MOTI CENTRALI

giovedì 11 aprile 2024 14:09

Es. tipici

1 Trovare il numero di orbite circolari al variare di c (e α)

2 Fare il ritratto di fase

3 Date delle cond. iniziali dipendenti da parametri [$x(0) = (a,b)$, $\dot{x}(0) = (c,d)$] trovare tutti i valori di tali parametri affinché l'orb. con quelle condizioni iniziali sia circolare

4 Dato $\rho(0) =$ numero Trovare tutti i valori di $\dot{\rho}(0)$ affinché l'orb sia limitata

5 Date delle condizioni iniziali trovare l'inf e il sup della dist. dell'orbita dall'origine O

6 Trovare i valori del mom. angolare c per i quali si ha un'orb. circolare $x_c(t)$ con en. totale nulla

1 # orb. circolari

Step. 1 $f_{eff}(\rho) = f(\rho) + \frac{c^2}{m\rho^3} = 0$ $\rightsquigarrow$ trovo un'eq. in ρ.

Step 2
- se questa eq è polinomiale di grado 2 $\longrightarrow$ risolvo l'eq. (14-02-2024, 20-09-2023)
- se questa eq. è polinomiale di grado > 2 $\longrightarrow$ uso Cartesio e guardo le var. di sgn (19-06-2023, 20-07-2023)
- se questa eq non è polinomiale $\longrightarrow$ studio $p(\rho) \cap$ la funz. non polinomiale (18-04-2023, 25-01-2024)

Step 3 Studio $p(\rho)$
- guardo i lim.
- guardo $p'(\rho)$
- disegno $p(\rho)$
- guardo le intersezioni di $p(\rho)$ con l'asse x

$\downarrow$

mi da' il numero esatto di orb. circolari

2 Ritratti di fase

Step 1 Calcolo $V_{eff}(\rho) = -\int f(\rho)\, d\rho + \frac{c^2}{2m\rho^2}$

Step 2 Calcolo i lim. di $V_{eff}(\rho)$ a 0^+ e a $+\infty$

Step 3 Disegno $V_{eff}(\rho)$

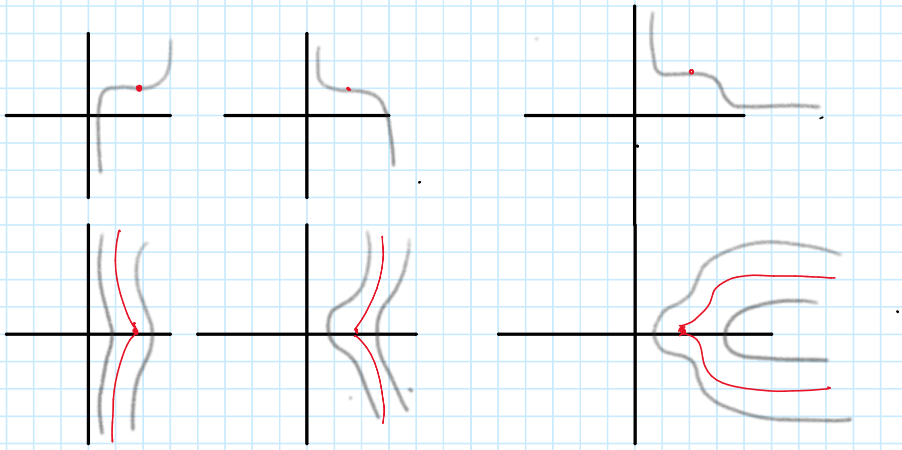
⚠ se dal pto 1 ho trovato che ho 1 pto st.

e i lim. vanno uno a $+\infty$, l'altro a $-\infty$

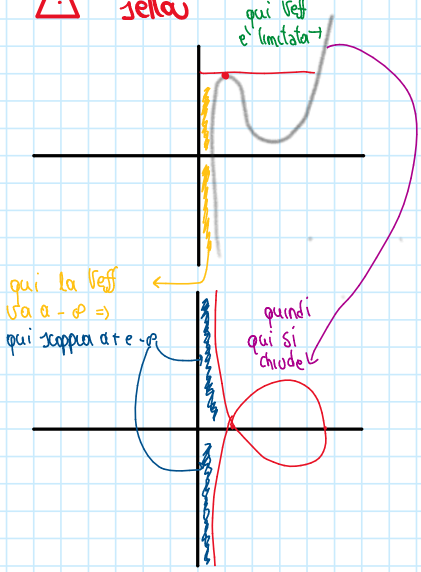
$+\infty$ 0

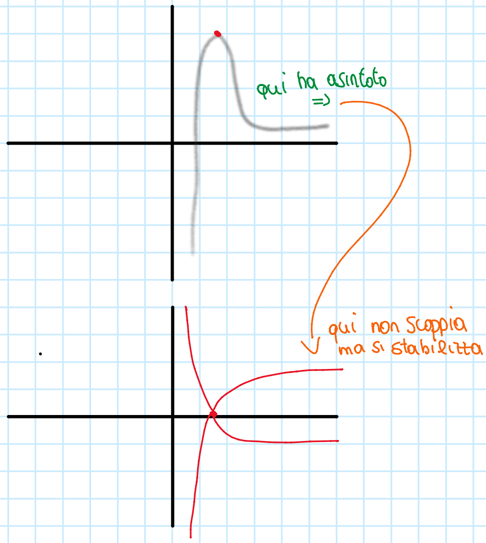
$-\infty$ 0 } o viceversa

$\Rightarrow$ ho un flesso



⚠ sella


qui Veff
e' limitata
qui la Veff
va a −∞ ⇒
qui scoppia a t e −∞
quindi
qui si
chiude


qui ha asintoto ⇒
qui non scoppia
ma si stabilizza

3 orbite circolari

18-04-2023, 20-07-2023, 20-09-2023, 25-01-2024, 18-06-2022, 14-09-2022, 30-01-2023, 20-02-2023

caso 1 siamo in $\hat{e}_\theta, \hat{e}_\rho$

caso 2 siamo in $\hat{e}_1, \hat{e}_2$

In ogni caso abbiamo il seguente sistema $\begin{cases} x(0) = \rho(0)\,\hat{e}_\rho \\ \dot{x}(0) = \dot{\rho}(0)\,\hat{e}_\rho + \dot{\theta}(0)\rho(0)\,\hat{e}_\theta \end{cases}$

cond. necessaria per avere orb circolari $\dot{\rho}(0) = 0$

$\dot{\theta}(0) = \dfrac{c}{m\rho(0)^2} \Rightarrow c = \dot{\theta}(0)\, m\, \rho(0)^2$

caso 1 (20-02-2023)

$\begin{cases} x(0) = \frac{1}{2}\hat{e}_\rho \\ \dot{x}(0) = a\,\hat{e}_\rho + b\,\hat{e}_\theta \end{cases} \Rightarrow$

- $\rho(0) = \frac{1}{2}$
- $a = \dot{\rho}(0) = 0$
- $b = \dot{\theta}(0)\rho(0) = \dot{\theta}(0)\frac{1}{2} = \dfrac{c}{\rho(0)^2} = \dfrac{c}{\frac{1}{4}} = 4c \Rightarrow c = \dfrac{b}{4}$

Per trovare b faccio $f_{eff}(\rho(0)) = 0$ (sostituendo al posto di c $b/4$)

caso 2

$x(0) = d\hat{e}_1 + \ell\hat{e}_2 \qquad x(0) = (d, \ell)$

$\dot{x}(0) = a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 \qquad \dot{x}(0) = (a, b)$

step 1 $\rho(0) = |x(0)| = \sqrt{d^2+\ell^2}$

step 2 $\hat{e}_\rho = \dfrac{x}{\rho(0)} = \dfrac{(d,\ell)}{\sqrt{d^2+\ell^2}} = \dfrac{d}{\sqrt{d^2+\ell^2}}\hat{e}_1 + \dfrac{\ell}{\sqrt{d^2+\ell^2}}\hat{e}_2$ (a volte $\hat{e}_\rho$ diventa $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_\theta \to \hat{e}_2$ e i conti si semplificano)

step 3 $\hat{e}_\theta = \hat{e}_3 \times \hat{e}_\rho$

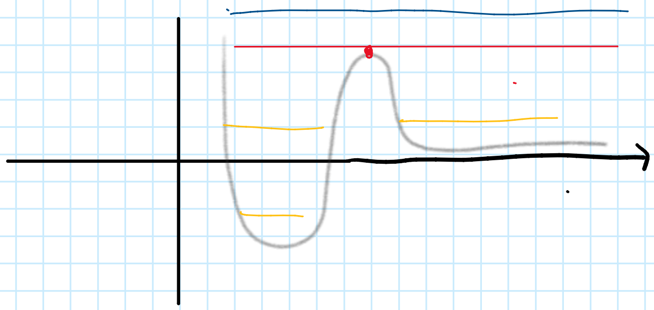
step 4 $a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 = \dot{\rho}(0)\,\hat{e}_\rho + \dot{\theta}(0)\,\rho(0)\,\hat{e}_\theta$ ($\hat{e}_\rho$ ed $\hat{e}_\theta$ sono quelli sopra)

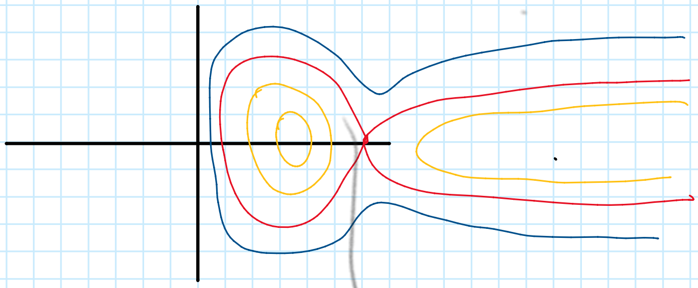
step 5 $\dot{\theta} = \dfrac{c}{m\rho^2(0)} \Rightarrow c = \dot{\theta}\, m\, \rho(0)^2$ ricorda sempre $\dot{\rho}(0) = 0$

step 6 $f_{eff}(\rho(0)) = 0$ (sost. nell'eq al posto di c) e ricavo b

4 orb limitate

19-06-2023





le orb limitate vivono dentro la separatrice

step

è il valore di en. relativo al max di V_{eff}. (quello in rosso)

1) Devo imporre che $E(\rho(0)) < \bar{E}$

2) Per trovare il max di V_{eff} devo fare $-V'_{eff} = f_{eff}$
cioè devo vedere dove si annulla f_{eff}, chiamo questo pto a
$\bar{E} = E(a, 0)$

3) ora a è un pto d'inversione $\Rightarrow$ $\bar{E} - V_{eff}(a) = 0$ $\Rightarrow$ $\bar{E} = V_{eff}(a)$

4) $E(\rho(0)) = \frac{1}{2} m |\dot{\rho}(0)|^2 + V_{eff}(\rho(0))$

5) Impongo $E(\rho(0)) < \bar{E} = V_{eff}(a)$

5 inf e sup ⇝ ρ_{min} e ρ_{max} (14-02-2024, 14-09-2023)

step 1 Guardo V_{eff} e il ritr. di fase

step 2 Calcolo il livello di energia relativo alle cond. iniz.

$E_0 = \frac{1}{2} m |\dot{\rho}(0)|^2 + V_{eff}(\rho(0))$

Quindi come per le orb. circolari (es 3) devo ricavare $\rho(0)$, $\dot{\rho}(0)$, c
e i valori ottenuti li sostituisco nell' eq. sopra

step 3 Capire dove si trova $\rho(0)$ nel disegno del pto 1

può trovarsi a dx o a sx del max ad esempio

⚠ a volte ρ_{min} e ρ_{max} si evincono dal disegno

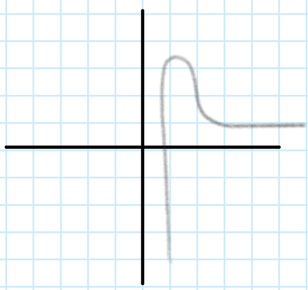
step 4 Impongo $E_0 = V_{eff}(\rho_{max})$ V $E_0 = V_{eff}(\rho_{min})$ e ottengo $\rho_{max/min}$

E e' integr. primo ($\rho_{max/min}$ e' pto di inv ⇒ $E - V_{eff}(\rho_{min/max}) = 0$)

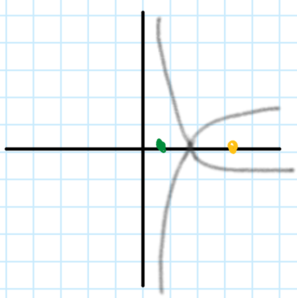
⚠ devo verificare che il ρ_{max} trovato < pto di max di V_{eff}.

ρ_{min} > pto di min di V_{eff}.

⚠ se ottengo 2 valori di ρ_{min}, ρ_{max} devo capire quale prendere
e questo dipende da dove si trova $\rho(0)$ cioè a dx o a sx del pto di max/min



$$\boxed{T = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{\frac{m}{2} \left(\frac{1}{E - V(x)}\right)}\, dx}$$



posso essere qui V qui

- $\rho_{min} = 0$ $\rho_{max} = \text{valore}$
- $\rho_{min} = \text{valore}$ $\rho_{max} = +\infty$

6

11-07-2022

⚠ $F(x) = \frac{-K}{\rho^2} x = \underbrace{\left(\frac{-K}{\rho}\right)}_{f(\rho)} \underbrace{\left(\frac{x}{\rho}\right)}_{e_\rho}$

Periodo $T = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}|}$ $\dot{\theta} = \frac{c}{m \rho_0^2}$