

MATEMATICA GRECA V a.C. - VI d.C.

E' opportuno distinguere tre periodi.

- 1) Il primo periodo lo collochiamo dal **550 a.C. al 323 a.C.**, anno della morte di Alessandro Magno e vede la massima importanza economica e politica delle città greche e delle loro colonie e lo sviluppo del pensiero matematico per opera di abitanti di queste città. Talora per questi sviluppi si usa il termine matematica ellenica.
- 2) Il secondo periodo, collocato dal **323 a.C. al 150 a.C.**, vede la massima fioritura della matematica all'interno dello sviluppo della grande scienza ellenistica e della cultura ellenistica nell'ambito dei regni derivati dalla suddivisione dell'impero di Alessandro, quando le città della civiltà greca hanno perso gran parte della loro importanza politica.
- 3) Il terzo periodo va dal **150 a.C. al VI secolo** e vede il progressivo declinare delle conoscenze matematiche che sopravvivono con crescenti difficoltà negli ambienti culturali che mantengono viva la tradizione del periodo precedente servendosi della lingua greca.

CHE DIFFERENZA C'È CON LA MATEMATICA PRE-GRECA

La matematica greca era molto più sofisticata di quella sviluppata dalle precedenti culture quali quella egiziana e babilonese, poiché tali precedenti culture utilizzavano il ragionamento induttivo che sfrutta le osservazioni ripetute per fondare regole di calcolo che spesso vengono utilizzate senza cognizione della loro portata logica. In altre parole, la matematica pre-greca utilizza principi generali e li applica ad esempi specifici. Il ragionamento induttivo è astratto. La matematica greca antica, all'opposto, si basava sul ragionamento deduttivo, che sfrutta gli esempi particolari e li applica ai principi generali. Il ragionamento deduttivo è più sostanzialmente concreto.

CARATTERISTICHE DELLA MATEMATICA GRECA

- Letteratura → testi → filologia
- Si sviluppa in un arco di tempo molto lungo → unità interna → problema delle due medie proporzionali
- matematica pratica e teorica
- si sviluppa attorno ai centri di potere
- cosa l'auto-limita? → oggetti individui/oggetti classe
- problema delle $\frac{3}{4}$ linee risolto poi da Cartesio
- teoria delle coniche, scoperta grandezze incommensurabili, teoria delle proporzioni
- campo aritmetico → numero
- Gli aspetti aritmetico-algebrico-geometrico sono separabili
- processo di tradizione → Heiberg, Tannery, Hultsch, Foulquier

PRINCIPALI MATEMATICI GRECI

1) 1° PERIODO

- **VI a. C.** Si ritiene che la matematica greca inizia con **Pitagora** e **Talete**
- **V a.C Ippocrate di Chio** → lo conosciamo grazie a **Simplicio**
 - duplicazione del cubo
 - quadratura del cerchio
 - quadratura delle lunule

- **IV a. C Eudosso di Cnido**
 - metodo di esaustione
 - teoria delle proporzioni, uguaglianza tra due rapporti → definizione 5 libro V Euclide
 - Menecmo**
 - teoria delle coniche

2) 2° PERIODO → periodo di massimo sviluppo

- **340 a.C. Euclide**
- **287-212 a.C. Archimede**
- **III-II a. C Apollonio**

3) 3° PERIODO → declino della matematica

- **II a. C. Teodosio**
Ipparco → astronomia e teoria Tolemaica
- **I a.C Vitruvio** → mondo romano → De Architectura
- **I d. C. Erone di Alessandria**
- **II d. C. Menelao** → trigonometria sferica
- **III d.C. Diofanto**
- **IV d.C. Pappo**
Teone e Ipazia
- **V d.C. Proclo** → commenta Euclide
Eutocio → commenta Apollonio e Archimede

Tutto il sapere matematico greco su cui si basa la conoscenza del '500 è compreso nelle seguenti opere: gli Elementi di Euclide, le opere di Archimede, le Coniche di Apollonio, l'Arithmetica di Diofanto, l'Almagesto di Tolomeo e le Collezioni matematiche di Pappo.

EUCLIDE

QUANDO COLLOCARLO? → **340 a.C**

OPERE

- **Elementi**
- Catiottica
- Ottica
- Dati
- Porismi
- Trattati di musica teorica
- I Fenomena
- Le Coniche

ELEMENTI

STRUTTURA DEL LIBRO

- 1) proprietà elementari del triangolo e del parallelogramma per finire con Teorema di Pitagora;
- 2) proprietà elementari di quadrati e rettangoli;
- 3) proprietà elementari del cerchio;
- 4) costruzione dei poligoni regolari fino all'esagono, decagono e pentadecagono;

- 5) teoria delle proporzioni tra grandezze;
- 6) similitudine tra triangoli e parallelogrammi;
- 7) teoria dei numeri;
- 8) teoria dei numeri;
- 9) teoria dei numeri;
- 10) incommensurabilità, classificazione di grandezze incommensurabili;
- 11) geometria solida teoremi su rette sullo spazio e prismi;
- 12) cono piramide e loro rapporti, cono- cilindro, piramide- prisma, rapporti tra le sfere;
- 13) costruzione dei poliedri regolari e dim. Che ne esistono solo 5 (solidi platonici);

TRADIZIONE

- a) Erone di Alessandria → I-II d.C.
- b) Teone di Alessandria → IV d.C. → tranne codice P
- c) Arabi → XI sec → Adelardo di Bath, Ermanno di Carinzia, Gerardo da Cremona → si rifanno a Erone
- d) Heiberg → fine 1800 → si rifà a Teone → disputa con Arabi
- e) Traduzioni latine → Boezio, Campano da Novara, Zamberti, Commandino
- f) Heath

APPROFONDIMENTI

- a) problema postulato 5
- b) proposizione 2 libro V
- c) proposizione 2 libro III + tangenti e corde del cerchio
- d) struttura delle proposizioni greche
- e) definizioni 5 e 9 del V libro
- f) libro VI proposizione 23, 17, (definizione 5 e prop1 solo enunciati)
- g) libro XII proposizione 2

INFLUENZE

- Sarà solo nell'Ottocento e all'inizio del Novecento, con l'emergere delle geometrie non euclidee che questa immagine di Euclide e della conoscenza matematica come conoscenza-modello comincerà a cambiare profondamente.
- Negli Elementi troviamo quelle caratteristiche di chiusura e finitezza dominanti nel pensiero greco. Per esempio, la linea retta non è mai considerata nella sua interezza, e un segmento di linea "può" essere esteso nelle due direzioni. In tal senso Euclide pensa alla retta non come attualmente illimitata, ma come potenzialmente illimitata.
- Il suo significato nella storia del pensiero occidentale è molto più di quello di un semplice trattato di aritmetica e geometria e costituisce piuttosto il paradigma del ragionamento rigoroso e della conoscenza scientifica. Da inizio al sistema assiomatico della matematica. Gli Elementi sono stati considerati il più attendibile manuale di matematica per secoli e secoli. L'importanza di questo capolavoro sta anche nel fatto che Euclide basa su pochi assiomi fondamentali (in particolare su cinque che riguardano la geometria) tutta la matematica elementare e dà prova di un uso esemplare della logica matematica esposizione rigorosa dei principi e delle tecniche che devono essere utilizzati nella matematica con dimostrazione.

ARCHIMEDE

LEGGENDE LEGATE ALLA SUA VITA → 287-212 a.C.

OPERE

- Quadratura della parabola (QP) → dedica a **Dositeo**
- Sfera e Cilindro I e II (SC I e II) → dedica a **Dositeo**
- Spirali (LS) → dedica a **Dositeo**
- Conoidi e Sferoidi (CS) → dedica a **Dositeo**
- Metodo Meccanico (MM) → dedica a **Eratostene**
- Arenario (NA)
- Misura del Cerchio (DC)
- Equilibrio dei Piani I e II (EP I e II)
- Galleggianti (CF)

TRADIZIONE

1. **CODICE A** → **Heiberg** fece la sua prima edizione nel 1880 attraverso **codice laurenziano** e da questo deriva editio princeps (1544)
 - SC I-II
 - DC
 - EP I-II
 - CS
 - LS
 - NA
 - QP
2. **CODICE B(gotico)** → **Valentine Rose** scoprì **codice ottoboniano 1850** fatto da **Guglielmo Moerbeke**
 - CF I-II
 - EP
 - QP
3. **CODICE C(palinsesto)** → libro di preghiera, scoperto nel 1906 da **Heiberg**, approccio euristico
 - EP
 - CF I-II
 - MM
 - LS
 - SC
 - DC
 - STOMACHION

APPROFONDIMENTI

- Metodo proposizione 4 →
 - il paraboloido è la metà del cilindro circoscritto
 - la sfera è $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto
 - calcolo dell'unghia
- misura del cerchio proposizione 1 → un cerchio è uguale al triangolo rettangolo avente per cateti il raggio e la circonferenza rettificata
- conoidi e sferoidi proposizione 19 → un segmento di paraboloido è la metà del cilindro circoscritto
- quadratura della parabola → parabola è $\frac{4}{3}$ triangolo

APOLLONIO

QUANDO COLLOCARLO? → Fine III inizio II sec a.C.

OPERE

- Separazione di un rapporto (due libri giunti a noi in una traduzione in arabo);
- **Le coniche** (opera in otto libri dei quali quattro sopravvivono nella versione greca originale e sette in una traduzione in arabo, l'ottavo libro essendo perduto, ma ricostruito per via deduttiva dallo scienziato arabo ibn al-Haytham, chiamato in Occidente Alhazen).

Di altre opere, perdute, restano solo i titoli:

- Separazione di un'area
- Sezione determinata
- Tangenze
- Inclinazioni
- Luoghi piani

COSA FA?

- nuova definizione di cono
- concetto di diametro e ordinata
- come nasce la conica
- caso della parabola, ellisse e iperbole
- proprietà sintomatiche
- sezione di rapporto o area
- geometria di luogo

CONICHE

- 1) Il primo libro si compone di 60 proposizioni e si occupa delle sezioni coniche di triangolo, cerchio, ellisse, parabola e iperbole). Vi si teorizza l'uso di un unico cono per generare ellissi, parabole e iperboli modificando l'inclinazione del piano di intersezione.
- 2) Nel secondo, composto da 53 proposizioni, Apollonio si occupa dello studio delle tangenti alle coniche.
- 3) Il terzo contiene 56 proposizioni sui luoghi solidi. Il libro contiene la soluzione del problema di Pappo, così generalizzato da Cartesio: Date tre rette giacenti in un piano, trovare il luogo geometrico di un punto P che si muove in modo che il quadrato della distanza di P da una di queste rette sia proporzionale al prodotto delle distanze delle altre rette.
- 4) Il libro quarto si compone di 57 proposizioni. Apollonio spiega di voler dimostrare «in quanti modi le sezioni coniche possono incontrarsi l'una con l'altra senza coincidere totalmente».
- 5) Il quinto libro si compone di 77 proposizioni dedicate principalmente alle tangenti e alle normali delle sezioni coniche.
- 6) Il libro sesto si occupa in 33 proposizioni di «coniche e segmenti di coniche uguali e disuguali, simili e dissimili, oltre ad altre questioni trascurate da coloro che sono venuti prima di me», ancora citando Apollonio.
- 7) Il libro settimo si occupa di diametri coniugati e contiene «molte nuove proposizioni concernenti diametri di sezioni».
- 8) L'ultimo libro è noto soltanto grazie a un commento di Eutocio.

TRADIZIONE

- Libri 1-4 in greco → **Eutocio**(VI), manoscritto greco→ **Filelfo**(XV)
- libri 5-7 **arabi**
- libro 8 perduto
- Edizione completa **Edmund Halley**(1710)

INFLUENZE

- 1) Prima di Apollonio l'ellisse, la parabola e l'iperbole venivano costruite come sezioni di tre tipi nettamente distinti di coni circolari retti, a seconda che l'angolo al vertice fosse acuto, retto o ottuso. Apollonio, per la prima volta, dimostra che non è necessario prendere sezioni perpendicolari ad un elemento del cono e che da un unico cono è possibile ottenere tutte e tre le varietà di sezioni coniche, semplicemente variando l'inclinazione del piano di intersezione.
- 2) Una seconda importante generalizzazione si ha quando Apollonio dimostra che non è necessario che il cono sia un cono retto (cioè un cono il cui asse sia perpendicolare alla base), ma che può essere anche un cono circolare obliquo o scaleno.
- 3) Infine, Apollonio avvicina ulteriormente le antiche curve al punto di vista moderno sostituendo il cono a una falda con un cono a doppia falda. Questo cambiamento fa sì che l'iperbole assuma la forma della curva a due rami. I matematici antichi parlavano spesso di "due iperboli" piuttosto che di "due rami" di un'unica iperbole, ma in entrambi i casi si riconosceva la duplicità della curva.
- 4) E' lo stesso Apollonio ad introdurre i termini "ellisse", "iperbole" e "parabola" in relazione alle sezioni coniche: essi rappresentano adattamenti di termini che sono già stati usati precedentemente nella soluzione delle equazioni di secondo grado mediante l'applicazione di aree.
- 5) Apollonio è iniziatore quindi della classificazione dei problemi con specifici metodi risolutivi.

PAPPO

QUANDO COLLOCARLO? → Inizio del IV d. C.

OPERE → **Collezione Matematica**→ Tesoro dell'Analisi

CARATTERISTICHE→

- Pappo fa una netta distinzione tra problemi "piani", "solidi" e "lineari": i primi sono costruibili solo con cerchi e rette, i secondi sono risolvibili mediante l'uso di sezioni coniche e l'ultimo genere di problemi richiede curve diverse da rette, cerchi e coniche.
- Il Libro VII riveste un ruolo primario per la storia della matematica, nel campo della geometria analitica. Viene trattato il "problema di Pappo"; Pappo non approfondì oltre lo studio di questi luoghi geometrici, ma fu senz'altro questo problema, ripreso in seguito da **Descartes**, il punto di partenza per l'elaborazione della geometria analitica.
- In questo libro vi è poi un'esposizione completa del metodo analitico e viene descritta una raccolta di opere precedenti che hanno utilizzato il metodo di analisi e di sintesi, nota come il *Tesoro dell'analisi*. Tra le opere costituenti il *Tesoro dell'analisi* Pappo elenca
 1. trattati sulle coniche di Aristeo, di Euclide e di Apollonio.
 2. *Sezione di un rapporto* di Apollonio
 3. i trattati *Sulle medie* di Eratostene

4. *Sui porismi* di Euclide.
5. Un altro teorema che compare qui per la prima volta è quello che solitamente viene indicato col nome di Pappo Guldino.

TRADIZIONE

Originale di Pappo → codice sconosciuto → codice vaticano → Jones

INFLUENZE

- 1) Quest'opera è molto importante in quanto ci fornisce una preziosa documentazione storica concernente alcuni aspetti della matematica greca che altrimenti sarebbero rimasti sconosciuti
- 2) Le *Collezioni matematiche* di Pappo è l'ultimo trattato matematico veramente significativo dell'antichità, poiché il tentativo da lui fatto di ridare alla geometria nuova vitalità non fu coronato dal successo. Si continuarono a scrivere opere matematiche in greco per un altro millennio circa, ma gli autori che vennero dopo Pappo non raggiunsero mai il suo livello. Le loro opere hanno quasi esclusivamente la forma di commento a trattati anteriori.
- 3) Le *Collezioni* contengono anche dimostrazioni alternative e lemmi supplementari relativi a teoremi di Euclide, Archimede, Apollonio e Tolomeo. Infine, il trattato presenta nuove scoperte e generalizzazioni che non è dato trovare in nessuna opera precedente.
- 4) Il libro VII riveste un ruolo primario per la storia della matematica, nel campo della geometria analitica. La geometria greca si era limitata, fino a quel momento, allo studio di curve piane; è pertanto significativo il fatto che Pappo presenti in questo libro un problema generalizzato che comporta un numero infinito di nuove curve.
- 5) Teorema Pappo-Guldino di cui Pappo era orgoglioso di questo teorema estremamente generalizzato: esso comprendeva infatti "un gran numero di teoremi di ogni sorta concernenti curve, superfici e solidi, i quali venivano dimostrati tutti simultaneamente mediante un'unica dimostrazione". Tale teorema è il più generale che si conosca nell'antichità relativamente al campo dell'analisi infinitesimale.

IN PIÙ'

- La **quadratura del cerchio**, o il problema di costruire un quadrato avente un'area uguale a quella di un cerchio dato con uso esclusivo di riga e compasso.
- Il problema della **duplicazione del cubo**, ossia la costruzione di un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di spigolo dato con uso esclusivo di riga e compasso.
- La **trisezione di un angolo**, o il problema di dividere un dato angolo in tre parti uguali con uso esclusivo di riga e compasso.
- Il **metodo di esaustione** è un procedimento utile a calcolare aree di varie figure geometriche piane. Consiste nella costruzione di una successione di poligoni che convergono alla figura data. L'area della figura risulta essere quindi il limite delle aree dei poligoni.