otteniamo che lo spostamento nel moto uniforme ha rapporto composto del tempo e della velocità dello spostamento

Anche qui si passa da rapporto fra aree a rapporto fra linee e viceversa. Questa proposizione viene dimostrata applicando direttamente la definizione di proporzionalità. Uno si aspetta che tutte le dimostrazioni di proporzionalità vengono fatte in questo modo, ma non è così vediamo qualcosa:

Libro VII
Dipende dalla preposizione 1
Proposition 2
To find the greatest common measure of two given numbers not relatively prime.

libro XII

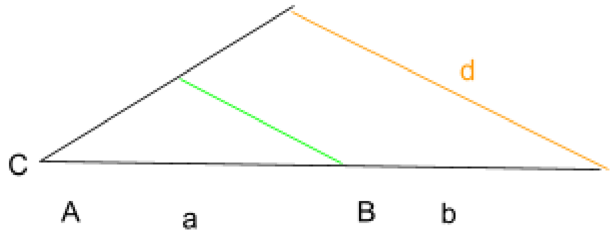
Proposizione 2

Vogliamo dimostrare che dati C1 e C2 cerchi e d1 e d2 loro diametri Allora C1:C2 = q(d1): q(d2)

Cosa vuol dire prendere un multiplo del cerchio ad esempio mC1? fino a quando si parla di rette, triangolo, rettangoli , la teoria fila liscia altrimenti bisogna supporre qualcosa di più forte, e supporre(che 3 cerchi piccoli ne fanno uno grande) questo implica che stiamo supponendo quello che vogliamo dimostrare.

La via scelta per questo tipo di dimostrazione è mediante l'esistenza del 4° proporzionale, l'esistenza di tale proporzionale è alla base del metodo della doppia riduzione ad assurdo. Esso si basa su Talete

Date tre grandezze(rette) esiste la 4(quarto proporzionale). Usando Talete che ci dice che date due rette a e b. Dato C, vogliamo costruire la quarta proporzionale . Congiungiamo(in verde) l'estremo di C (C1) con l'estremo di a e cioè B. Prolungo C e tracciamo (in arancio)per l'estremità di B la parallela a quella per a(a quella verde). d è il quarto proporzionale. Il fatto che esiste il quarto proporzionale non è immediato.

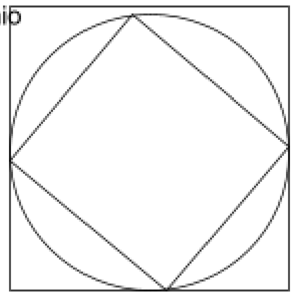


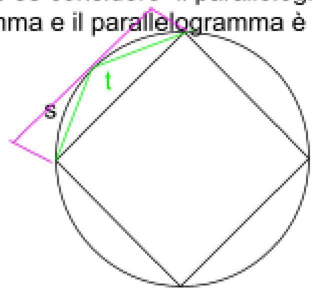
Supponiamo che q(d1):q(d2)≠ C1:C2. Allora esiste S $\in \ N$ tale che q(d1) : q(d2) = C1:S dove s $\prec \ o \ \succ$ C2, quindi si hanno due casi:

1. S$\prec \ C2$

consideriamo il nostro cerchio C2 e consideriamo il quadrato q iscritto a esso. quando tolgo il quadrato tolgo più della metà del cerchio q $>$½ C2. Perché? Perchè quando considero il quadrato Q circoscritto Q=2q $>$ C2.

Se adesso considero un arco e traccio due corde(in verde). il triangolo t che ottengo t $>$ ½ s (segmento). Quindi quando tolgo l'ottagono, dopo aver tolto il quadrato, levo più della metà di quello che era rimasto. t $>$½ s perché se considero il parallelogramma (in rosa) il triangolo è uguale alla metà del parallelogramma e il parallelogramma è più grande del cerchio





In questo modo costruisco poligoni regolari di 2^n larti tali che la differenza fra il cerchio e il poligono regolare inscritto sia piccola a piacimento, cioè il cerchio è approssimabile con i poligoni regolari.

Cioè data una grandezza E tale che Cerchio-Poligono $\prec E$
Dunque posso costruire un poligono P2 tale che C2-P2 $\prec$ C2-S e cioè P2 $\succ$S
Succede che
Il q(d1): q(d2) = C1 : S e per il Teo precedente so che P1:P2=q(d1): q(d2) dove P1 è un poligono regolare dello stesso numero di lati di P2 e quindi simile a P2.
P1:P2=q(d1): q(d2) = C1 : S e quindi P1:C1=P2:S
ora qui abbiamo che P1 è più piccolo di C1 perché inscritto a esso.
P1$\prec$ $C1$ antecedente $\prec$ conseguente quindi anche l'altro antecedente cioè P2 dovrà essere minore dell'altro conseguente e cioè S . assurdo
P2$\prec$ S

2. S$\succ$ $C2$
   Qui Euclide procede in maniera diversa. Supponiamo che q(d1): q(d2) = C1 : S con S $\succ$ $C2$, Uso il trucco+il quarto proporzionale
   1) q(d1):C1=q(d2):S (inverto)
      Si prende una grandezza T(quarto proporzionale) tale che q(d1):S=C2:T Lo prendo tale che T$\prec$ $C1$
      quindi q(d2):q(d1) = S:C1 + altro-
      A questo punto ho che q(d2):q(d1) = C2:T assurdo perchè ricondotto al caso precedente.

Questa è la tecnica principale per la geometria di misura, tecnica dimostrativa per doppia riduzione ad assurdo. Perché non metodo di esaustione? Metodo presuppone delle procedure uniformi, invece questa tecnica si applica in modo peculiare ai vari casi esaminati. Altra considerazione è il fatto che in questa dimostrazione abbiamo una tecnica per la proporzione di 4 grandezze che non fa uso della definizione di proporzionalità espressa nel 5° libro.

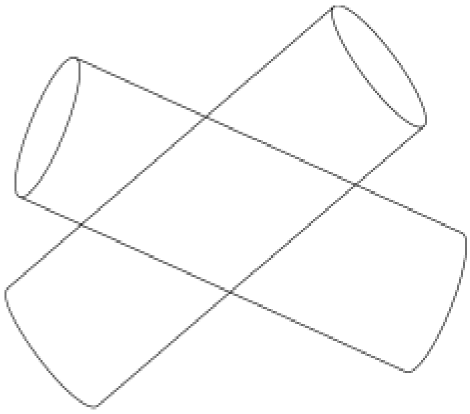
LEZIONE 8 → 19-10-2020

Rapida panoramica delle opere di Archimede.

Mediante Lettera di accompagnamento a Dositeo, ci sono pervenute le seguenti opere:

- Quadratura della parabola
- Sfera e cilindro 1 e 2
- Spirali

(in ordine cronologico)
Oss: Dositeo è allievo di Conone di Samo
Mentre il Metodo Meccanico è indirizzato e Eratostene. Questa è un'opera diversa dalle altre. Lo scopo di questa opera è inviare la dimostrazione di due teoremi: il primo teorema riguarda lo studio della volta a crociera (il solido che si ottiene intersecando due cilindri uguali e in maniera perpendicolare), e di determinare il rapporto che c'è tra doppia volta e cubo che la contiene. Archimede vuole dimostrare che la doppia volta è due terzi del cubo. Dopo aver descritto cosa intende fare egli descrive come è giunto ad altri risultati: conoidi e sferoidi, quadratura della parabola ecc.



se ho solo mezzo cilindro io ho una volta a botte. Se interseco una volta a botte con un altra volta a botte ottengo una volta a crociera. Se interseco due cilindri ottengo una doppia volta a crociera

Arenario.

Quest'opera inizia dicendo che: "non esiste un numero che possa contare tutti i granelli di sabbia". Questo si ricollega al fatto che i numeri Greci sono usati per contare. Ricordiamo che il sistema numerico Greco era di tipo alfabetico:

α	alpha	1	ι	iota	10	ρ	rho	100
β	beta	2	κ	kappa	20	c	sigma	200
γ	gamma	3	λ	lambda	30	τ	tau	300
δ	delta	4	μ	mu	40	υ	upsilon	400
ε	epsilon	5	ν	nu	50	φ	phi	500
ϛ	stigma	6	ξ	xi	60	χ	chi	600
ζ	zeta	7	ο	omicron	70	ψ	psi	700
η	eta	8	π	pi	80	ω	omega	800
ϑ	theta	9	ϙ	koppa	90	ϡ	sampi	900

Con sistemi vari di apici e simboli si riusciva a contare fino a 10'000x10'000 i greci la chiamavano miriade. Questo sistema di numerazione rendono quindi giustificata l'affermazione nell' Arenario. Archimede allora propone un sistema di numerazione periodico che si ripete dopo un certo periodo. Così Archimede dimostra che si possono contare i granelli di sabbia sulla terra, ma inoltre si può contare i granelli di sabbia in una sfera grande quanto l'universo. Facendo quindi questi conti Archimede fa vedere che i granelli di sabbia sono compresi nel primo periodo.

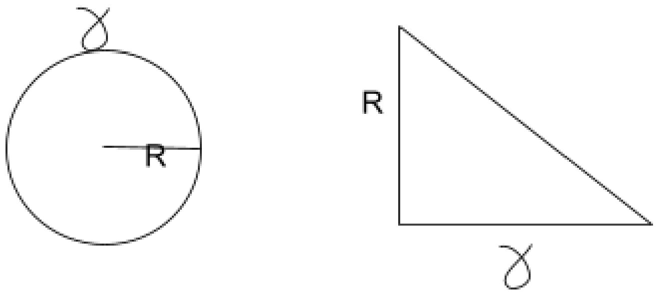
Opere prive di lettera di Dedica:

- Misura del cerchio
- Equilibrio dei piani primo e secondo
- Galleggianti

La prima ''Misura del Cerchio'' è un'operetta in tre proposizione sole. Nella prima Archimede vuole dimostrare che:

proposizione 1

Archimede vuole dimostrare che il cerchio è uguale a un triangolo rettangolo avente per base la circonferenza e per altezza il raggio



Nella **proposizione 2** vuole dimostrare che: Cerchio:Quadrato circoscritto =11:14

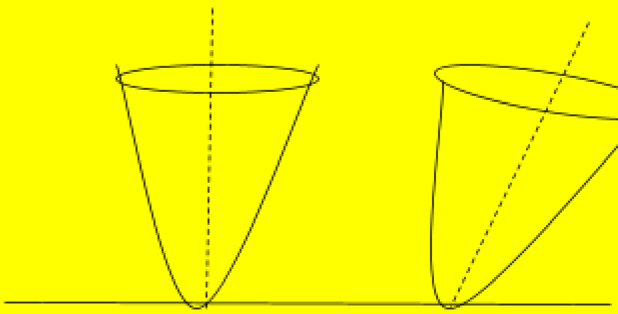
Nella **proposizione 3** invece vuole dimostrare che il rapporto tra circonferenza e diametro $\frac{c}{d}$ è compreso tra $3.\frac{10}{71} \leq \frac{c}{d} \leq \frac{31}{7}$ Notiamo però che per dimostrare la seconda proposizione serve la terza, inoltre l'uguaglianza nella proporzione deve essere un circa pertanto deduciamo che questo possa essere un testo corrotto. La stessa cosa a proposito di testi corrotti lo possiamo dire delle altre due opere sopra elencate. Il testo di cui disponiamo oggi viene fatto risalire a **Ipazia**(figlia di Teone) secondo **Wilbur Knorr**.

Equilibrio dei piani e Galleggianti sono due libri numerati in maniera differente rispetto alla **''Sfera e Cilindro''**. Questo perché il primo libro della sfera e cilindro tratta della sfera e di quelli che per noi sarebbero volume e superficie mentre il secondo tratta di argomenti differenti: costruire una sfera dato un cilindro. Così come sono profondamente diversi **EP I e II.** Nel primo Archimede tratta della legge della leva ovvero due grandezze si fanno equilibrio a distanze inversamente proporzionali, e centro di gravità di parallelogrammo, triangolo e trapezio. Nel secondo libro Archimede tratta del centro di gravità del segmento di parabola. Come ha dimostrato uno studioso canadese **Len Berggren** il primo libro di EP sembra non essere un opera di Archimedea ad esempio all'inizio di EPII Archimede dimostra la legge della leva quando lo aveva già dimostrato nel primo. L'idea è che questi testi siano stati riuniti in due libri raccogliendo scritti archimedei (solo nel caso del primo). La stessa cosa vale per i galleggianti (CF) in **CF I** si dimostra il principio di Archimede e in **CF II** viene studiato condizioni di equilibrio di un paraboloide immerso in un liquido.

Tali condizioni di equilibrio sono due:

in CF II

si considera una superficie piana il paraboloide ha due posizioni di equilibrio. Nella prima figura l'asse del paraboloide è perpendicolare alla superficie del liquido. (seconda figura)Invece a seconda del rapporto che c'è tra fra peso specifico del paraboloide e peso specifico del liquido e dei parametri geometrici del paraboloide stesso (quanto è largo) ne ha anche un'altra.



Questo secondo libro è molto difficile in particolare l'ultimo teorema occupa 5 pagine.

Il I libro contiene il principio di Archimede e contiene anche una teoria diversa della gravità perché invece di supporre che la superficie del liquido sia piana e che quindi le direzioni di caduta dei liquidi siano tutte parallele suppone che la superficie del liquido sia sferica (come dim nella prop 2). E questo crea molti problemi alla nozione di centro di gravità. Perchè quando ci troviamo in un campo di forze parallele il centro di gravità non coincide più con il centro di massa.

Il primo libro si pensa che sia stato riassunto in epoca tardo antica Notare che **CF, EP e Sfera e cilindro** sono le uniche tre opere che sono divise in due libri per come ci sono arrivate. La sfera e cilindro siamo sicuri che sia stata rimaneggiata, perché?

Archimede tutte le opere le scrive in Dorico, invece SC è scritta in koinè inoltre altre peculiarità ci fanno capire che sia stata rimaneggiata in epoca tardo antica. È proprio in questa epoca inoltre che si viene a costituire il corpus archimedeo fatto di: **SC, DC (misura del cerchio), EP, CF**. Le altre opere (già ai tempi di Eutocio VI secolo) non si conoscevano, ad esempio **spirali, conoidi e sferoidi, metodo**. Bisogna ricordare che già l'Archimede vivente avesse poco eco, più di una volta Archimede si lamenta con Dositeo o Eratostene perché non hanno risposto alle sue lettere. Questo dipende dal fatto che più che alla geometria di misura ad Alessandria ci si interessasse alla teoria delle coniche.
Neppure gli arabi stessi sembrano conoscere le opere sopra descritte, in particolare nell'occidente latino fino al XIII secolo, le uniche opere note sono: **misura del cerchio, rifacimenti arabi di SC, nozioni su EP.**

Quando e come le opere di Archimede arrivano in occidente e diventano radici della matematica moderna?
A Bisanzio (Costantinopoli) nel IX secolo c'è una rinascita della cultura… ma prima?
Piccola parentesi storica: l'impero bizantino era stato travolto dalla avanzata degli arabi, e da popolazioni provenienti dalle steppe dell'asia, prima gli Slavi, poi i Bulgari che contendono all'impero bizantino il possesso della penisola Balcanica. Quindi tra i secoli VII e VIII Bisanzio ha altri problemi rispetto alla crescita delle scienze. È solo al partire dal IX secolo con la dinastia macedone c'è una riscossa dell'impero bizantino che mette fine alla minaccia bulgara. Questo porta quindi a una rinascita degli studi e alla fondazione della scuola di costantinopoli. Un importante personaggio di questa scuola è Leone il

matematico. Tra il IX e il X secolo vengono copiati tre codici: A, B gotico, C che tra tutti e tre contenevano tutto il corpus Archimedeo che conosciamo oggi.

codice A conteneva SC1, SC2, DC, CS, LS, EP I e II, NA, QP. Quelle evidenziate hanno il commento di Eutocio, codice A perduto.
Codice B: CF(galleggianti), EP,(equilibrio dei piani) QP(quadratura della parabola), Perduto.
Codice C: EP(equilibrio dei piani), CF(quadratura della parabola), MM(metodo), LS (spirali), SC (sfera e cilindro), DC(misure del cerchio), Stomachion.
Questi tre manoscritti contengono opere diverse in modo diverso, questo ci fa pensare che all'epoca non ci fosse un codice che contenesse tutte le opere di Archimede. Probabilmente lo stesso Leone ha trovato queste opere, facendo sì che il corpus Archimedeo si sia formato in maniera "anarchica", ovvero senza delle tradizioni "standard".

Codice C.
Questo codice dopo il sacco di Costantinopoli, venne utilizzato per farci un libro di preghiera, si chiama Palinsesto. Palinsesto perché il libro veniva scritto due volte. Questo libro di preghiera rimase per molti secoli in un convento della Palestina, poi nel IXX secolo dalla Palestina andò a finire a Istanbul e attraverso diverse peripezie, **Heiberg** lo scoprì nel 1906. scoprendo con sua grandissima meraviglia che in questo codice era contenuta un'opera completamente sconosciuta: **il metodo.** In questa opera Archimede presenta il suo approccio euristico tanto che colpì tutti gli studiosi dell'epoca, questa scoperta venne pubblicata anche nel New York Times.

Come fece a scoprirla?
Nel 1880/81 **Heiberg** aveva prodotto la prima edizione critica delle opere di Archimede. La sua edizione critica era basata sul codice A, come mai dato che questo codice è andato perso? Perché ne erano state fatte molte copie, in particolare uno di questo codice: **il codice Laurenziano XXVIII-4 (o codice D**, è dell'inizio XVI, fine XV), era un codice fatto copiare per Lorenzo de Medici, questo codice era basato direttamente sul codice A. Poliziano (colui che fece copiare il codice) si rese conto che a causa del processo di tradizione, ha imposto al copista di farne una specie di fotografia "copiarlo con scrittura di imitazione", quindi questo codice D è una specie di fotografia al codice A. **In particolare da una di queste copie deriva la prima edizione a stampa di Archimede, uscita in Basilea nel 1544 "edizio Princeps"**.

Codice B gotico (perso dopo il 1311).
Heiber nel 1881 stava per pubblicare la sua edizione critica quando nello stesso anno **Valentin Rose** (un filologo tedesco) scoprì nella biblioteca vaticana **il codice ottoboniano latino 1850,** che conteneva una traduzione completa di quasi tutto il corpo Archimedeo allora noto, e attribuì questa traduzione a **Guglielmo di Moerbeke** XII secolo.
Questo personaggio aveva viaggiato molto in Oriente e si era dato alla traduzione di opere. Questo lavoro condusse alla corte dei papi di Viterbo, era a quell'epoca uno dei fari culturali dell'occidente latino ed era un centro scientifico di prima importanza, c'erano anche **Campano da Novara, Vitelo**.
Vitelo era un frate domenicano che scrive un'ottica basata su fonti arabe e greche e rimarrà il corpus di ottica per tutto il resto del medioevo fino al primo rinascimento. Vitelo è amico di Guglielmo gli dedica anche la Perspectiva (questo trattato di ottica). In questo centro culturale matura l'idea di far tradurre a Guglielmo il corpus archimedeo che Valentin Rose riscopre nel 1881. Succede che Heiberg che aveva appena terminato la sua edizione critica quando viene fuori la traduzione di Guglielmo. Egli aveva utilizzato sia il codice A che un altro: i **Galleggianti ,** che non ci sono nel codice A, inoltre spesso accanto alle traduzioni lui annota "nell'altro codice c'era scritto così…" quindi Guglielmo aveva a disposizione due manoscritti greci. Heiberg dovette tenerne conto e quando nel 1906 scoprì il Palinsesto decise di rifare l'edizione di Archimede da capo 1910-1915, quindi l'Archimede che leggiamo noi oggi è quello di Heiberg secondo questa tradizione anarchica. Questo ha condizionato pesantemente tutta l'interpretazione successiva di Archimede. Heiberg paragona l'approccio euristico di Archimede al calcolo integrale, questo tipo di interpretazione fa si che Archimede diventi un predecessore di Cauchy, Leibniz o Cantor. Ma la matematica di Archimede va vista da altri punti di vista.
Questa è:

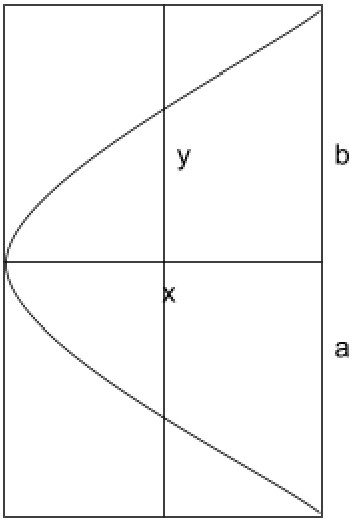
1. Diversa dal calcolo integrale
2. Rivalutare la figura di Archimede in maniera diversa da quella che ne ha dato Plutarco.

Il palinsesto (codice C) riscoperto da Heiberg nel 1906, andò poi perduto nei decenni successivi a causa di eventi convulsi in Turchia. E riappare molti anni dopo a un'asta dove è stato venduto per 2 milioni di dollari, ad un miliardario Americano, che poi fu restaurato.

Cosa fa Archimede?

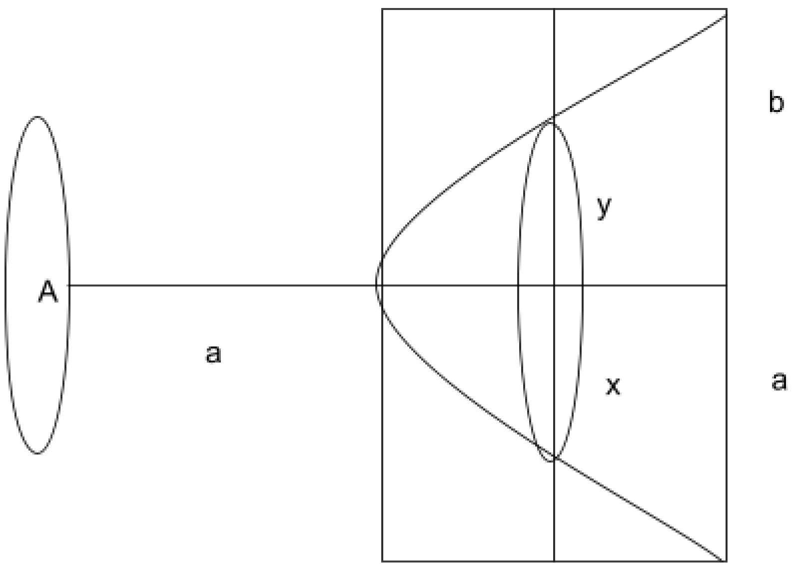
Partiamo da **Metodo**. Nella proposizione 4 Archimede vuole determinare il rapporto tra un paraboloide e il cilindro circoscritto. Idea della dimostrazione

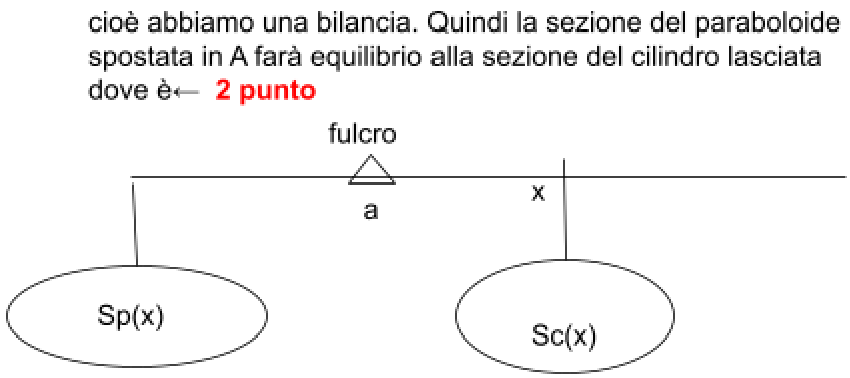
Metodo, proposizione 4



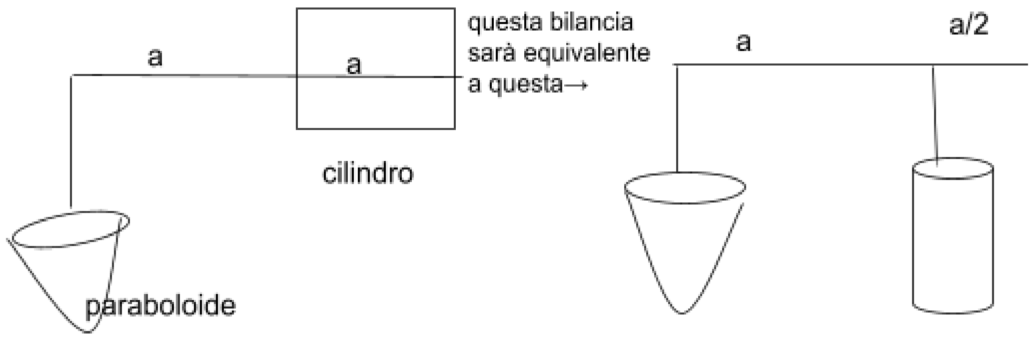
Considera un punto ad ascisse x all'asse del paraboloide e tagliamo la parabola e cilindro con un piano . La sezione del paraboloide Sp(x)in x è un cerchio di raggio y. Quindi è proporzionale → Sp(x)::y^2
La base del paraboloide è lunga b. La sezione del cilindro in x Sc(x) é proporzionale a Sc(x)::b^2.
Ora visto che questa è una parabola e y e b sono le ordinate relative ad a e x. I quadrati fra le ordinate stanno tra loro come le ascisse→ y^2 : b^2 = x:a →
cioè Sp(x) : Sc(x) = x:a ← **1 punto**

Ora Archimede considera il disegno come una bilancia e mette un punto A a distanza a e prendiamo la sezione del paraboloide ed esportiamolo qua(in A). Ora la sezione del paraboloide fa da equilibrio alla sezione del cilindro (dalla proposizione precedente). Per la legge della leva le grandezze si fanno equilibrio per distanze inversamente proporzionali





A questo punto Archimede comincia con dei salti logici:
egli dice che questo discorso vale per tutte le sezioni del paraboloide quindi tutte insieme le sezioni del paraboloide faranno equilibrio a quelle del cilindro lasciate dove stanno. ← **3 punto** Lui da ciascuno passa a tutti.
4 punto→ Ed inoltre siccome si può dire che il cilindro e il paraboloide sono riempiti dalle loro sezioni allora
5 punto→ il paraboloide in A farà equilibrio al cilindro lasciato dov'è.



6 punto→ E di conseguenza: fanno equilibrio, per le legge delle leva abbiamo che il paraboloide è la metà del cilindro circoscritto.

LEZIONE 10→ 26-10-2020

L'approccio nel **Metodo** è differente, e varia da dimostrazione a dimostrazione, così come la tecnica di dimostrazione di doppia riduzione ad assurdo varia da situazione a situazione. Abbiamo visto vari esempi di tale metodo e sono: la misura del cerchio, che fa quello che ci aspetteremmo ovvero approssimare il cerchio con poligoni inscritti e circoscritti, e la quadratura della parabola, in cui Archimede usa un approssimante. La parabola ha delle buone proprietà geometriche quindi con i triangoli lui riesce a costruire una progressione geometrica di ragione 1/4, con cui riesce a

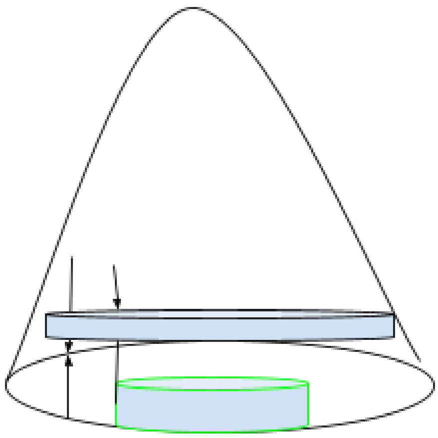
ricavarne la dimostrazione. L'approccio di Archimede nei problemi di geometria di misura è legato al singolo oggetto.
Prendiamo in considerazione i **Conoidi e Sferoidi** che sono l'opera più matura, inoltre per confronto col Metodo si capisce che questa opera è molto pensata e accreditata. In questa opera tratta del paraboloide dell'iperboloide e dell'ellissoide di rotazione, i primi due vengono chiamati conoidi e il terzo sferoide. È un'opera complessa in quanto richiede tutta una serie di lemmi, che molti dei quali non vengono dimostrati (dice o sono facili o rimanda ad altre sezioni), l'argomento entra nel vivo a partire dalla proposizione 19. Questa opera mostra un tentativo di unificazione della trattazione, l'approccio a questi tre solidi è lo stesso, sia da un punto di vista di approssimanti che, come visto nella proposizione 19, dall'esistenza stessa di questi.
Proposizione 19:

Tratta indifferentemente o di un conoide, o di un paraboloide, o di uno sferoide o un ellissoide minore della metà(un segmento dell'ellissoide < della metà dell'ellissoide)
una figura del genere può essere approssimata con cilindri tutti di ugual altezza circoscritti e inscritti in modo che la figura circoscritta superi l'inscritta per meno di qualsiasi grandezza segnata

chiamo C la figura circoscritta e I la figura inscritta e fisso una grandezza E qualunque . Posso costruire una figura circoscritta tale che C - I < E. cioè il cilindro C in rosso è più piccolo di E

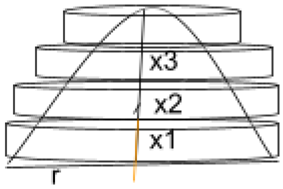
Di conseguenza una volta costruito questo cilindro di base Cb < E e di conseguenza tutti gli altri cilindri inscritti e circoscritti succede che la differenza fra i cilindri inscritti e circoscritti riempi il cilindro di base perchè la differenza fra C e I (segnata in verde) sono queste fasce cilindriche che avvolgono il conoide o gli stanno dentro , tutti questi pezzi li posso buttare giù e riempiono il cilindro di base. Quindi C-I= Cb cilindro di base(il primo) dove Cb <E per costruzione.
In questa dimostrazione entra in gioco il fatto che io possa davvero riempire il cilindro di base con le differenze e per poterlo fare veramente da questo

dipende questa condizione(un segmento dell'ellissoide è <½ dell'ellissoide) dipende il fatto che se io invece di avere un segmento dell'ellissoide è <½ dell'ellissoide avessi un ellissoide fatto così



questa dimostrazione non la potrei più fare. Perchè le differenze andrebbero a raddoppiarsi dato che si proietterebbero da sotto a sopra.
Oppure se prendessi come cilindro di base quello in verde, le differenze finirebbero chissà dove.
Quindi la condizione implicita che Archimede sta utilizzando è che la figura sia monotona e cioè le sezioni fatte dal basso verso l'alto vadano costantemente diminuendo. Questa condizione non è esplicitata , ma è utilizzata quando restringiamo il problema al caso in cui un segmento dell'ellissoide < ½ ellissoide

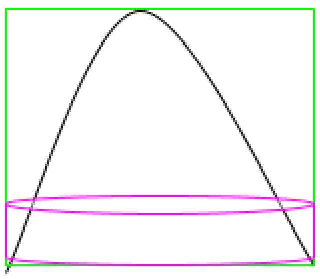
Vediamo ora come usa questo fatto per dimostrare che il paraboloide è la metà del cilindro circoscritto. Il paraboloide è la metà del cilindro circoscritto. La figura è presa da articolo di Ken saito.
I1(cilindro inscritto)=C1(cilindro circoscritto)=a.



Siccome questa è una parabola i cilindri circoscritti sono tutti di egual altezza. Quindi cilindri di egual altezza stanno fra loro come le basi. Quindi le basi sono dei cerchi i cui raggi sono le ordinate della parabola e i cerchi ovvero le basi stanno fra loro come i quadrati dei raggi. I cilindri circoscritti C1:C2:C3… =r1 ^2 : r2 ^2 : r3 ^2….. = x1:x2:x3
però i quadrati dei raggi stanno fra loro come le ascisse.
Se chiamo quest'altezza x1(arancio) allora quella dopo sarà 2.x1=x2 perchè ho diviso l'asse in parti uguali . E quindi ho che i cilindri circoscritti come anche gli inscritti C1:C2:C3…=1:2:3…. Cio i cilindri crescono secondo la serie dei numeri interi.
Adesso io ho che I1=C1=a → I2=C2=2a → ….. → I(n-1)=C(n-1)=(n-1)a→ In=Cn=na

A questo punto se considero l’insieme di tutti i cilindri circoscritti e chiamo I la figura I =I1+I2+...+I(n-1) = $n.\ \frac{(n-1)}{2}a$

Mentre se io considero il Cilindro circoscritto al mio conoide



il mio cilindro circoscritto C (in verde) sarà n volte il cilindro di base Cn (in rosa). Cioè C = n.Cn= n. na

quindi I =I1+I2+...+I(n-1)= $n.\ \frac{(n-1)}{2}a\ <\ \frac{n.na}{2} < \frac{1}{2} cilindro\ C(in\ verde)\ =\ K$

K=$\frac{1}{2} cilindro\ C$

Quindi I<K.

Noi vogliamo dimostrare che il paraboloide è = ½ del cilindro circoscritto = K

Analogamente possiamo dimostrare che

C>K → (figura inscritta) I < K < C (figura circoscritta)

Alla base di questo:

1. data una grandezza E qualunque posso trovare C e I tc C -I<E
2. e che vale per il paraboloide e l'ellissoide
3. I < K < C

segue il nostro teorema perché supponiamo che il paraboloide P < K →

1) se P<K → posso trovare una figura inscritta I tale che C - I < K - P ma per il terzo punto siccome K<C → K - I < C - I < K - P → I >P assurdo perchè I è inscritto in P
2) se P>K→ posso trovare una figura circoscritta e Inscritta tale che C-I < P-K → C-K < C-I (perchè K>I) < P-K → C<P → assurdo perché P è contenuto in C

Questa tecnica con variazioni e complicazioni dovute alle varie figure(nel paraboloide è più semplice perchè gli approssimanti corrispondono alla serie dei numeri interi,) questa stessa tecnica è applicata uniformemente agli altri due casi(ellissoide, iperboloide)

Vedi articolo di Saito: 8. LM86_21-28_Saito[1].pdf (dropbox.com).

Questa tecnica è del tutto generica, può essere astrattificata. Nel corso del rinascimento questo è diventato il metodo di esaustione. La lettura di questa e altre opere di Archimede porterà a estrarre il metodo di esaustione, e poi con

Cauchy questo diventa la base del calcolo integrale il quale lo introduce proprio come area. Nell'opera di Archimede però questa tecnica si rivolge solo a conoide ellissoide e iperboloide. **C'è da sottolineare che anche in questa opera dove Archimede cerca di uniformare il più possibile il metodo dimostrativo, rimane comunque isolato a poche figure**. Quando Archimede dimostra che l'ellissoide è uguale a 2/3 del cilindro circoscritto, non dice una parola riguardante la sfera. Questo fatto è molto stupefacente, perché Archimede sapeva che la dimostrazione poteva essere fatta allo stesso modo, invece usa un metodo totalmente diverso.

Occhiata molto veloce a cosa fa nella Sfera e Cilindro: [SferaCilindro.pdf (dropbox.com)].
Prg. 1.3 Sfera e cilindro, prg. 3.

Archimede si pone un problema matematico solamente rispetto a uno stretto insieme di oggetti, il suo approccio è ancora "problematico", non generalizza, questa cosa risulta particolarmente chiara nel Metodo.
Qualche carattere delle opere di A. : sono brevi e a differenza delle opere di Euclide e Apollonio, è molto facile capire cosa voglia fare "voglio dimostrare questo ecc.." poi come ci arrivi è più complicato. Oltre alla geometria di misura si occupa anche di modelli matematici reali, tipo galleggiamento delle navi, di questi argomenti ci sono arrivate solo due opere che hanno subito molto il processo di tradizione. **Quindi nelle sue opere possiamo trovare la dicotomia tra matematico e ingegnere.**

Nel 1906 è stato scoperto il Metodo.
Questo ha la forma di una lettera a Eratostene, tuttavia lo scopo del metodo non è tanto quello di raccontare il topos, piuttosto lo scopo dichiarato è quello di dimostrare due teoremi: uno è la doppia volta a crociera, prima di quello uno sull'unghia cilindrica. Questi due teoremi, sottolinea Archimede., hanno carattere diverso dai precedenti, lo scopo è far vedere che questi due solidi sono riducibili a solidi rettilinei.
Come è arrivato Archimede. a prenderli in considerazione?
L'incrocio dei cilindri forma una volta a crociera. Piero della Francesca affronta la doppia volta a crociera ottenendo lo stesso risultato di Archimede, in Piero si capisce come mai si voglia studiare la volta a crociera il rinascimento ne è pieno, c'è un collegamento tra i due?
"Famosa storia del problema della corona" come erano fatte le terme? Le terme erano dei locali dove c'erano delle vasche da bagno, delle specie di

bagni pubblici (diversi da quelli che si vedono dei film), facciamo un passo indietro.

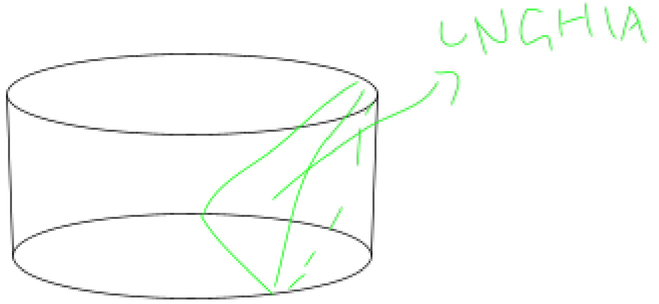
Morgantina era una città sicula, era un centro agricolo e comm. molto importante perché era un punto di comunicazione tattico, nel II secolo aveva raggiunto il suo massimo splendore. Quando Siracusa cade, Marcello deve pagare i debiti e consegna Morgantina ai mercenari ispanici, quindi gli abitanti di questa scappano via e seppelliscono nei pozzi tutti i loro averi, tra cui una bellissima statua: la venera di Morgantina. Quando arrivano gli ispanici questi si trovano in una città fantasma, la cultura della città rimane sepolta sotto la conquista di questi ispanici. Questo è un grande vantaggio per noi perché molte cose si sono conservate, si ha una specie di fotografia di quello che erano le attività alla vigilia della presa di Siracusa. Come erano le terme di Morgantina?
Queste erano composte da due locali con volta a botte, una sala circolare ricoperta da volta emisferica, costruita con dei tubi (mattoni cavi) ricoperti di malta leggera e poi dipinta. Il sistema di riscaldamento dell'acqua era differente, veniva fatto mediante delle fornaci che poi veniva distribuito il calore in tutte le terme. Quello che è stato scoperto ci fa pensare che Archimede mentre stava nelle terme abbia pensato cosa potesse succedere se le volte si sarebbero intersecate, la cosa importante è quindi che qualcosa di simile già esisteva all'epoca del matematico. Da questo segue che se considero l'intersezione di due cilindri, osservo come l'intersezione è 8 volte l'unghia. Come si può arrivare al risultato relativo all'unghia? (vedi Dropbox)

Archimede ha il problema della volta, questa si riduce all'unghia, ma questa è problematica, questo lo porta a sviluppare le sue tecniche euristiche in maniera molto notevole però la cosa rimane lì, non si trasforma in un metodo generale, in teoria della misura. **In altre parole questo modo di vedere il suo approccio ci permette di dire che la matematica di Archimede non è strutturalmente diversa dalle sue invenzioni.** Questo aspetto ci fa vedere un Archimede meno fratturato tra la leggenda e i suoi scritti. Ricapitolando il rintracciamento di un approccio unitario è qualcosa che si può assegnare più a noi che ad Archimede stesso, i Conoidi e Sferoidi diventeranno un modello per andare oltre lo studio dei CS e quindi studiare oggetti più generali.

LEZIONE 11→ 30-10-20

Da Conoidi e Sferoidi che è l'opera più matura di Archimede assistiamo a uno sforzo di tipo dimostrativo, e allo strano fenomeno della sfera, di cui non si fa menzione. Questo è sintomatico nella matematica greca, gli oggetti hanno una loro individualità: la sfera è diversa dallo sferoide, la circonferenza non è un ellisse. Resta il fatto che Archimede pur consapevole che le due figure si possano trattare allo stesso modo (vedi Metodo) non vengono concepite come un unico oggetto.

L'altra cosa è l'aver dato una guardata al Metodo, per capire cosa fa. In questa opera lui illustra il topos (approccio euristico), tuttavia è una opera destinata a dimostrare solo due teoremi: volta a crociera e unghia cilindrica. Dato lo stato attuale del palinsesto, siamo piuttosto certi che la dimostrazione della doppia volta sia corta, anche se questa non ci è pervenuta. Tuttavia possiamo ragionevolmente sapere quante carte sono andate perse: sono circa 2 fogli di pergamena, ed inoltre la dimostrazione relativa alla doppia volta è corta perché è stata dimostrato prima il teorema sull'unghia. Questa si ottiene dalla divisione in otto, dalla figura che ne deriva dall'intersezione dei due cilindri. Una volta che uno ha visto questo risulta che, una volta conosciuto il volume dell'unghia, si può trovare facilmente il volume della doppia volta.



Lista delle opere di Archimede nel palinsesto
…..(non si sa)

- **EP II** → ultime due proposizioni dell'equilibrio dei piani
- **CF 1 e 2**→ i galleggianti
- **MM** → il metodo (numerate da Heiberg si arriva fino alle proposizione 15)
  qui c'è un buco tra MM e LS, la dimostrazione della doppia volta avrebbe dovuto essere la 16 proposizione. Poi cominciano le spirali che hanno la lettera diosita e poi (prop 1…)Il buco inizia verso la fine della 15 occupa tutta la 16, la lettera Diosito e qualche proposizione delle spirali. Dato che noi abbiamo le spirali possiamo sapere quante cose mancano. e cioè quanto fosse lo spazio dedicato a i MM
- **LS** → le spirali
- **SC**→ sfera e cilindro
- **DC**→ misura del cerchio
- Stomachion

L'unghia cilindrica viene trattata nella prop. 12, 13, 14 e 15 (attenzione i numeri li ha messi Heiberg), i fogli mancanti sono dalla fine della proposizione 15. La 12 e la 13 sono un'unica proposizione, nonostante Heiberg le abbia divise in due, il ragionamento è in due tappe, tale è fatto con la bilancia: lui riduce la quadratura dell'unghia alla determinazione del centro di gravità di un cerchio che equivale a trovare la quadratura del cerchio (non si può fare), nella 13 riesce a determinare mediante un trucco che l'unghia è 1/6 del prisma. Alla fine della 13 e prima dell'inizio della 14 c'è un altro buco, un pezzo illeggibile. Nel metodo Archimede spesso interviene dicendo cose di tipo meta matematico, quindi è probabile che in quel punto ci sia un discorso di passaggio che spiegasse come mai si metta a fare la dimostrazione in un modo completamente nuovo e con un approccio molto differente.

calcolo dell'unghia

la 12 e la 13 mi dicono che l'unghia U= ⅙ P(prisma) in maniera acrobatica.
Alla fine della 13 e prima dell'inizio della 14 c'è un altro buco. E' probabile che ci fosse un discorso di passaggi che spiegasse il perchè lui si mette a fare una dim completamente nuova

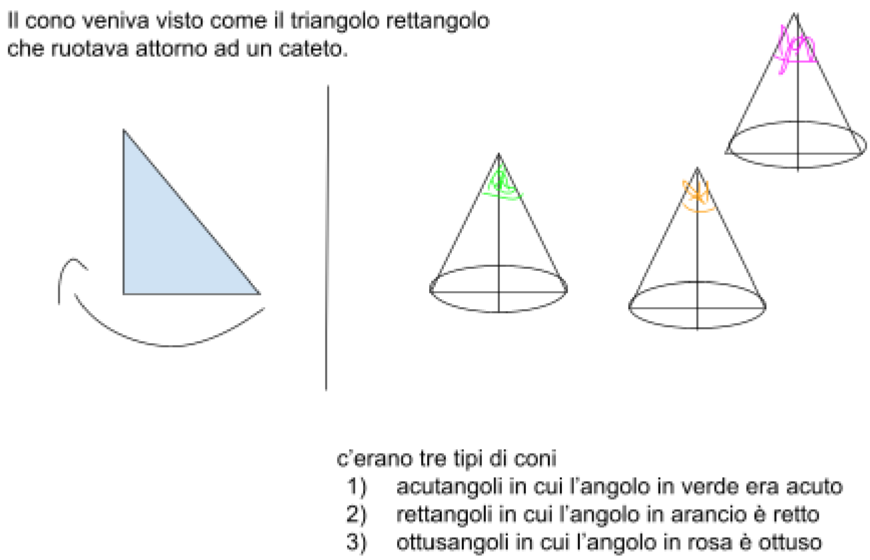
Consideriamo questa situazione. Figura 1→ tagliamo l'unghia con piani anziché paralleli alla base ma con piani paralleli all'asse e inscriviamo nel semicerchio di base dell'unghia una parabola. Si può dimostrare sulla base delle proprietà delle parabole e del cerchio che ci sia questa proporzione MN:NL=MN^2:NS^2. Ovvero considero la sezione della parabola nel punto N=x fatta a un certo livello . La sezione del rettangolo HGDE sta alla sezione in x della parabola HLZE come MN^2:NS^2. MNY e NSX sono triangoli simili → MNY:NSX=MN^2:NS^2. Cioè il triangolo MNY è la sezione del prisma Pr. E il triangolo NSX è la sezione dell'unghia. →
Sx(R):Sx(P)=S(prisma):S(unghia).
Da questa proprietà Archimede deduce con un salto logico questo
rettangolo : parabola = prisma : unghia.
Salto effettuato applicando a un numero indeterminato di sezioni a un numero qualunque sezioni anche per cui c'è un numero che non li conti usando un lemma: a/b=a1/b2=…=an/bn. Come 1:1 così tutti a tutti, a:b = $\sum$ai : $\sum$bi

-Questo tipo di passaggio (passare da somma finita a infinita) lo ritroveremo in Cavalieri all'inizio del 600, dove Luca Valerio e Cavalieri, ritroveranno le stesse idee usate da Archimedee e cercheranno di trasformarli in un metodo generale di dimostrazione -
Dato che Rettangolo R = 3/2 Parabola → Prisma= 3/2 Unghia di conseguenza si trova quanto è l'unghia rispetto al prisma

Qui Archimede si è spinto molto avanti, ci sembra che egli stia integrando! Si potrebbe paragonare Archimede a Ulisse di Dante che, nel purgatorio, viene travolto da un turbine che poi fa affondare la nave, così Archimede che per poter abbandonare l'individualità delle figure ha bisogno di un linguaggio diverso che verrà costruito più avanti. Questa storia del Metodo e dell'unghia ci mostra la possibilità di interpretare la Matematica Archimedea non in modo platonica, nel senso Archimede non si occupa di quadratura generale, ma spesso di problemi specifici. Le sue dimostrazioni spesso sono anche molto difficili e di grande prestigio, ma non generalizzano l'argomento trattato, non abbiamo un teoria generale che tratta di un qualcosa, non abbiamo il problema delle tangenti. Questo dipende dal fatto che gli oggetti della matematica greca sono oggetti individui, non hai La curva, ha Le curve: parabola, conoide ellissoide ecc.. La distanza quindi tra Archimede del mito (nave, corona…) e l'Archimede dello Sfera e Cilindro delle sue opere risulta meno siderale di quanto ci presenti Plutarco.

APOLLONIO & PAPPO

Apollonio e Pappo hanno acquistato molta importanza quando vengono riletti durante il rinascimento. **Apollonio** vive tra la fine del terzo e inizio del secondo secolo, non abbiamo molte notizie su di lui così come quasi tutti i matematici Greci. Sappiamo che vive ad Alessandria, abbiamo alcune sue lettere che riescono a inquadrare meglio l'autore. Di questo matematico ci è pervenuta una sola opera: Le Coniche. In questa opera abbiamo una ripresa del materiale che era stato elaborato già in secoli precedenti e riorganizzato in modo compatto. Mentre prima di Apollonio le coniche erano viste:

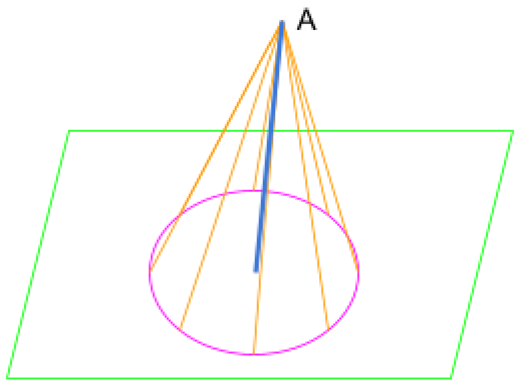


Le coniche si ottenevano sempre con piani perpendicolari ai 3 coni,

- Nel caso del cono acutangolo si otteneva un'ellisse
- nel caso del cono rettangolo si otteneva una parabola
- nel caso del cono ottusangolo si otteneva un'iperbole

L'ellisse veniva chiamata sezione di cono acutangolo e così le chiama Archimede.
Apollonio cambia completamente impostazione definisce il cono in questo

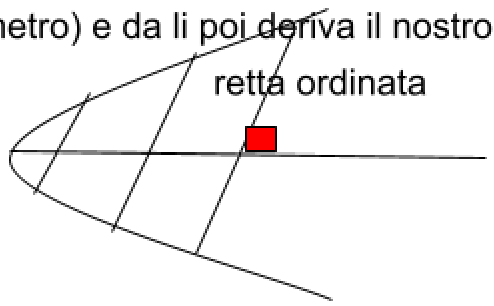
Dato un piano(VERDE), data una circonferenza sul piano(rosa) e un punto A fuori dal Piano. Si consideri una retta(segmento prolungabile) tale che rimanendo fisso A passi lungo tutti i punti della circonferenza. La superficie descritta dalla retta si chiama superficie conica e il cono è lo spazio racchiuso dalla superficie conica e dalla circonferenza. Si può parlare ora di asse del cono cioè la retta dal punto A al centro della circonferenza(blu). Il cono si dice retto se l'asse è perpendicolare al piano della circonferenza oppure obliquo se non lo è



modo

Apollonio il concetto di diametro e ordinata.

un diametro di una curva o meglio di una sezione conica è una retta che divide tutte le corde parallele a una direzione data sono in realtà una coppia di concetti. Le rette sono rette ordinate (con rette ordinate intenderà anche la metà di un'ordinata quella che va da una curva al diametro) e da li poi deriva il nostro termine ordinata



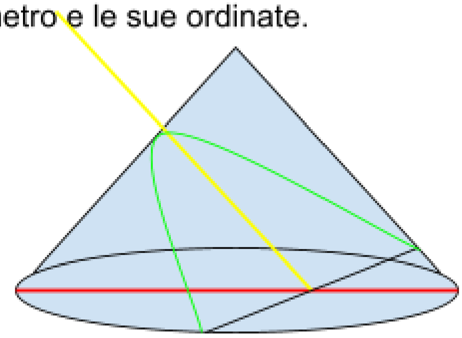
Poi Apollonio dimostra che se noi tagliamo un cono con un piano, salvo che lo togliamo con un piano che passa per il vertice, otteniamo una curva che

possiede un diametro e ordinata. Non si può parlare di diametro senza dire chi sono le ordinate
Si parlerà di asse quando l’angolo compreso fra le rette ordinate e il loro diametro è un angolo retto(in rosso)

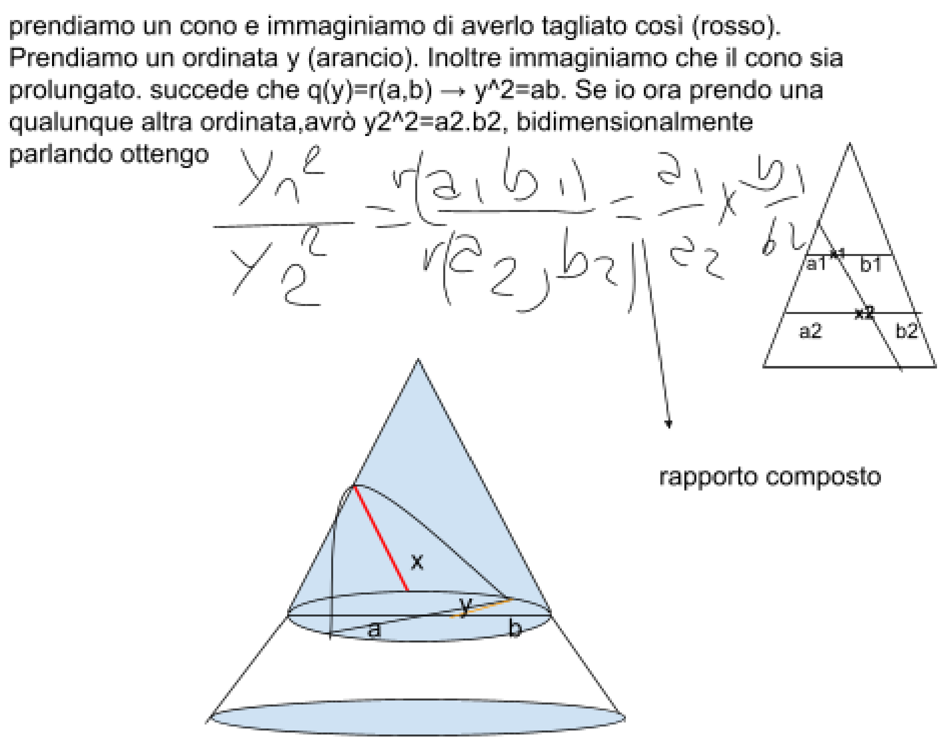
PARABOLA
Dato un cono non necessariamente retto, quello rosso è il diametro. Il triangolo (piano del triangolo lo chiamo tao) si chiama triangolo per l’asse. Tagliamolo con un piano sigma (giallo)parallelo a uno dei lati del triangolo dell’asse. Otterrò una certa sezione(verde). Chiamo beta il piano di base. Allora

- l’intersezione tra tao e sigma sarà il diametro della curva
- l’intersezione tra beta e sigma sarà una retta o che ha la direzione delle ordinate rispetto a d.

Vale per qualunque conica. La conica nasce nel momento in cui si taglia il cono , nasce con un diametro e le sue ordinate.



A questo Apollonio aggiunge poi il fatto che nel caso della parabola, vale una relazione tra ascisse e ordinate:



ma ora siccome b1=b2 siamo nella parabola. I triangoli sono simili quindi

$$\frac{a1}{a2} = \frac{x1}{x2}$$

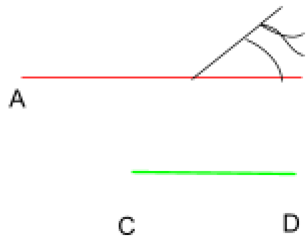
$$\frac{y1^2}{y2^2} = \frac{x1}{x2}$$

https://www.dropbox.com/home/SdM/Materiali%20per%20l'esame/A.%20Matematica%20Greca/Apollonio%20e%20Pappo?preview=AnalisiSintesi+nelle+Coniche.pdf

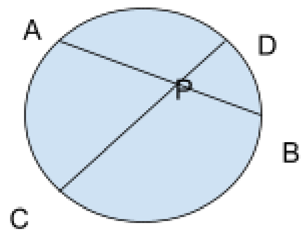
La parabola nasce con un diametro, un lato retto, e una direzione delle ordinate→ quadrato (ordinate y)=rettangolo(grandezza P e ascissa x).
per l'ellisse→ $y^2 = \frac{p}{x} - \frac{p}{t}x^2$
per l'iperbole→ $y^2 = \frac{p}{x} - \frac{p}{t}x^2$
La parabola nasce con questa proprietà, questa è una cosa tipica delle geometria di posizione, ovvero riuscire a stabilire che questa proprietà è una proprietà che caratterizza la parabola. Il primo libro delle Coniche vuole dimostrare che queste sono proprietà sintomatiche, ovvero proprietà che caratterizzano una determinata figura, in particolare tutto il primo libro è dedicato al fatto che le proprietà che nascono insieme alla curva sono

proprietà che la caratterizzano in maniera univoca.

hanno la proprietà sintomatica
bisogna dimostrare che se io assegno una semiretta data in posizione e data in lunghezza posso costruire una parabola che abbia la retta rossa come diametro , alfa come angolo diametro, ordinate e questa retta in verde come lato retto p della formula di prima (*). La proprietà della parabola che nasce col diametro è quella che caratterizza la parabola. Ma bisogna dimostrare tante cose(ha infinite parabole ecc)
Fra le varie proprietà che una curva ha bisogna individuare quelle che costituiscono un sintomo. Lo scopo del I libro è di far vedere che le proprietà che nascono insieme con le curve(proporzione fra i quadrati delle ordinate e rettangoli delle ascisse) sono proprietà che le caratterizzano in maniera univoca



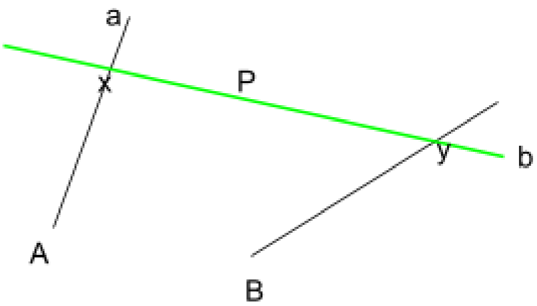
Una cosa simile è quanto succede al cerchio, ad esempio con due corde:



dato un cerchio e date due corde. Le corde si tagliano in modo che il rettangolo (PA,PB) = rettangolo (PC,PD) questa proprietà è asintomatica del cerchio , cioè appartiene solo al cerchio e non ad altre curve

Questo fatto è alla base di un concetto importante che si sviluppa in varie opere non pervenute. Sezione di rapporto trattano il seguente problema:

sezione di rapporto o aerea
Date due rette a e b e dati due punti su di esse A e B e dato un punto P tagliare queste due rette con una retta passante per P in modo che le intersezioni con le due rette abbiamo un rapporto dato
oppure racchiudono un'area data



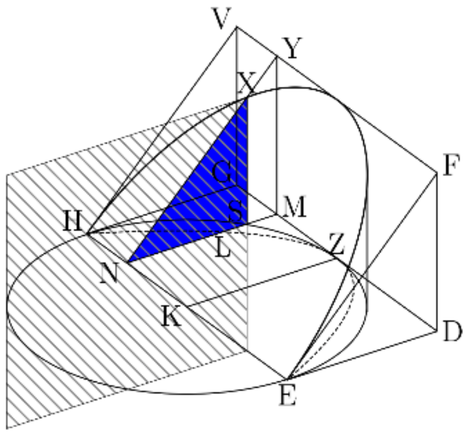
$\frac{Ax}{Ay} =$ dato (sezione di rapporto)

r(Ax,Ay)= data(sezione di aerea)

Nella sezione di rapporto ci sono numerosi teoremi, ma tutto questo a cosa serve? Perché spenderci così tanto tempo? Queste sono proprietà delle tangenti alle coniche, qui si sta cercando di prendere questa proprietà astrattizzarla e di vedere quali figure hanno questa proprietà. **Una certa proprietà nota si trasforma in una proprietà di luogo.** La domanda diventa quindi: ho un oggetto con una determinata proprietà, quanto gli appartiene? È il luogo di quella proprietà? Qui si parte dall'oggetto e poi ci si domanda se quella proprietà che possiede individua univocamente l'oggetto, la risposta varia da oggetto a oggetto. **La geometria di luogo è una geometria dove si vuol fare vedere se una determinata proprietà appartenente ad un oggetto lo caratterizza oppure no**. Questi argomenti sono studiati in varie opere: **De sectione nationis, De sectione spații, De sectio determinata, Contatti, Inclinazioni.** Tali libri, tranne il primo, li conosciamo attraverso Pappo. Egli è un autore del III-IV sec. D.c. parecchio lontano da Apollonio (almeno 5 secoli di differenza) di cui ci è pervenuta un'opera che si chiama **Collezione matematica:** questa è in otto libri, di cui il primo è perduto, del secondo ci resta solo la fine, poi abbiamo il terzo, quarto, quinto sesto, settimo e ottavo di cui abbiamo un frammento in greco e il testo completo in arabo. Questa opera avrà una importanza capitale nel rinascimento, che verrà definita con: **"esercizi e complementi su Archimede Apollonio e Teodosio".** Ci fornisce un sacco di informazioni, soprattutto descrizioni dettagliate di testi non pervenuti a noi. Il settimo libro è dedicato al dominio dell'analisi (quell'insieme di testi che usavano la tecnica dell'analisi e della sintesi). L'importanza di Pappo risiede nei libri che ci sono pervenuti, siamo nel periodo del commento e dell'arricchimento, in questo periodo più che raccontare cose nuove gli autori cercano di sistematizzare organizzare e nel caso generalizzare cose già viste in passato.

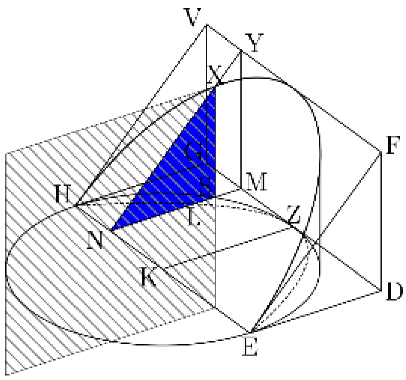
Qualche appunto in più per il calcolo dell'unghia:

Il calcolo dell'unghia (1)



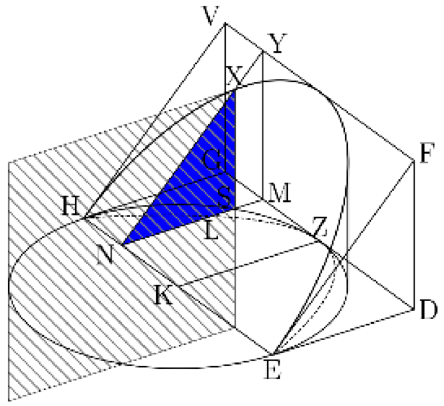
Si può dimostrare che $MN : NL = MN^2 : NS^2$

Il calcolo dell'unghia (2)



Ovvero che una generica sezione (MN) del parallelogramma $HGDE$ sta a una generica sezione NL della parabola come la corrispondente sezione del prisma sta alla corrispondente sezione dell'unghia.

Il calcolo dell'unghia (3)



Da qui Archimede "indovina" che

$$\text{rettangolo} : \text{parabola} = \text{prisma} : \text{unghia}$$

Il calcolo dell'unghia (4)

Ma nella *Quadratura della parabola* Archimede ha dimostrato che la parabola (P) è i $\frac{2}{3}$ del rettangolo circoscritto (R); inoltre è ovvio che il prisma "a dente di sega" (S) è $\frac{1}{4}$ del prisma (Pr) da cui si costruisce l'unghia (U). Abbiamo quindi:

$$R : P = S : U$$

ovvero

$$R : \frac{2}{3}R = S : U$$

quindi:

$$U = \frac{2}{3}S = \frac{2}{3}(\frac{1}{4}Pr) = \frac{1}{6}Pr$$

LEZIONE 12→ 2-11-2020

Apollonio scrive molte opere, molte della quali andate perse, tranne le **Coniche** che sono state scritte in otto libri di cui ci sono pervenuti in greco i primi 4. L'ottavo non ci è perduto, il quinto sesto e il settimo ci sono pervenuti in arabo. Nel sesto secolo **Eutocio** fece una edizione delle coniche di Apollonio dei primi 4 libri. Apollonio nella lettera a Eudemo dice che i primi 4 libri erano di carattere elementare, cerca di trattare tutte le sezioni come generate in un cono e poi studiare via via tutte le proprietà. **I libri più avanzati quinto sesto settimo e ottavo scompaiono dall'orizzonte della cultura greca**. In occidente le coniche arriveranno molto tardi. E' nel XV secolo che un umanista (**Francesco Filelfo**) porta in Italia un manoscritto greco delle coniche (i primi 4 libri), da cui dipendono tutti gli altri, quindi le coniche di Apollonio saranno conosciute solo sulla base dell'edizione di **Eutocio** e da questo manoscritto. La prima edizione completa delle coniche sarà fatta da **Edmund Halley** (vedi cometa), Apollonio avrà un peso molto minore nella rinascita della matematica greca nel corso del '600, perché molti aspetti della sua opera verranno lasciati in ombra.
Ben diverso è il caso di Apollonio presso gli arabi che scopriranno i tre libri mancanti e svilupperanno una geometria delle coniche molto avanzata applicandola all'ottica e alla nuova teoria delle equazioni, questi svilupperanno una teoria geometrica risolvendole con intersezione tra coniche, questo fa vedere come la tradizione matematica influenzi molto il testo matematico in esame.

Pappo -vive circa all'inizio del IV secolo-
Altro impatto è la tradizione di Pappo. Le coniche di Apollonio sono un manuale così come lo sono le opere di Archimede, ma non è un testo problematico, una volta che l' hai studiato ti domandi: "e quindi?, cosa ho capito di questa roba?". La collezione di Pappo è molto stimolante. **Alexander Jones** che ha fatto l'edizione del VII libro della Collezione pensa che un allievo di Pappo abbia messo assieme le opere del maestro, manca però la fine e l'inizio degli otto libri. L'opera di Pappo è importante per la sua caratteristica, **vari temi sono ripresi in maniera diversa più ricca o sistematica in varie parti del libro**. Pappo introduce un tipo di classificazione un po' strana dei problemi geometrici: sono i problemi piani, solidi e di linea. Quelli piani sono quelli che si possono costruire utilizzando solo rette e circonferenze, quelli solidi richiedono curve (intersezione di solidi) e quelli di linea sono problemi per la cui costruzione servono curve più complesse tipo la spirale di Archimede.

Li traduciamo in : **1)** piani=1° e 2° grado
2) Solidi= 3° e 4° grado
3) linee= grado superiori, o anche curve trascendenti
Usare un concetto algebrico che rimanda al grado dell'equazione, ma questa prospettiva è completamente assente in Pappo, questa tipo di impostazione risale in Apollonio, in quanto nel settimo libro Pappo descrive tutta una serie di opere (tesoro analisi) che sono i data di Euclide, i contatti di Apollonio, le inclinazioni di Apollonio, la sezione di rapporto, la sezione di area, i luoghi piani, le coniche i porismi (opera perduta di Euclide). Per tutte queste opere Pappo fornisce dei lemmi per renderle più comprensibile, abbiamo anche dei suggerimenti per quanto riguarda i punti critici di queste opere.

Emergono alcuni elementi:

1. Cosa vuol dire che un problema è risolubile con mezzi semplici
2. La collezione di Pappo ci fornisce una mess di opere che non abbiamo più, è una sorta di enciclopedia della matematica dell'antichità
3. Il fatto che Pappo asserisca che gli antichi risolvessero questi problemi utilizzando l'approccio dell'analisi e della sintesi, ovvero tu ha un problema e supponi di averlo già risolto (ad esempio quello dei tre cerchi) e poi rifletti sulle proprietà della figure fai dei ragionamenti li sviluppi fino ad arrivare a uno dei dati iniziali del problema (analisi), per la sintesi è il contrario: si parte dai dati per arrivare ai quesiti, questa cosa quando sarà letta nel rinascimento porterà gli studiosi a concentrarsi su questo aspetto.

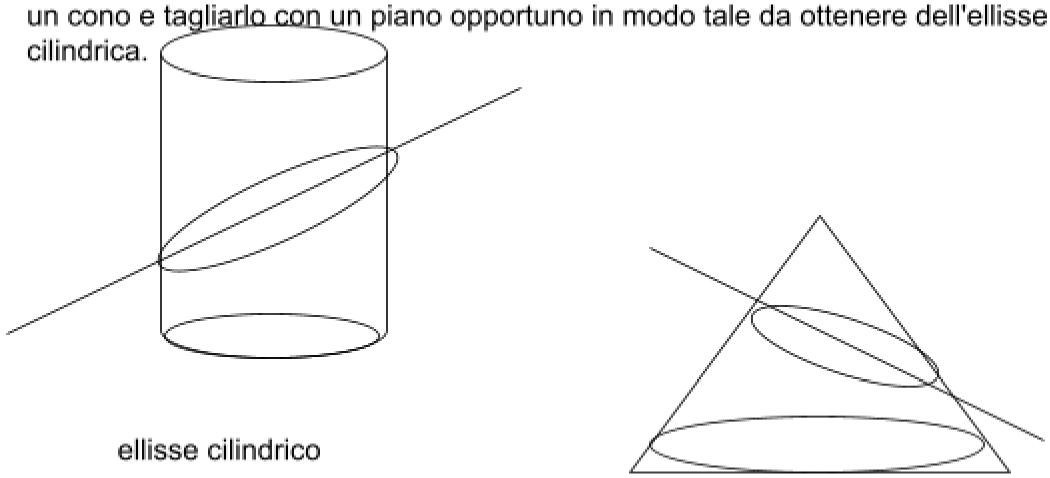
Il fatto da mettere in luce è che la lettura di Pappo avrà una parte decisiva per la nascita della matematica moderna, anche per la sua "sgangherataggine" che invoglierà i matematici a mettere ordine a questa storia quindi a lavorare su questo libro. Umberto Eco parla appunto dei libri "sgangherati" che sono quelli che hanno più influenza in quanto il lettore li fa suoi e se li sistema durante il suo studio, stimolandone la ricerca.

"Dal codice Vaticano (conservato) discende la tradizione di Pappo, come per i codici A, B gotico e C di Archimede"

tradizione di Pappo se Jones avesse ragione sarebbe
originale di Pappo, codice sconosciuto, codice vaticano, Jones

Dopo l'epoca di Pappo l'unico matematico da sapere è **Sereno di Antinoe** (V sec). Lui scrive due opere, la prima la sezione del cilindro dove nella prefazione dice che se:

VIII secoli dopo Apollonio si pensava che se io ho un cilindro che taglio con un piano obliquo la sezione che ottengo non è la stessa che si ottiene tagliando un cono con un piano. cioè c'era difficoltà a capire se due curve erano o meno diverse. Per dimostrare che sono uguali: data un'ellisse cilindrica si può costruire un cono e tagliarlo con un piano opportuno in modo tale da ottenere dell'ellisse cilindrica.



ellisse cilindrico

ellisse conica

Questo mette in luce due aspetti,

1) nella tarda antichità ancora i matematici hanno difficoltà ad assimilare gli oggetti fondamentali.
2) Questa difficoltà nasce dal fatto che gli oggetti matematici sono ancora individuali, legati alla loro nascita.

Dopo Sereno abbiamo **Eutocio** che è allievo di una scuola filosofica di Alessandria ed è in contatto con alcuni matematici/architetti: **Isodio di Mileto, Astemio di Talles**. Eutocio scrive un commento ad Archimede sulla sfera e cilindro misura del cerchio equilibrio dei piani e Edizione e commento di coniche I-IV. Troviamo in **Simplicio** verso la fine del VI secolo, Lunule di Ippocrate (fine V secolo a.c) con questi signori si vede che la matematica greca è giunta a fine, sembra non avere più niente di nuovo da dire. Questo non dipende solo dal fatto che tutto il mondo antico sta andando incontro a cambiamenti profondissimi vedi cristianesimo, cambiamenti politici economici e culturali, ma dipende anche dalla natura della matematica greca stessa. L'aspetto di generalità non esiste nella matematica greca, si affaccia timidamente in Archimede, poco in Pappo ma non arrivano mai a maturazione, per la mancanza di un linguaggio adeguato, quello delle grandezze che non rappresentano una quantità astratta ma sempre dotate di forma spaziale. Questa fine del mondo antico la pressione dei barbari e molti altri aspetti saranno poi minori rispetto a quello che sarà la rottura data dall'espansione degli arabi.

L'impero romano aveva avuto sempre un nemico principale. Verso la fine del VI secolo, Giustiniano avevo messo ordine sia interno che esterno all'impero, che stava risorgendo, ma la vera frattura avviene all'inizio del VII secolo, quando Maometto inizia la sua predicazione in Arabia. Egli aveva unificato le varie tribù arabe in una nuova unità data dalla nuova religione dell'islam. Intanto i romani avevano rotto con i persiani, portando alla morte l'imperatore persiano e con il recupero della croce di cristo (629), finalmente l'impero romano aveva sconfitto il suo nemico. Sette anni dopo la situazione era completamente mutata, avvenne l'esaurimento delle forze sia persiane che romane (bizantine) e l'impero romani si trovava ad avere a che fare con il califfato dei successori di Maometto che si stavano espandendo in oriente e stavano attaccando anche le roccaforti cristiane e bizantine. Eraclio stabilisce quindi un patto con l'imperatore persiano ma va male, i persiani vengono conquistati dagli arabi. Successivamente nella battaglia dei guardiani dello yarmouk, durata 6 giorni in cui un grande esercito bizantino fu completamente sconfitto dalla strategia del comandante che si chiamava Khadi b-al-walid questo evento uno storico militare lo ha definito come una delle battaglie più decisive della storia. A metà del settecento si inoltrano anche nella Francia, queste bande verranno sconfitte nella battaglia di Poitiers 732 d.c. , alla fine in meno di un secolo si viene a costituire un impero grandissimo in cui domina una nuova religione nemica del cristianesimo. Come è possibile questa espansione? Ad esempio per le eresie

LEZIONE 13→ 7-11-2020

Il Teorema di Pappo-Guldino presenta una certa generalità inoltre **Pappo** cerca di riordinare e generalizzare e questo è un po' una caratteristica peculiare della matematica greca tarda, e in particolare dell'epoca di Pappo. Successivamente segue un epoca in cui la matematica si concentra sul commenti (vedi Teone, che fa l'edizione degli elementi). Con **Eutocio** si conclude l'età antica e la matematica greca, non che la matematica greca non risorga, ma tutte le volte che risorge tra gli arabi, nel rinascimento, risorgerà con caratteristiche del tutto diverse. L'età antica finisce con l'espansione araba e da cui inizia l'età medievale. Questo crea una frattura in un mondo che aveva una sua continuità, successivamente gli arabi diventano anche abili marinai, quindi il Mediterraneo non è più un ponte tra oriente e occidente ma diventa luogo di scontro di cui gli arabi ne fanno padroni.
-Henri Pirenne, Maometto e Carlo Magno- opera che risale agli anni "30 presenta numerose critiche per gli argomenti trattati. La tesi di Pirenne di fondo ovvero che l'espansione araba abbia provocato una rottura nel mondo allora conosciuto è però vera.
Talmente decisivi sono gli arabi che in un centinaio di anni circa questi si espandono moltissimo fino alla Francia. Nell'arco di un centinaio di anni il mondo cambia radicalmente, non c'è più unità: da una parte c'è il mondo islamico e dall'altra parte c'è la cristianità greca. Questa rottura comporta anche un arretramento generale nella cultura, gli arabi e il mondo latino sono completamente differenti. Fino al IX secolo per quanto ci riguarda, la cultura e in particolare quella scientifica langue in questo enorme mutamento epocale, che ha anche plasmato il nostro mondo attuale.
Per quanto riguarda il mondo occidentale dobbiamo aspettare il XII secolo per avere un risveglio scientifico.

Andiamo nel mondo Arabo.

Gli arabi nella loro espansione hanno una politica di assimilazione, non c'è uno scontro o una persecuzione nei domini che conquistano, spasso mantengono i funzionari bizantini o persiani che trovano nelle città che conquistano. Al momento della battaglia di Poitiers, verso la metà dell'ottavo secolo l'espansione degli arabi si arresta, questa si arresta e si spezza anche, vengono a crearsi dei califfati autonomi, in particolare in Spagna e in Africa, sotto sede del califfo che siede a Bagdad. Questa viene fondata nell'VIII secolo, il califfato abbaside costruisce questa città e inizia una politica culturale molto spinta, questa dipende dal fatto che passata la diffusione dell'islam si voglia costruire una cultura araba, e iniziano anche studi scientifici. Questi studi sono molto influenzati dai popoli con cui gli arabi entrano in contatto, molto importanti sono i monasteri, inoltre entrano in contatto anche con la cultura indiana, cultura che ha sviluppato molto il campo dell'algebra. A Bagdad all'inizio del IX secolo inizia una riappropriazione di una scienza greca e la fondazione di una nuova disciplina che è l'algebra. (perché nuova?) questi due aspetti sono i più importanti di quello che è l'eredità che gli arabi ci consegnano.

Conseguenze importanti delle azioni degli arabi:

1. **Trasmissione e conservazione di una serie di testi greci che altrimenti sarebbero rimasti sepolti nelle biblioteche bizantine**
2. **La creazione dell'algebra**
3. **La diffusione del sistema notazione posizionale indiano.**

Alla corte del califfo Al-Mamun vive **Al-Khwarizmi,** è un astronomo che scrive due trattati: il primo è **Algorismi de numero indorum** e questo titolo ha dato luogo alla parola algoritmo. La notazione posizionale ha un aspetto importante: quello dell'introduzione dello zero. Non che questo faccia dello zero un numero, perché con lo zero non conto niente. D'altro canto il fatto che lo zero entri negli algoritmi (ad esempio quando faccio la moltiplicazione) fa si che la rigidità del concetto di numero come numero per contare si ammorbidisca parecchio. Infatti il numero per contare diventa numero per operare. Gli algoritmi funzionano sul sistema posizionale, il numero non è più la pluralità di unità degli Elementi di Euclide ma diventa qualcosa su cui farci delle operazioni.
Un'altra cosa importante è il secondo libro di Al-Khawarizmi: **Al-jabr e al-Muqabala** (algebra e cose cabalistiche) questo è il primo libro dedicato a Mahmood di teoria delle equazioni.
Al-jar e al-Muqabala sono le operazioni che si fanno per trasportare da una parte all'altra gli elementi di una equazione e si fa per evitare di avere quantità negative:
$3x-2=3+x$ (a sx ho una cosa menomata→ porto il 2 dall'altra parte) e quindi ottengo→ $3x = 5+x$. Non ho più cose menomate, sarebbe il libro della restaurazione e della composizione.
Il Libro tratta perlopiù di soluzioni ai problemi di geometria, eredità….
Anche in Diofanto e in altri avevamo visto che trattavano metodi vari per risolvere problemi ma la novità è che per prima cosa viene detto che ci sono tre tipi di numeri: i numeri puri, le radici e i mal

- **dirham**→ censo in latino, cioè una moneta→ numero a
- **jidr/shay** → radice o cose incognite→ x
- **mal**→ la ricchezza, il bene, il tesoro→ x^2

qui abbiamo 3 tipi di cose che posso combinare in 6 modi diversi e quindi la possibilità di avere tre tipi di equazioni di 1° grado e 3 tipi di 2° grado.
In queste manca uno dei tre tipi di numeri
1°→ { $ax = b$ → manca mal

{ $ax^2 = bx$→ manca jidr

{$ax^2 = b$→ manca dirham

2°→ {$ax^2 + bx = c$qui abbiamo eq di 2° complete(compaiono tutti tre tipi), i numeri negativi non ci sono,

{$ax^2 = bx + c$

{$ax^2 + c = bx$

Il libro di Al Khwarizmi inizia con la classificazione di equazioni di secondo grado e per ognuno di questi presenta un metodo risolutivo. Abbiamo la teoria delle equazioni, in particolare i problemi che vengono trattati vengono fatti arrivare a uno di questi tre tipi. Fatti Particolarmente importanti:

1. La tradizione dei problemi viene messa sotto sopra. La cosa tradizionale è dare una soluzione relativa al problema analizzato. Qui invece abbiamo l'equazione che viene prima del problema stesso e l'approccio è di cercare di ricondurre il problema a uno di questi tipi di equazioni analizzato
2. Al khwarizmi dice che ci sono 3 tipi di numeri. L'idea del numero è qualcosa con cui si opera, non si usa più per contare tende ad assumere una certa generalità.
3. Quello che succede nei successori di Al- khwarizmi è che abbiamo la comparsa dei numeri irrazionali

Quello che nella matematica greca radice due era qualcosa di incommensurabile, qui invece radice di due diventa un numero vero e proprio in quanto altrimenti l'equazione di secondo grado non la risolveresti.
Con l'algebra cose che prima non avevano lo statuto di numero lo acquistano immediatamente, poi anche i numeri negativi.

Riassumendo:

1. Modifica del concetto di numero, esistenza delle radici come numero
2. Radice di due è un numero sordo (inesprimibile o senza parola e chi è muto è anche sordo)
3. Ognuna di queste equazione ha una sua regola di risoluzione

Per risolvere un'equazione di secondo grado Al-khwarizmi usa la geometria e completa un quadrato geometrico (non lo si poteva fare col completamento del quadrato che conosciamo noi oggi) questo porta a una dialettica tra l'algebra nascente e la geometria che continua fino a **Francois Viète** (fine del '500).
Con l'approccio che Al-khwarizmi inaugura cambia la proprietà di specifici oggetti matematici.
Questi nuovi numeri che introduce Al-khwarizmi che status hanno? Cosa sono? Nell matematica si sta introducendo qualcosa di più astratto.

LEZIONE 14→ 9-11-2020

Come già trattato nella volta precedente con la fine del mondo antico il mondo si spezza in varie parti e viene interrotta quella continuità nel campo della cultura e della vita più in generale, che ha caratterizzato molti secoli. Gli arabi saranno i protagonisti di questo periodo, ed è proprio grazie al lavoro svolto a Bagdad che si diffonde la filosofia e la scienza nel mondo occidentale. Gli arabi svolgono un'importante opera di trasmissione della filosofia e della scienza dei popoli che conquistano, e che diffondono da queste civiltà all'occidente latino. Occidente latino ridotto a pochi territori, in questo nuovo mondo gli arabi svolgeranno questa funzione. Questo movimento di trasmissione inizia nel IX secolo con la fondazione a Bagdad della casa della sapienza. Altro aspetto collegato con questo ma completamente nuovo è l'opera di **Al-Khawarizmi.** Egli è un astronomo che vive alla corte di Al-mamun, il quale oltre ai testi astronomici scrive due libretti:

1. **Algorismi de numero indorum**, in cui è illustrato il sistema di numerazione posizionale e gli algoritmi con cui si possono fare i calcoli pervenuto a noi solo per traduzione latina
2. Libro dell' **Al-jabr e Al-Muqabala**

Il sistema posizionale in che modo contribuisce al cambiamento del concetto di numero?

Grazie al sistema posizionale viene introdotto lo zero come segnaposto, ma applicato agli algoritmi acquisisce un valore numerico, da qui si ha lo slittamento del concetto di numero da numero per contare a numero per operare. Gli algoritmi permettono di automatizzare il calcolo quindi rendono possibile il calcolo anche a gente meno esperta. Quindi si ha una democratizzazione del numero (in un qualche senso). Il testo di **Algebra** invece ci è pervenuto in arabo, con la prima edizione critica nel **2007** fatta da un arabista egiziano: **Roshdi Rashed**. Egli va il merito di aver fatto moltissime edizioni di testi arabi della matematica, a lui dobbiamo anche **la scoperta di tre libri di Diofanto** perduti in greco, ha fatto la versione araba delle **coniche di Apollonio**, ha fatto in una serie di volumi intitolati **"Matematiche Infinitesimali"** una raccolta di testi arabi di ispirazione archimedea, questo lavoro è colossale, al di là delle sue interpretazioni discutibili. Pensa che la matematica occidentale derivi direttamente da quella araba. Accanto a questo tipo di interpretazione Rashed fornisce una traduzione in arabo e poi anche in francese. L'algebra di **Al-khwarizmi** ha una particolare rilevanza non tanto per cosa essa si applica (si applica a problemi ben noti) ma per un capovolgimento del punto di vista. Egli parte dal dire che ci sono 6 tipi di equazioni, perché ci sono tre tipi di numero: **il numero puro, la radice o incognita e il mal (jidr al quadrato), che lui chiama rispettivamente dirham, jidr/shay (radice o cosa incognita) e il mal, tradotti poi in latino come: numerus, radis e come censo rispettivamente**.

Perché sei tipi di equazione? Perché abbiamo tre tipi di numeri e da questi mediante un ragionamento combinatorio. Otteniamo 6 equazioni
Il resto del libro è dedicato alla raccolta dei problemi che vengono risolti riconducendoli a una dei tipi di equazioni, da qui un nuovo oggetto entra nelle pratiche matematiche ovvero l'equazione, un'importante suo successore **Abu Kamil** produrrà una vera e propria teoria delle equazioni fino a che nel XII secolo **Omar Khayyam** studierà anche equazioni di terzo grado. Altro aspetto da sottolineare è il fatto che queste regole di soluzione dell'equazione, fanno si che il concetto di numero si amplii come numero per operare, infatti vengono introdotto anche i numeri irrazionali. E questo produrrà tutta una corrente di ricerca che condurrà alla algebrizzazione del X libro di Euclide, o una rilettura algebrica dell' Aritmetica di Diofanto.
Altro aspetto importante come già accennato prima è che queste regole fanno sì che:

1. il concetto di numero si generalizza.Il numero diventa numero per operare.Da questo punto di vista Abu Kamil studierà anche equazioni in cui il coefficiente è irrazionale.
2. Entrano nell' aritmetica/algebra i numeri irrazionali.
3. Si ristudierà il X libro di Euclide.
4. Si avrà una rilettura algebrica dell' aritmetica di Diofanto.
5. **Omar Khayyam** risolverà tutti i tipi di equazioni di secondo grado intersecando curve geometriche opportune.
6. Introduzione dell’equazione
7. Si apre un nuovo filone di ricerca

Altra cosa della volta scorsa: nel testo di Al-Khwarizmi si presentano i sei tipi di equazione con le loro regole, senza modo di poter dimostrare queste regole. Dobbiamo aspettare **Viete** per giustificare le operazioni algebriche all'interno dell'algebra stessa. Quindi per giustificare tali regole bisogna ricorrere al linguaggio della geometria. Inoltre si usano sempre equazioni specifiche con numeri, dopodichè si fanno operazioni che si appoggiano a teoremi di geometria che essenzialmente servono per completare un quadrato. Quindi l'algebra che sta nascendo è un'algebra che è ancora subordinata alla vera disciplina matematica che resta la geometria o l'aritmetica dei libri di Euclide. Questo porta un seme di novità molto importante perché questa nuova visione algebrica ha delle immediate ricadute nella vita quotidiana, le equazioni sono molto utili per problemi pratici.

Opera di trasmissione degli arabi verso l'occidente latino

Nel **1927** uno storico americano **Charles Homer Haskins** pubblicò un libro intitolato **"Il Rinascimento del XII secolo"**. Il termine Rinascimento viene coniato non molto tempo prima da **Burckhardt** nel libro **"La Civiltà del Rinascimento in Italia"**che faceva iniziare il rinascimento con Federico II (XII secolo). La visione di Haskins è concentrata sull'Europa, egli vede nell'Europa latina questa rinascita nei campi più vasti: dalle crociate, riscossa dell'occidente nei confronti dell'islam, alla fondazione delle prime università, dalla religione alla nascita della letteratura volgare e così via. Il punto di vista di Haskins è da prendere in considerazione: **il rinascimento della matematica inizia nel XII secolo per concludersi nel XVI.**
A partire dal XII secolo, avviene uno sviluppo della matematica in occidente che è basato su 2 aspetti:

1. recupero del corpus della matematica greca
2. Appropriazione della matematica araba.

A partire da questi due aspetti e dal loro intreccio si produrrà nel XII secolo, la nascita della matematica moderna.Questa ha un padre e una madre: matematica di tradizione araba e matematica greca. Anche se questa non è una tesi unanimemente condivisa.

Perché il XII secolo?

Nel XII secolo si sviluppa in Sicilia normanna e nell'area Iberico-Provenzale (penisola iberica, Spagna, Catalogna, Provenza) un accentuato fenomeno di recupero di testi. I normanni aveva conquistato la sicilia che era stata conquistata dai romani, la quale diventa un crogiolo di civiltà. In questo contesto vengono tradotte varie opere sia dall'arabo che dal greco. Viene tradotto dal greco gli **Elementi di Euclide**, viene anche fatta la traduzione dell'**Almagesto di Tolomeo**, vengono tradotti anche testi arabi. Si hanno anche trattati su coniche iperbole, anche se il vero polo di irradiamento della cultura scientifica è il mondo Iberico-Provenzale. Nel corso del XII secolo si hanno alcuni traduttori importanti che sono:

1. **Platone da Tivoli**
2. **Ermanno di Carinzia**
3. **Adelardo di Bath** (vedi tradizione Euclide, gli Elementi, che sarà alla base della traduzione fatta da **Campano Da Novara**)
4. **Giovanni da Siviglia**
5. **Roberto di Chester**, egli traduce l'Algebra di Al-Khawarizmi e forse traduce anche il testo Algorismi de numeri indorum

Il personaggio di spicco delle traduzioni che vengono effettuate in ambito iberico è **Gerardo da Cremona** con la scuola delle traduzioni di Toledo, muore nel 1187.

Situazione della Spagna in quell'epoca

Succede che nel X, XI, XII secolo questi piccoli staterelli spagnoli si rafforzano sempre di più e iniziano una politica di riconquista che, nel corso del XII secolo, l'ultimo regno musulmano verrà sconfitto da Isabella di Castiglia e Alfonso d'Aragona che sposandosi daranno origine al regno di Spagna. Toledo viene riconquistata quindi, e attorno alla cattedrale di Toledo si apre una scuola che produrrà una serie di traduzioni (**Giovanni di Siviglia** è legato a questa scuola) in particolare **Gerardo da Cremona** tradurrà almeno 74 opere dall'arabo. Abbiamo una sua vita redatta dai soci, colleghi. Questi ci raccontano che egli non riusciva a trovare scuole con un certo spessore culturale per comprendere le filosofie e le scienze, quindi attirato dalle notizie che vengono dalla Spagna si reca a Toledo spinto anche da conoscere l'almagesto di Toledo. Una volta giunto in Spagna egli tradurrà numerose opere: di dottrina fisica, e di moltissimi altri campi, tra cui filosofia, medicina, ottica.

Opere di Matematica che traduce:

1. **Almagesto di Tolomeo**
2. **Misura del cerchio di Archimede**
3. **Verba figliorum o liber triumphatum**, che è una compilazione scritta da tre fratelli che scrivono testi di geometria di misura che rimandano a sfera e cilindro formula di Erone. La lettura di questi tre fratelli fatta su Archimede sarà poi quella usata fino alla riscoperta di Archimede stesso.
4. **Traduzione degli Elementi di Euclide**
5. **Algebra di Al-khwarizmi**

Un elemento importante di questo periodo è la cultura che si diffonde nelle università. In queste l'attenzione è concentrata nel diritto, nella teologia e nella medicina. La medicina contiene inoltre la filosofia. Nelle università la matematica non viene mai approfondita, la conoscenza matematica è prettamente legata all'oroscopo. Gli aspetti algoritmici e la notazione posizionale iniziano a diffondersi in occidente già alla fine del X secolo e inizi del XI. Si diffondono anche sistemi di calcolo con sassolini, cambi di monete ecc.. E questo è attribuibile si pensa a **Giovanni da Siviglia** nel **"liber Mahamelet"** di cui è stata fatta recentemente una edizione da **Jacques Sesiano** che è un trattato abbastanza caotico, probabilmente proveniente da fonti arabe. In cui vengono già utilizzate tecniche nuove, nuove per modo di dire dato che queste tecniche, o alcune di queste le troviamo anche in Al-Khawarizmi che è del IX, quindi la diffusione in occidente latino della matematica araba arriva in ritardo. Nel corso del XII secolo ci sono vari segnali che nell'area iberico provenzale e poi anche nella Sicilia normanna queste tecniche avessero conosciuto una diffusione, anche se non approfondita.
In Italia il grande diffusore di queste tecniche e di queste novità matematiche sarà **Leonardo Pisano detto Fibonacci** che compilerà a proposito di questo una grande opera il **"Liber Abaci"** (trad. libro del calcolo) che sarà la base dello sviluppo della matematica in occidente e principalmente in Italia centro settentrionale.

LEZIONE 15→ 13-11-2020

Come scritto da **Charles Homer Haskins** in Europa abbiamo una rinascita che coinvolge vasti campi tra cui quello religioso, economico sociale e molto altro. In questo periodo alcuni fattori molto importanti sono la creazione delle università e tale rinascimento porta con sé attraverso la mediazione araba tutta una serie di testi scientifici. Si diffondono i due trattati di Al-Khwarizmi. Quello di algebra e quello sulla notazione posizionale oltre a questo la tradizione arabo-latina fa tornare nell'occidente latino tutto un corpus di matematica greca.
Il rinascimento scientifico inizia nel XII secolo. Ma c'è un'altra corrente di pensiero con a capo **Pierre Duhem** (era un fisico, prima metà del **1900**) il quale studiando manoscritti della biblioteca nazionale di Parigi del XIV secolo, pensa che la scienza moderna in particolare quella galileiana abbia origine scolastica. Egli condusse studi su Leonardo da Vinci. Lui vede le radici della nascita della scienza moderna e in particolare della fisica galileiana nei cosiddetti **Calculatores di Oxford**.

Uno di questi famosi calculatores fu **Nicola Oresme** (XIV secolo).

La loro attività

L'idea di fondo della loro attività è quella di risolvere problemi rispetto alla fisica aristotelica utilizzando tecniche matematiche che si riconducono alla teoria delle proporzioni di Euclide. Continuatore di Oresme è ad esempio **Marshall Clagett** (morto all'inizio degli anni 2000) egli ha pubblicato:

1. **''Archimede in the middle ages''** : opera composta di 5 volumi rivolta a voler far vedere come lo stesso Archimede conosciuto nel medioevo era quello che aveva effettivamente influenzato l'origine della scienza moderna
2. Uno studio della meccanica nel medioevo
3. Altri libri minori

Oltre alla corrente di pensiero che vede essenziale l'umanesimo, abbiamo questa che vede l'umanesimo come una parentesi. Secondo questa linea di pensiero il rinascimento sarebbe una parentesi tra il 1400 e il 1500 per la componente scientifica. La corrente greco-umanistica per cui la matematica moderna sia diretta conseguenza della matematica greca ha preso molto piede. Questa matematica moderna ha un lungo periodo di incubazione, e ha una madre e un padre. **Il padre sarà l'algebra con forte influenza araba. Mentre la madre arriverà a maturazione soltanto nell'umanesimo.** Questa minorità della madre è spiegato dal fatto che questi campi hanno scarsa applicazione per la matematica, cioè diritto, teologia, filosofia ecc.. Anche nei calculatores non si sviluppa la matematica, si prende solo quel poco che serve per applicarla a determinati contesti.
La società del XII secolo vuole una matematica pronta all'uso e che serva a quella che è la grande espansione dell'occidente (fine crociate ecc..). Un altro elemento importante è che la matematica teorica si sviluppa bene dove esistono dei centri di potere che sostengono la cultura e la tradizione matematica , scuole in senso ampio a proposito di questi centri, Nell'antichità abbiamo Atene, Alessandria nel mondo arabo abbiamo Bagdad, parlando di Archimede abbiamo la corte di Viterbo con **Campano e Vitelo, Guglielmo di Moerbeke**. La riappropriazione della matematica quindi può avvenire solo ove ci sono centri che lo permettono.

Quindi riassumendo abbiamo questi due filoni:

1. Filone arabo
2. Filone greco

Sarà dall'intreccio tra queste due pratiche matematiche che alla fine del 600 nascerà qualcosa di nuovo.
La società del XII e XIII secolo è una società che ha fame di matematica, già nel corso del XII secolo si iniziano a diffondersi il sistema indiano, l'algebra a farne testimonianza è il **Liber Mahamelet** di **Giovanni da Siviglia**. In particolare a contribuire alla diffusione di questa matematica è **Leonardo Pisano detto Fibonacci.**

Leonardo Pisano

Non sappiamo niente o quasi, di questa figura. Il padre si chiama Guglielmo, era un funzionario importante della repubblica pisana. Sappiamo che il padre quando Fibonacci era bambino, era un funzionario in Algeria e iscrisse il figlio a lezioni di matematica. Fibonacci fu molto soddisfatto e lo scrisse nel suo **Liber Abaci.** Questo conobbe una prima pubblicazione nel **1202** e poi una seconda versione, lo dice Leonardo stesso, dedicata a un membro della corte di Federico II, **Michele Scioto** del **1228**. **Enrico Giusti** studiando il manoscritto nota che la data 1228 compare solo in un manoscritto, negli altri compare solo 28, che può voler dire qualsiasi cosa, quindi non si è sicuri della veridicità di questa data. L'edizione critica di Giusti è composta da 800 pagine. La prima edizione a stampa fatta nel **1859** da **Baldassarre Boncompagni** consiste in più di 500 con fogli maggiori dei fogli A4. Questa opera può essere divisa in 4 parti:

1. Numerazione indiana e algoritmi, che comincia con la moltiplicazione e la divisione
2. Matematica commerciale ovvero tutti quei problemi che questa grande espansione del commercio possiede. Questo commercio ricopre una vasta area quindi c'è la necessità di tenere una corrispondenza scritta. I problemi della matematica commerciale sono: cambi di monete, cambi di unità di misura, baratti…
3. Matematica dilettevole e curiosa. Si trova ad esempio il famoso problema dei conigli (da cui nasce la successione di Fibonacci)

Si trova anche il problema della scacchiera di cui Fibonacci propone una soluzione.

Nel liber abaci si ritrova tutta una tradizione di problemi che risale alla notte dei tempi della matematica.
Nel capitolo XII si trova il problema degli alberi
data x=h altezza dell' albero
$\frac{1}{4}x\frac{1}{3}x = 21 -> \frac{7}{12}x = 21 -> x = \frac{21}{7}12 = 36$
Con cui Fibonacci risolve con il metodo della falsa riduzione.

4. La doppia falsa riduzione che viene introdotta nel XII capitolo su problemi dilettevoli, algoritmi per radici quadrate e cubiche e algebra. Gli algoritmi sono di derivazione araba

Cosa ha a che fare algebra con i mercanti?

Perché permette di avere uno schema generale semplificato, ma anche l'algebra stessa Leonardo la applica al problema degli interessi.

LEZIONE 16→ 16-11-2020

Nome

Fibonacci a Pisa era conosciuto come Leonardo Bigollo che in pisano vuol dire Leonardo il Giramondo, come testimoniato da tutti i manoscritti del Liber Abaci. Mentre Fibonacci deriva da "figlio di Bonaccio".
Del **Liber Abaci** sappiamo che Leonardo ne scrisse una versione nel **1202** che fu poi corretta dopo aver conosciuto Federico II nel 1226 (?) in particolare la correzione avviene per la richiesta da parte di Michele Scoto (molto vicino a Federico II). Nella storia così come si è diffuso il fatto che Leonardo si chiamasse Fibonacci, si è diffuso anche il fatto che la seconda edizione del Liber Abaci fosse composta nel **1228**. In effetti i testimoni del testo non ci dicono questo, il numero 1228 può essere collegata a una catalogazione.
Succede che **Giusti** lavorando all'edizione critica del Liber Abaci. svolge la recensione dei testimoni dei manoscritti possibili. Tra questi c'è il codice della biblioteca Laurenziana di Firenze, come è fatto?
Questo codice comincia dal capitolo XII, mancano i primi 11 che trattano della matematica mercantile e della numerazione indiana. Da questo capitolo cominciano cose più serie, nonostante sia libro di matematica creativa. Entrano infatti cose del tipo la falsa riduzione di serie ecc… quasi come preparazione degli ultimi capitoli che sono più complicati (vedi volta scorsa).
Giusti si è reso conto che:

1. Questo capitolo è diviso in 10 parti, mentre il resto della tradizione che contiene queste capitolo è diviso in 9 parti
2. Ci sono una serie di atteggiamenti dei copisti che nel fare l'indice del capitolo riportano 10 parti
3. Inoltre ci sono errori che mostrano come si sia passati a errori presenti nella versione del Laurenziano alla sua correzione nelle versioni successive, non si può pensare il contrario ovvero che il Laurenziano rappresenti una evoluzione dell'edizione del 1228.

Questo è importante perché la biografia di Fibonacci è costellata da incertezze. Ad esempio il **Liber Quadratorum** è trasmesso da un unico manoscritto latino datato **1225** che è dedicato a Federico II, peccato però che Fibonacci non abbia conosciuto Federico II prima del 1228 quindi molte cose rimangono nel vago.

Altre opere di Leonardo:
"Practica Geometrie" datata **1220**, non è molto sicuro neppure questa data perché a Pisa si datava in un modo invece a Firenze in un altro. Questo testo è molto importante in quanto Leonardo riprende tutta una serie di tematiche di geometria con rinvii a testi, ad esempio per la misura del cerchio lui cita **Archimede**, mediante la traduzione di **Gerardo da Cremona**. Un altro studioso importante ha dimostrato che **l'Euclide** che Fibonacci utilizza è l'Euclide normanno che si pensa che abbia conosciuto durante i suoi viaggi. La Practica Geometrie insieme al Liber Abaci ci danno l'idea che Leonardo sia a conoscenza della matematica araba e dei testi classici.

Come già accennato in precedenza il **Liber Abaci** è un libro monumentale (vedi edizione di Giusti), deduciamo anche che non era un libro destinato ai molti ma solo a una ristretta cerchia di persone a un ambiente colto. Al tempo stesso è presente della matematica mercantile molto pratica. Leonardo stesso lo cita un paio di volte nel Liber Abaci aveva composto un **Liber de Numero Di Minoris Squise**, un libro di "condensato" di cui non abbiamo nessuna traccia. Questo libro può essere interpretato come un libro pratico ma con un fondamento teorico, in cui vengono messe in luce le regole spicce, una sorta di libro per ingegneri.
Solo verso la fine del 1200 i primi 11 capitoli vengono tradotti in volgare in un libro chiamato **Liber de L'Abaco** **1285** scritto per l'appunto in volgare umbro. E' un manoscritto lussuoso, cioè tutto miniato e scritto bene, magari con tanti errori. Ampie sue parti sono tradotte direttamente dal Liber Abaci.
Una edizione critica di questo libro viene fatta da **Andrea Bocchi** un italianista, che ha dimostrato proprio che alcune parti sono state tradotte da Liber Abaci, lo vede perché sono stati conservati gli errori. Nell'Italia del '200 e '300 il ceto mercantile diventa protagonista e ciò giustifica anche la diffusione del libro.

Leonardo insegnante
«Considerando l'onore e il profitto della nostra città e dei cittadini, che derivano loro dalla dottrina e dai diligenti servigi del discreto e sapiente maestro Leonardo Bigollo nelle stime e ragioni d'abaco necessarie alla città e ai suoi funzionari, e in altre cose quando occorre, deliberiamo col presente atto che allo stesso Leonardo, per la sua

dedizione e scienza e in ricompensa del lavoro che sostiene per studiare e determinare le stime e le ragioni sopraddette, vengano assegnate dal comune e dal tesoro pubblico venti lire a titolo di mercede o salario annuo, oltre ai consueti benefici, e che inoltre lo stesso [Leonardo] serva come al solito il comune pisano e i suoi funzionari nelle pratiche d'abaco»

Da <https://it.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci> "

Si pensa che Leonardo sia stato un insegnate presso il comune pisano e abbia insegnato ai funzionari pisani.
A partire dalla fine del '200, il Liber Abaci per ingegneri si è diffuso in vari volgari in Italia centro settentrionale.

Tra chi si diffonde questa cosa?

Tra il XII e il XIII secolo si ebbe una forte espansione quindi si vengono a creare reti commerciali molto vaste di cui i banchieri e i commercianti erano protagonisti. Ad esempio in questi commerci avvenivano molti scambi tra moli posti pertanto quelli che all'inizio erano scritture contabili diventano strumenti fondamentali per il commercio e lo scambio. Ad esempio a Prato nel 1800 sfondando una parete è emerso l'archivio di un mercante pratese: **Francesco di Marco Latini**, in questo archivio ci sono 150.000 documenti sciolti e 600 registri di corrispondenza e questo mercante non è minimamente paragonabile con un Peruzio o con un Medici. Francesco di Marco Latini aveva filiali ad Avignone, Firenze, Prato, Pisa e in ogni città ci doveva essere un'agente che teneva i conti e lo informava. In questo ceto mercantile si sviluppa un modo di scrivere particolare (la scrittura mercantesca) che permette di capire da che tipo di classe sociale provenga un certo documento.

Dove studiano questi mercanti/banchieri?

Studiano in quelli che si chiamano **scuole d'abaco.**

> ni (XIV sec.): «Istimavasi avere in Firenze da novantamila di bocche tra uomini e femmine e fanciulli, per l'aviso del pane bisognavano al continuo alla città. [...] Trovamo che' fanciulli e fanciulle che stavano a leggere del continuo da ottomila in diecimila. I garzoni che stavano ad aprendere l'abbaco e algorisimo in sei scuole da mille in milledugento. E quelli che stavano ad aprendere gramatica e loica in quattro grandi scuole da cinquecentocinquanta in seicento».*

Questo passo significa che l'educazione che si sviluppa nell'Italia del '300 ha due filoni:

Quella elementare in cui si insegnava a leggere e scrivere in Latino e l'aritmetica elementare, verso i 12 anni si aprivano due strade:

1) la scuola d'abaco
2) la grammatica

(uno non esclude l'altro)
Chi andava nella scuola di grammatica imparava il latino seriamente e poi verso i 15/16 anni andava all'università per poi poter scegliere una delle tre facoltà.
Nelle scuole d'abaco invece si parla in volgare e si trova il materiale dei primi undici capitoli del Liber Abaci, il **Liber Abaci Minores** può essere un Liber Abaci per abachisti.
Il Calcolo viene fatto con l'abaco

Scuola d'abaco, chi le frequentava?

Alla scuola d'abaco si entrava all'età di 12 anni. Si ha una scolarizzazione di massa e livelli di alfabetizzazione aumentano tantissimo infatti tutti i bambini fiorentini andavano a scuola. **Carlo Maccagni** si è inventato un nome per i frequentanti di queste scuole: **"lo strato culturale intermedio".** È uno strato che riguarda il tipo di cultura che viene condivisa; intermedio: ovvero per un certo tipo di persone tra la massa degli analfabeti e l'elite che imparava il Latino e andava all'università, si andava dal piccolo artigiano fino al figlio del nobile. Che tipo di cultura viene diffuso? Questo strato di cultura non impara solo un certo tipo di matematica, ma impara e condivide una cultura piuttosto vasta, in volgare.
La frequentavano futuri idraulici, agrimensori, tecnici, ingegneri ecc… tutti questi avevano bisogno di una cultura matematica che andasse sul pratico. C'è tutto questo mondo che non aspira a una professione liberale che si forma in questo ambiente, il passo successivo è entrare in una bottega. Faceva l'apprendista come pittore, cartografo, notaio avvocato ecc…

Che matematica veniva insegnata?

Venivano insegnate le 4 operazioni e la matematica mercantile, lo strumento principe è la teoria delle proporzioni. Vengono insegnate anche tutta una serie di regole riguardante la geometria pratica per le misure di campi, botti ecc… Tutta l'impalcatura teorica che ancora si ritrova nel Liber Abaci evapora completamente, il metodo didattico è quello della totale ripetizioni di esempi (un processo completamente meccanico), lo strumento con cui si insegna è il così detto libro d'abaco. Questo è uno strumento destinato al maestro perché contiene queste liste di problemi e la stessa tradizione delle botteghe d'abaco è che la bottega passi al figlio o a un socio e così via, contemporaneamente il libro d'abaco va modificandosi, in questo modo si diffondono una quantità di libri d'abaco molto vasta, **Warren Branch** ha recensito tutti i libri d'abaco trovati in Italia e ne ha trovati 300.

Due aspetti importanti di questa matematica:

1. Per la prima volta nella storia, sicuramente nell'occidente latino si ha una alfabetizzazione matematica assai diffusa
2. La matematica che si insegna è del tutto elementare ma una piccola frazione dei libri d'abaco presenta argomenti più complessi tipo l'algebra, infatti proprio nelle scuole d'abaco del '400/'500 si fa la scoperta di come risolvere algebricamente le equazioni terzo e quarto grado, che neppure gli arabi erano riusciti a trovare. E non è solo l'algebra, infatti un personaggio come **Piero della Francesca** che viene da un ambiente della scuole d'abaco e coltiva l'arte della prospettiva scrive lui stesso un trattato d'abaco anche molto avanzato perché cerca di affrontare studi di equazioni anche di 6° grado. Piero della Francesca è il primo a fare una trattazione matematica teorica della prospettiva, il "**de prospectiva pingendi**" scritto in volgare (la traduzione in latino viene dopo) è una sua opera che tratta di questo.

La matematica abachista quindi produce e si sviluppa.

LEZIONE 17→ 20-11-2020

Sviluppi nel campo dell'algebra

L'algebra araba è un' algebra retorica in cui non compaiono né simboli né formule, sono regole esposte a parole. Nel corso dei secoli si inizia ad avere uno sviluppo che da una parte va verso la progressiva simbolizzazione degli oggetti trattati e dall'altra si sviluppa una ricerca di cercare di trattare anche le equazioni di terzo grado. **Qui entra in gioco un processo che durerà per tutto il XIV fino al XV secolo.** L'idea è di riuscire a trovare regole simili a quelle usate nelle equazioni di secondo grado anche per quelle di terzo o grado superiore. Questo è presente anche in **Leonardo** stesso nella sua opera il "**Floss**". Giovanni da Palermo un membro della corte di Federico II (1226) propone a Fibonacci. di trovare una soluzione a equazioni di terzo grado. Leonardo prima dimostra che tale equazioni non ha soluzione in numeri interi, poi in numeri razionali, poi in radicali quadratici e infine da una soluzione approssimata con una buona approssimazione senza però spiegarlo. Sempre nel **Liber Abaci** troviamo trattato il problema degli interessi che è alla base dell’interesse della cultura dell’abaco verso l’equazione di grado superiore : supponiamo di avere un capitale con un certo interesse allora dopo un certo numero di anni otteniamo il montante del capitale.

$C(1 + x)^n = M$ Problema studiato da Leonardo: se ha un certo capitale e vuoi ottenere un dato montante in tre anni, a quale tasso di interesse deve essere impiegato?

$C(1 + x)^3 = M --> x = \sqrt[3]{\frac{M}{C}} - 1$. C'è un problema questa può essere vista come un'equazione per esteso

$C(1 + x)^3 = C.(1 + 3x + 3x^2 + x^3) = M$ Quindi

$C(1 + x)^3 = Cx^3 + 3Cx^2 + 3Cx + C = M$

Le equazioni di terzo grado del tipo sopra visto hanno questa particolare regola risolutiva. $x = \sqrt[3]{\frac{M}{C}} - 1$ In questi anni quindi si vuole vedere se data una certa equazione è possibile avere una regola generale per risolverla. In questo tipo di ricerca che comincia nel '200 e dura fino al '400 viene scoperto che data un'equazione di terzo grado si può ridurre sempre in:

$x^3 + px^2 = q$

E all'inizio del '500 succede che a Bologna vengono scoperte la regola generale per risolvere equazioni del tipo:

$x^3 + px = q$

$x^3 + q = px$

$x^3 = px + q$

Bologna è una delle poche sedi universitarie in cui c'è una lettura di Matematica e una di Matematica abachista, questi risultati vengono scoperti da **Scipione del Ferro** senza però pubblicarli. Qualche anno dopo un allievo di Scipione sfida **Tartaglia** (un maestro d'abaco a Venezia) a risolvere una serie di problemi. Tartaglia si rende conto che i problemi che tale allievi gli propone si ricollegano a equazioni di terzo grado che egli aveva già precedentemente studiato, e da cui ne deduce una regola generale per la risoluzione di: $x^3 + px^2 = q$

Il capitolo di cubi e cose = a numero. Poi sarà lo stesso Tartaglia a proporre a tale allievo un problema su cui Tartaglia aveva già trattato e il povero allievo non riusciva ad uscirne. L'altro aspetto interessante è la questione delle sfide ed inoltre i maestri d'abaco sono una classe molto omogenea, si va da persone che insegnano le 4 operazioni base e non di più fino a personaggi del

calibro di Tartaglia. Un maestro d'abaco sarà tanto più famoso quanto la sua fama di risolutore di problemi si diffonde, così come la fama di Tartaglia che arriva ad un altro matematico importante **Gerolamo Cardano**. Egli è figlio illegittimo di un umanista e medico milanese Fazio Cardano, studia medicina ma essendo figlio illegittimo il collegio milanese non lo vuole ammettere tra i suoi membri. Gerolamo trova un impiego a Milano nelle scuole piattine, e nel suo insegnamento decide di pubblicare una piattica aritmetiche. Venuto a sapere di ciò che è successo a Venezia comincia a tormentare Tartaglia per sapere delle formule da lui scoperte. Tartaglia va a trovare cardano a Milano e alla fine Cardano riesce a estorcergli la formula che Tartaglia gli da sotto forma di sonetto.
Cardano ha in casa un ragazzetto, **Ludovico Ferrari** che data la sua notevole intelligenza da servo lo promuove a segretario poi lo prende come allievo ed infine Ludovico Ferrari supera il maestro riuscendo a risolvere equazioni di quarto grado. Cardano e Ferrari vanno a Bologna dove conoscono Bartolomeo della Nave che è il genero di Scipione del Ferro che fa l'insegnante di matematica abachista all'università di Bologna, e da cui pubblica l' **Ars Magna**. Questo è un evento epocale e contiene la summa di tutta l'algebra che si poteva conoscere, viene pubblicata con la stampa e in latino.

Umanesimo & stampa

La stampa a caratteri mobili venne inventata verso il **1450** da Gutemberg. Questa ha degli effetti fondamentali per tutto, in particolare per il campo della matematica. Il libro a stampa ha un impatto molto diverso dal manoscritto:

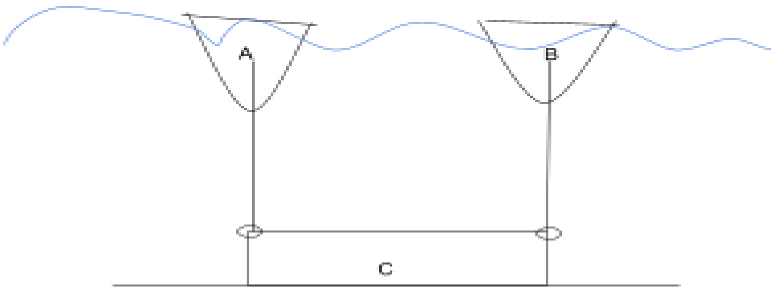
1. Costa molto meno
2. Ha una diffusione molto maggiore

Il punto 2 è particolarmente vero per il campo matematico. Ad esempio per Archimede supponiamo che esistessero 20-30 copie delle opere di Archimede, queste copie sarebbe sparse per l'Europa e inoltre tutte diverse dall'altra. Colui che volesse studiare Archimede dovrebbe andare a prendere una di queste copie in uno di questi luoghi.
Con la stampa quando le 1544 viene stampata l'Editio Princeps di Archimede ne vengono stampate 300 copie, qui allora è il libro che cerca il lettore e non viceversa, anche perché c'è un investimento tecnologico e culturale.
Un esempio di importanza di questa rivoluzione è la diffusione del protestantesimo, inoltre la stampa si diffonde in un periodo dove c'è una rinascita degli studi, **in quanto il rinascimento scientifico è già iniziato (XII secolo**). **A partire dalla fine del XIV secolo inizia l'umanesimo**: ci si convince sempre più che il mondo classico abbia realizzato delle conquiste

che sono molto più di ciò che ci circonda, da qui la ricerca di testi, la ripresa di modelli, nel corso stesso del '400 viene riscoperto Archimede stesso, sempre nel '400 si diffonde l'opera de **Architectura** di **Vitruvio** e tutto questo secolo è pervaso dalla ricerca dell'antico. Esiste un umanesimo scientifico che ha una importanza decisiva, per esempio **Lorenzo Valla** grazie agli strumenti della filologia dimostra la falsità della donazione di Costantino, oppure altrettanto importante è **Francesco Filelfo** che in Italia porta le coniche di Apollonio, importante è anche il fatto che nelle biblioteche si accumulino testi di matematica greca astronomia ecc…
La nascita di questo movimento si sposa con il proto-rinascimento e con la rivoluzione della stampa che rende possibile la diffusione di vecchi e nuovi testi, questo fa si che nell'arco di un secolo (1450 e 1575) diventino disponibili a stampa l'intero corpus della matematica greca di cui disponiamo noi oggi, e non solo ma si comincia anche un lavoro di riappropriazione di questa matematica che si basa anche su un pubblico molto più vasto del precedente. Gli stessi ambienti della cultura dell'abaco sono ambienti molto sensibili a questo nuovo tipo di matematica

Niccolò Tartaglia

Viene da una famiglia poverissima, il padre faceva il riders. Probabilmente era anche orfano di padre, in quanto quando nel 1507 alla sede di Brescia i francesi irrompono nella chiesa e ammazzano tutti quelli che ci sono, in particolare danno una sciabolata a tartaglia che gli crea un grave danno nella faccia e la madre cerca di curarlo leccandolo (non avevano soldi per curarsi, facevano un po' come fanno i cani) da questo eventi Niccolò Tartaglia rimase balbuziente, da cui il cognome. Poi va alla scuola d'abaco, ma non frequenta fino alla fine perché non ha soldi e il maestro si fa pagare , quindi continua gli studi autonomamente, ottiene successo e ottiene anche una cattedra come maestro d'abaco. Successivamente si sposta a Venezia dove entra in contatto con importanti mercanti, tra cui Manuzio. Egli è il diffusore del carattere corsivo e del logo.
Tartaglia essendo a Venezia deve accreditarsi anche come umanista, da cui scrive in latino una traduzione di Euclide in modo da accreditarsi anche come bravo umanista. Quindi lui alla fine si è fatto una fama come risolutore di equazioni di 3° grado ma anche come umanista. Nel corso del '500 si crea questo intreccio tra quello che è la cultura dell'abaco (che viene dalla matematica araba, pratiche degli artisti dei mercanti) e il ritorno della matematica Greca. Tartaglia in una sua parafrasi dei Galleggianti cerca di utilizzare la teoria di Archimede su una sua idea pratica per sollevare una nave affondata:



Si cerca di accostare questa "nuova matematica antica" in contesti pratici/abachisti. Quello che succederà nel corso del '500 sarà anche il processo inverso, ovvero di come i problemi posti dalla matematica abachista e dal recupero della matematica classica porteranno a una fusione di questi due punti di vista che darà vita a qualcosa di completamente nuovo.

Il tipo di matematica che si impara nelle scuole d'abaco è una matematica in cui hai molta più libertà, nonostante sia "meno" evoluta della matematica Greca di Archimede e Euclide, inoltre quasi tutte le città dell'Italia centro settentrionale hanno le loro scuole d'abaco, quindi abbiamo anche molti più "matematici" di quanto non ce ne fossero nel passato.

LEZIONE 18→ 23-11-2020

Edizione critica: attenzione ai testi corrotti!

Per anni si è creduto che la proposizione 6 della quadratura della parabola fosse molto importante in quanto ci avrebbe fornito importanti spunti per capire cosa ne pensasse **Archimede** sull'equilibrio o sul centro di gravità, ma la parte dove si parla dell'equilibrio e del centro di gravità è una parte corrotta, e questo lo trova **Heiberg** nella sua edizione critica, per questo le Edizioni Critiche sono molto importanti. Questo lavoro di edizione critica è molto importante quindi per quello che riguarda il periodo almeno fino alla stampa.

Volta scorsa:

Si è accennato alla storia dell'algebra, ma ci sono due fatti fondamentali:

1. Invenzione della stampa con ruolo cruciale per la diffusione della cultura scientifica
2. Umanesimo e la sua ricerca di ricostruzione del sapere antico, questa ricostruzione non è una cosa archeologica o ammuffita. Il riappropriarsi del mondo classico porta a una reinterpretazione del mondo classico stesso. Ad esempio Machiavelli, e la sua idea del "fine giustifica i mezzi" è nata proprio dalla rilettura del mondo classico

Stampa

La stampa matematica inizia con il recupero della tradizione del XII e XIII secolo e della tradizione dell'abaco. La prima stampa importante è

1. **l'Elementa geometriae** di **Euclide** fatta da **Campano** e stampata nel **1482** a Venezia **(Erasmo Ratdolt)**
2. **l'Euclide** di **Tartaglia** del **1543**,
3. **l'Archimede** di **Guglielmo**.
4. Nel **1518/1519** viene stampato il **Teodosio** nella traduzione di **Platone da Tivoli**
5. Nel **1494** quando **Luca Pacioli** stampa la **Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita** . Questa è una raccolta di testi che lui presenta come suoi ma in realtà sono ripresi da trattati d'abaco medievali, da Euclide.

Questi esempi ci dicono che la stampa matematica va verso il recupero delle fonti classiche attraverso la tradizione arabo latina che era cominciata nel XII XIII secolo. Quando si comincia a tradurre dal Greco ad esempio nel **1505** quando **Bartolomeo Zamberti** pubblica una opera di Euclide, e poi nel **1537** quando viene pubblicata una traduzione dei primi 4 libri di Apollonio, si tratta di cose imperfette. La fine del '400 e la prima metà del '500 sono dedicate da una parte al recupero della tradizione classica, e dall'altra l'inizio di una fase nuova, ovvero nuove traduzioni dirette dal greco come ad esempio Zamberti e **Memmo**, che anche se sono ancora immature segnano l'ingresso sul nuovo mercato matematico, e sulla nuova comunità di studiosi, opere nuove come nuove traduzioni di Euclide e Apollonio. L'altro aspetto dell'umanesimo e della stampa è il fatto che l'umanesimo ha reso disponibili una serie di manoscritti greci, così nel **1533** **Simon Gyraneus** pubblica il **testo greco di Euclide,** oppure nel **1544** a Basilea esce **Archimede Editio Princeps** greco latina. Dietro a queste attività c'è il lavoro degli umanisti, in particolare dietro la pubblicazione di Archimede c'è uno dei personaggi più importanti della storia della matematica che è **Giovanni Regiomontano** (Johannes Müller von Königsberg) (morto nel 1476). Questi era un giovane molto dotato, laureatosi a 15 anni va a Vienna a lavorare con un astronomo che era uno degli immediati predecessori di Copernico. Regiomontano verrà in Italia a seguito del **cardinale Bessarione**, si impadronirà molto bene del greco e scriverà dei trattati di matematica nel campo dell'algebra , trigonometria ecc.. la cosa più importante è che dopo aver viaggiato in molti posti d'Europa e accumulati abbastanza soldi, torna in Konigsberg (in Francia) e nel 1470 impianta una tipografia, egli si rende conto dell'importanza di questo nuovo strumento. La prima cosa che fa è pubblicare un volantino pubblicitario, questo è diviso in due parti:

1. opere altrui
2. I propria

Nella parte 1 si ritrovano tutti i matematici che lui ha potuto studiare sotto la guida Bessarione. Giovanni alla sua morte lascia degli allievi che successivamente riprenderanno la sua tradizione e l'Archimede che esce da Basilea è la traduzione di **Jacopo di San Cassiano** che lui ha avuto da Bessarione e che ha corretto. Nella prima metà del secolo,i risultati dell'umanesimo, i tesori accumulati nelle biblioteche e il nuovo strumento della stampa fa sì che presto è disponibile quasi tutto il corpus della matematica greca.

La stampa che effetto ha sulla matematica dell'abaco del XII-XV secolo?

1. La stampa ha un effetto micidiale sulla tradizione abachista, il mondo della cultura dell'abaco sarà obliterato dalla stampa (è un processo che durerà decine di anni). Questo perché non c'è più bisogno di andare nelle scuole d'abaco per imparare, ora ci sono i libri, si può imparare "autonomamente". Nel corso del '500 cambia radicalmente la struttura dell'insegnamento. Non dobbiamo dimenticare che il '500 è un secolo di profondi cambiamenti, vedi scoperta dell'America e tutto quello che porta dietro: inflazione, sconvolgimenti sociali e altro.
2. La diffusione di un nuovo modello di matematica che avviene sempre attraverso la stampa ovvero il recupero della matematica classica.
3. L'altro grande evento è la riforma protestante che porterà a guerre e lacerazioni e ridisegnare la carta d'Europa fino alla fine della guerra dei trent'anni (1648) tale riforma a sua volta avrà la risposta della riforma cattolica o controriforma, e queste due riforme cambiano le carte in tavola dell'insegnamento.

Nel campo cattolico si vengono a formare ordini religiosi che si dedicano all'insegnamento tra cui i Gesuiti fondati da un ex militare spagnolo Ignazio di Loyola (compagnia è un termine militare). Questo è un ordine alle dirette dipendenze del papa. Lo scopo della compagnia (dopo alcune esitazioni) è quello di impadronirsi dell'educazione dell'elite. In pochi anni in tutta Europa ma anche in tutto il mondo si viene a creare una rete di collegi destinati ai gesuiti stessi e anche per la formazione di queste classi di elitè. Il primo è il collegio romano, in questi collegi viene fornita un'educazione classica, tutto dentro l'atrio dei paletti messi a punto dalla controriforma. Ma dentro questo atrio si ha un forte sviluppo dell'insegnamento scientifico. In particolare un personaggio importante è **Cristoforo Clavio**, o meglio Christoph Clavius

(1538-1612), il quale diventerà il matematico del collegio romano, che in questo periodo la chiesa era impegnata nella riforma del calendario (il calendario gregoriano, dal nome di papa Gregorio XIII, che lo promulgò nel 1582). Prima del calendario Gregoriano veniva usato quello Giuliano che prevede una lunghezza dell'anno piuttosto imprecisa quindi portava a delle incongruenze sulla data della pasqua (l'equinozio di primavera si spostava sempre più indietro e la pasqua è collegata a questo) e su altri aspetti dogmatici, questa incongruenza era stata risolta da un matematico calabrese che però era morto prima del compimento del calendario, l'idea di tale matematico era di considerare bisestili solo 1 secolo su 4, quindi nel 1582 papa Gregorio XIII promulga la bolla di riforma del calendario, che però i protestanti non accettarono, e quindi c'è da difendere questa cosa, anche dai cattolici (alcuni cattolici non accettarono). Cristoforo Clavio che era stato immesso nel consiglio per promulgare il calendario diventa il matematico di santa romana chiesa, ovvero colui che difende la riforma più importante che riguarda tutta la cristianità (è collegata alla pasqua). Clavio diventa molto famoso e questo facilita il suo lavoro che è di divulgazione. Egli pubblicherà un Euclide ripreso da un testo francese con dei commenti. Ci sarà una edizione del **1572, 1582, 1603** intervallate poi da varie edizioni pirata fino a quella del **1611-1612** a Magonza, via via che fa le nuove edizioni aggiunge del materiale: si hanno dimostrazioni e commenti che rimandano alla matematica antica che è risolta e sta risorgendo in questi anni. Diventa una sorta di manuale per il discente(discepolo) che voglia approfondire la materia. Lo stesso discorso lo si può fare per il commento alla **Sfera** di **Sacrobosco** (era un matematico) noto anche come John Hollywood, era un testo di astronomia molto elementare con diversi errori. Clavio via via in questa opera va aggiungendo tutte le novità astronomiche a tal punto alla fine della sua vita lui aggiunge anche le scoperte fatte da Galileo.
Nel corso del '500 l'opera dei matematici del 500 fa si che il recupero che sta avvenendo nella matematica classica si possa diffondere a livello di insegnamento.

Riappropriazione della matematica classica divisa in tre parti:

1. Riappropriazione bruta del testo
2. Vengono fatte nuove traduzioni es **Zamberti o Memmo**
3. Accanto alle nuove traduzioni avviene anche una fase di commento, questo materiale ha bisogno di essere reinterpretato. Si ha il bisogno di avere una integrazione sul piano filologico (vedi importanza delle edizioni critiche, hai il testo cerchi i riferimenti ecc)e l'altra è una integrazione di tipo matematica: Archimede parla della parabola io

non so cosa è e da quello che dice cerco di capirlo. Si tratta di due etichette astratte, e ci sarebbe una terza: una integrazione self service (un po' come fa Tartaglia).

Integrazione sul piano filologico & integrazione di tipo matematica.

Queste due etichette possono essere attribuibili a due personaggi fondamentali che sono **Francesco Maurolico** (Messina 1494-1575) e **Federico Commandino** (Urbino 1509-1575).

Maurolico

Maurolico vive in un ambiente periferico, un po' come Archimede. Così come Siracusa non è Alessandria ma è comunque una metropoli ellenistica la stessa cosa la possiamo dire di Messina, contestualizzata al tempo di Maurolico. A Messina poco prima di Maurolico abbiamo una importantissimo scuola greca. Ma allo stesso tempo Messina non è Urbino, non è una delle grandi capitali dell'umanesimo del '400 per cui Maurolico si merita l'etichetta dell'integrazione matematica e l'altro dell'integrazione sul piano filologico. Maurolico inizia i suoi studi studiando **l'Euclide di Zamberti** e il **De expetendis et fugiendis rebus** di **Giorgio Valla** (1501.) egli era un umanista piacentino che viveva a Venezia dove aveva una scuola. In questa opera lui pubblica la traduzione di moltissimi testi greci che ha a disposizione, e piano piano va sviluppando un programma di enciclopedia matematica, che va continuamente a modificare perché avvengono continue novità nella biblioteca di Messina, per esempio

a) nel **1534** egli è convinto di aver ricostruito la misura del cerchio equilibrio dei piani, SC (per Archimede) quando esce l'editio princeps a Basilea si trova di fronte Spirali conoidi e sferoidi, scopre che L'EP che aveva ricostruito sulla base di notizie di Valla è completamente diverso dall'equilibrio dei piani di Basilea.

b) Sempre nel **1534** è arrivato a comporre tre libri di **Elementa Conicorum** ma nel **1537** esce la traduzione di **Memo,** delle coniche di Apollonio, è costretto a buttare i tre libri che aveva scritto. Questo lavoro di continuo rifacimento farà si che nel corso della sua vita pubblica pochissimo.

c) Lui nel **1534** ha un testo su cui ha iniziato a lavorare verso il 1520 ovvero il **"momentus libellus de momentis aequalibus"**, il concetto di momento lo riprende da Valla. E nel **1544** scopre l'EP 1 e 2 e si accorge che il suo lavoro è da una parte più vasto e più preciso di quello di Archimede, perché in Archimede non c'è una teoria dell'equilibrio o del momento (almeno esplicita) che Maurolico ha elaborato come peso per distanza, non c'è la trattazione del centro di gravità di figure solide, cosa che Maurolico ha fatto, quindi decide di trasformare il suo libro in **"De momenti aequalibus libri quatuor"**, in cui mantiene le sue cose aggiungendo tutta la trattazione Archimedea del centro di gravità del segmento di parabola.

d) Nel **1565** ha una idea nuova (ha quasi 70 anni) scopre il centro di gravità del paraboloide, riuscendo a capire che il centro di gravità divide l'asse come in quello del triangolo nel rapporti 1:2. Quindi aggiunge questa dimostrazione ai suoi 4 libri che ha già elaborato, lavorando continuamente in questo modo il suo lavoro difficilmente viene stampato.

e) Maurolico ha elaborato anche testi sulle coniche, sui numeri figurati, di astronomia, un trattato di costruzioni di orologi solari.

f) Egli in tutta la sua vita pubblicherà solo nel **1558** una sua revisione di **trattati di geometria sferica** di Teodosio e Menelao. Questo lavoro avrà una influenza piuttosto scarsa in quanto nella stampa arriverà poco o niente, anche se ha contatti con **Commandino, con i Gesuiti e con Cristoforo Clavio.**

g) Attraverso **Clavio** alcune sue idee troveranno un minimo di diffusione, e attraverso i gesuiti i suoi trattati sugli orologi solari (astronomia) e sul trattato di aritmetica verranno pubblicati a Venezia nel **1575.**

h) Altre opere pubblicate sono nel **1558** **Volume di sferica**: Teodosio, Menelao, Maurolico stesso.

i) E nel **1543** aveva pubblicato un suo **trattato di cosmografia** (sono dei dialoghi)

j) rimane inedito il suo Archimede e il suo Apollonio che avrebbero auto una vasta influenza se fossero stati pubblicati.

Federico Commandino

Egli nasce ad Urbino, sarà al servizio dei duchi d'Urbino, poi passa ai Farnese (famiglia molto potente) e successivamente tornerà ad Urbino dove fonderà una scuola matematica, vivendo nelle più importanti capitali umaniste. Questo influenzerà particolarmente il suo essere matematico.

LEZIONE 19→ 27-11-2020

Volta scorsa:

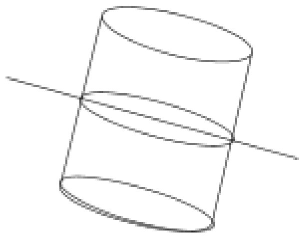
A partire dal '500 si assiste al

1) recupero del corpus della matematica greca
2) la tradizione abachista della matematica e della cultura dell'abaco (ascendenze arabe) conosce uno sviluppo notevolissimo dovuto allo studio delle equazioni di terzo e quarto grado.

Tra la metà del '400 e i primi del '500 la cultura umanistica permette il recupero del quasi intero corpus della matematica greca: sono disponibili:

1. Euclide nella traduzione di Campano e Zamberti,
2. Apollonio nella traduzione di Mammo,
3. Diofanto che viene pubblicato nel 75,
4. Archimede che esce in Basilea,
5. Commandino con varie opere esce nel '58 escono opere di Erone, Teodosio e Menelao vengono pubblicati dei rifacimenti da parte di Maurolico, viene fatta nuova traduzione di Teodosio.
6. L'unica eccezione a tutto questo è Pappo che viene pubblicato a fine secolo, tradotto da Commandino. Pappo sarà un importante punto di svolta.
7. Abbiamo sottolineato più volte anche l'importanza che ha la stampa. Questa permette un "colloquio" tra i filoni dell'abaco e delle corti umanistiche (anche se uno non è allievo di maestri d'abaco può leggersi l'Ars Magna di Cardano) e permette la creazione di comunità di matematici non più legata ad un centro, come era stato fino a prima. Un esempio molto chiaro è Francesco Maurolico che sta a Messina, che non è un importante centro umanistico quindi non ha a disposizione tantissimi libri, ma grazie alla stampa egli può studiare diverse opere che altrimenti non avrebbe potuto. Quindi Maurolico nel '28 sulla base di notizie raccolte costruisce diverse opere, tra cui Il "de momentis aequalibus…" che continuerà a svilupparlo per tutta la sua vita. Nel 65 scopre un modo per trovare il centro di gravità di un solido di rotazione. Maurolico è un esempio di approccio di integrare partendo da notizie prese "a giro" e costruendosi da zero teorie (ad esempio definisce il momento). Sempre parlando di Maurolico questa riappropriazione avviene in tre fasi:
    1) Materiale di accumulo dei testi
    2) Prima diffusione di questi testi con le traduzioni anche in latino o i greco
    3) Questa nuova comunità di matematici cercano di capire e di integrare tutta questa massa di notizie. Vedi i conoidi e sferoidi di Archimede, per capirli bisogna studiare Apollonio, così per la quadratura della parabola. Maurolico risolve questo problema inventandosi delle teorie.

DE SECTIONE CILINDRICA (Sereno)



Dato un cilindro magari obliquo e vogliamo dimostrare che la sezione di un cilindro è un'ellisse

Maurolico viene a contatto con quest'opera ben prima che la teoria delle coniche sia disponibile. Infatti, la prima volta che la teoria delle coniche sarà disponibile sarà nel 1537 di Memmo. Sulla base di **Sereno** e **Valla e sulla quadratura della parabola** uscita nel 1503, **Maurolico** produce **Elementa Conicorum**(perduto), da cui si capisce che aveva costruito parte della teoria apolloniana sulle coniche, una volta uscita quella di **Memmo** nel **1537** si rende conto che la sua è imperfetta e prende la traduzione di Memmo e la riscrive sulla base di Matematica.

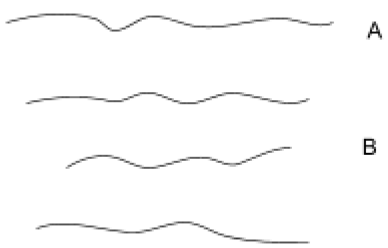
Federico Commandino (Urbino 1509-1557 Urbino)

Urbino è la capitale di un ducato che è uno dei grandi centri dell'umanesimo italiano. La ricchezza di Urbino si fonda sulla guerra. Il fondatore Federico da Montefeltro è stato educato in uno dei centri più raffinati dell'umanesimo italiano, ovvero la scuola di vittorino da Feltre che a Mantova aveva organizzato la scuola "Giocosa", per giovani meritevoli. Questa scuola è una delle più importanti tra i centri umanistici in questa scuola studia e lavora **Jacopo di San Cassiano** **(vedi Archimede).**

La giocosa è un posto dove la matematica è di grande stima. Federico è figlio di un architetto del duca il quale partecipa alla costruzione delle fortificazioni di Urbino. Si chiama Federico perché suo nonno è stato al servizio di Federico da Montefeltro (il primo duca), ed è una famiglia pienamente inserita nei meccanismi di potere del ducato. Infatti successivamente entra al servizio di Guidobaldo II e con lui può viaggiare molto e frequentare importanti centri culturali oltre Urbino. Dopo Guidobaldo, Federico passa alla famiglia Farnese, dove all'epoca papa Paolo III aveva due nipoti cardinali Alessandro e Ranuccio, in particolare Federico passerà al servizio di Ranuccio

Abbiamo a che fare con un personaggio la cui biografia è completamente diversa da quella di Maurolico.

Mentre Commandino è al servizio di Ranuccio, conosce il cardinale Marcello Cervini che era bibliotecario della biblioteca vaticana e tale cardinale è in possesso della traduzione di **Guglielmo di Moerbeke**, arrivata a lui intorno al **1550**, che contiene la traduzione dei galleggianti (nel codice B, andato perduto dopo il 1311) e in questi ambienti colti e raffinati ci si pone il problema di capire qualcosa dal testo dei galleggianti. Nel 1543 **Tartaglia** pubblica il suo Archimede, egli pubblica solo il primo libro perché si rese conto che il secondo libro era in condizioni pietose, non si poteva pubblicare. Quindi Cervini chiede a Commandino se lui è in grado di riportare all'antico splendore il suo testo. Di fronte a questo compito, Commandino si mette a studiare più matematica greca possibile, per fare questo va a Venezia dove chiede in prestito un Archimede e un Apollonio, vuole andare affondo su questi Galleggianti. Nel **1558** dopo numerosi studi, pubblica gli **"Archimedis opera non nulla"** ci sono tutte le opere che non hanno il commento di Eutocio ovvero Conoidi e sferoidi, spirali, quadratura della parabola e misura del cerchio, tutto questo con commento:



Quando lui ha qualcosa da dire scrive accanto al testo A, B cioè commenti.
e poi alla fine del libro c'è il luogo in cui lui fa il commento al luogo A , B e così via

Questa è un'opera concepita in maniera unica, ad esempio nella misura del cerchio (anche se la prima parte è difettosa, che si capisce se si sa la 12.2 di Euclide), nella terza parte dove parla delπ o meglio parla del rapporto tra circonferenza e diametro e cioè : $3\frac{10}{71} < c:d < 3\frac{1}{7}$. Questo testo in tutta la tradizione greca è pieno di errori perché Archimede per determinare questa cosa calcola il perimetro prima di un

1. esagono (un esagono ha il perimetro p=6.r(raggio) e il diametro d=2.r → $\frac{p}{d} = \frac{6r}{2r} = 3$)
2. dodecagono
3. ventiquattragono
4. e così via raddoppia ogni volta fino ad arrivare a 96

Per fare il calcolo del perimetro deve fare calcoli numerici molto complicati e noi sappiamo che i Greci avevano un sistema numerico basato sulle lettere dell'alfabeto. Poi con sistemi di apici si possono avere le migliaia fino ad arrivare a 10^8. Questo sistema ha il difetto che i numeri si confondono con le lettere e quindi ci sono tanti errori di copiatura. Ora la revisione che Commandino fa è il primo testo pubblicato che non contenga neanche un numero sbagliato. è la restituzione del testo greco senza errori. Questa è la

filologia cioè integrare tutta la roba greca che ci è arrivata ricomponendola con gli strumenti adatti.
La differenza con Maurolico è evidente.Ad esempio nella misura del cerchio Maurolico da 3 proposizioni ne fa 12 allargando tutta la descrizione del testo e aggiungendo altre cose. Oppure anche Regiomontano nelle sue opere giovanili era giunto a trovare la dimostrazione corretta di questo risultato ma quando ha a che fare con la tradizione di Cassano vedendo tutte quelle incongruenze lascia perdere il testo.
Quindi la **misura del cerchio** Commandino la pubblica usando numeri arabi-indiani e rimuovendo l'ambiguità tra lettere e numeri data dal sistema numerico greco. Sulla stessa scia di questo nel **1566** pubblica **le Coniche di Apollonio insieme a Sereno, commento di Eutocio e i lemmi di Pappo nel 7° libro della Collezione.**
Al di là di questo, l'opera di Commandino è molto importante perché rende disponibili commentati il corpus della matematica antica, oltre a questo Commandino pubblicherà una sua **traduzione di Euclide**(1572)tradotta poi in Italiano (1574) pubblicherà il **De Analemma di Tolomeo** un testo sulla proiezione stereografica della sfera, preparerà **una edizione sulla collezione di Pappo** anche se morirà prima di poterla pubblicare verrà pubblicata nel 1589. Pubblicherà anche sue opere originali, tra cui un **trattato di prospettiva** che avrà una notevole influenza su **Guidubaldo dal Monte** (suo allievo e grande esponente della scuola di Urbino), e poi **pneumatica di Erone** (Le macchine a vapore dell'antichità)

Quando Ranuccio muore nel 66, Federico torna a Urbino e diventa precettore dell'erede al trono del ducato Francesco Maria II per il quale traduce Euclide, grazie all'appoggio del duca impianterà una tipografia a casa sua e dalla tipografia stessa uscirà Euclide, poi muore nel 75. Ma intorno a Commandino si forma una vera e proprio scuola di cui si ricorda un suo allievo **Guidubaldo dal Monte** importante sul campo della meccanica e sul campo della prospettiva. Ci sarà poi una terza generazione della scuola di Urbino (alcuni esponenti sono Baldi e Oddi).

Commandino pubblica anche un **trattato sugli orologi solari.** Sono importanti in quanto cominciano ad andare di moda gli orologi meccanici che devono essere regolati, perché perdono molto (5 minuti al giorno) e qui intervengono gli orologi solari.
Inoltre cosa importante è che si interessa a opere della tradizione abachista, ha intenzione di pubblicare un'**edizione commentata della practica geometriae di Leonardo Pisano.**

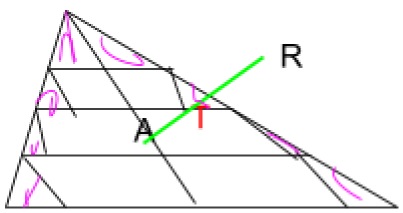
Studia anche algebra, **problemi relativi al X libro di Euclide** (grandezze incommensurabili).

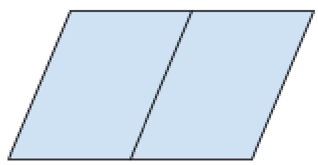
Il contributo più importante è in due opere che ha pubblicato nel **1565**: una i **Galleggianti** da lui rivisti, prende il testo di Guglielmo e lo integra in quanto c'erano molte incongruenze. Il secondo libro era molto disordinato, in tale libro, nella proposizione 2: il centro di gravità di un paraboloide divide l'asse nel rapporto 1:2, Commandino si rende conto che questa proposizione non è dimostrata, va dimostrata. Quindi accanto ai Galleggianti di Guglielmo pubblica **"liber de centro gravitatis solidorum"**, in cui nella lettera di dedica a Ranuccio o Alessandro, dice che non è possibile immaginarsi che Archimede abbia detto qualcosa senza dimostrarlo. Bisogna conoscere qualcosa sul centro di gravità dei solidi, da qui si viene a creare una nuova teoria che gli antichi avevano ma noi non abbiamo, questo è il primo esempio in cui il ritrovamento di opere antiche porta allo sviluppo di qualcosa di nuovo.

Materiali da cui Commandino può partire sono EP I proposizione 13, EP II proposizione 4

Nella proposizione 13:

Archimede dimostra che dato un triangolo il suo centro di gravità sta sulla mediana.
Lui approssima il triangolo con dei parallelogrammi. Nelle proposizioni precedenti ha dimostrato che il centro di gravità del parallelogramma sta sulla mediana(la mediana è una retta che congiunge i punti di mezzo di due lati opposti.) Quindi il punto di mezzo A di questa figura sta sulla mediana.





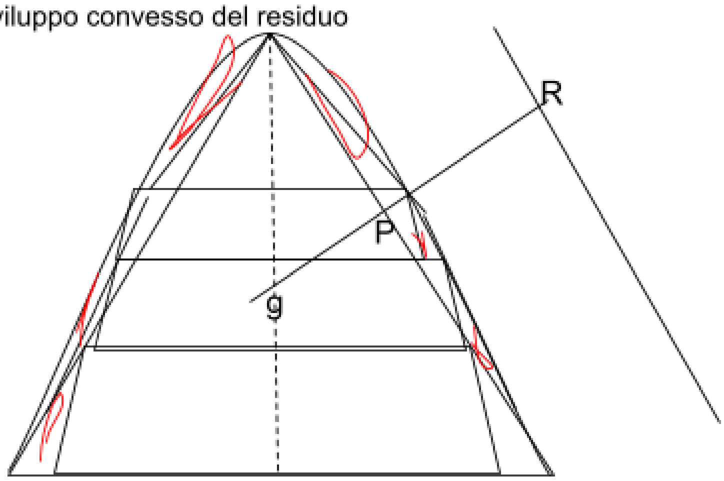
Supponiamo per assurdo che il centro di gravità del triangolo non stia sulla mediana ma fuori nel punto T. Nella proposizione 8 lui ha dimostrato che se tu conosci il centro di gravita del tutto e il centro di gravità di una parte allora il centro di gravità dell'altra parte sta sulla congiungente il centro di gravità del tutto e il centro di gravità della parte opposta rispetto al centro di gravità del tutto. Quindi il centro di gravità del residuo R(in rosa) apparterrà alla retta at(in verde) in modo tale che at:tr= R: approssimante(figura fatta di parallelogrammi).

Via via approssimando il residuo tende a zero e l'approssimante tende al triangolo. Quindi il rapporto R/Approssimante tende a zero. Ma t è fisso e a si muove sulla retta quindi at è una quantità limitata non può andare a infinito →

at tende a 0 e tr tende a infinito. Quindi approssimando sufficientemente il nostro punto R cadrà fuori dal triangolo.

Un ragionamento analogo lo fa nel 2° libro prop 4

considera come approssimanti quel poligono fatto così: da un triangolo in cima e da tanti trapezi. Nel 1° libro ha dimostrato che il centro di gravità del triangolo sta sulla mediana e il centro di gravità del trapezio pure e quindi ripetendo il ragionamento visto se uno vuole dimostrare che il centro di gravità del segmento della parabola sta sull'asse basterà fare lo stesso ragionamento. Considero il Residuo, considero il centro di gravità della parabola P e il centro di gravità dell approssimante che sta sull asse (g). Allora il centro di gravità del residuo cascherà fuori cioè non cascherà nell'inviluppo convesso del residuo



Cioè alla fine andrà a dimostrare che R lo posso mandare in un semipiano che sta oltre a una parallela alla mediana

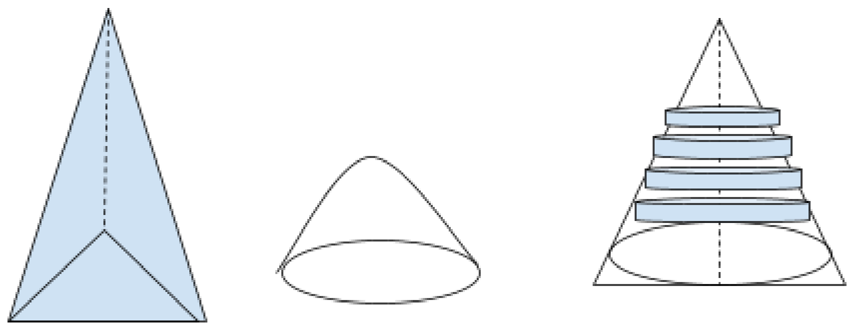
Commandino parte da queste due proposizioni.

Come si può applicare questo tipo di idea in un solido?

Per applicarla a un solido ho bisogno di approssimare un solido:

Se ho una piramide a base triangolare l'approssimerò con dei prismi triangolari, poi dimostrare che il centro di gravità di un prisma sta a metà della congiungente delle facce, poi se ho due solidi il centro di gravità sta sulla congiungente dei centri di gravità. Potremo dopo fare il ragionamento che lui fa per il triangolo.

se ho un cono anziché i prismi prenderò i cilindri



se ho ellissoide o paraboloide ho bisogno di un teorema di approssimazione che mi viene dato dalla prop 19 di conoidi e sferoidi in cui dimostra che si possono inscrivere e circoscrivere a un conoide o a un ellissoide il cui segmento non sia maggiore della metà dell'ellissoide figure fatte di cilindri in modo tale che

C(circoscritta)-I(inscritta) < E(grandezza piccola a piacere)

Commandino usa questo lemma per l'inserimento di Sfera o per l'emisfero si accorge che la stessa dimostrazione può valere per tutte le altre figure. Qui c'è un punto importante che rappresenta il primo distacco che una certa dimostrazione si applica a tutta una serie di figure. Con Luca Valerio(40 anni dopo) abbiamo un salto definitivo da questo approccio classico.

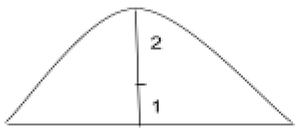
LEZIONE 20→ 30-11-2020

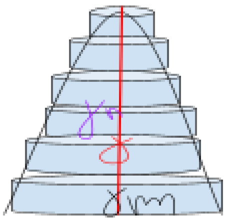
volta scorsa

Volta scorsa abbiamo visto il fenomeno del ritorno dei grandi classici. Questa matematica deve essere integrata e dominata, per capirla tutta. Sono presenti due o più strade:

1) integrazione matematica (Maurolico)
2) integrazione filologica (Commando).

Commandino pubblica una serie di opere, e questo ha un'importanza enorme perché rende disponibili sul mercato matematico una grande quantità di testi commentati che si prestano a essere studiati, e vanno oltre il testo stesso (in quanto sono commentati e comprensibili molto meglio).
Commandino ha una importanza particolare perché oltre questo ruolo di diffusione della matematica classica, egli è il primo a pubblicare un lavoro originale in cui cerca di riprendere la tradizione della matematica antica. Dovendo cercare di riportare alla chiarezza originaria il testo originale di Archimede (sotto incarico di Marcello Cervini), non solo si studia Archimede e Apollonio, ma rendendosi conto che è necessaria una teoria dei centri di gravità dei solidi, pubblica un libretto intitolato **"Liber de centro gravitatis solidorum"** **(1565),** in cui dice che non è concepibile che Archimede possa dire qualcosa senza dimostrarlo, quindi cerca di ricostruire una teoria adeguata per giustificare tale risultato. Per fare questo si ispira ai lavori di Archimede.
Per quanto riguarda invece il secondo libro fa una cosa simile. Commandino si rende conto che tale ragionamento vale in entrambi i casi, quindi per il centro di gravità di altre figure basta trovare degli approssimanti giusti.
Dato un paraboloide di rotazione o conoide parabolico vuole dimostrare che il centro di gravità sta nel punto individuato da Archimede ovvero sta nell'asse nel rapporto 1:2. Comincia col dimostrare che se tu hai una figura fatta da cilindri circoscritti e gamma è il centro di gravità del paraboloide si può costruire una figura fatta di cilindri inscritti tale che la differenza tra gamma e gamma n sia piccola a piacere- l'ho scritto in maniera anacronistico. Commandino ha scritto gamma n perché si può dare per certo che il centro di gravità della figura circoscritta (gamma n) stia sopra il centro di gravità del paraboloide (gamma). Questa cosa non è scontata. Poi dimostra anche che si può costruire una figura fatta di cilindri il cui centro di gravità disti da quello del paraboloide per una piccola quantità





$|\gamma_n - \gamma| < \varepsilon$ $\quad$ $\gamma - \gamma_m < \varepsilon$

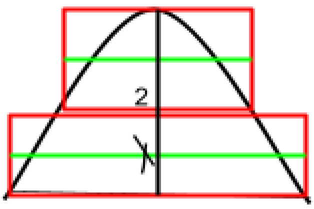
Questa cosa non è scontata perché si può dimostrare che

γn *sta sopra* γ *e* γm *sta sotto* γ

γn *centro di gravità approssimante esterno e* γm *centro di gravità approssimante interno*

Nel nostro linguaggio si ricava che la successione dei centri di gravità delle figure circoscritte e inscritte converge al centro di gravità del paraboloide.
Poi fa un ragionamento buffo.

Dato il nostro paraboloide consideriamo il punto lambda che divide l'asse nel rapporto 1:2. Commandino vuole dimostrare che ogni volta che si passa da una divisione in due(rosso) a una divisione in 4(rosso+verde) i centri di gravità dell'approssimante esterno e interno si avvicinano al punto lambda e questo succederà ogni volta che si raddoppia



$\Gamma 2 - \gamma > \Gamma 4 - \gamma \;\; e \;\; \gamma - \gamma 2 > \gamma - \gamma 4$ e cioè $\Gamma_{2^{n+1}} - \gamma > \Gamma - \gamma$

Ma lui dimostra il caso particolare e non quello generale
Il secondo merito di quest'opera sta nei difetti, lui lascia il problema aperto.
Quindi con Commandino si apre il filone di ricerca di determinare i centri di gravità delle figure studiate da Archimede. Questo sarà un problema che interesserà molti matematici negli ultimi anni del '500 tra cui **Cristoforo Clavio e Galileo** (sceglie il problema di determinare il centro di gravità dei solidi per affermarsi). Ma colui che darà un contributo chiave introducendo un nuovo punto di vista sarà un allievo di Clavio, **Luca Valerio** 1553-1618.

Luca Valerio

Entra a 17 anni nella compagnia di Gesù e si contraddistingue per le sue capacità nel campo della logica del greco e della matematica. È al servizio di alcune potenti famiglie romane come i Colonna o gli Aldobrandini e in particolare Ippolito Aldobrandini diventa Papa Clemente VIII e grazie a lui, Valerio diventa lettore alla Sapienza di Roma, prima di Greco e di Matematica e poi di filosofia morale e matematica e manterrà il suo posto fino alla morte.

Approccio di Valerio

(Opera **Subtitium indagationes liber primus seu quadratura circuli et aliorum curvilineorum"** **(1558)** è un testo immaturo. La cosa importante è la parte evidenziata. Valerio vuole quadrare il cerchio usando il filo a piombo. Valerio per arrivare alla quadratura del cerchio (molto importante per i matematici di quel tempo) inventa un metodo che gli permette di quadrare qualunque figura, questa è la cosa importante.

Lui la nasconde questa opera. Galileo glielo chiede ma lui risponde di non saperne niente. Attenzione: le figure non sono proprio tutte, sono quelle che hanno determinate proprietà: frontiera convessa/concava.

Ragionamento:

Uso il filo a piombo, posso quadrare qualunque figura, non proprio tutte, solo quelle con determinate proprietà e quindi studio quelle con le proprietà interessate.

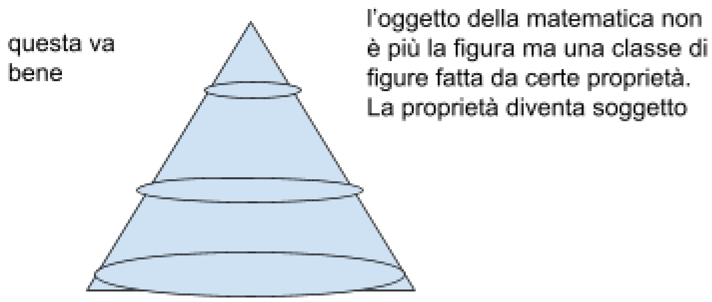
De centro gravitatis solidorum libri tres

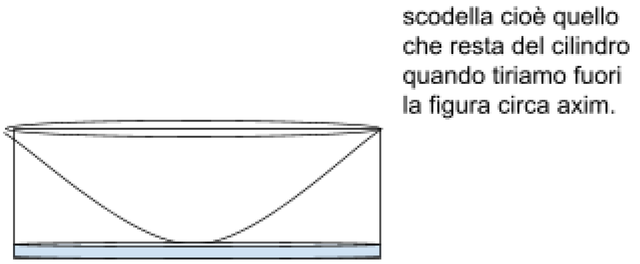
Questo tipo di ispirazione lo si vede nella sua opera più importante: **"I de centro gravitatis solidorum libri tres"** pubblicato a Roma nel **1604.**

Valerio invece di partire dalle singole figure che hanno una certa proprietà, prende quella certa proprietà e la trasforma nella definizione di una classe di figure, quale è tale proprietà? La proprietà interessata è quella che ci permette di dimostrare la proposizione 19 di Archimede. **Mi serve che le sezioni vadano uniformemente decrescendo dal basso verso l'alto**. Così nella proposizione 6 del primo libro considera le figure piane e le figure solide e dimostra che le figure piane che godono della proprietà detta(che la figura digrada uniformemente) possono essere approssimate con figure piane la cui differenza tra esterno e interno sia piccola a piacere, una volta identificata questa classe di figure che lui chiama figure digradanti attorno ad un'asse (per le solide) o attorno ad un diametro (per le piane), ha il lemma di approssimazione e il teorema che di dice che il centro stia sull'asse. **Figurae circa axim in partem deficentes**. **L'innovazione è il fatto che l'oggetto non sia più la figura ma la proprietà, una classe di figure.**

Inoltre in questo modo Valerio riesce a ricoprire una gamma di figure anche oltre a quelle che studia Archimede , in quanto vanno bene anche le figure concave. Archimede studiava solo figure convesse.

In I.22
Dimostra che ogni figura digradante(in termini moderni vuol dire che la funzione è monotona)(circa axim in partem deficentes.) ha il centro di gravità sull'asse.



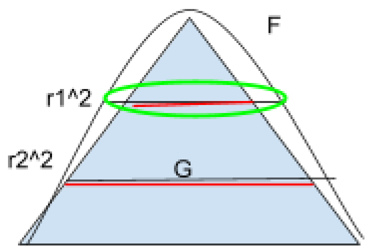


Valerio fa una grande rivoluzione, ma tuttavia resta sostanzialmente dentro quel mondo (il mondo greco), non arriva a pensare che vanno bene tutte le figure, pensa che vadano bene solo le figure di rotazione.

Cosa fa Valerio di Nuovo?

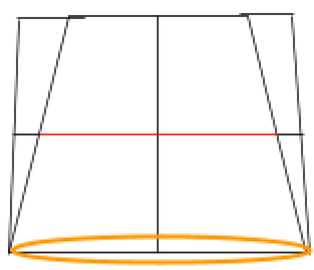
Trova il centro di gravità di molte figure, altra cosa importante è che in questa sua tendenza alla generalizzazione presenta una proposizione in cui condensa le varie tecniche usate nell'antichità e in qualche modo **è l'inventore del metodo di esaustione**. (funzione con doppia riduzione ad assurdo). Lui dimostra che :
II libro proposizione 1,2,3,
date due grandezze A e X di cui X è ignota e A è nota e vogliamo studiare il rapporto X:A. Se noi abbiamo delle grandezze E e F che approssimano rispettivamente X e A e sai che E:F stanno in un rapporto dato → anche X: A sono in quel rapporto.
Questo è un risultato notevole perchè da adesso tutte le volte che mi trovo in una situazione esaustiva non devo ricostruire tutta la riduzione ad assurdo come nella XII.2 di Euclide. Rispetto ad Euclide e Archimede lo fa in generale:
Valerio dimostra libro II prop 32:

supponiamo di avere due figure(solide o piane o una e una) F,G (circa axim) digradanti circa un medesimo asse o diametro + proprietà X tale che se prendiamo due sezioni abbiamo che la sezione 1 di F e la sezione 2 di G siano proporzionali cioè **S1(F):S2(F) = S1(G):S2(G) → centro di gravità di F= centro di gravità di G. E' un teorema generale di riduzione di centro di gravità di una figura a un'altra figura che si conosce.** L'esempio che sta dietro è che questo è il paraboloide.
Supponiamo che F sia un paraboloide e G un triangolo. questa proprietà è soddisfatta perché le sezioni di F sono cerchi(in verde) e i cerchi stanno fra loro come i quadrati dei raggi cioè→
S1(F):S2(F) = $r_1^2 : r_2^2$
Ma questa è una parabola e r1 e r2 sono le ordinate della parabola e le ordinate stanno fra loro come le ascisse
S1(F):S2(F) = $r_1^2 : r_2^2 = x1 : x2$
Ma x1 e x2 stanno fra loro come i due segmenti in rosso, perchè questi due sono triangoli simili ovvero come le sezioni di G
S1(F):S2(F) = $r_1^2 : r_2^2 = x1 : x2 = S1(G) : S2(G)$
Quindi la dimostrazione che il centro di gravità del paraboloide coincide con quello del triangolo ammessa la proposizione 32 del libro II è immediata e cioè il centro di gravità del paraboloide divide l'asse nel rapporto 1:2.



Inoltre questo affermerà la veridicità del problema che aveva esasperato Commandino e cioè che il centro di gravità del tronco di paraboloide è uguale a quello del trapezio. Prendo il tronco (in giallo)

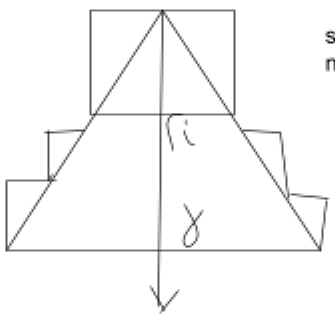
il centro di gravità del tronco di paraboloide dividerà
l'asse come lo divide il centro di gravità del trapezio



Lo aveva già fatto Maurolico è possibile che ha copiato da lui? No
Valerio stabilisce qualcosa che nessuno prima di lui aveva fatto:

1) determinare usando la prop 32 il centro di gravità dell'emisfero, del segmento di sfera e dell'ellissoide
2) il teorema è generale che vale per quasi tutte le figure (circa axim o circa diametro)di rotazione.

La dimostrazione che Valerio fa si basa sul fatto che se io prendo degli approssimanti delle figure F e G i centri di gravità degli approssimanti devono comportarsi allo stesso modo perché gli approssimanti li prendo dalle sezioni e quindi siccome le sezioni di F e G sono proporzionali allora la successione dei centri di gravità degli approssimanti di F e G converge nello stesso punto
Quello di cui Valerio ha bisogno è di dimostrare che i centri di gravità degli approssimanti a delle figure circa axim e diametro convergono al centro di gravità della figura in questione.
Questo lo aveva fatto Commandino nel paraboloide e anche Maurolico però Commandino aveva dei limiti nel suo approccio Maurolico limiti non ne aveva se non il fatto che faceva un calcolo esplicito. Cioè lui diceva che ogni volta che raddoppiavo la divisione il centro di gravità delle figure si avvicinava di ⅙ dell'altezza del cilindro approssimante.
Valerio è in un caso più difficile perché non ha nessuna proprietà delle figure che vuole studiare. Comincia dal II.29 e II.30 e II.31
II.30
Data una figura circa axim/diametro (triangolo) digradante con il centro di gravità γ allora il centro di gravità delle figure approssimanti dall'esterno Γi sta sempre sopra γ

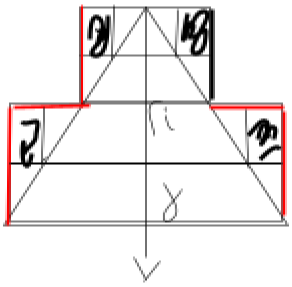


se oriento l'asse in questo modo
noi diremmo che

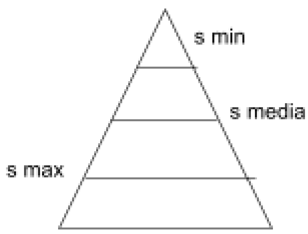
$\Gamma i < \gamma$

e noi diremmo che γ è *una limitazione* superiore per Γi
Che è quello che Commandino non aveva dimostrato. Valerio lo dice nella prefazione.
II.29
Dimostra che la successione è monotona cioè che se io passa da $\Gamma i \rightarrow \Gamma 2i$
$\Gamma 2i > \Gamma i$ Cioè se io raddoppio tutto quanto
II.31
Dimostra che Γi è un estremo superiore di γ
La prop 32 deriva da queste.

In particolare il problema di Commandino è che non si rende conto che la dimostrazione che lui fa per il paraboloide è in realtà generale l'unica cosa che non dimostra è che γn sta sopra γ. Quindi Valerio deve far vedere questa ultima cosa. Come fa?
Noi abbiamo la nostra figura e vorremmo far vedere che ogni volta che raddoppio il centro di gravità scende. Basta far vedere che quando passo da una divisione a quella doppia il cdg scende. Devo far vedere che quando io passo dalla divisione rossa a quella nera quello che tolgo di sotto è < di quello che ho tolto di sopra. Cioè perché scenda il cdg quando passo al nero vuol dire che levo più di sotto che di sopra.



Quindi lui dice che se io ho una figura circa axim e la divido in 3 parti

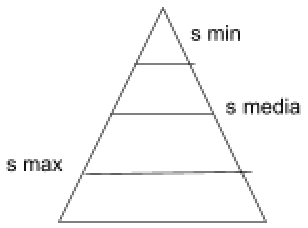


perchè succeda che il cdg scenda basta chiedere che $\frac{smin}{smedia} < \frac{smedia}{smax}$
Il teorema II-32 si applica non a tutte le figure digradanti ma a una sottoclasse di quelle li. $\frac{smin}{smedia} < \frac{smedia}{smax}$ **Questa è una condizione sufficiente ma non necessaria.**
Questo fatto è significativo, perché dà l'idea che Valerio più di cercare il centro di gravità del paraboloide, dell'iperboloide e dell'emisfero, cerchi delle dimostrazioni per figure più generali, anche se alla fine abbandona l'idea.
Lui ha inventato il metodo di esaustione come vero e proprio metodo. Vede cosa c'è di comune nelle dimostrazioni di Euclide, Archimede e le trasforma in un teorema ma lui ha un'attitudine metodologica come si vede nella II.32. **Ora abbiamo il metodo per ridurci al cdg di una figura che non conosco a uno che conosco.**

LEZIONE 21→ 04-12-2020

Volta scorsa

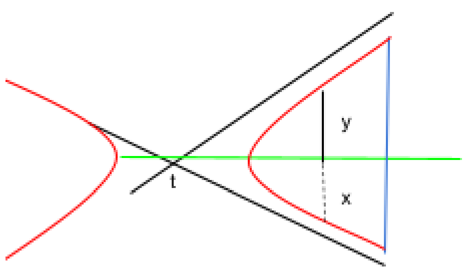
La volta scorsa abbiamo visto come Valerio ispirandosi alle opere di Commandino o forse anche Maurolico, sicuramente all'opera dell'equilibrio dei piani e conoidi e sferoidi, compie un passo decisivo che distacca la sua opera da tutta la matematica precedente. La sua ricerca ha come oggetto una proprietà, in particolare una classe di figure: quelle monotone, la cosa importante è che le sezioni vadano digradando dal basso verso l'alto. Questa è una classe di figure piuttosto vasta e con un solo teorema dimostra che tutti i solidi Archimedei hanno il centro di gravità sull'asse.
Osserviamo inoltre che Valerio nella dimostrazione del Teorema II.32 (vedi lezione scorsa) ha la necessità di limitare la classe di figure da prendere in esame. Il teorema da lui trattato non è semplicissimo a causa del linguaggio e degli strumenti che possiede inoltre deve introdurre delle ipotesi che restringono il campo di interesse. Per dimostrare il suo teorema:



ha bisogno che $\frac{smin}{smedia} < \frac{smedia}{smax}$

Queste sezioni possono essere cerchi,ellissi,segmenti a seconda della figure che stiamo trattando. Se noi abbiamo la classe di tutte le figure digradanti il suo teorema si applica a una sottoclasse M. Lui quando deve trattare di una figura precisa come l'iperboloide deve dimostrare che I(iperboloide) appartiene a M . All'inizio del III libro si accorge che le figure convesse C rientrano nella classe delle figure a cui è applicabile il teorema→ C contenuto in M. E quindi la dimostrazione dell'iperboloide è nulla perchè è chiaro che l'iperboloide è convessa. In Valerio c'è la consapevolezza che tra gli oggetti della matematica ci POSSONO essere classi di figure. Questo perché Valerio è fortemente condizionato dalla matematica cha ha a che fare.

COME TROVA IL CDG DELL'IPERBOLOIDE:



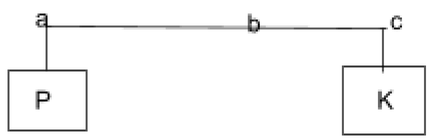
Data la nostra iperbole (rosso) la faccio ruotare attorno al diametro (verde) e

al suo asse(azzurro) e vogliamo trovare il centro di gravità.
Prendiamo una sezione dell'iperboloide in x che è proporzionale al quadrato dell' ordinata , cioè del raggio che è y.
Si(x):: y^2
Ma il quadrato di un'ordinata di un'iperbole è uguale(Secondo Apollonio)
y^2=px+qx^2 dove p è il lato retto e q= p/t dove t è il diametro
Ora questa y^2=px+qx^2   la posso scomporre in due pezzi:
1) y^2=px → Sezione di un paraboloide in x Sp(x)
2) y^2=qx^2→ Sezione di un cono in x Sk(x)
quindi la sezione dell'iperboloide in x è proporzionale a Sezione di un paraboloide in x + Sezione di un cono in x

Si(x):: Sp(x)+Sk(x)
Qui Valerio dimostra che cono, paraboloide e iperboloide sono figure per cui vale $\frac{smin}{smedia} < \frac{smedia}{smax}$

Poi posso applicare il teorema II.32 e si applica da una parte al solido iperboloide e dall'altro al paraboloide sommato con il cono cioè una figura un po' fantastica. Che figura si ottiene con P+K?
Valerio si rende conto di questa cosa infatti dopo II.32 c'è un grande corollario che spiega che può applicarsi anche alla somma di due figure.
Quindi lo usa qui e dice che il centro di gravità dell'iperboloide è uguale al centro di gravità del solido che si ottiene con la somma di un cono e di un paraboloide. Quest'ultimo si può provare.

immaginiamo di avere una bilancia in cui da una parte è appeso il paraboloide e dall'altra abbiamo il cono. Il centro di gravità del paraboloide + cono dividerà questa bilancia in un punto che sarà il centro di gravità in modo tale che ab : bc = Cono : Paraboloide. Questo rapporto si può comunque determinare



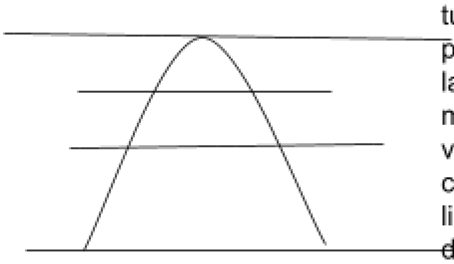
Procedure che lo portano fuori dal modus operandi della geometria greca:

1. Questo teorema è ottenuto applicando un teorema di carattere generale: da fig. ignota a fig. nota.
2. Fa intervenire in maniera NON euristica (come non fa Archimede nel Metodo con la sfera) all'interno della dimostrazione un solido impossibile, come visto prima.

Valerio a questo punto si spaventa. Il terzo libro è dedicato a ri-dimostrare il risultato sopra analizzato senza far intervenire la somma di un paraboloide e di un cono. In questa appendice lui abbandona tutto l'approccio sopra descritto, e dice che preferisce una "via più naturale" diciamo che quasi spaventato dalla sua audacia rifluisce sui metodi archimedei.

Bonaventura Cavalieri.

Egli è un matematico nato nel 1598 a Suna (forse) in Verbania (sul lago maggiore) piccola cittadina. Entra nell'ordine dei Gesuati (ordine molto più antico dei gesuiti creato nel medioevo) è appassionato di matematica, e successivamente viene mandato a Pisa. Lì insegna Benedetto Castelli, un allievo di Galileo. Castelli gli affida il compito di tenere lezioni al posto suo, vede che è in gamba e lo presenta a Galileo. Proprio in questi anni, forse influenzato da Galileo, (1620) concepisce una teoria che chiamerà **"teoria degli Indivisibili"**. Successivamente grazie all'appoggio di Galileo ottiene la cattedra di matematica a Bologna. Nel **1630** (forse) pubblica **"geometria invisibilibus nuova cadam retione promota"** (=geometria sviluppata grazie agli indivisibili con un certo metodo nuovo).
Questo nuovo metodo di Cavalieri consiste di obiettivi più generali di quelle di Valerio, che ha comunque studiato e per cui porta grande rispetto, lo descriverà come "l'Archimede dell'età nostra". La classe di figura a cui Cavalieri vuol fare riferimento è la classe di qualunque figura (è un po' tanto). Con questa classe lui prende in considerazioni anche figure con buchi, figure del tutto irregolari e bucherellate… andiamo a finire in un ambito molto complicato nel quale gli strumenti del 600 non sono sufficienti per trattare figure di questo tipo. L'idea di Cavalieri è quella di accostare alle figure altri oggetti (ad esempio da una figura puoi distaccare il suo volume, il suo peso) ed usare una specie di teoria delle proporzioni che sta prendendo sempre più piede. (lo stesso Galileo nella descrizione della legge oraria, distacca la velocità lo spazio e il tempo, viste come grandezze geometrizzate) La grandezza che vuole staccare Cavalieri è la collezione di tutte le sezioni delle figure (o tutte le linee della figura) o i suoi indivisibili, nel caso di un fig. solida sono tutti i piani.



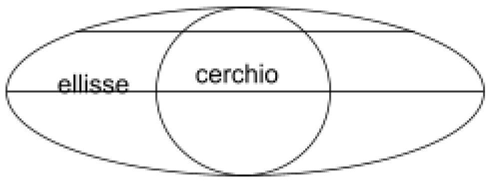
tu hai una figura la metti tra due parallele e poi fai muovere una parallela verso l'altra se la figura è piana. Se la figura è solida si mette fra due piani e fai muovere un piano verso l'altro. Tutte queste sezioni saranno chiamate prese insieme tutte le linee omnes linee della figura o i suoi indivisibili. Nel caso di una figura solida avremo tutti i piani

Problema:

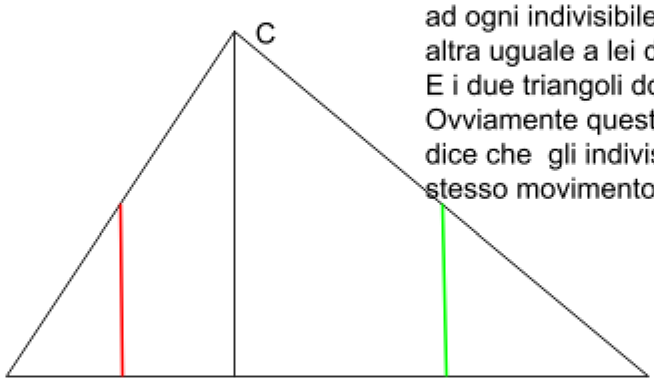
una figura non è fatta dai suoi indivisibili (una retta non è fatta di punti, è un segmento prolungabile). L'ambizione di Cavalieri sarebbe di mostrare che:

“**due figure stanno tra loro come tutte le linee della prima figura stanno a tutte le linee della seconda**”, cioè F1 : F2 = OL1 : OL2 (OL=omnes linee) in questa maniera non si afferma che il continuo sia costituito dagli indivisibili, ma si tirano fuori dal continuo i suoi divisibili. Se prendiamo un ellisse e un cerchio, tutte le linee dell’ellisse hanno un rapporto costante con tutte le linee del cerchio, quindi l’ellisse sta al cerchio come asse maggiore sta al diametro.

ellisse : cerchio = asse maggiore : diametro



Punto importante: La classe OL (collezione di tutte le linee) è tale da poter applicare ai suoi oggetti la teoria delle proporzioni?, da cui viene la seconda domanda: “cosa è un multiplo di tutte le linee della figura?” Una soluzione parziale alla prima domanda è confrontare le linee a due a due, in altre parole appoggiarsi a quello che faceva Archimede nel Metodo pur senza saperlo. Sullo sviluppo di questa teoria rimangono però molteplici interrogativi, la domanda due suscita molti dubbi. Qui Cavalieri si infila in problemi non da poco, dove i ragionamenti sono **zoppicanti**. Uno degli scogli di fronte a cui Cavalieri si arena è un teorema di questo tipo (che è costretto a usare in molte sue dimostrazioni): “se $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b1} = \frac{a_2}{a_2} = \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{\Sigma a_i}{\Sigma b_i} = \frac{a}{b}$ Questo risultato per Cavalieri è vitale in molte situazioni, ma **deve riuscire a passare dal finito all’infinito,** lo fa ma senza mai dimostrare la validità di questo passaggio. Questo assomiglia molto al lemma 11 del Metodo, hai dei rapporti che valgano sezione per sezione, vuoi che valgano tutti insieme.
Nonostante il fatto che la teoria sia fallimentare e nonostante le forti critiche venute fuori esempio quelle degli indivisibili di un triangolo :

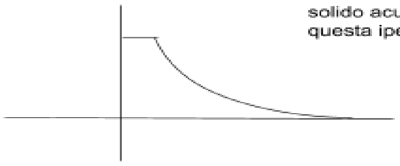


ad ogni indivisibile qui(rosso) ce ne sarà un' altra uguale a lei dall’altra parte in (verde)
E i due triangoli dovrebbero essere uguali.
Ovviamente questo non funziona e Cavalieri dice che gli indivisibili vanno presi rispetto allo stesso movimento (retto transito)

Al di là di tutto questo il metodo degli indivisibili di Cavalieri ha avuto molto successo. Questo metodo ha fatto sì che

1. si possano classificare figure simili in maniera generale,
2. ottenere risultati molto generali,
3. creare figure nuove ha dato la luce a parabole di ordine superiore (vedi primitiva di integrale)
4. studiare problemi strani cioè data una placca trovare il centro di gravità in cui il peso specifico della placca varia in maniera uniformemente accelerata cioè col quadrato della distanza e sarà una delle teorie più in voga fino alla fine del '600, sarà ripresa da Pascal, Leibniz stesso.

Il fatto importante è che in un certo senso: **"Archimede sta a Valerio come Valerio sta a Cavalieri"** questo perché Cavalieri nel 1647 (**de esercitatione matematica)** cercherà di dimostrare il suo principio del metodo degli indivisibili. Prende una figura qualsiasi e rifacendosi a quello che aveva fatto Valerio cerca di scomporla in un numero finito di parti monotone (simile Funzione monotona è integrabile). **Quindi Il recupero della geometria classica produce sì un nuovo punto di vista (Archimede, commandino/maurolico, valerio, cavalieri), però nella produzione di questo nuovo punto di vista si ha un reflusso sullo step precedente: Archimede tratta una figura alla volta, Valerio tratta classi di figure solo monotone, troppo precise (quelle digradanti) Cavalieri fa il passo più lungo della gamba e la sua teoria ricade su quella valeriana afflosciandosi si su stessa, così come quella valeriana ricade alla fine su Archimede. È come se la nuova matematica archimedea entra in un vicolo cieco.** Anche perché questi nuovi metodi si applicano a ben poche cose, il metodo degli indivisibili di Cavalieri non si applica a molto, bisogna inventarsi cose strane: placche con densità che varia in maniera uniformemente accelerata. Un allievo Castelli, altro matematico geniale (forse il più tra quelli trattati qui) **Evangelista Torricelli** (muore giovane, **1648** circa) che applicando e sviluppando i metodi di Cavalieri arriverà a sviluppare un tipo di matematica barocca scrivere **"de quadratura parabola"** dove propone 20/40 quadratura delle parabola fatte con metodi archimedei e degli indivisibili, studierà la spirale logaritmica, il solido acutissimo (solido di rotazione fatto ruotare da una iperbole).



solido acutissimo si ottiene facendo ruotare
questa iperbole che ha volume finito

il recupero della matematica archimedea produce un nuovo approccio generale della matematica , bisogna studiare classi di figure ma questo porta a un vicolo cieco. Parallelamente a questo vicolo cieco ne abbiamo un altro: diverso dalla matematica umanistica che abbiamo affrontato ultimamente, ovvero quello della matematica dell'abaco.

Matematica dell'abaco

Anche qui ci si trova di fronte a una situazione di difficile soluzione.
Sia un'equazione di terzo grado, la formula è un radicale complicato.

$x^3 + px + q = 0$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \cdot - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Il discriminante $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ di un'equazione di terzo grado può essere sia positivo che negativo, **in particolare il delta è negativo se e solo se** $x^3 + px + q = 0$ **ha tre radici reali.** È una situazione imbarazzante perché gli algebristi a partire da Cardano riescono a trovare le soluzioni, nonostante la formula risolutiva non gliele fornisca.

Cosa può essere la radice quadrata di un numero negativo? In modo che la formula risolutiva abbia sempre senso. **Il vero punto in gioco è cosa è una radice cubica?** Per loro una radice cubica ha una sola soluzione.

A questa domanda risponde un grande matematico: **Rafael Bombelli,** egli era di Bologna (nato nel 1526, morto nel 1572). Bombelli è un ingegnere idraulico, il suo lavoro lo porta nella bonifica delle paludi pontine, in ambito romano. Egli conosce Anton Maria Pazzi che insegna alla Sapienza di Roma, e gli presenta un codice di Diofanto. Bombelli ha già pubblicato: **"la parte maggiore dell'aritmetica"** (pubblicata nel **1572**) divisa in tre parte: la prima tratta dei radicali quadratici e cubici, la seconda equazioni e la terza problemi. La terza parte è tipica della tradizione abachista (talora difficili), ma dopo aver conosciuto Pazzi, si mettono a tradurre Diofanto e la terza parte la riscrive da capo sotto forma di problemi diofantei. Questi problemi sono soggetti a essere trattati con radici radicali e teoria di equazioni che ha sviluppato nel secondo libro.

Elementi importanti:

1. Fa il suo ingresso nella tradizione dell'algebra arabo abachista Diofanto. È importante perché Diofanto tratta problemi che hanno soluzioni razionali o intere. Ora si pone il problema delle soluzioni con radici con radicali ecc…
2. Il secondo elemento importante è l' applicazione dell'algebra (da Bombelli sviluppata) a problemi geometrici non senza difficoltà, si

chiama **algebra sincopata,** ovvero non è algebra con parole e basta ma è algebra anche con simboli. Per esempio per $x^3+3x=5$ lui scriverebbe (3)+3(1)→ 5

Bombelli è uno dei primi a trattare problemi che si traducono in equazioni quadratiche o biquadratiche e trovare il risultato via costruzioni geometriche

IL contributo per cui Bombelli ci è più noto è quello relativo ai **numeri complessi.** Nella formula risolutiva delle equazioni di terzo grado compare:

$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$ questa Bombelli la chiama radice cubica legata.

Nella prima parte dell'opera lui discute di come si possono sciogliere le radici cubiche legate.Già era presente in Euclide nel X libro in termini di grandezze.

$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$. Di questo si occupa il I libro.

Ad un certo punto lui dice di aver trovato altri tipi di radici cubiche legate che servono per equazioni di terzo grado, questo avviene quando la radice è negativa da cui i**ntroduce un nuovo sistema di segni**.

Dato che +.+=+ e +.-=- Per avere un qualcosa che moltiplicata per se stessa mi dia - introduce il " più da meno" e le regole con cui questi segni funzionano sono:

1) $\sigma \, x \, \sigma = -$
2) $-\sigma \;\; x \; -\sigma = -$
3) $-\sigma \;\; x \;\; \sigma = +$

Lui chiama più da meno un nuovo segno tale che moltiplicato per se stesso da meno, e deduce così tutte le nuove regole di moltiplicazione. **Bombelli introduce questo nuovo segno per dare senso al radicale negativo**. Riuscire a risolvere quella radice cubica come somma di 2 numeri complessi equivale a risolvere una equazioni di terzo grado con discriminante negativo, è un cane che si morde la coda

Anche la tradizione abachista del '500 che ha conosciuto grandi risultati si ritrova al pari della sua sorella umanista in un vicolo cieco. Come la matematica ha fatto a uscirne?

LEZIONE 22→ 07-12-2020

Volta scorsa

Abbiamo visto come "la nuova matematica antica" che si fonda sulla lettura della matematica classica: Euclide, Archimede, Apollonio Teodosio… si componga di tre caratteristiche importanti:

1. da una parte si ha il cambio dell'oggetto matematico che però diventa problematico perché si infrange la regola aurea della matematica classica
2. fatica a trovare il giusto punto di generalità (ancora troppo specifico per Commandino, troppo generale per Cavalieri)
3. l'ultima cosa sono le classi che sono scarsamente popolate di individui, gli oggetti rimangono essenzialmente quelli della matematica greca. Una volta studiati gli oggetti greci, poi questa matematica tende al barocco un eccessivo riempimento, vedi Torricelli con le 20 quadrature della parabola

Questa matematica entra in un vicolo cieco, come successe per Archimede, a causa della individualità che avevano gli oggetti nella matematica greca.
Un po' la stessa cosa succede con la matematica abachista. Vedi Bombelli.

Bombelli

Sia l'equazione $x^3+px+q=0$ abbiamo la formula risolutrice di Tartaglia-Ferrari-Cardano:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\cdot-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \quad (*)$$

questa ha vari problemi:

1) se il discriminante $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ a differenza dell'equazione di secondo grado (che non abbiamo soluzioni) abbiamo soluzioni in $\mathbb{R}$, ad esempio:
   $x^3=15x+4 \rightarrow$ 4 è soluzione perchè 64=15.4+4.
   Ma se vado a mettere queste soluzioni $x^3-15x-4=0$ in (*) il
   $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=4-\frac{15^3}{27}<0$
   Quindi la soluzione 4 da dove viene fuori?
   C'è di peggio, se considero:

$x^3+x-2=0 \rightarrow$ ha come soluzione 1 . Ma se metto questi numeri nella formula (*)mi viene fuori che $1=\sqrt[3]{1+\sqrt{1+\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{1+\frac{1}{27}}}$

Per noi le equazioni di 3° hanno 3 radici. Quando diciamo $x^3=1 \rightarrow$ per noi ci sono 3 radici di cui una è 1 e le altre due sono le radici dell'unità. Ma questo è completamente sconosciuto all'algebra abachistica

La risoluzione di equazioni di terzo grado occupa moltissimo tempo, inizia dal '300 e si sviluppa nel '400 fino a Cardano. Il tentativo di Bombelli di uscire da questa strada cercando di introdurre un “nuovo segno” (i) tale che i*i=-, **è una cosa che riesce a superare il caso irriducibile solo in certe situazioni,**

ovvero solo quando sai estrarre una radice cubica di un numero complesso, cosa che non si riesce a fare in generale (se vuoi farlo in generale ricadi nel problema di partenza), vedi esempio:

$\sqrt{a+ib} = x+iy$ Provo a risolverla. Elevo al cubo → a+ib =

$x^3 - iy^3 + 3i(x^2y) - 3(x\,y^2) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^2)$

In alcuni casi questo sistema si risolve. Per esempio

$\sqrt[3]{2+11i} =$ { 2= $x^3 + 3xy^2 = x(x^2 - 3y^2)$

{11= $y(3x^2 - y^2)$

Questo caso particolare si risolve ma in generale no

$\sqrt[3]{a+bi} =$ { a= $x^3 + 3xy^2 = x(x^2 - 3y^2)$

{b= $y(3x^2 - y^2)$

Nonostante Bombelli abbia dimostrato che in certi casi si riesce a risolvere il sistema, nel caso generale però no. Bombelli quindi nonostante porti la tradizione abachista ad alti livelli si trova in un **vicolo cieco.**

La congiunzione tra queste due tradizioni porta a una rivoluzione che culmina con **De Cartes**

Diofanto

Egli compare nella scena matematica per la prima volta nel **1575**, quando viene tradotto per la prima volta.

Oss: l'algebra si diffonde in tutta Europa grazie **all'ars magna di Cardano**

Diofanto diventa una sfida per applicare questi metodi algebrici nella aritmetica diofantea stessa, da cui nasce una diatriba che dura fino ad oggi: "Diofanto è il padre dell'algebra?", Per Bombelli sì (e gli Arabi? Perché si pensava che gli arabi fossero il padre dell'algebra). **Diofanto quindi costituisce una specie di ponte tra tradizione abachista e quella greca.**

Il secondo elemento fondamentale che si verifica verso la fine del secolo è la pubblicazione delle collezioni di Pappo.

Pappo viene tradotto in latino da **Commandino e pubblicato nel 1589**, la collezione di Pappo offre un panorama nuovo ai matematici di fine '600 inizi '500. In questo libro troviamo cose importanti quali:

1) (nel terzo libro) classificazioni di problemi in piano, solidi e problemi di linea.
2) introduzione di curve diverse dalle coniche: cissoide, concoide, quadratrice, ripresa delle spirali archimedee.
3) esposizione di Corpora testuali e in particolare Del corpus dell’analisi, qui abbiamo l’esposizione di una serie di test (non pervenuti all'occidente latino)i: i data di Euclide, Contatti, Inclinazioni luoghi piani sezione di rapporto sezione d’area sezione determinata, le coniche tutto questo di Apollonio, poi i Porismi di Euclide, luoghi solidi di Aristeo. Ed

inoltre per la gran parte di queste opere Pappo, oltre che a fornire un riassunto, fornisce anche una serie di lemmi dedicati a spiegarne punti difficili.

4) tutte queste opere si fondano sull'**approccio "efodos"**, approccio dell'analisi e della sintesi. Cenni a questo si trovavano anche in Eutocio, Archimede, Apollonio (coniche). Oltre a quello che dice Pappo nell'analisi e nella sintesi, avevano a disposizione esempi che spiegassero questo metodo. Tale metodo consiste che:

Prop 1 di Sfera e Cilindro

Data una sfera costruire un cilindro uguale a lei. Archimede dice: supponiamo di averlo già fatta mediante dei passaggi logici arriva alla tesi.
Analisi: problema già risolto e sviluppare un ragionamento che permetta di arrivare a uno dei dati del problema.
Quindi verso la fine del 500 si ha la diffusione di Diofanto. Egli come già accennato prima viene visto come ponte, come la dimostrazione che l'algebra è una disciplina matematica degna di essere studiata e coltivata.
In Pappo invece abbiamo tutta una serie di problematiche:

1. prima di tutto un aumento del vestiario matematico (altre curve da studiare)
2. l'esigenza che i problemi vadano classificati (è una classificazione abbastanza rozza)
3. una serie di sfide perché molti testi sono perduti. Per questi matematici (vedi Commandino) la sfida è di colmare questa lacuna.

Questo complesso si verrà a sbloccare grazie all'opera di **Francois Viète.**

Francois Viète 1540-1603

Questo è un periodo molto travagliato. È il periodo delle guerre di religione che avvengono in Francia. Molto famosa è la strage degli Ugonotti che erano convenuti a Parigi per le nozze del capo dei partiti ugonotti. Queste guerre di religione tra il partito protestante e cattolico si trascinano fino agli anni 90 del secolo quando Enrico IV diventa re di Francia. Per diventare re si converte al cattolicesimo e inizia un'opera di pacificazione e rilancio della potenza francese. In questo periodo chi è Francois Viète?
Egli non è un accademico (è un matematico) ha una formazione giuridica, e in particolare diventa segretario di una casata importante. Quasi tutta la sua vita viene spesa prima al servizio dei Partenes, poi come membro del parlamento di Tur (città francese sulla Loira) poi consigliere di re, cariche molto importanti a livello di ministro, sottosegretario del consiglio. Quindi in tempi così difficili in cui è facile sbagliare mosse, **Viete non ha tempo di pubblicare le sue opere**

matematiche. Queste vengono pubblicate a pezzi e bocconi. Altre opere sue vengono poi pubblicate da collaboratori, segretari, amici. Un'altra opera fondamentale dedicata alla teoria delle equazioni il cui titolo è **"de emendatione et ricognizione equazionum**" sarà pubblicata postuma nel **1615**. Quindi Viet compie una vera e propria rivoluzione nel campo dell'algebra, che però richiede diverso tempo. Questo perché egli è estraneo alla vita accademica ha poco tempo per sviluppare le sue opere e non fa parte del "giro dei matematici", vengono stampate in posti periferici, scritte in un linguaggio completamente nuovo. **Introduce i termini parabolismo e ipobasismo** (dividere per il termine noto o per l'incognita rispettivamente). **Lui vuole utilizzare l'algebra come strumento dell'analisi geometrica**. Però è qualcosa non facile da fare perché l'algebra trattata fino a quell'epoca è un tipo di algebra retorica o numerica. Questa strada era già stata seguita dagli arabi, Fibonacci, Montano, Bombelli. **La novità di Viète è di introdurre nell'algebra il calcolo letterale, quello che noi impariamo in prima seconda liceo,** e questa è la strada che permette di tradurre un problema geometrico in equazione algebrica.

Cosa c'è in questa opera?

In questa opera Viète introduce nell'algebra il

1) calcolo letterale, che può sembrare abbastanza ovvia come cosa ma è l'inizio della strada per tradurre un problema geometrico in un problema algebrico.
2) Viète introduce **la logistica speciosa**: il calcolo con le specie, ovvero il calcolo letterale (specie deriva da species che vuol dire forma o idea). È un oggetto che non ha più un riferimento immediato in una cosa (l'oggetto della matematica greca è il numero come molteplicità di unità, è il triangolo, la parabola…) ma sono oggetti astratti che vengono rappresentati mediante lettere.

Le due principali caratteristiche di questa logica sono:

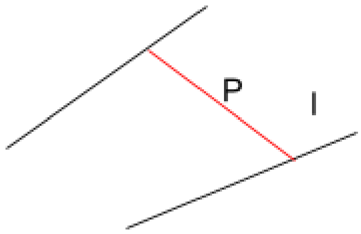
1. Aggiungere una grandezza a una grandezza (chiuso per somma e per prodotto). Hai la specie A e la specie B puoi avere A+B e il loro prodotto.
2. È necessario distinguere tra le grandezze incerte (o ignote)e note. Per cui le grandezze ignote lui le denota con le vocali e quelli note con le consonanti, un'equazione vietiana è qualcosa del tipo: siamo nell'opera **Isagoge in artem analyticam**

Aq(quadratum) + A aeq B vietiana 1591→ $x^2 + x = B$ Cartesiana 1637

3. Abbiamo il primo teorema di algebra: Antitesi non modifica l’equazione . (l'antitesi fa parte dei modi per modificare l'equazione, portare da membro a membro le componenti dell'equazione)
Si consideri Aq -Dpi =Gq -B in A → $x^2 - d = g^2 - bx$
Per Viete aggiungere da entrambe le parti che a cose uguali si possono aggiungere cose uguali: se aggiungo Dpi+B in A non cambia niente.
Aq + B in A =Gq +Dpi

Cos'è Dpi = Di piano?
Per Viete concepisce l’algebra come mirata ad essere applicata alle geometrie **le sue equazione devono essere omogenee.** Quindi ad esempio lui non concepisce $x^2 + x = b$ → Area +Lunghezza non ha senso
Viète può concepire $x^2 + ax = b$
Inoltre le specia hanno una loro scala di importanza
1) lato→
2) quadrato → piano
3) cubo→ solido
4) quadrato quadrato→ piano piano
5) quadrato cubo→ piano -solido
6) cubo cubo

Questa scala qui viene poi ripresa da Diofanto cercando di mantenere una omogeneità tra le potenze
Viete riesce a applicare questa logistica speciosa a tutti i problemi costruibili con riga e compasso: traduce tutte le equazioni di secondo grado in problemi costruibili con riga e compasso. Questo nell'opera del **1592:** **“Effectionum Geometricarum canonica recensio**" e nel **1593** **"supplementum geometrie"**. In particolare da una parte fa vedere quanto affermato prima cioè che tutte le equazioni di 2° si traducono in costruzioni geometriche lui traduce le equazione nella costruzione geometrica, e nel **supplementum geometrie** (supplemento alla geometria) lui dice che per sopperire ai vari problemi della geometria (che non permette di risolvere la duplicazione del cubo, trisezione dell’angolo, due medie proporzionali, qui si vede Pappo e la sua classificazione dei problemi), chiede che gli venga concesso un nuovo postulato, **ovvero che dato un punto tra due rette date e un punto si possa inserire una retta di lunghezza data che passi per quel punto**.
Postulato:



Con questo postulato lui dimostra che si può risolvere il problema della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo o problema delle 2 medie proporzionali. Dopodiché fa vedere che la trisezione dell'angolo equivale a una equazione di terzo grado caso irriducibile, mentre duplicazione del cubo equivale a una equazione del secondo grado di tipo puro $x^3 = a$, **quindi a suo avviso tutti i problemi di geometria sono risolti.** Dato anche al fatto che ha mostrato come le eq di 4° si riducono a quelle di 3° riprendendo Ferrari e Cardano. **Viète è importante non solo nei risultati che ottiene ma anche per il linguaggio che introduce**. A differenza di tutti gli altri riesce a dare la soluzione generale del problema diofanteo che dà la soluzione in specie mentre Diofanto dice dividere un quadrato in due quadrati lo risolve per 144, Viète da la soluzione generale. Se il quadrato dato è biquadro allora i due quadrati sono questi e assegnando il valore a una variabile ottengo tutti i risultati possibili. **Viète trova un'unificazione tra la nuova tradizione della matematica antica e la tradizione algebro-abachistica.**

LEZIONE 23→ 11-12-2020

Volta scorsa:

Il '500 è una epoca dove non solo ritorna la grande matematica antica, ma è una epoca dove si affrontano anche numerosi nuovi problemi.

a) Nel piano della nuova matematica antica, abbiamo diversi personaggi **(Cavalieri, Valerio, Torricelli)** che sviluppano l'idea che l'oggetto matematico non può essere quello della matematica greca, quello di cui si deve occupare la matematica deve essere la trattazione di una classe generale di oggetti. Si deve cercare di creare una classe generale ma non troppo, vedi Valerio e Cavalieri: troppo restrittivo o troppo generale. Questi metodi generali tendono poi a non avere più oggetti su cui lavorare, la tendenza è di rifluire su situazioni "barocche" come ad esempio successe con Torricelli.

b) Il filone della matematica dell'abaco invece si scontra con altri problemi, ovvero equazioni di terzo grado con il caso irriducibile, il caso in cui il discriminante dell'equazione è negativo (tipo per le equazioni di secondo grado), in questo caso il discriminante è negativo proprio quando ci sono soluzioni, da cui nasce l'interpretazione della radice quadrata di un numero negativo. **Bombelli,** forse il matematico più importante di questa tradizione, introduce un nuovo segno (il più da meno) per estrarre la radice quadrata di un numero negativo, che però non riesce a risolvere completamente il problema, lo può risolvere equazione per equazione solo in casi particolare. Pertanto anche il tentativo di Bombelli si ripiega su se stesso.

Quindi la matematica del 500 segna una grande avanzata nelle sua varie incarnazioni (algebra, geometria delle coniche, geometria greca…) ma entra in un vicolo cieco. Questo è esattamente quello che succede per la matematica greca, e anche per quella araba che è molto simile a quella occidentale, parte dagli stessi materiali (riappropriazione della geometria greca e algebra) si ripiega su se stessa. Per le equazioni di terzo grado gli arabi riescono a trattarle solo geometricamente, ovvero per mezzo di intersezioni di coniche. **Pertanto Le matematiche che hanno origine dalla matematica greca tendono a ripiegarsi su se stesse.** Sono matematiche che non hanno più niente da scoprire e studiare, anche lo stesso Pappo trattata sostanzialmente gli stessi tipi di problemi di Apollonio e Archimede. **Quello che avviene alla fine del '500 inizi del '600 è qualcosa di completamente nuovo.**
(il fatto significativo della matematica occidentale è il fondersi insieme di due tradizioni diverse quella araba e quella greca, che danno origine all'algebra simbolica applicata alla geometria, non è una cosa universalmente accettata.)
Verso la fine del '500 e inizi del '600 avviene qualcosa di nuovo. Quello che avviene è la fusione tra geometria classica e tradizione aritmetico algebrica.

1) Queste caratteristiche le possiamo trovare in **Maurolico**, lui vuole sviluppare una aritmetica in grado di trattare la quantità in quanto tale, al di là della sua incarnazione specifica, siamo nel **1575.**
2) **Valerio e Cavalieri** abbiamo invece l'idea di trattare oggetti generale, in Valerio si ha la necessità di distinguere la quantità dalla forma, un obiettivo che alla fine viene raggiunto nel calcolo del centro di gravità dell'iperboloide.
3) In **Viete** matura un processo che è durato per tutto il '500 e che non è riuscito a sbocciare né nella tradizione classica né in quella algebrica.

Opere di Viète

- **1591: Isagoge in artem analyticam**
- **1593: effectionum geometricarum canonica recension + supplementum geometrie + Zeteticorum libri quinque.**
- **1615: De aequationum recognitione et emandatione,**

a) **In Algebra→ Zeteticorum libri quinque. + De aequationum recognitione et emendatione,**

Questi ultimi due sono strettamente collegati tra loro. Gli zeteticorum sono cinque libri di indagine, il titolo viene ripreso da Pappo che vuol dire ricercare. In questi due libri Viète si prepara gli strumenti algebrici (negli zetetici) per **poter trattare tutti i tipi di equazione**.

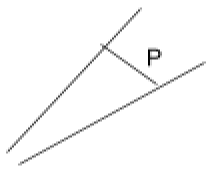
1) Viet mantiene la legge di omogeneità e l'uso di solo quantità positive. In Viete ci sono equazioni del tipo: A(x)=0 cioè ci sono solo equazioni omogenee (Le grandezze scalari hanno una dimensione),
2) Viète fornisce una soluzione di equazione di terzo e quarto grado con trasformazioni diverse da quelle di Tartaglia, utilizzando gli strumenti algebrici che ha messo a punto negli Zetetici.
3) Negli zetetici Viete affronta anche numerosi problemi Diofantei, questo dimostra anche la potenza dei suoi strumenti: se consideriamo il problema più famoso di Diofanto della divisione di un quadrato come somma di 2 quadrati egli fornisce una sola risoluzione, invece Vietè con i suoi strumenti algebrici riesce a trovare anche la formula generale per la risoluzione del problema. **Con gli strumenti di Viète si ottiene una prima generalità**, tu ha una formula per la scomposizione di un quadrato come somma di quadrati.
4) Abbiamo anche un primo teorema di algebra: l'antitesi non cambia l'uguaglianza ma abbiamo anche un teorema di altri livello:
5) il teorema sulle funzioni simmetriche elementari:
   Se abbiamo $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \rightarrow \quad a_0 = \Pi x_i$ =prodotto delle radici per un'equazione di 3° $x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \rightarrow$
   $a_0 = \; -(x1.x2.x3)$
   $a_1 = \; x1.x2 + x1.x3 + x2.x3$
   $a_2 =- (x1 + x2 + x3)$
   Queste si chiamano formule di Viète, cioè funzioni simmetriche elementari e il legame tra le radici delle equazioni e coefficienti di un'equazione stessa. **Data un'equazione dire se ha soluzioni per i radicali in funzione dei coefficienti**.

Questo dà inizio alla teoria delle equazioni che sviluppa fino a Galois. Si sviluppa molto nel 700 con Lagrange, Cauchy, Abel, Ruffini fino a Galois che stabilirà se l'equazione è risolubile per radicali.

b) in geometria→ effectionum geometricarum canonica recension + supplementum geometrie

E’ una rassegna standard delle operazioni geometriche, ad ogni operazione viene collegata una equazione o una operazione algebrica.
esempio
Tipo date tre grandezze proporzionali e date la media e la differenza tra le estreme trovare le estreme, viete la mette in corrispondenza con:
Cioè abbiamo 3 grandezze/linee proporzionali e data la media e la differenze delle estreme trovare l’estreme. → A.(A+B)=Cq → $x(a+b)=c^2$
costruisce una corrispondenza tra equazione e costruzione geometrica.
Questa impostazione è barocca e pesante e richiederà un certo tempo per essere superata.
Nel **supplementum geometrie** introduce un assioma e dimostra che si può risolvere un'equazione pura di terzo grado e un'altra sulla trisezione dell’angolo. Grazie a questo assioma egli dimostra che si possono costruire due medie proporzionali o effettuare la trisezione dell’angolo.
Assioma:

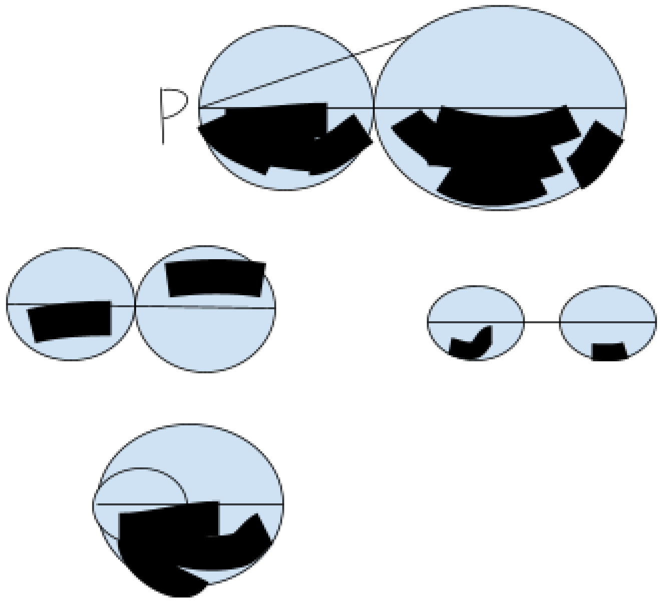
Date due rette di lunghezza data e un punto inserire una retta di lunghezza data passante per il punto e per le rette date



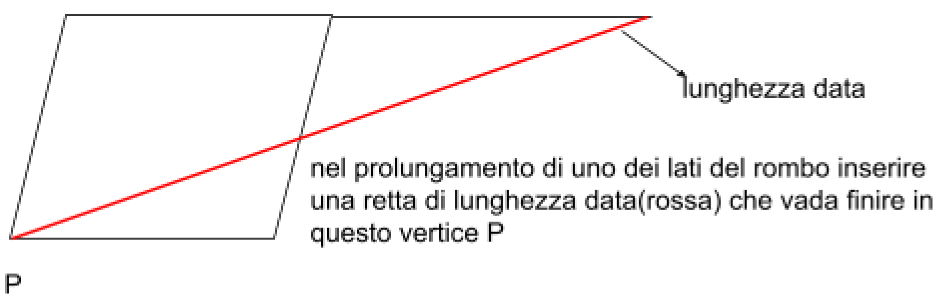
Egli mostra che qualunque equazione di quarto grado si può ridurre a una di terzo che a sua volta si riduce a $A^3 = B$ oppure a $A^3 + pA = q$ → irriducibile così dice di aver risolto tutti i problemi della geometria.
Remind: nel 1589 è uscita la traduzione di Commandino della Collezione di Pappo
Viète è tra i primi a cercare di affrontare i libri che Pappo descrive nel settimo libro della collezione: dati tre cerchi trovarne uno che sia tangente a loro tre. È uno dei problemi descritto nella collezione, **è il libro sui contatti di Apollonio.**
Pappo lo descrive così:
date tre cose tra punti rette e cerchi trovare un cerchio che passi o sia tangente alle tre cose date.
Questo è un problema piano, che non può essere risolto con le coniche ma solo con figure piane. **Fan Rumen** (aneddoto dell'equazione di 45° grado) risolve il problema intersecando due iperboli. Viète è il primo a prendere sul serio la classificazione dei problemi di Pappo.

Marino Ghetaldi

Muore nel **1629** è un allievo di Viète
Marino Ghetaldi è di Ragusa in Croazia è un appassionato di matematica nei suoi viaggi a Parigi conosce Viete, diffonde le opere di Viète tra i suoi amici e comincia a utilizzare tecniche vietiane per risolvere problemi fra cui la **Apollonius illyricus** pubblicato nel **1611** e poi con un supplemento nel **1613** Apollonio aveva risolto con riga e compasso.
Risolve il problema delle inclinazioni: date due semicirconferenze inserire tra loro due una retta di lunghezza data che finisca in questo punto, ci sono troppi casi per questo problema.



Si confluisce in una matematica barocca, troppo piena.
Problema del rombo:



Questo problema va risolto con riga e compasso perchè Pappo dice che sono problemi piani, tutti gli altri però li risolve per via algebrica.
Nel 1611/13 quando pubblica **Apollonius illyricus** o anche nel 1607 quando pubblica un altro problema non pubblica la parte algebrica, pubblica solo le costruzioni geometriche.
Nel **1630** quando pubblica un testo "**de risoluzione et compositione"** ovvero su analisi e sintesi matematica in cui fa vedere come tutti i problemi che si

riducono a equazioni di primo e secondo grado se ne può costruire la soluzione algebrica. Dando poi esempi di cosa aveva fatto nell' **Apollonius illyricus**. La cosa interessante è nel quinto libro, ovvero in problemi che non cadono sotto l'algebra, tra questi c'è il problema del rombo. **Questo fa vedere le difficoltà tra cosa si possa o non possa fare**. Dal problema del rombo si ottiene un'equazione di 4° grado completa, non si sa come collegarla all'algebra, e come collegarla a problemi piani. Ma dato che il problema è piano l'equazione deve essere di secondo grado oppure riconducibile a una biquadratica. **Cartesio** darà une trattazione semi-completa del problema risolvendolo per il caso del quadrato. Bisogna aspettare **Newton** per una trattazione soddisfacente del problema, l'equazione di 4° grado si riconduce a una biquadratica.
L'altro aspetto interessante sulla figura di Ghetaldi è la diffusione di diffusione dell'**ars analitica di Viet.** In Italia il peso della tradizione classica e della influenza Galileiana ha fatto sì che la diffusione dell'algebra non fosse così immediata. Lo stesso Clavio amico di Ghetaldi nel 1608 sulla questione delle equazioni di terzo grado ha solo sentito dire che Viete ha trattato meglio le equazione di terzo grado rispetto agli altri, questo dimostra la difficoltà nella diffusione dell'algebra. Nella stessa Francia l'algebra di Viète si diffonde lentamente.
Negli anni successivi al 1615 verranno pubblicati opere in francese delle opere di Viète, trattati di algebra, gli zetetici e **sarà solo a partire dalla fine degli anni 20 inizio anni 30 che l'algebra di Viète trova il suo continuatore ovvero Pierre de Fermat.**

Aspetto importante

La matematica italiana: Valerio, Cavalieri, Torricelli, Tartaglia, Cardano sono tutti legati ad ambienti accademici. Con il '600 **la figura del matematico non è più una figura legata alla università**, ma viene vista come una figura dilettante, ovvero si impara la matematica da sé. Questo aspetto è molto importante perché ci ricorda la matematica dell'abaco che permette una maggiore libertà di ricerca, e questo è un po' quello che succede con la matematica in generale. Il non doversi più sottoporre a regole rigide, situazioni istituzionalizzate concede alla matematica una maggiore libertà (vale per Viete vale per Cartesio, per Fermat), le cui cose si diffondono attraverso reti private che verso la seconda metà del '600 si vanno a trasformare in accademie scientifiche, come istituzioni private di studiosi e ben presto saranno riconosciute dagli stati.
Altra cosa importante è la **nascita di riviste scientifiche** in cui si scambia idee nuovi approcci, in generale la vita scientifica cambia proprio natura,

uscendo dalle università e andando a svilupparsi nei singoli studiosi e questo vale anche per la matematica.

LEZIONE 24→ 14-12-2020

Volta scorsa:

Abbiamo parlato del fatto che la riscoperta di Pappo rafforza la "moda" che già si era iniziata a manifestare verso la seconda metà del '500 del restauro della reinvenzione di opere e risultati andati perduti. Tutto il filone Archimedeo sui centri di gravità nasce dal fatto che i testi di Archimede non ci sono pervenuti. Il caso di Pappo è ancora più significativo.

Dopo che il testo di Pappo diventa disponibile con la traduzione di Commandino del 1589, inizia la moda di ricostruire i libri che Pappo elenca nel settimo libro, inoltre si cerca di capire il metodo dell'analisi e della sintesi. Abbiamo anche visto che **Viete** interpreta questo discorso dell'analisi e della sintesi, **inventando l'algebra simbolica e inaugura la corrente dei "restauratori"**: appolloni francesi, gallesi, ecc in particolare l'algebra Vietiana è un'algebra pesante (barocca) la legge di omogeneità, l'esclusione di quantità negative. Esclude le quantità negative perché lui vuole applicare la sua algebra alla geometria.
L'idea di polinomio stenta a venire fuori e inoltre Viete stesso non è un accademico, è un politico un amministratore e le sue opere si diffondono lentamente e con diversa fatica, anche a causa dello stile stesso di Viète.

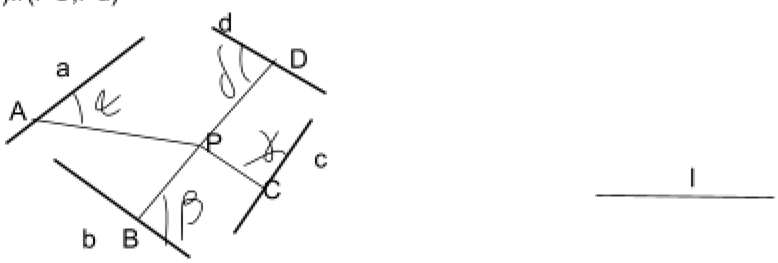
Ghetadi usa l'algebra vietiana per ricostruire un libro di Apollonio, presenta un tipo di approccio completamente diverso da quello di Viète. **Se Viete all'equazione associa una costruzione geometrica, Ghetaldi cerca di interpretarla.** L'idea diventa quindi l'interpretazione della formula. Questi due aspetti: il tentativo di riappropriazione di opere perdute e l'utilizzo dell'algebra in queste operazioni saranno alla base della novità del corso degli anni '30.
I protagonisti di questa rivoluzione sono Cartesio e Fermat.
Sia Cartesio che Fermat non sono matematici di professione.

Cartesio

Il primo vive di rendita e dispone di terre. Dopo aver studiato dai gesuiti si dedica alla carriera militare, durante una sosta ha delle illuminazioni che lo porteranno a tirare fuori il discorso sul metodo. Successivamente si ritira in Olanda, perché vuole stare lontano da Parigi dalle varie dispute, e nel **1637** pubblica il "**discorso sul metodo per ben condurre la propria ragione e trovare la verità nelle scienze**". Prima del discorso sul metodo aveva scritto cose che non pubblicherà in cui ci sono moltissime cose che riguardano matematica, analisi e sintesi. L'opera del discorso sul metodo ci manda al dubbio sistematico. Questo libero è accompagnato da tre saggi: **la meteora la diottrica e la Geometrié**. L'ultima è un testo difficile, è il primo testo che noi possiamo leggere come se si trattasse di un testo moderno. Cartesio si vuol tenere lontano dalle polemiche ma è uno che la polemica la ama parecchio, in una lettera a Mersenne dice che è stato volutamente oscuro in certi passi, per vedere se gli "intelligentoni" sapessero risolvere quei passi oscuri. **La geometriè è centrata intorno al "problema di Pappo":**

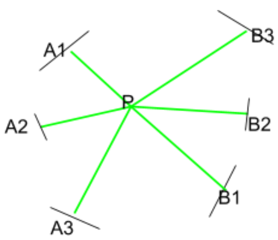
problema delle 3\4 linee o problema di Pappo.
Ne parla anche Apollonio nell'introduzione delle coniche dicendo che la soluzione data da Euclide senza quello che dimostro nel 3 libro non sta in piedi.
Enunciato
Trovare il luogo su cui si trovano i punti P tali che le 4 retta a,b,c,d condotti ad angoli dati accada che il rettangolo (PA ,PB) abbia un rapporto dato con il rettangolo(PC,PD)

r(PA,PB):r(PC,Pd)



Se le rette fossero solo 3 si prende una retta fissata l e invece del rettangolo (PC,PD) si prende il rettangolo (PC,l). Oppure il rettangolo (PA,PB) abbia un rapporto dato con il quadrato costruito su PC

A questo Pappo aggiunge un lungo commento e se la prende con Apollonio il quale non doveva dire queste cose di Euclide perché senza di lui non avrebbe risolto il problema, e comunque è stato dimostrato che i punti P vanno a cedere in una delle sezioni coniche, questo problema poi dice, si potrebbe generalizzare ulteriormente. Se le linee dovessero essere 6 allora dovremo considerare che un determinato parallelepipedo Pl abbia un rapporto tale che:



$$\frac{Pl(P_{A1}, P_{A2}, P_{A3})}{Pl(P_{B1}, P_{B2}, P_{B3})}$$

Potremmo generalizzarlo ulteriormente e considerare anziché il parallelepipedo (con 8 linee avremmo un solido) il rapporto composto

$$\frac{PA1}{PB1} x \frac{PA2}{PB2} x \frac{PA3}{PB3} x \frac{PA4}{PB4}$$

Poi afferma che si può generalizzare a qualsiasi rette si vogliano. Tutto sommato questa generalizzazione non serve a molto, perché il luogo delle 5-6 linee lo hanno studiato e i punti vanno a cadere su luoghi non ancora conosciuti, e di questi luoghi non è stato nemmeno uno, nemmeno il più semplice o il più manifesto [testo di Pappo].

Concetto di luogo:

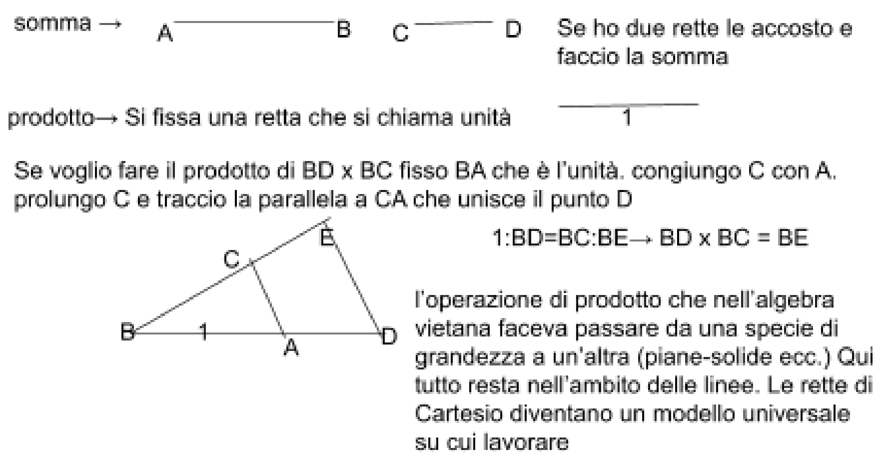
Pappo trasmette 3 cose importanti:

1. Idea di analisi e sintesi
2. Lista di opere che stimola la ricerca
3. Concetto di luogo che appare in Pappo e che non si capisca bene cosa voglia dire

Per noi il luogo geometrico è l'insieme dei punti che godono di una certa proprietà, questo non è ammissibile nella geometria greca. Il luogo per i matematici greci deve essere visto come: **hai una curva con in essa una certa proprietà, bisogna quindi vedere se tale proprietà è caratteristica della curva, si deve dimostrare che tale proprietà è sintomatica.** Questo non è chiaro però in Pappo, non è trasmesso bene nel testo di Pappo. Nel testo di Pappo si parla di luogo come cosa che già si sa.
Quindi il problema è quello di riuscire a interpretare cose sia il luogo.
Qui abbiamo un momento di svolta decisivo, lo abbiamo separatamente in Fermat e Cartesio.
Altra cosa da segnalare del testo di Pappo: La traduzione di Commandino recita " e di questi luoghi ne trovarono uno che non è il più semplice è il più manifesto" cade la particella negativa. E' importante questo stimola a trovare la soluzione e Cartesio ci prova.

Come affronta Cartesio il problema di Pappo.

Inizio della Geometrié. Inizia quasi con una bestemmia, tutta la problematica legata all'incommensurabilità viene buttata via senza rimpianti. Cartesio dice:

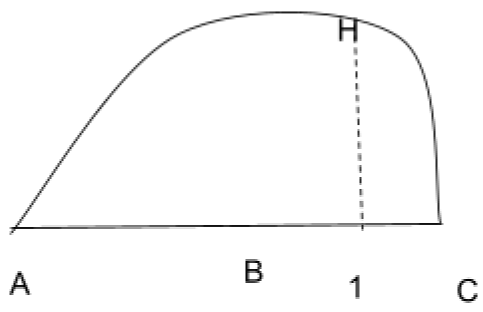


Se con Viète si avevano delle grandezze, qui tutto resta nell'ambito delle linee. In qualche modo le rette di Cartesio diventano un modello universale su cui lavorare, dovemmo aspettare fino '800 per far si che queste rette diventino numeri reali.

Per estrazione di radice:

estrazione di radice

voglio estrarre la radice quadrata di AB. Aggiungo la retta 1. Costruisco il semicerchio che ha come diametro AB+1 dove 1=BC e poi prendo l'altezza BH sarà uguale alla radice di AB



$BH = \sqrt{AB}$

Come si risolve un problema per Cartesio?

I problemi si riconducono a risolvere equazioni.

Se io ho l'equazione:

$z^2 = az + b^2 \rightarrow z^2 = az + bb$ ← questa è la scrittura di Cartesio

la si costruisce interpretando la formula risolutiva

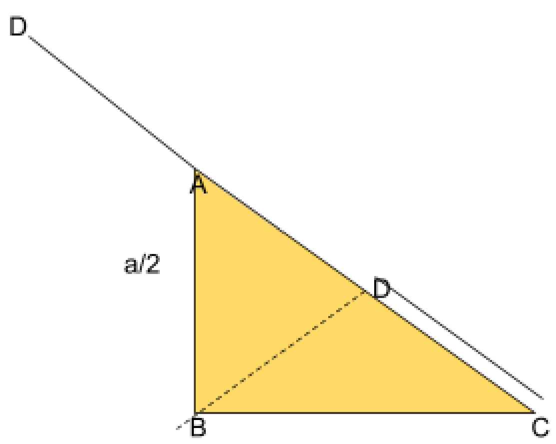
Costruisco il triangolo rettangolo ABC in cui prendo BC=b e AB=a/2

Prolungo il lato AC di una quantità pari ad a/2 fino ad ottenere D e allora DC=z. La soluzione è data algebricamente da $z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2+4b^2}{2}}$

Per il Teorema di Pitagora AC= $\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{ab^2 + \frac{a^2}{2}}$

e così farà anche per gli altri tipi di equazioni di 2°

Se ho $z^2 = -az + b^2$ dovremo staccare da Ac un pezzo ottengo il punto D e DC sarà la mia soluzione



Quindi tutti i problemi fino a secondo grado si sanno costruire e per le equazioni di grado superiore? Il problema viene diviso in due:

1. Costruire l'equazione risolvente
2. Trovare dove cadono i punti

il luogo diventa come quello nostro.

Fermat

Egli parte dai luoghi piani (altra opera di Apollonio), a partire da questa opera arriverà a concepire il luogo come quello cartesiano. La curva a partire da cartesio Fermat viene vista come generata da una equazione. Fermat dimostrerà che tutte le equazioni di secondo grado rappresentano coniche.

Cartesio

A questo cartesio, dopo aver visto che l'equazione è di secondo grado, afferma che il problema è piano. Se le rette sono di più in gradi aumentano.

Geometrie

Geometrie è divisa in tre libri:
Inizia con una Nuova Analisi algebrica dei problemi geometrici applicata a Pappo. Questo libro apre due primi: nel terzo libro si ha lo studio dei problemi geometrici che conducono a equazioni di grado maggiore o uguale a 3, nel secondo libro si ha la questione di cosa sono le linee curve. Da come interpreta il problema di Pappo si ha la necessità di ridurre il problema ad una equazione, se l'equazione è di secondo grado okey, se è di grado superiore al secondo devi riuscire a capire come ricondurti a cose note. Questo è il problema della costruzione delle equazioni.

Da Cartesio in poi il mondo della geometria è il mondo delle curve che possono essere descritte mediante equazioni, le curve algebriche.

Problemi ordinati da Cartesio:

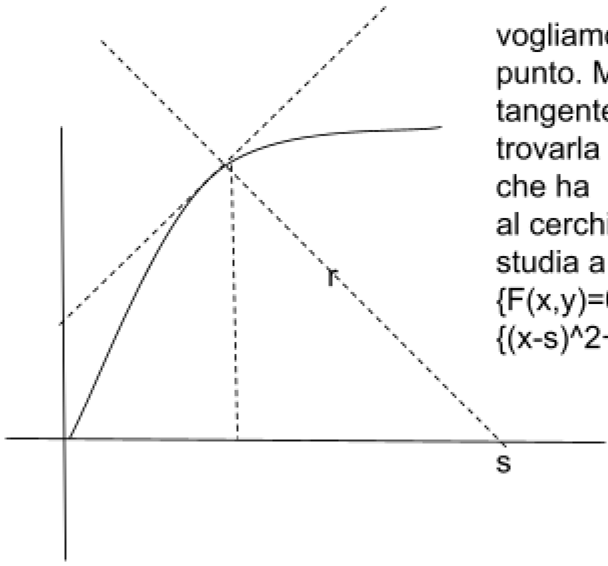
- Primo genere: equazioni di primo e secondo grado
- Secondo genere: equazioni di terzo e quarto grado

Questa visione della geometria permette di risolvere il problema di Pappo. Algebrizzata la questione cartesio si pone il **problema di trovare la tangente ad una curva data.** Questa domanda apre il sipario alla matematica moderna.

Perché è così importante?

Gli antichi erano in grado di trovare tangenti, vedi Apollonio. Qui cosa cambia? Qui cambia che la tangente si cerca in una curva generale. Si cerca

di determinare un metodo che data una qualunque curva algebrica si vuole trovare la tangente, questo introduce l'oggetto polinomio.
Una curva algebrica quindi sarà data da:
F(x,y)= G(x,y) →sarà meglio considerarla così F(x,y)=0
E' molto importante perchè la differenza sta nel fatto che F(x,y)= G(x,y) è un'equazione mentre F(x,y)=0 è un polinomio
In particolare il terzo libro della Geometrie comincia con un trattato sui polinomi. Infatti la regola dei segni è nota coma la regola di Cartesio. Il polinomio è un nuovo oggetto matematico che f Per la prima volta il polinomio compare nella geometrie di Cartesio e negli scritti di Fermat



vogliamo trovare la tangente in questo punto. Ma Cartesio anziché trovare la tangente vuole trovare la normale e per trovarla basterà trovare il centro del cerchio che ha centro sull'asse x e che è tangente al cerchio. quindi per trovare questo cerchio studia a sistema
{F(x,y)=0
{(x-s)^2+y^2=r^2

Se elimino una delle due incognite (x o y). Se il polinomio ha grado n ottengo un polinomio a una solo incognita x di grado 2n Q2n(x)=0

A Cartesio non importa sapere come si risolve questo polinomio ma gli interessa sapere per quali valori di s ed r il sistema ha solo una soluzione cioè quando il polinomio Q2n lo potrò scrivere come→ Q2n(x)=(x-x0)^2P2n-2(x) e cioè quando avrà in x0 non una radice semplice ma una radice doppia. Qui il concetto di polinomio è cruciale (Teorema di Ruffini o della Radice)

I coefficienti di Q che dipendono da r e da s a(r,s)
$a(r,s)x^{2n} + b(r,s)x^{2n-1} + ... + m(r,s) = (x - xo)^2$ per un polinomio da determinare che avrà $2n - 2\ coefficienti\ \ a_{2n-2}x^{2n-2} + ...$
Ottengo un sistema di 2n+1 equazioni
{a(r,s)= a_{2n-2}
{b(r,s)=
{....
Ho 2n-2 incognite +r+s. Risolvendo questo sistema troverò r ed s e avrò trovato la mia tangente.
È una cosa molto complicata, negli anni successivi (1650 e fine del secolo) i matematici si dedicheranno a cercare di semplificare questo metodo. **La**

cosa importante è che in questo modo Cartesio ha fissato un metodo generale per le tangenti a una qualsiasi curva.

LEZIONE 25→ 18-12-2020

Geometria di Cartesio.

Questa opera è il punto culminante, in cui si propone un punto di vista completamente nuovo, gran parte di questa opera si svolge **attorno al problema di Pappo**. La prima innovazione è l'abbandono del principio di omogeneità vietiano, inoltre facendo vedere come si possono interpretare somme prodotti o estrazioni di radici medianti linee. A differenza di Viète, Cartesio propone l'interpretazione diretta delle equazioni.

IL problema di Pappo, Cartesio lo vede in 2 fasi.

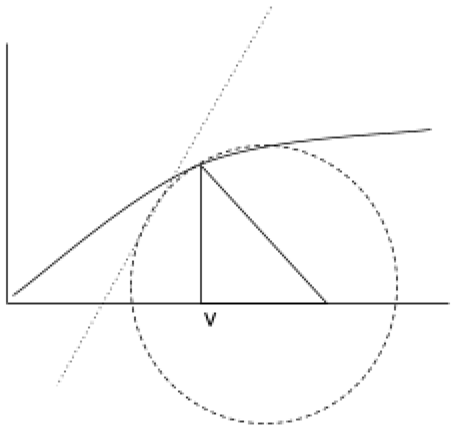
1) Fa vedere come la distanza si esprima in termini lineari in funzione delle quantità incognita, questo significa che il problema si riduce a equazione di secondo grado (nel caso di 4 linee).

Poi la domanda è come trovare i punti per equazioni di grado superiore al secondo?

2) La risposta a questa domanda è data nel terzo libro, col problema della costruzione dell'equazione. In particolare, Il cuore della Geometrie sta nel secondo libro. Secondo Cartesio le curve ammissibili in geometria sono quelle che cadono sotto una misura precisa ed esatta, ovvero quelle generate da un movimento continuo senza interruzioni. La spirale di Archimede non è ammissibile secondo Cartesio. Se quindi bisogna ammettere in geometria sono solo quelle sopra descritte allora queste possono essere messe in corrispondenza con delle equazioni polinomiali.

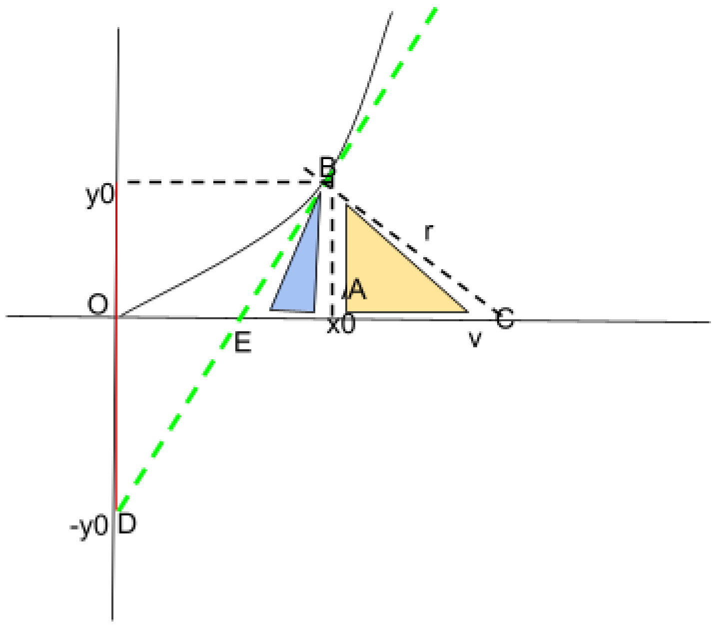
Attenzione questo è un punto molto discusso, quello che è certo, è che immediatamente dopo l'oggetto della geometria è una classe ben definita e sufficientemente generale di oggetti, e per questo tipo di classe si tratta di dare metodi o calcoli che si applicano a tutti gli oggetti della classe, l'esempio principe è il problema delle tangenti.

1) Considera un polinomio in due variabili e lo eguaglia a 0 F(x,y)=0
2) Anziché cercare la tangente cerca la normale ovvero la perpendicolare alla tangente. Se io considero un cerchio che abbia centro sull'asse di riferimento, in generale intersecherà la curva in due punti. Se io voglio il cerchio tangente cioè quello che mi fornisce il raggio normale alla curva dovrò chiedere che l'intersezione fra il cerchio che ha raggio normale alla curva e il cerchio generico che ha il centro sull'asse x abbia una sola soluzione



{F(x,y)=0
{(x-v)^2+y^2=r^2
Se F(x,y)=0 aveva grado n si ottiene un polinomio Q2n(x) di grado 2n che avrà sicuramente una radice x0. Non voglio trovare le soluzioni di questo polinomio ma voglio che questo polinomio si divisibile per (x-x0)^2→ Q2n(x)=(x-x0)^2P2n-2(x)
Imponendo questa condizione si ottiene un sistema di 2n -2 variabili che fornisce la coordinata del centro e la lunghezza del raggio.
Esempio concreto
$y = mx^2$

1) La tangente(verde) so già calcolarla da Apollonio
2) La sottotangente(in arancione) è doppia del piede dell'ordinata



Come funziona il metodo di Cartesio

1) dobbiamo intersecare $y = mx^2$ con 'equazione del cerchio che ha raggio r e centro sull'asse x
   $\{y = mx^2$
   $\{(x-v)^2 + y^2 - r^2 = 0$
2) Ottengo un polinomio $Q(x) = (x-v)^2 + m^2x^4 - r^2 = 0$
3) ora io voglio che questo polinomio abbia una radice doppia in x0
   $m^2x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - r^2 = 0$ e io voglio che questo in quanto polinomio sia uguale a $m^2x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - r^2 = (x - x0)^2(ax^2 + bx + c)$
4) I coefficienti di questo polinomio sono P4= Σaix^i dove gli ai sono funzioni di a, b, c mentre a sx i coefficienti sono funzioni di m, v, r
5) Facendo i conti e uguagliando i coefficienti ottengo
   $\{a = m^2$
   {b-2ax0=0
   {c-2bx0+ $ax0^2 = 1$
   $\{bx0^2 - 2cx0 =- 2v$
   $\{cx0^2 = v^2 - r^2$
   sistema di 5 equazioni in 5 incognite di cui le uniche due di interesse sono v ed r
6) facendo i conti ottengo che $v = x0 + 2m^2x0^3$
7) geometricamente parlando $x0 + 2\frac{yo^2}{x0^4}xo^3 \rightarrow v = x0 + 2\frac{yo^2}{x0}$ ma va ancora geometricamente interpretata
8) i due triangoli rettangoli sono simili
   OE=EA→ y0O=O(-y0)

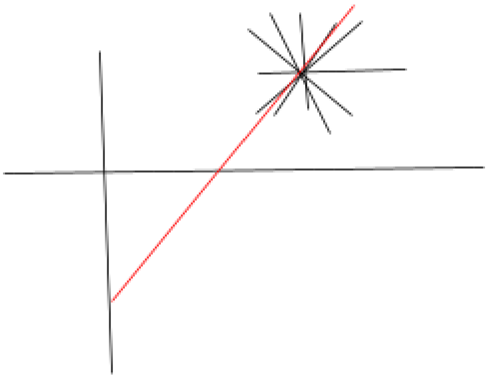
Con questo metodo si può trovare la tangente a qualunque curva algebrica
Supponiamo ora di avere $\sqrt{xy + x + \sqrt[2]{y}} + c = 0$

1) trasformarla in equazione polinomiale:
   $\sqrt{xy + \sqrt[2]{y}} = x + c \rightarrow xy + y + 2\sqrt{x}\,y = (x+c)^2 \rightarrow$
   $xy + y - (x+c)^2 =- 2\sqrt{x}\,y \rightarrow [xy + y - (x+c)^2]^2 = 4xy^2$
2) Procediamo come prima

Si iniziarono a fare calcoli più semplici
$\{y = mx^2$
$\{y = y0 + m(x - x0)$
Q aveva grado n com F
A partire dalle prime traduzioni della Geometrie la cosa inizia a semplificarsi. Una prima semplificazione avvenne verso la fine del 600 con **Jan Hodde**. Egli notò che un polinomio ha una radice doppia se e solo se Q1(x) ha una radice nello stesso punto. Q1 è:

Q(x)= Σaix^i e ko...kn è una progressione aritmetica qualunque a+nb→
Q1(x)= $\Sigma kiaix^i$ Si può prendere come progressione aritmetica 0,1… n
Vediamo il teorema applicato alla parabola

Consideriamo la parabola $y = px^2$ e mettiamola a sistema con
$\{y = px^2$
$\{y - y0 + m(x - x0)$ cioè interseco la parabola con il fascio di rette e fra tutte queste voglio la retta tangente

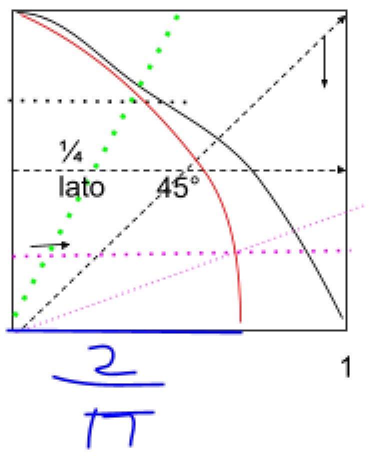


otteniamo Q(x)= $px^2 - mx + (mx0 - y0)$
Q1(x) prendo il polinomio che ottengo usando la successione usando 0, 1,2
Q1(x)= $2px^2 - mx$ Per trovare la tangente mi basta risolvere questa equazione $2px^2 - mx = 0$ e ottengo che m= $\frac{1}{2p}$
Q1(x) è una sorta di derivata del polinomio moltiplicata per x

Verso la fine del 700 il metodo delle tangenti si è trasformato in un calcolo, che però è molto difficile da potersi applicare. Se la curva algebrica non si esprime sotto forma di polinomio, non è possibile applicare questo tipo di calcoli.

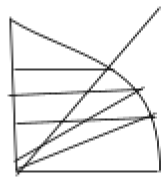
Passo indietro:
Questi metodi cartesiani funzionano solo sulle curve algebriche e hanno il merito di mettere in luce il polinomio. Le operazioni che fa **Hoode** è una cosa che ha senso sul polinomio, no sull'equazione. Così come tutto il metodo dell'idea di Cartesio. E prima di parlare della costruzione delle equazione Cartesio scriverà molte pagine sui polinomi quasi a preparazione della Geometrie. **Però ha allo stesso tempo un limite, le curve che ha escluso, ci sono e sono sempre più presenti.**
Ad esempio la spirale di Archimede di cui la tangente si conosce, un'altra curva è la quadratrice, che serve per trovare la trisezione dell'angolo, poi abbiamo anche la quadratura logaritmica, quelle del seno e del coseno.
Abbiamo anche la cicloide nominata per la prima volta da Galileo

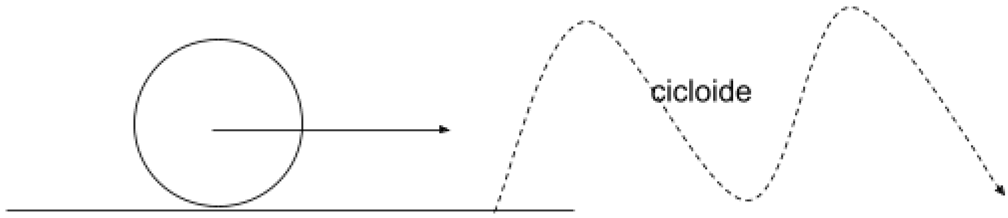
quadrante di cerchio



se r=1
il pezzo
in blu è
2/Pi

questa curva in rosso è descritta
da Pappo è serve per trovare la
trisezione dell'angolo





I metodi algebrici su queste curve sembrano inapplicabili, non per nulla Cartesio le ha escluse :)

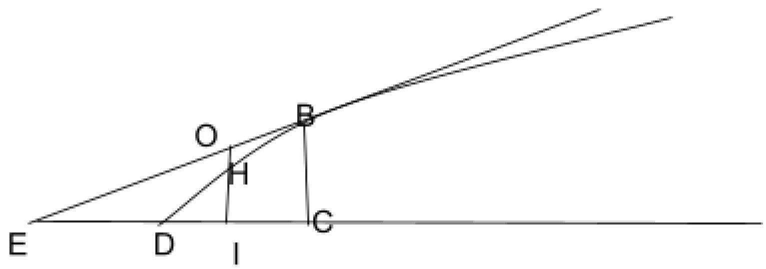
FERMAT

Accanto a Cartesio troviamo Fermat. Egli è dilettante molto più di Cartesio, scrive molte cose di matematica e circoleranno molte di queste attraverso Mersenne.

Oss: Mersenne è un frate parigino, conosce molti matematici e filosofi, lui costruisce una accademia privata e tiene una corrispondenza vastissima. La sua corrispondenza svolge la funzione che da lì a poco svolgeranno le riviste scientifiche.

Quindi Fermat invia agli amici e a Mersenne i suoi risultati, in particolare **Fermat pubblica un metodo per trovare le tangenti, vediamo il metodo applicato alla parabola:**

prendiamo una parabola e vogliamo trovare la tangente nel punto



La proprietà caratteristica della curva è quella che i quadrati delle ordinati sono proporzionali alle ascisse quindi se prendiamo un punto I otteniamo che IH^2 : BC^2 = DI : DC . Fermat anziché leggerla sulla curva la legge sulla tangente e introduce il concetto di adeguazione, cioè prendiamo il punto O e leggiamo la proprietà anziché in H in O→ IO^2 : BC^2 $\approx$ Di:DC. Il vantaggio è che a questo punto possiamo trasferire la proprietà della parabola dalla curva alla tangente e poi possiamo riportarla sugli assi perché i triangoli sono simili→ IO: BC = EI : EC → EI^2 : EC^2 $\approx$ DI : DC
DA qui succede che se noi assegniamo dei valori incogniti (usiamo la notazione vietiana) e poniamo:
a=DE → a è quello che vogliamo trovare
e=CI→ e è una grandezza variabile che dipende da dove si trova I
b=CD

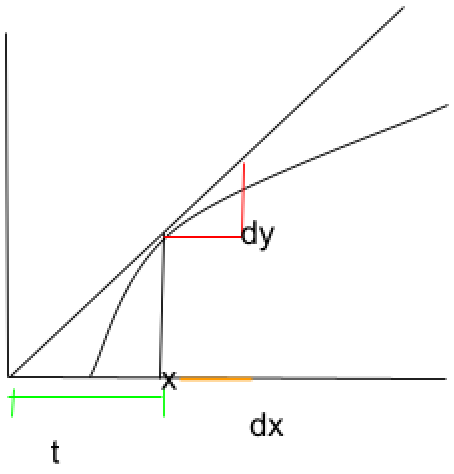
Facendo queste sostituzioni otteniamo un adeguazione di questo tipo
$e^2 b - 2b^2 e \approx - a^2 e - b^2 e$
A questo punto divide tutto per e→ $eb - 2b^2 \approx - a^2 - b^2$ e la trasforma in un eguaglianza riportandola dove era e cioè ponendo tutto=0 ottenendo alla fine
$a^2 \approx b^2 - eb \rightarrow a^2 = b^2 \rightarrow$ a=b
L'idea è di leggere la proprietà caratteristica invece che sulla curva stessa, sulla tangente.
Osserviamo che il "rigore Euclideo" si è molto allentato. Il metodo di Fermat permette di affrontare quello che i metodi algebrici non potevano fare. Si può avere un calcolo che permetta di trovare la tangente e tutto quello che la tangente consegue senza arrestarsi alle radici quadrate? Sì ed è quello che fa Leibniz.

Leibniz

Leibniz compie un'altra svolta decisiva. **Tra il 1591 e il 1684 troviamo: isagoge di Viete, la Geometrie di De Carte, nova metodus di Leibniz, si può dire che la matematica moderna venga fuori da questi tre libretti.**

Cosa fa Leibniz.

Supponiamo di voler trovare la tangente a una certa curva

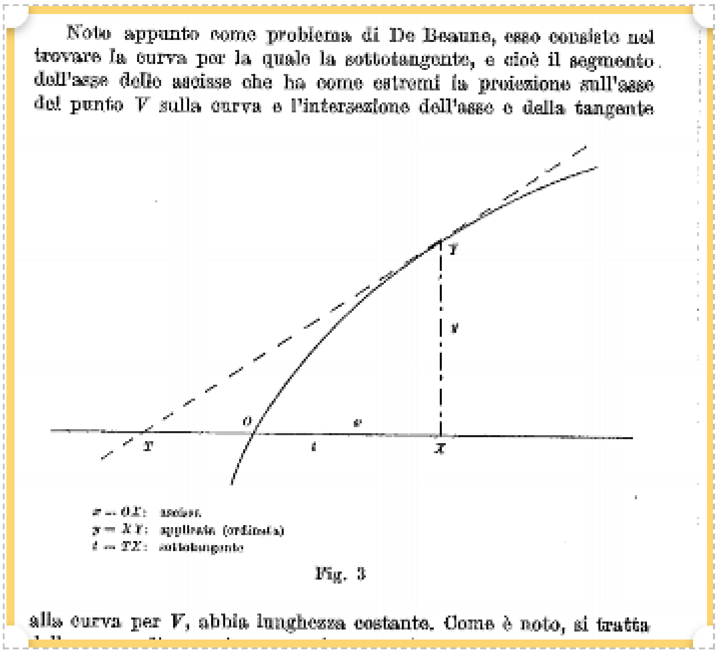


fino ad allora il problema si riduce a trovare la sottotangente (t in verde). Lui dice consideriamo un incremento della x dx(arancio) e definiamo dy(rosso) come il quarto proporzionale dopo x,dx e t. Per cui avremo che t: dx= y:dy. Il differenziale viene definito in base alla tangente che è quello che si vuole trovare. e comincia a dare le regole di differenziazione:

1) il differenziale di una somma = la somma dei differenziali
2) il prodotto
3) quoziente

Senza nemmeno dire che si possono dimostrare
Si passa poi ai punti di crescenza e decrescenza, massimi e minimi, flessi

Con i differenziali è più semplice aggiustare le equazioni per farle venire polinomiali. Infine viene risolto il problema di **De Beaunne.**



Noto appunto come problema di De Beaune, esso consiste nel trovare la curva per la quale la sottotangente, e cioè il segmento dell'asse delle ascisse che ha come estremi la proiezione sull'asse del punto Y sulla curva e l'intersezione dell'asse e della tangente

Fig. 3

alla curva per Y, abbia lunghezza costante. Come è noto, si tratta

La matematica del '600 si costruisce attraverso una fusione di diverse matematiche: greche, arabe, abachiste… ma nessuna di queste può pretendere di essere l'unica radice della matematica moderna. Questo ci fa vedere come sia sbagliato proiettare i nostri concetti di rigore e formalismo, alla matematica prima di Cartesio.

Lezione 07, 16/10/20

sabato 20 febbraio 2021 16:04

C2-P2<C2-S ➝ P2>S. q(d1):q(d2)=C1:S=P1:P2 dove P1 è un poligono regolare dello stesso numero di lati di P2 ➝ P1:C1=P2:S ➝ P1<C1 ➝ P2<S ma ciò è assurdo.
Se S>C2. Per dimostrare che il cerchio è approssimato da dentro Euclide ha utilizzato un teorema (del primo teorema del 10 libro) in cui si dice che date due grandezze disuguali e dalla più grande viene sottratta una grandezza più grande della metà e da quella una grandezza più grande della metà e così via allora si arriverà ad un resto che sarà più piccolo dell'altra grandezza data (probabilmente spurio questo riferimento). Nel caso dei poligoni si fa facilmente ma non nel caso del poligono circoscritto: Archimede lo farà ma non è ovvio. Si ricorre quindi a un trucco: supponiamo che q(d1):q(d2)=C1:S con S>C2. Si fa un invertendo. q(d2):q(d1)=S:C1 ➝ q(d2):q(d2)=C2:T con T=quarto proporzionale.➝ S:C1=C2:T ➝ S:C2=C1:T con T<C1, S>C2 e C1>T. Quindi q(d2):q(d1)=C2:T ➝ottengo un assurdo perchè mi sono ricondotto al caso precedente. La tecnica di doppio assurdo è tipico per le geometria di misura con le figure curvilinee.

Sulla proporzionalità abbiamo quindi sue linee dimostrative:
- nel quinto libro, i multipli e alcune tecniche come invertendo, permutando, e nel sesto, in cui le proprietà vengono applicate a parallelogrammi, linee;
- nel dodicesimo, in cui si usa il quarto proporzionale dimostrando che esso non può essere né maggiore né minore della quarta grandezza che avevo inizialmente (doppia riduzione all'assurdo), che presuppone una teoria delle proporzioni parallela a quella del quinto libro.
Questo fa vedere quanto la matematica greca sia diversa dall'idea che abbiamo di rigore dimostrativo perfetto ma un insieme di cose che coesistono come le teorie diverse delle proporzioni. Del concetto di composizione di proporzione non è neanche data la definizione.

16.10.2020

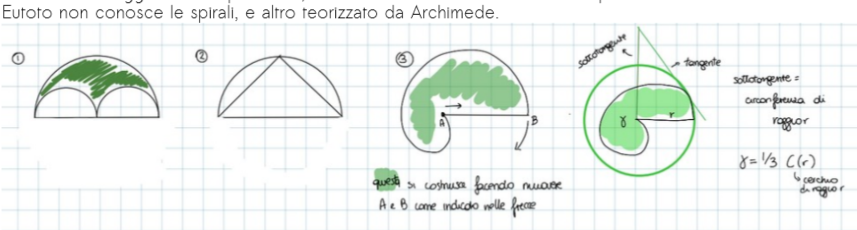
Il rapporto composto è l'equivalente per noi del prodotto di rapporti, ma poiché il rapporto non è né una grandezza né un numero, non ha molto senso. Abbiamo visto però che i rapporti servono a collegare anche concetti di aree e linee (quindi più dimensioni). Abbiamo concluso dicendo che gli Elementi, entrati nella storia e nell'immaginario matematico come esempio di rigore, nascondono in realtà cose che non vanno da nessuna parte, labirinti da cui è difficile uscire, concetti non ben spiegati, il concetto di rapporto composto non è mai definito e l'esempio della teoria delle proporzioni che nel caso di geometria di misura viene lasciata da parte per usare tecniche di dimostrazioni diverse.

Archimede-Difensore della Patria,Costruttore di Macchine Meravigliose e Genio Distratto

Storia: Di Archimede sappiamo molte cose, nonostante non sia possibile costruire una biografia. Sappiamo che muore nel 212 a.C. durante l'assedio di Siracusa: un erudito bizantino Ztetzes, che aveva fonti che oggi non abbiamo a causa delle crociate, scrivendo in versi, dice che Archimede era morto a 75 anni, quindi probabilmente era nato nel 287 a.C. Visse a Siracusa, sicuramente con legami stretti con la famiglia reale di Siracusa, cioè la famiglia di Girone, capo dell'esercito, che era riuscito a dominare una rivolta di mercenari e farsi nominare re. Egli regnò a lungo, anche durante le guerre puniche. La prima guerra punica scoppia proprio a causa sua: alcuni mercenari dei romani avevano occupato Messina, i cartaginesi vengono in aiuto e inizia la guerra punica. Durante la guerra di Cannes, Girone muore e gli succede il nipote Girolamo, 14enne, che venne affidato a un consiglio di tutela degli zii filocartaginesi, che ambairono i patti di alleanza con un colpo di stato e di conseguenza i romani assediarono Siracusa. Nel frattempo Girolamo viene assassinato e Siracusa è in mano alla fazione cartaginesi. Siracusa era una metropoli: Cicerone la descrive 80 anni dopo come la più bella città di quelle greche. Siracusa aveva difese formidabili, rafforzate da Archimede stesso. Po Libio, Tito Livio, Plutarco e altri ancora raccontano le vicende avvenute, anche se molto dopo. Po Libio descrive Archimede come organizzatore della difesa, che con macchine stupefacenti come catapulte. Grazie a queste invenzioni, Siracusa regge due anni a questo assedio. I mercenari ispanici poi tradiscono la città. Tito Livio ci tramanda la leggenda che Marcello avesse ordinato di salvare Archimede: un legionario fu mandato da Archimede per seguirlo da Marcello, ma Archimede che stava studiando gli rispose di non disturbare i suoi cerchi, il legionario arrabbiato, lo uccise. Uno storico dell'antichità Lorenzo Braccesi ha messo in discussione questa leggende:
1.È improbabile che Marcello, romano, volesse portare a Roma un filocartaginese, per quanto sapiente;
2. Livio tramanda per la prima volta questa leggenda all'epoca gli imperatori romani (famiglia Giulio-Claudia): Augusto vuole nominare un Claudio Marcello e vuole presentare la figura di Marcello come uno che si mette a piangere sulla testa di Archimede è una posizione del casato.
Piuttosto, Marcello avrebbe fatto uccidere Archimede.
Forse era figlio di un astronomo, forse imparentato con Girone, strettamente legato alla famiglia reale (al figlio di Girone dedica un 'opera), forse aveva viaggiato nell'Egitto dei Tolomei, sappiamo che era n stretto contatto con dei matematici di Alessandria e alcune fonti lo collocano in Egitto. La sua abilità come costruttore, tecnologo, inventore di strumenti (tra cui un planetario, citato anche da Cicerone) era ben nota. L'Archimede inventore di macchine e meccanismi si colloca su uno sfondo della tecnologia ellenistica, notevolmente sviluppata(ad Alessandria uno dei tipici problemi meccanici-matematici è quello di costruire una grandezza con un rapporto dato dato un'altra grandezza, che equivale a risolvere un problema di terzo grado- scala per costruire una macchina da un modello). Altre notizie provengono dalle sue opere, anticipate da lettere ad altri matematici, tipicamente Dositeo, Conone e Eratostene. Abbiamo una lettera a Gelone (figlio di Girone) in cui viene menzionata Fidia, che secondo un filologo del 500, sarebbe stato il padre. Archimede, già nell'antichità, si trasforma in una figura mitica: un mito operativo, una figura che costituisce un modello inarrivato a cui si tenta di arrivare.
Così diventa emblema anche del rapporto tra scienza e potere: le sue macchine le mette in pratica per difendere la città, le storie e gli intrecci con Marcello, la morte stessa. Diventa genio distratto, il genio nel

mondo matematico che non si accorge della realtà introno a lui (Siracusa che cade mentre lui studia). Plutarco lo descrive con insistenza in questo modo, con storie,aneddoti e leggende (Girone, aveva fatto costruire una nave enorme, che al suo interno aveva stalle, pinacoteca, molto catapulte, ma nessuno riusciva a vararla. Archimede costruì un meccanismo per vararla: **datemi un punto d'appoggio e muoverò la terra**. Una della sue più famose frasi. UN altro aneddoto è relativo alla corona: dopo che la corona era stata dedicata al dio corrispondente, viene detto a Girone che parte dell'oro era stata rubata dall'orefice e sostituita con l'argento, ma poiché era stata dedicata non poteva essere rotta. Archimede a quel punto va alle terme e si accorge che immergendosi nudo nella vasca, l'acqua esce. Ancora nudo, corre per strada urlando Eureka, va a casa, prende un vado colmo d'acqua, ci mette la corona, misurato la quantità d'acqua che ne esce, messo un peso eguale di oro, misurata l'acqua che ne esce e la stessa cosa con l'argento, confrontando poi i volumi d'acqua ha intuito quanto l'orefice avesse rubato; questo aneddoto è raccontato nel De Architectura da Vitruvio, senza accennare ai calcoli precisi). I fatti e i vari aneddoti che si sono verificati hanno fatto di Archimede una figura mitica, il sapiente che usa la matematica per cambiare il mondo, influire sul potere ed essere influenzato.

Opera Delle sue opere non si trova traccia di cose di questo tipo: la storia descritta di Vitruvio non è raccontata quando Archimede enuncia il suo principio. I suoi scritti rimangono chiusi, non si aprono a dirette applicazioni. Non ci sono scritti sulla costruzione di catapulte. Comunque in tarda età gli viene attribuita la leggenda degli specchi ustori, con cui sembra aver bruciato delle navi romani, ma anche questa è solo una leggenda sia per motivi matematici sia per motivi dinamici della nave. C'è una discrasia tra opera matematica, rigorosa, difficile, in forma di presentazione e l'applicazione concreta. Già quando era vivo, nonostante la fama universale, la sua opera non era apprezzata: non viene compresa dai matematici alessandrini. Col tempo ciò va a peggiorare: ai temi di Erone alcune cose no erano già più note. Erone non cita i Galleggianti dove potrebbe, o cita solo alcuni risultati e non completamente. Nel sesto secolo Eutoto non conosce le spirali, e altro teorizzato da Archimede.



Cosa ci è pervenuto (quelle con lettera e quindi data)
-Quadratura delle Parabola: si dimostra che la parabola è i 4/3 del triangolo in una semicirconferenza (un metodo con una bilancia ideale, l'altro con una dimostrazione geometria ispirata alle 12.2 di Euclide).
-Prima Parte Sfera e Cilindro: si dimostra che la sfera è i 2/3 del cilindro di stessa base e altezza e la superficie sferica è uguale a 4 cerchi massimi, poi teoremi su segmenti sferici.
Seconda Parte Sfera e Cilindro: problemi come dividere sfera in segmenti in modo che superfici abbiano rapporto dato e simili, quindi problemi su segmenti sferici. (studio del triangolo fig.2). Opere prima e seconda parte che parlando di problemi diversi, con approcci completamente diversi. Siamo sicuri sia stata rimaneggiata: il greco aveva molti dialetti, e in epoca ellenistica si va affermando la coinè, una lingua greca ufficiale, comune. Tutte le altre opere di Archimede sono scritte in dorico mentre questa in coinè. Inoltre anlcune considerazioni su sfera e cilindro ci fanno pensare a una corruzione del testo in epoca tardo - antica, quando si viene a costituire un corpus archimedeo con le opere Sfera e Cilindro, Misura del Cerchio, Equilibrio dei Piani e Galleggianti.
-Spirali: vedi fig.3.
-Conoidi e Sferoidi: tratta del paraboloide (dimostra che il paraboloide è metà del cilindro circoscritto, o 3/2 del cono iscritto) dell'iperboloide e dell'elissoide di rotazione (dimostra che l'elissoide è 2/3 del cilindro circoscritto)
Queste sono indirizzate a Dositeo, allievo di Conone di Samo

Fine Lezione
Inizio Lezione

-Metodo Meccanico indirizzato ad Eratostene e presenta l'approccio con cui Archimede riesce a determinare i risultati in modo euristico. Lo scopo dell'opera è inviare ad Eratostene due dimostrazioni relative al rapporto tra la doppia volta a crociera(cioè con cilindri interi) e il cubo che la contiene. Vorrebbe dimostrare che la doppia volta è 2/3 del cubo. Dopo aver utilizzato un approccio particolare per il caso, vuole vedere come ha utilizzato lo stesso approccio per altri risultati.(fig.4)

Lezione 09, 23/10/20

domenica 21 febbraio 2021 15:11

Tradizione Archimedea:

La terza fase della tradizione archimedea avviene grazie a Guglielmo di Morbech. Dal codice A durante il rinascimento verrà c
quindi è grazie questi codici (A e B) che dobbiamo la conoscenza di Archimede durante il rinascimento. Quindi personaggi co
Cartesio o altri conoscono Archimede grazie a questi codici. Per esempio i Galleggianti che si trovavano solo nel codice B son
attraverso la traduzione latina di Guglielmo. Questa traduzione è molto difettosa in quanto questa opera è molto difficile, pe
in rinascimento quando questi testi vennero scoperti iniziò tutta un'opera di "impadronirsi" di questi testi. Verso il 1450 verr
nuova traduzione di Archimede fatta da Jacopo da San Cassiano (anche questa piuttosto manchevole) la cosa importante è c
traduzione verrà studiata da Regiomontano e alla base di questa ne fa una revisione che verrà pubblicata nel 1544 a Basilea e
editio princeps di Archimede. Quindi l' Archimede prima della nascita modera è quello mediato dalle traduzioni di Guglielmo
varie revisioni fatte durante l'umanesimo.
L' Archimede che conosciamo oggi invece è quello fornitoci da Heiberg. Il suo approccio però era condizionato dal tipo di visi
all'epoca avevano di Archimede stesso e della matematica greca.

Il metodo.
Questa opera ha la forma di una lettera a Eratostene in cui manda la dimostrazione di due teoremi, e illustra anche l'approcc
associato ai risultati che aveva trovato. Il metodo contiene 15-17 proposizioni, le prime 12 sono relative a risultati che Archin
diffuso.

Come funziona l'approccio di Archimede?

1.1 Il paraboloide e il cilindro

Come funziona dunque questo τρόπος? L'esempio più semplice per illustrarlo è la Proposizione 4 del *Metodo* (cfr. [5, pp. 119 e sgg.]): il paraboloide di rotazione è la metà del cilindro ad esso circoscritto.

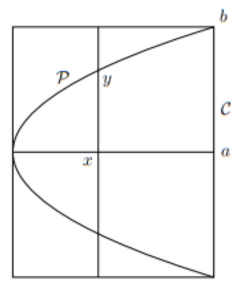


Figura 1: Il paraboloide e il cilindro.

In Fig. 1 è rappresentato un paraboloide $\mathcal{P}$ di asse a e con raggio del cerchio di base uguale a b e il cilindro $\mathcal{C}$ ad esso circoscritto. Indichiamo con $s_x(\mathcal{P})$ la sua sezione con un piano perpendicolare all'asse nel punto x dell'asse e con $s_x(\mathcal{C})$ la corrispondente sezione del cilindro. Si tratta di due cerchi, aventi rispettivamente come raggi y e b. Siccome i cerchi stanno fra loro come i quadrati dei raggi, si avrà:

$$s_x(\mathcal{P}) : s_x(\mathcal{C}) = y^2 : b^2$$

e, trattandosi di una parabola, $y^2 : b^2 = x : a$; in altre parole le sezioni del paraboloide sono proporzionali alla distanza x in cui vengono effettuate:

$$s_x(\mathcal{P}) : s_x(\mathcal{C}) = x : a.$$

Archimede interpreta questo risultato in termini meccanici. Consideriamo una bilancia ideale, a bracci uguali, su uno dei quali si trovino il cilindro e il suo paraboloide inscritto. Se immaginiamo di trasportare $s_x(\mathcal{P})$ all'estremità dell'altro braccio, la relazione appena trovata ci dice che la sezione del

51

paraboloide collocata laggiù farà equilibrio alla sezione del cilindro lasciata ferma dove si trova (Fig. 2).

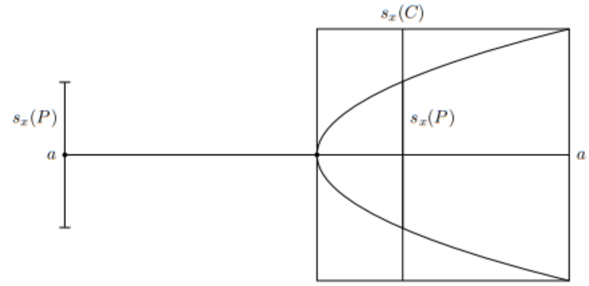


Figura 2: La bilancia virtuale.

Passa dalla singola sezione a tutte.

E questo varrà per ogni singola sezione $s_x(\mathcal{P})$, e quindi per tutte insieme. Ma allora – poiché tutte le sezioni del paraboloide in qualche modo lo "riempiono", così come le sezioni del cilindro "compongono" il cilindro – si avrà che il paraboloide $\mathcal{P}$ collocato all'estremità della bilancia farà equilibrio al cilindro $\mathcal{C}$ lasciato dov'è con il suo asse che occupa uno dei bracci. Ma il centro di gravità del cilindro di trova a metà dell'asse; di conseguenza, per la legge della leva:

← punto delicato

$$\mathcal{P} : \mathcal{C} = a/2 : a$$

e dunque $\mathcal{P} = \mathcal{C}/2$.

Si tratta di una procedura un po' selvaggia: uso di bilance in geometria, concentrazione di una figura (il paraboloide) in un punto, concepire una figura come "composta o riempita" dalle sue sezioni... E, in effetti, Archimede segnala ad Eratostene che

> alcuni risultati che mi si erano in un primo momento rivelati per via meccanica sono poi stati da me dimostrati per via geometrica, dato che lo stabilire risultati per mezzo di questa procedura si situa al di fuori di un contesto dimostrativo ([5, p. 101]).

52

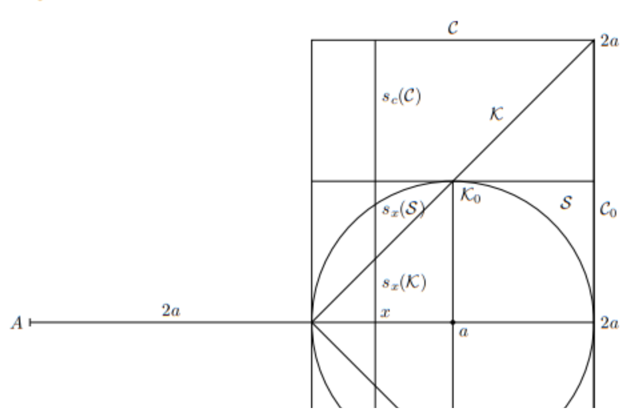
Questo è l'approccio di Archimede, è un approccio molto euristico che contiene almeno due salti argomentativi difficili da ac
In questa dimostrazione sembra effettivamente che Archimede stia "integrando" o per lo meno stia tentando un approccio d
come supposto effettivamente da Heiberg, la cosa importante è però che Archimede non usa sempre questo stesso approcci
dal finito all' "infinito", usa metodi diversi a seconda dei contesti che ha davanti. Pertanto è scorretto parlare di metodo di ir
quanto questo presupporrebbe un metodo alla base, caratteristica assente in Archimede.

Sempre nel Metodo abbiamo:

1.2 Una bilancia più complicata: il caso della sfera

Un approccio simile a quello appena visto viene adottato anche per determinare il rapporto fra la sfera e il cilindro ad essa circoscritto.

Indichiamo come prima con $s_x(\mathcal{F})$ la sezione perpendicolare all'asse di una figura $\mathcal{F}$ nel punto x dell'asse. In Fig. 3 è rappresentata una sfera $\mathcal{S}$ di diametro $2a$ insieme con un cono $\mathcal{K}$ e un cilindro $\mathcal{C}$ aventi raggio di base $2a$ e altezza $2a$. Indicheremo inoltre con $\mathcal{C}_0$ il cilindro circoscritto alla sfera e con $\mathcal{K}_0$ il cono inscritto nella semisfera.



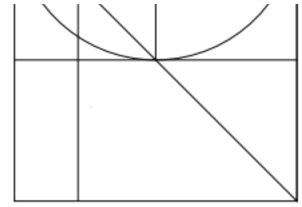


Figura 3: La bilancia virtuale per la sfera.

Notiamo che $s_x(\mathcal{S})$ è un cerchio di raggio y e l'equazione del cerchio massimo della sfera è[3]:

$$y^2 = 2ax - x^2.$$

Di conseguenza:

$$s_x(\mathcal{S}) :: 2ax - x^2$$

e, d'altra parte, le sezioni del cono $\mathcal{K}$ e del cilindro $\mathcal{C}$ sono proporzionali rispettivamente a x^2 e a $4a^2$, quindi:

$$s_x(\mathcal{S}) + s_x(\mathcal{K}) : s_x(\mathcal{C}) = 2ax : 4a^2 = x : 2a.$$

STESSA SITUAZION
Archimede pa
Sezione di
Sfera + C
è qualcosa d
IMMAGINABILE
Cerchi me
Cosa vuol d

Ovvero, in termini di bilancia virtuale, le sezioni del cilindro lasciate dove si trovano fanno equilibrio alle sezioni della sfera e del cono prese insieme e trasportate nel punto A, collocato all'estremità della bilancia a distanza $2a$ dal fulcro. Ne segue, ragionando come nel caso del paraboloide, che $\mathcal{S} + \mathcal{K}$ equilibra il cilindro $\mathcal{C}$ dalle distanze $2a$ e a e dunque, per la legge della leva:

$$(\mathcal{S} + \mathcal{K}) : \mathcal{C} = a : 2a.$$

???

Ne segue che la sfera e il cono, presi insieme, sono la metà del cilindro e che, dato che il cilindro è il triplo del cono, la sfera risulta uguale a metà del cono:

$$2(\mathcal{S} + \mathcal{K}) = \mathcal{C} = 3\mathcal{K} \longrightarrow 2\mathcal{S} = \mathcal{K}.$$

Da questo segue immediatamente che la sfera è quadrupla del cono $\mathcal{K}_0$ inscritto nella semisfera che, a sua volta, è $1/6$ del cilindro $\mathcal{C}_0$ circoscritto alla sfera e quindi $\mathcal{S} = 4/6\ \mathcal{C}_0$:

La sfera è uguale a due terzi del cilindro ad essa circoscritto.

Quando Archimede utilizza questo approccio EURISTICO, utilizza anche delle proprietà specifiche della figura, non si può quir
metodo. Questo testo comunque risulta il più avanzato dal punto di vista dell'astrazione.

Cos'è per la geometria greca una dimostrazione di Geometria di misura?

Per cercare di rispondere a questa domanda presentiamo rapidamente la proposizione 1 della *Misura del cerchio*:

$\boxed{\text{Prop. 1 Misura del cerchio}}$

Teorema 2.1. *Un cerchio è uguale al triangolo rettangolo avente per cateti il raggio e la circonferenza rettificata.*

Doppia Riduzi
Assurdo, Tipo E

Dimostrazione. Indichiamo con $T(x, y)$ il triangolo rettangolo di cateti x e y. Il cerchio Γ abbia circonferenza γ e raggio r. Se, per assurdo, non fosse $T(\gamma, r) = \Gamma$ dovrebbe essere

(1) $T(\gamma, r) < \Gamma$, oppure

(2) $T(\gamma, r) > \Gamma$.

Caso (1). In Fig. 4 si considerino i quadrati q, Q rispettivamente inscritti e circoscritti al cerchio Γ; poiché $\Gamma < Q = 2q$, ne segue che, togliendo dal cerchio il quadrato inscritto, si toglie più della metà del cerchio stesso. Analogamente, se si dividono gli archi a metà inscrivendo un ottagono, e si tolgono dai segmenti σ i triangoli τ, si toglie più della metà dei segmenti.

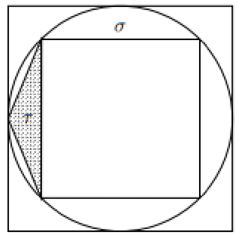


Figura 4: L'approssimazione del cerchio con poligoni inscritti.

Proseguendo in questo modo, si può arrivare a un poligono inscritto P_i tale che $\Gamma - P_i$ sia minore di una qualunque quantità E assegnata[4]. Si determini allora un poligono inscritto P_i tale che

$$\Gamma - P_i < \Gamma - T(\gamma, r) \quad \text{ovvero} \quad P_i > T(\gamma, r).$$

Ma, indicando con a_i l'apotema e con p_i il perimetro del poligono, dovrebbe essere

$$P_i = T(p_i, a_i) > T(\gamma, r),$$

[4] Questo principio è codificato nella proposizione X.1 degli *Elementi* di Euclide: "Date due grandezze disuguali, se dalla maggiore si toglie continuamente una parte maggiore della sua metà, alla fine rimarrà una grandezza minore di qualunque grandezza preassegnata" ed utilizzato largamente nella geometria di misura prearchimedea, in particolare da Eudosso (IV sec. a.C.) i cui risultati sul cerchio, le piramidi, i coni e la sfera si trovano nel XII libro degli *Elementi*.

e siccome $a_i < r$ e $p_i < \gamma^5$ si ottiene una contraddizione dato che

$$T(p_i, a_i) < T(\gamma, r).$$

Caso (2). Si può dimostrare che anche per i poligoni circoscritti esiste una procedura costruttiva che permette di arrivare a un poligono circoscritto P_c tale che $P_c - \Gamma$ sia minore di una qualunque quantità E assegnata. In particolare si determini P_c in modo che

$$P_c - \Gamma < T(\gamma, r) - \Gamma \quad \text{ovvero} \quad P_c < T(\gamma, r).$$

Ma, indicando con p_c il perimetro del poligono, dovrebbe essere

$$P_c = {}^{\circledast}T(p_c, r) < T(\gamma, r)$$

$\circledast$ $T(p_c, r)$ = triang[olo] che ha altezz[a] p_c.

e siccome $p_c > \gamma^6$ si ottiene una contraddizione dato che deve essere

$$T(p_c, r) > T(\gamma, r).$$

Di conseguenza, non resta che una sola possibilità: $\Gamma = T(\gamma, r)$. □

Perché ha senso? poi non esi[ste]

• qui si dà per scontato che le "grandezze" siano complete.

nella matematica greca questo concetto non [è] definito.

Le grandezze si possono confrontare, ma non viene mai detto da nessuna parte come si sommano o altro.
Ci sono delle costanti nell'approccio che variano di caso in caso. Vediamo la **quadratura della parabola**. Per quadrare la para[bola]
usa due dimostrazioni: una con le bilance e una in modo geometrico.

QUADRATURA DELLA PARABOLA

Segmento di parabola

Torniamo ad Archimede (figura 4). Nella *Quadratura della parabola* troviamo un'applicazione della doppia riduzione molto meno aderente al modello astratto o al

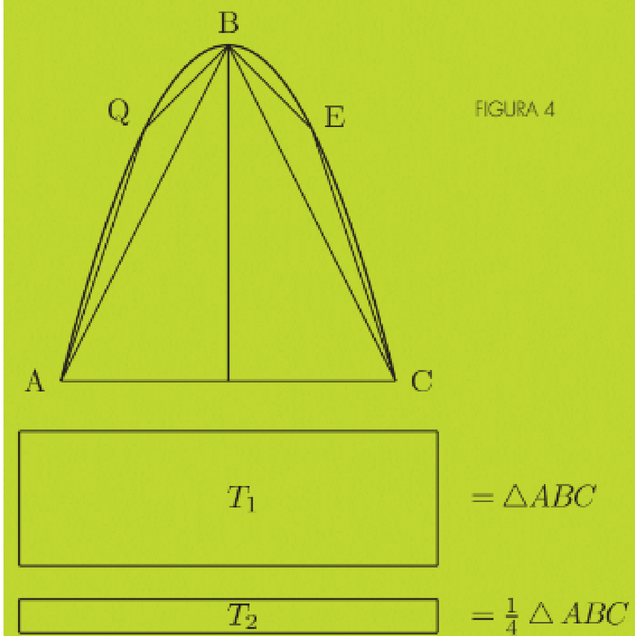


FIGURA 4

procedimento dei *Conoidi e sferoidi*. Nel segmento di parabola ABC sia inscritto il triangolo ABC avente stessa base e stessa altezza del segmento ("stessa altezza" significa che il punto B è il "vertice" del segmento parabolico, cioè il punto più lontano dalla base AC sulla curva parabolica tra A e C; in altre parole, la tangente alla parabola al punto B è parallela alla base AC). Archimede dimostra che il segmento di parabola ABC è quattro terzi del triangolo ABC.

Poniamo che la superficie T_1 sia uguale al triangolo ABC. Il segmento parabolico ABC risulta composto dal triangolo ABC e dai due segmenti di parabola residui, AQB e BEC. Siano Q e E i vertici di questi segmenti rispettivamente e si costruiscano i triangoli AQB e BEC. Si dimostra che i due triangoli AQB e BEC costruiti dentro i segmenti, presi insieme, sono uguali a un quarto di T_1. Consideriamo la superficie T_2 uguale a questi due triangoli: avremo che $T_2 = 1/4T_1$. Nei quattro segmenti residui tra AQ, QB, BE, EC, si costruiscano quattro triangoli nello stesso modo. Si dimostra che questi quattro triangoli presi insieme sono un quarto di T_2; poniamoli uguali alla superficie T_3. Così si può continuare a costruire i triangoli nei segmenti residui. La figura inscritta *I*, costruita in questo modo, è la somma della serie geometrica di ragione 1/4:

$$I = T_1 + \frac{1}{4}T_1 + \frac{1}{4^2}T_1 + \cdots + \frac{1}{4^n}T_1 + \cdots$$

Noi concluderemmo subito che l'intero segmento parabolico è uguale a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}T_1 = \frac{4}{3}T_1.$$

Archimede, non disponendo né del concetto di limite né tantomeno di quello di somma di una serie (che se ne deriva), fa ricorso alla doppia riduzione all'assurdo. Sia *P* il segmento di parabola e sia $K = 4/3T_1$. Constata:

1. che $P - I$ può essere minore di qualsiasi area data [3];
2. $K > I$;
3. $K - I$ può essere minore di qualsiasi area data.

Allora, se $P > K$, da (1) si può prendere una figura inscritta I in modo che $P > I > K$, il che è contro (2). Se invece fosse $P < K$, si potrebbe prendere I in modo che risulti $P < I < K$, il che contraddice il fatto che I è una figura inscritta a P. Quindi, $P = K$.

Come nel caso della XII.2 di Euclide, in questa nella dimostrazione di Archimede viene utilizzato un trucco. Quindi questa unif dimostrazione è tutt'altro che uniforme. La geometria di misura di Archimede è per certi versi simile a quello che facciamo n aspetti è decisamente legata all'individualità delle figure che vengono trattate.

Gli oggetti che Archimede tratta non sono generali, inoltri gli approcci che adotta sono plasmati rispetto alla singola figura o affronta.