LAGRANGIANE, EQUILIBRI E STABILITA'

giovedì 23 maggio 2024 15:06

Tipi di esercizi

0) Scrivere le eq. di Lagr. ✓

1) Scrivere L ✓

2) Trova conf. eq + stabilità ✓

3) Freq piccole oscillazioni ✓

4) $\mathcal{L}^R$ con Routh (+pti eq + stab + rit. di fase) ✓

5) Potenziale particolare (trasc, Coriolis, centrif.)

6) Mostrare che ∃! config. di eq. stabile

7) $L \sim L'$

8) 14-02-2024 ✓

TIPOLOGIA D

Equazioni di Lagrange

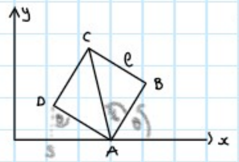
$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k}$$

$Q_k = \sum_{i=1}^{N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ =: forze generalizzate

$q = (q_1, \dots, q_n)$ =: vettore lagrangiano

Es

Calcolare le eq. del moto usando le eq. di Lagrange



coord. Lagr $q = (s, \theta)$

step 1

Scrivere le coord. dei pti

step 2

Calcolare $\boxed{T = \frac{1}{2} m |v_{P_i}|^2}$ nota questa non posso usarla se ho corpi rigidi

nota posso usare Konig: $\boxed{T = \frac{1}{2} m |v_B|^2 + \frac{1}{2} \omega \cdot I_B \omega}$ V $\boxed{T = \frac{1}{2} m |v_{O'}|^2 + m\omega \cdot ((B-O') \times v_{O'}) + \frac{1}{2} \omega I_{O'} \omega}$

step 3

Calcolare Q_k

in questo caso $\boxed{Q_s = \sum F_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial s} \qquad Q_\theta = \sum F_i \frac{\partial x_i}{\partial \theta}}$

esempio $\overbrace{-mg\hat{e}_2 \cdot \boxed{\frac{\partial (A-O)}{\partial s}} = -mg\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 = 0}^{\text{Per il pto A}}$ + pto B + pto C + pto D

$\frac{\partial (s\hat{e}_1)}{\partial s} = \hat{e}_1$

nota derivo come se s e θ non dipendessero da t

Step 4

Calcolo $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ in questo caso $\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}$ e $\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}$

Calcolo $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ in questo caso $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}$ e $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}$

Calcolo $\frac{\partial T}{\partial q_k}$ in questo caso $\frac{\partial T}{\partial s}$ e $\frac{\partial T}{\partial \theta}$

E poi $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$

in questo caso ↳

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \end{cases}$$

Eq. di Lagrange se il sist. è conservativo

Se le Q_k sono conservative cioè ammettono potenziale V definito

Lagrangiana $\boxed{L = T - V}$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0}$$

vale che $\boxed{-\frac{\partial V}{\partial q} = Q}$, $\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}}}_{\text{nullo}} - \frac{\partial V}{\partial q} = Q$

$V_{elastica} = \frac{1}{2} K (|x_a - x_B|^2)$

$V_{grav} = mg\, y_P$

In generale $\boxed{V = -F \cdot \bar{x}}$

TIPOLOGIA 1

Scrivere L

$L = T - V$

Calcolo di T

Se ho 2 punti $T = \frac{1}{2} m |v_P|^2 + \frac{1}{2} m |v_Q|^2$

Se ho asta e punto $T = \underbrace{T^{asta}}_{\text{Konig}} + T^{punto}$

Più in generale corpo rigido e punto $T = T^{punto} + \underbrace{T^{corpo}}_{\text{con Konig}}$

Calcolo di V

$V_{elastica} = \frac{1}{2} k |P-Q|^2$

V_{grav} per i vari punti e per i corpi rigidi nei vari baricentri $mg\, y_P$ occhio $g\hat{e}_3 \Rightarrow mg\, z_P$.

Se ho una forza esterna devo mettere $V_F = -F \cdot \underbrace{\vec{x}_P}_{\text{coord punto}}$

Se ho contributi che non dipendono dalle coord lagr posso trasc. e mettere + cost.

TIPOLOGIA 2

Equilibri

Step 1

Calcolare V

Step 2

Trovare le config di equilibrio

q_1, q_2 coord. Lagr. es (s,θ)

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

nota i pti di eq. sono del tipo $(q_0, 0)$ con $\frac{\partial V}{\partial q}(q_0) = 0$

Step 3

Calcolare $V'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \end{pmatrix}$

Step 4

Valuto V'' nelle conf. di eq. trovate al pto 2.

Step 5

Per studiare la stabilità

* se $\det > 0$, $tr > 0$ $\Rightarrow$ λ_1, λ_2 sono min. di V_0 $\overset{L-D}{\Rightarrow}$ il pto è stabile
* se $\det < 0$ $\Rightarrow$ $\exists\ \lambda_i < 0$ t.c. $\underbrace{Re(\lambda_i)}_{\text{esp. di Lyap.}} > 0$ quindi il pto è instabile
* se $\det > 0$ e $tr < 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ $\Rightarrow$ il pto è inst. (uso arg. Lyap.)
* $\begin{cases} \text{se } \det = 0 \quad tr > 0 \Rightarrow \text{stab.} \\ \text{se } \det = 0 \quad tr < 0 \Rightarrow \text{inst.} \end{cases}$

nota $J = \frac{mg}{kr} > 0$

nota $-1 < \cos\theta, \sin\theta < 1$ $\qquad -\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$

nota $\sin\theta = J \Rightarrow \theta = \underbrace{\arcsin(J)}_{\theta^*} \ \vee\ \theta = \pi - \theta^*$

$\cos\theta = J \Rightarrow \theta = \underbrace{\arccos(J)}_{\theta^*} \ \vee\ \theta = -\theta^*$

nota $\cos^2\theta^* = 1 - \sin^2\theta^*$

$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

TIPOLOGIA 3

Frequenza delle piccole oscillazioni

eq. secolare

$\det(V''(\text{pto stabile}) - \lambda A) = 0$ dove A è la matrice cinetica

$A(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$ la calcolo a partire da T

$$T = \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta \cos\varphi$$

$A = \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \dot{\theta}\dot{\varphi} \\ \dot{\theta}\dot{\varphi} & \dot{\varphi} \end{bmatrix}$ porto $\frac{1}{2}$ fuori $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3} + \cos^2\theta\right) m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{3} m \ell^2 \dot{\varphi}^2 + 1 m \ell^2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta \cos\varphi\right]$

$$A = m \ell^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \cos^2\theta & \frac{1}{2} \cos\theta \cos\varphi \\ \frac{1}{2} \cos\theta \cos\varphi & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2}$ non contribuisce

l'1 si spezza in due contributi !!!

$\det(V''(\text{pto. stab}) - \lambda A) = 0$ risolvo eq. in λ e le piccole oscillaz. son $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ $\forall i$

TIPOLOGIA 4

Riduzione di Routh

Se L non dipende da una coord. Lagrang. q.

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = c$ è un int. primo cioè il momento coniugato a q si conserva

mi viene un'espr. in $\dot{q}$ che pongo $= c \Rightarrow$ ricavo $\dot{q} = \frac{c}{\text{roba}}$

$$\mathcal{L}^R = (L - \dot{q} c)\Big|_{\dot{q} = \frac{c}{\text{roba}}}$$

$\mathcal{L}^R = \mathcal{L}_2^R + \mathcal{L}_0^R$, non può comparire $\mathcal{L}_1$ 0,1,2 indicano l'esp di $\dot{q}$

es: $\dot{\theta}^2 = \mathcal{L}_{2,R}$ $\dot{\theta} = \mathcal{L}_{1,R}$ altro $| f(\theta) = \mathcal{L}_{0,R}$

$\mathcal{L}^R = T - V_0$

V_{eff}. in part. V_0 dipenderà da un'altra coord. lagr es: u

Quindi posso studiare solo $V_0(u)$

$\frac{\partial V_0}{\partial u} = 0$ e trovo le config di eq.

$\frac{\partial^2 V_0}{\partial u^2}$ (punti trovati sopra)

se $V_0''(\text{pto}) > 0$ pto è min $\overset{L-D}{\Rightarrow}$ st.

se $V_0''(\text{pto}) < 0$ pto è max $\Rightarrow$ inst

alcuni es possono chiedermi di fare dei rit. di fase.

Quindi ho $\mathcal{L} = T - V_{eff}$.

Studio $V'_{eff} = 0$ e trovo pti staz. e li valuto in V_{eff}.

Faccio rit. di fase (11-07-2022)

TIPOLOGIA 5

Forze apparenti

$$a' = \underbrace{\vec{a} - \vec{\ddot{o}}}_{\text{acc. di trascinamento}} - \underbrace{\vec{\omega} \times (\omega \times (P-O'))}_{\text{accel. centrifuga}} - \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{acc. di Coriolis}}$$

$$V' = m a_{o'} \cdot (P-O') - \frac{1}{2} m |\omega \times (P-O')|^2 + m(\vec{\omega} \times \vec{v}') \cdot (P-O')$$

note

* Se siamo nel piano, ho ω cost e il corpo è vincolato a stare sul piano $\Rightarrow$ non c'è Coriolis

* Ricorda di aggiungere la gravità nel calcolo di ω

* Ricorda di scrivere i versori in Σ'

* se ho $\omega = \omega\hat{e}_2$ ho centrifuga ma la form $-\frac{1}{2} m |\omega \times (P-O')|^2$ vale per un pto
  se voglio farlo per un'asta devo fare $-\frac{1}{2} \int \lambda |\omega \hat{e}_2 \times (B-O)|^2 dr$
  e in gen. per q. corpo rigido

TIPOLOGIA 6

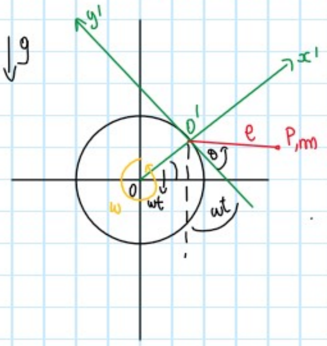
Lagr. equivalenti

$L \sim L' \iff L' = cL + \frac{dF}{dt}(q,t)$

es.

31-05-2022 $\rightarrow$ ω di Σ' risp a Σ è nulla, $\hat{e}_1' = \hat{e}_1$, $\hat{e}_2' = \hat{e}_2$

Es. Qui avevo solo pto!!!



$\omega = \omega \hat{e}_3$

θ unica coord lagr.

guida R

$\hat{e}_1' = \cos(\omega t)\hat{e}_1 + \sin(\omega t)\hat{e}_2$

$\hat{e}_2' = \hat{e}_3' \times \hat{e}_1'$

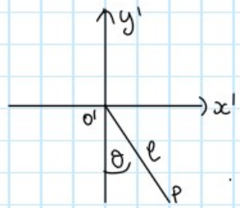
Trov. L e L'

$L = T - V$

$P - O = (O' - O) + (P - O') = (R\cos(\omega t)\,\hat{e}_1 + R\sin(\omega t)\,\hat{e}_2) + (\ell \sin(\omega t + \theta)\,\hat{e}_1 - \ell\cos(\omega t + \theta)\,\hat{e}_2)$

$V = mg\, y_P$

L' in Σ'



$(P-O') = \ell \sin\theta\, \hat{e}_1{}' - \ell \cos\theta\, \hat{e}_2{}'$

$T' = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$

$V'_{tras} = m \vec{a}_{O'} \cdot (P-O')$

$\hookrightarrow a_{O'} = \frac{d^2}{dt^2}(O'-O) = \text{accel. di } O' \text{ in } \Sigma' =$

$= -\omega^2 R \underbrace{(\cos(\omega t)\,\hat{e}_1 + \sin(\omega t)\,\hat{e}_2)}_{\hat{e}_1{}'} = -\omega^2 R\, \hat{e}_1{}'$

lo voglio in Σ'

$V'_{centr.} = -\frac{1}{2} m \,|\, \omega \hat{e}_3{}' \times \underbrace{(\ell \sin\theta\, \hat{e}_1{}' - \ell\cos\theta\, \hat{e}_2{}')}_{= (P-O)'} |^2 = -\frac{1}{2} m \omega^2 \ell^2$

NO contr.

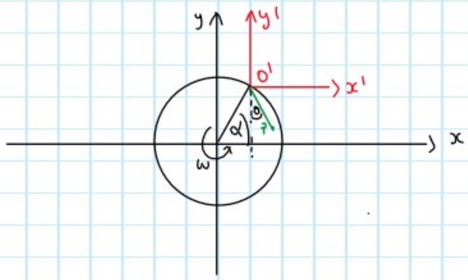
$V'_{coriolis} = m\,(\omega \hat{e}_3{}' \times (P-O')') \cdot (P-O') = -m\omega \ell^2 \dot{\theta}$

$V'_{grav} = -(-mg\hat{e}_2) \cdot (P-O')$

$\hookrightarrow \hat{e}_2 = \sin(\omega t)\, \hat{e}_1{}' + (\cos \omega t)\, \hat{e}_2{}'$

$L - L' = m R \ell \omega \dot{\theta} \sin\theta = \frac{d}{dt} F(\theta, t) \Rightarrow F = \int L - L' = m R \ell \omega \cos\theta$

es



ω di Σ' risp a Σ è 0

$\hat{e}_1 = \hat{e}_1{}'$, $\hat{e}_2{}' = \hat{e}_2$

NO coriolis

NO cent.

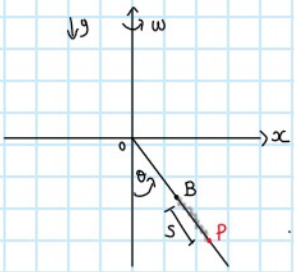
SI trasc.

TIPOLOGIA 7

Dopo aver scritto $\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$ ottengo un pol $p(q_i)$

Studio $p(q_i)$ es (limiti, deri) se passa una e una sola volta dall'asse $x \Rightarrow \exists !$ conf. di eq.

TIPOLOGIA 8



1. Scrivere la lagrangiana del sistema nel riferimento ruotante.
2. Scrivere le equazioni per gli equilibri relativi e individuare i valori dei parametri m, g, ℓ, k, ω per cui ci sono equilibri con $\theta = 0, \pi$ (il punto P deve restare tra i due estremi dell'asta).
3. Assumendo $\frac{mg}{k\ell} = \frac{1}{4}$, e ponendo $\omega^2 = \alpha\frac{g}{\ell}$, mostrare che possiamo trovare $\alpha > 0$ tale che ci sia un equilibrio con $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$L = T - V$

$T = T^{asta} + T^{pto}$

$V = V_{grav,P} + V_{grav,asta} + V_{elast.} + V_{cent,P} , V_{cent,asta}$

$-\frac{1}{2} m \, |\omega \times (P - O')|^2$ ma $O = O'$

$-\frac{1}{2} \int_0^{2\ell} \lambda |\omega e_2 \times (B-O)|^2 \, dr$

② $\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial s} = 0 & \text{I} \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 & \text{II} \end{cases}$

sost $\theta = 0 \rightarrow s = \frac{mg}{k}$ osservo che P deve stare sull'asta $\Rightarrow$

$|s| \leq \ell \Rightarrow \frac{s}{\ell} \leq 1 \Rightarrow \frac{mg}{k\ell} \leq 1$

ripeto rag. con $\theta = \pi$

③ come prima sost $\theta = \frac{\pi}{3} \longrightarrow s = f(\alpha)\ell$

oss che P deve stare sull'asta $|s| \leq \ell$

dist. max per $s = \ell \Rightarrow f(\alpha)\ell = \ell \rightarrow$ trovo valore di α (es $\alpha = \frac{7}{3}$)

sost $s = f(\alpha)\ell$ nell'eq. II $\rightarrow$ ho un pol $p(\alpha)$

faccio rag. analitici in part. voglio capire se attraversa l'asse x

almeno una volta (ad es guardo $P(0)$, $P(n)$ con $0 < n < \alpha$)

se la risp. e' si $\Rightarrow$ per cont. di $p(\alpha)$ $\exists$ una conf. di eq per $\theta = \frac{\pi}{3}$.