

LEZIONI DI  
MECCANICA RAZIONALE

CON ESERCIZI SVOLTI

*Giovanni Federico Gronchi*

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Anno Accademico 2021/2022



# Indice

<b>1</b>	<b>Sistemi meccanici discreti non vincolati</b>	<b>7</b>
1.1	Spazio, tempo e sistemi di riferimento . . . . .	7
1.2	Descrizione del moto . . . . .	12
1.3	Le equazioni del moto . . . . .	13
1.4	I riferimenti inerziali . . . . .	14
1.5	Sistemi meccanici . . . . .	22
1.6	Esercizi . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Dinamica di un punto materiale libero</b>	<b>23</b>
2.1	Quantità dinamiche per un punto materiale . . . . .	23
2.2	Equazioni di bilancio e leggi di conservazione . . . . .	25
2.3	Problemi integrabili . . . . .	27
2.4	Moti unidimensionali . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Moti centrali</b>	<b>37</b>
3.1	Integrabilità dei moti centrali . . . . .	38
3.2	Legge delle aree . . . . .	41
3.3	Formula di Binet . . . . .	41
3.4	Traiettoria del moto . . . . .	42
3.5	Il problema dei due corpi . . . . .	46
3.6	Il problema di Keplero . . . . .	47
3.7	Il teorema di Bertrand . . . . .	53
3.8	Esercizi . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Sistemi di riferimento in moto relativo</b>	<b>63</b>
4.1	Velocità angolare e formule di Poisson . . . . .	63
4.1.1	Derivata temporale di un vettore in riferimenti diversi . . . . .	66
4.1.2	Composizione di velocità angolari . . . . .	67
4.2	Equazione del moto in riferimenti diversi . . . . .	67
4.3	Deviazione dei gravi in caduta libera . . . . .	68

<b>5</b>	<b>Dinamica dei sistemi di <math>N</math> punti materiali liberi</b>	<b>71</b>
5.1	Quantità dinamiche per $N$ punti materiali . . . . .	71
5.2	Teoremi di scomposizione relativi al baricentro . . . . .	72
5.3	Forze interne e forze esterne . . . . .	76
5.4	Le equazioni cardinali . . . . .	77
5.5	Sistemi equivalenti di vettori applicati . . . . .	78
5.5.1	Asse centrale . . . . .	83
5.5.2	Coppie di vettori applicati . . . . .	84
5.5.3	Centro di vettori paralleli . . . . .	86
5.6	Sistemi meccanici conservativi . . . . .	87
5.7	Altri risultati sul problema degli $N$ corpi . . . . .	90
5.8	Esercizi . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Il corpo rigido</b>	<b>97</b>
6.1	Definizioni e preliminari geometrici . . . . .	97
6.1.1	Sottovarietà di $\mathbb{R}^m$ . . . . .	98
6.2	Proprietà cinematiche di un corpo rigido . . . . .	101
6.2.1	Configurazioni di un corpo rigido con tutti i punti allineati .	101
6.2.2	Configurazioni di un corpo rigido con tre punti non allineati	102
6.2.3	Gli angoli di Eulero . . . . .	104
6.2.4	I quaternioni di Hamilton . . . . .	109
6.2.5	Formula fondamentale della cinematica rigida . . . . .	111
6.2.6	Velocità angolare e angoli di Eulero . . . . .	113
6.2.7	Posizioni e velocità dei punti di un corpo rigido . . . . .	115
6.2.8	Asse istantaneo di rotazione . . . . .	115
6.2.9	Campo delle velocità di un moto rigido . . . . .	116
6.3	Moti rigidi piani . . . . .	117
6.3.1	Centro istantaneo di rotazione . . . . .	118
6.3.2	Traiettorie polari . . . . .	118
6.3.3	Profili coniugati . . . . .	121
6.3.4	Campo delle accelerazioni . . . . .	121
6.4	Operatore di inerzia . . . . .	122
6.5	Momento angolare ed energia cinetica di un corpo rigido . . . . .	128
6.6	Corpi rigidi continui . . . . .	128
6.7	Esercizi . . . . .	131
<b>7</b>	<b>Sistemi vincolati</b>	<b>135</b>
7.1	Vincoli e reazioni vincolari . . . . .	135
7.1.1	Coppie cinematiche . . . . .	136
7.1.2	Studio del moto vincolato . . . . .	137
7.2	Varietà e spazi tangenti . . . . .	141

7.3	Vincoli olonomi, fissi e mobili . . . . .	143
7.4	Spostamenti virtuali . . . . .	148
<b>8</b>	<b>Statica dei sistemi meccanici</b>	<b>151</b>
8.1	Statica di sistemi di punti materiali vincolati . . . . .	151
8.2	Il lavoro virtuale . . . . .	151
8.2.1	Vincoli senza attrito . . . . .	153
8.2.2	Vincoli di puro rotolamento . . . . .	154
8.3	Il principio dei lavori virtuali . . . . .	155
8.3.1	Alcuni esempi . . . . .	156
8.4	Le equazioni cardinali della Statica . . . . .	157
8.5	Problemi isostatici e iperstatici . . . . .	161
8.6	Sovrapposizione degli effetti e metodo di scomposizione . . . . .	162
8.7	Esercizi . . . . .	164
<b>9</b>	<b>Le equazioni cardinali della Dinamica</b>	<b>169</b>
9.1	Equazioni cardinali e moti rigidi . . . . .	169
9.1.1	Equazioni del moto con la conservazione dell'energia . . . . .	174
9.2	Equazioni di Eulero per il corpo rigido con un punto fisso . . . . .	176
9.3	Moto per inerzia . . . . .	177
9.3.1	Equilibri e stabilità . . . . .	183
9.3.2	Fase geometrica nel moto del corpo rigido . . . . .	185
9.4	Effetto giroscopico . . . . .	185
<b>10</b>	<b>Equazioni di Lagrange</b>	<b>187</b>
10.1	Vincoli ideali e principio di D'Alembert . . . . .	189
10.2	Forze conservative e lagrangiana . . . . .	197
10.3	Lagrangiane equivalenti . . . . .	198
10.4	Covarianza delle equazioni di Lagrange . . . . .	200
10.5	Energia potenziale generalizzata . . . . .	202
10.6	Funzione di dissipazione di Rayleigh . . . . .	208
<b>11</b>	<b>Simmetrie e integrali primi</b>	<b>211</b>
11.1	Variabili cicliche . . . . .	211
11.1.1	Riduzione di Routh . . . . .	212
11.2	La trottola di Lagrange . . . . .	216
11.3	Teorema di Noether . . . . .	219
<b>12</b>	<b>Equilibri e stabilità</b>	<b>227</b>
12.1	Linearizzazione attorno a un equilibrio . . . . .	228
12.2	Il teorema di Lagrange-Dirichlet . . . . .	230

12.3	Analisi della stabilità . . . . .	231
12.4	Stabilizzazione con termini girostatici . . . . .	232
12.5	Piccole oscillazioni attorno a un equilibrio stabile . . . . .	234
12.6	Alcuni esempi . . . . .	234
12.7	Diagonalizzazione simultanea di forme quadratiche . . . . .	237

<b>INDICE ANALITICO</b>	<b>241</b>
-------------------------	------------



# Capitolo 1

## Sistemi meccanici discreti non vincolati

Introduciamo gli strumenti per descrivere il moto di un sistema di punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  dotati di masse  $m_1, \dots, m_N$ , soggetti a forze esterne assegnate, che si possono muovere liberamente nello spazio ambiente.

### 1.1 Spazio, tempo e sistemi di riferimento

Assumiamo che lo spazio ambiente sia uno spazio euclideo tridimensionale, che indichiamo con il simbolo  $\mathbb{E}^3$ . Esso è dunque uno spazio affine reale di dimensione tre a cui è associato<sup>1</sup> uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}^3$  dotato di un prodotto scalare, che indichiamo con  $\cdot$ ; cioè di una forma bilineare simmetrica definita positiva  $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Possiamo introdurre su  $\mathbb{V}^3$  la norma

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}, \quad \vec{u} \in \mathbb{V}^3$$

e, con questa, la distanza tra i punti di  $\mathbb{E}^3$ :

$$d(P, Q) = |P - Q|, \quad P, Q \in \mathbb{E}^3.$$

Introduciamo anche lo spazio prodotto  $\mathbb{G} = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$ , che chiamiamo spazio-tempo di Galileo. Gli elementi di  $\mathbb{G}$  si chiamano eventi. Si può pensare  $\mathbb{G}$  come composto da fibre della forma  $\mathbb{E}^3 \times \{t\}$ , al variare di  $t \in \mathbb{R}$ . A queste fibre, che chiamiamo spazi degli eventi simultanei, possiamo attribuire la stessa struttura euclidea di  $\mathbb{E}^3$ . Possiamo quindi misurare la distanza  $\tilde{d}$  tra eventi simultanei tramite la formula

$$\tilde{d}((P, t), (Q, t)) = d(P, Q), \quad (P, t), (Q, t) \in \mathbb{G}.$$

---

<sup>1</sup>scelti comunque due punti  $P, Q \in \mathbb{E}^3$  la loro differenza  $P - Q$  è un vettore di  $\mathbb{V}^3$ . Inoltre, scelti comunque un punto  $Q \in \mathbb{E}^3$  e un vettore  $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$  la loro somma  $Q + \vec{v}$  è un punto  $P \in \mathbb{E}^3$  e si ha  $P - Q = \vec{v}$ . In questo contesto la somma  $P + Q$  di due punti di  $\mathbb{E}^3$  non ha senso.

copiare



## Prodotto vettoriale

Chiamiamo prodotto vettoriale (o prodotto vettore) su  $\mathbb{V}^3$  un'applicazione  $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$  bilineare, antisimmetrica, che denotiamo con  $\times$ , tale che

- i) se  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  allora  $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$ ,
- ii)  $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}$ ,

per ogni  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$ .

**Proposizione 1.** *Sullo spazio  $\mathbb{V}^3$ , dotato del prodotto scalare  $\cdot$ , esistono solamente due prodotti vettoriali  $\times', \times''$ , il cui risultato differisce solo per il segno e, scelta una base ortonormale  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , risulta*

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \times' \hat{e}_2 &= \hat{e}_3, & \hat{e}_2 \times' \hat{e}_3 &= \hat{e}_1, & \hat{e}_3 \times' \hat{e}_1 &= \hat{e}_2, \\ \hat{e}_1 \times'' \hat{e}_2 &= -\hat{e}_3, & \hat{e}_2 \times'' \hat{e}_3 &= -\hat{e}_1, & \hat{e}_3 \times'' \hat{e}_1 &= -\hat{e}_2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

*Dimostrazione.* Utilizziamo il seguente risultato

**Lemma 1.** *Le relazioni (1.1) definiscono due applicazioni bilineari e antisimmetriche  $\times', \times''$  che soddisfano le proprietà i), ii).*

*Dimostrazione.* Verifichiamo la i) mostrando che vale la relazione

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2, \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3. \quad (1.2)$$

Assumiamo che, fissata una base ortonormale  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , valga la prima delle (1.1). Dati  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$  scriviamo

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \hat{e}_i, \quad \vec{v} = \sum_{j=1}^3 v_j \hat{e}_j,$$

per certi  $u_i, v_j \in \mathbb{R}$ , per cui

$$\begin{aligned} \vec{u} \times' \vec{v} &= \sum_{i,j=1}^3 u_i v_j \hat{e}_i \times' \hat{e}_j = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (u_i v_j - u_j v_i) \hat{e}_i \times' \hat{e}_j \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \hat{e}_3 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \hat{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \hat{e}_2, \end{aligned}$$

quindi

$$|\vec{u} \times' \vec{v}|^2 = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2$$

Facendo alcune cancellazioni si ottiene

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times' \vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 &= -2(u_1 u_2 v_1 v_2 + u_1 u_3 v_1 v_3 + u_2 u_3 v_2 v_3) - u_1^2 v_1^2 - u_2^2 v_2^2 - u_3^2 v_3^2 \\ &= -(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2. \end{aligned}$$

Inoltre, poiché la base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  è ortonormale, si ha

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \vec{u} \cdot \vec{v},$$

che dimostra (1.2).

Visto che le applicazioni  $\times'$  e  $\cdot$  sono bilineari, per verificare la ii) basta notare che essa vale sugli elementi della base ortonormale.<sup>2</sup> Infatti, in tal caso per ogni  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$  si ha

$$\begin{aligned} \vec{u} \times' \vec{v} \cdot \vec{w} &= \left( \sum_{i=1}^3 u_i \hat{e}_i \times' \sum_{j=1}^3 v_j \hat{e}_j \right) \cdot \sum_{h=1}^3 w_h \hat{e}_h = \sum_{i,j,h=1}^3 u_i v_j w_h \hat{e}_i \times' \hat{e}_j \cdot \hat{e}_h \\ &= \sum_{i,j,h=1}^3 u_i v_j w_h \hat{e}_j \times' \hat{e}_h \cdot \hat{e}_i = \left( \sum_{j=1}^3 v_j \hat{e}_j \times' \sum_{h=1}^3 w_h \hat{e}_h \right) \cdot \sum_{i=1}^3 u_i \hat{e}_i = \vec{v} \times' \vec{w} \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

Se vale la seconda delle (1.1) si procede in modo analogo. □

Consideriamo adesso un'applicazione  $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$  bilineare e antisimmetrica con le proprietà i), ii) del prodotto vettore elencate sopra. Innanzitutto osserviamo che dalla proprietà antisimmetrica segue che

$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}, \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{V}^3. \quad (1.3)$$

Inoltre, per ogni  $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$ , dalla ii) e da (1.3) si ha

$$\vec{u} \times \vec{v} \in \vec{v}^\perp, \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{V}^3, \quad (1.4)$$

dove

$$\vec{v}^\perp = \{\vec{w} \in \mathbb{V}^3 : \vec{w} \cdot \vec{v} = 0\}.$$

Data una base ortonormale  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  di  $\mathbb{V}^3$ , da i) segue che  $|\hat{e}_1 \times \hat{e}_2| = 1$  e da (1.4) si ha

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 \in \hat{e}_1^\perp \cap \hat{e}_2^\perp = \text{span}(\hat{e}_3),$$

quindi

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \pm \hat{e}_3.$$

Inoltre, se  $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = +\hat{e}_3$ , si ha anche

$$\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2. \quad (1.5)$$

---

<sup>2</sup>si usa la proprietà antisimmetrica per dire che  $\hat{e}_j \times \hat{e}_j = \vec{0}$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Infatti, ragionando come prima si ottiene  $\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \pm \hat{e}_1$  e, se valesse  $\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_1$ , usando ii) avremmo la seguente contraddizione:

$$-1 = \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 1.$$

La seconda relazione in (1.5) si dimostra in modo simile. Procedendo in modo analogo si ottiene che se invece vale  $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_3$  si ha

$$\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_1, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = -\hat{e}_2.$$

□

Nel seguito considereremo solo terne ortonormali **levogire**, cioè terne che soddisfano la cosiddetta **regola della mano destra**: se distendiamo il pollice, l'indice e il medio della mano destra in modo che queste dita descrivano tre direzioni ortogonali seguendo la conformazione naturale della mano, esse indicano rispettivamente l'orientazione dei vettori  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  di una terna levogira.

Data una terna levogira, conveniamo di scegliere il prodotto vettoriale  $\times'$  su  $\mathbb{V}^3$ , che indicheremo con  $\times$  per semplicità. Varranno quindi le formule

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3, \quad \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2. \quad (1.6)$$

**Esercizio 1.** *Mostrare che vale la seguente proprietà (formula del prodotto triplo):*

**formula prodotto triplo**

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}, \quad \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3. \quad (1.7)$$

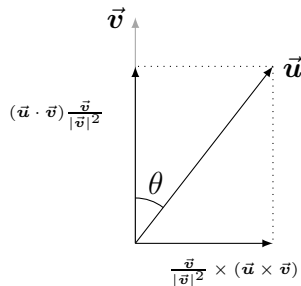
*Suggerimento:* basta verificarlo sugli elementi di una base ortonormale e usare la bilinearità del prodotto vettore e del prodotto scalare.

Notiamo che il prodotto vettoriale non è associativo, infatti dalla formula del prodotto triplo e dalla proprietà antisimmetrica otteniamo

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} - \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$$

che in generale è non nullo.

Dato  $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$ , ogni vettore  $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$  si può scomporre in modo unico come combinazione lineare di due vettori ortogonali, uno dei quali è parallelo a  $\vec{v}$ :



$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|^2} [(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v} + \vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{v})], \quad (1.8)$$

infatti

$$\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = |\vec{v}|^2 \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v}.$$

Il termine  $(\vec{u} \cdot \vec{v})/|\vec{v}|$  è la proiezione ortogonale di  $\vec{u}$  lungo  $\vec{v}$  e l'angolo  $\theta \in [0, \pi]$  tra  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è definito da

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}. \quad (1.9)$$

Dalle relazioni (1.2), (1.9) si ottiene

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta.$$

Dati

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

vettori di  $\mathbb{R}^3$ , introduciamo il prodotto scalare

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{h=1}^3 x_h y_h,$$

e il prodotto vettoriale

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{e}_3,$$

dove

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono i vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^3$ . Osserviamo che valgono le formule

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2.$$

## Sistemi di riferimento

La descrizione del moto di un sistema di punti materiali richiede l'introduzione di un sistema di riferimento, che permetta di individuare la posizione dei punti nello spazio ambiente in cui avviene il moto.

Un sistema di riferimento (o più brevemente un riferimento) in  $\mathbb{E}^3$  è una mappa continua

$$t \mapsto \Sigma(t) = (O(t), \hat{\mathbf{e}}_1(t), \hat{\mathbf{e}}_2(t), \hat{\mathbf{e}}_3(t)) \in \mathbb{E}^3 \times (\mathbb{V}^3)^3$$

definita su  $\mathbb{R}$  o su un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ , in cui  $O = O(t) \in \mathbb{E}^3$  si chiama origine del riferimento, ed i vettori  $\hat{\mathbf{e}}_j = \hat{\mathbf{e}}_j(t) \in \mathbb{V}^3$ , che indicano le direzioni degli assi, sono tali che

$$\hat{\mathbf{e}}_i(t) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j(t) = \delta_{ij} \quad \forall i, j, \forall t,$$

dove  $\delta_{ij}$  è il delta di Kronecker, che vale 1 per  $i = j$ , 0 per  $i \neq j$ .

Per indicare gli elementi di un sistema di riferimento  $\Sigma$  useremo la notazione più semplice  $O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ , oppure  $Oxyz$ . Nel caso del moto in un piano scriveremo anche  $O\hat{e}_1 \hat{e}_2$ , oppure  $Oxy$ , per indicare gli elementi del riferimento in tale piano, intendendo che il vettore  $\hat{e}_3$  è ortogonale al piano e la terna  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  soddisfa le relazioni (1.6).

## Rappresentazione in coordinate

Dato un punto  $P \in \mathbb{E}^3$  e un riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ , possiamo associare in modo unico a tale punto un vettore di coordinate in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbb{E}^3 \ni P \longleftrightarrow \vec{x}_P = P - O = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i \in \mathbb{V}^3 \longleftrightarrow \mathbf{x}_P = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3, \quad (1.10)$$

dove il simbolo ‘ $T$ ’ indica l’operazione di trasposizione, cioè  $\mathbf{x}_P$  è un vettore colonna. In seguito, nella scrittura delle formule, utilizzeremo sia la notazione in  $\mathbb{V}^3$  (indicando i vettori con un simbolo in grassetto con la freccetta sopra, o come differenza tra punti) che quella in coordinate in  $\mathbb{R}^3$  (simbolo in grassetto senza freccetta).

## 1.2 Descrizione del moto

Il moto di un punto  $P \in \mathbb{E}^3$  è una mappa

$$t \mapsto P(t) \in \mathbb{E}^3 \quad (1.11)$$

definita su  $\mathbb{R}$  o su un suo intervallo.

Dato il moto  $P(t)$  e un riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ , possiamo definire ad ogni istante  $t$  la posizione di  $P$  relativa a  $\Sigma$  come

$$\vec{x}_P = P - O = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i,$$

dove  $x_i = x_i(t)$  sono le coordinate di  $P$  al tempo  $t$  in  $\Sigma$ . Il moto di  $P$  è anche dato dalla mappa  $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$  delle sue coordinate al variare del tempo. Se esistono le derivate prima e seconda di  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , possiamo definire la velocità e l’accelerazione di  $P$  relativa a  $\Sigma$  rispettivamente come

$$\begin{aligned} \vec{v}_P &= \left. \frac{d}{dt}(P - O) \right|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{e}_i, \\ \vec{a}_P &= \left. \frac{d^2}{dt^2}(P - O) \right|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Tramite la (1.10) possiamo identificare queste quantità con i rispettivi vettori delle loro coordinate in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{x}_P = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad \mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{x}}_P = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^T, \quad \mathbf{a}_P = \ddot{\mathbf{x}}_P = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)^T.$$

Nel seguito eviteremo di scrivere l'indice  $P$  quando sarà chiaro il punto a cui ci riferiamo, quindi ad esempio scriveremo  $\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{x}$  al posto di  $\vec{\mathbf{x}}_P, \mathbf{x}_P$ .

L'operazione di derivata temporale di una mappa vettoriale  $t \mapsto \vec{\mathbf{u}}(t) \in \mathbb{V}^3$  dipende dalla base in cui si scrivono le componenti e quindi dalla scelta del riferimento. Utilizzeremo la notazione  $\left. \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \right|_{\Sigma}$  per indicare esplicitamente tale dipendenza.

## 1.3 Le equazioni del moto

### Le forze

Dato un sistema di  $N$  punti materiali e fissato un riferimento  $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$  assumiamo che la forza agente sul punto  $P_i$  sia esprimibile da una funzione

$$\vec{\mathbf{F}}_i : (\mathbb{V}^3)^N \times (\mathbb{V}^3)^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}^3$$

che dipende solo dalle posizioni  $\vec{\mathbf{x}}_i = P_i - O$  e dalle velocità  $\vec{\mathbf{v}}_i = \left. \frac{d}{dt}(P_i - O) \right|_{\Sigma}$  dei punti del sistema e dal tempo  $t$ , quindi

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N, \vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N, t).$$

In coordinate nel riferimento  $\Sigma$  questa si scrive come una funzione

$$\mathbf{F}_i : (\mathbb{R}^3)^N \times (\mathbb{R}^3)^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

delle variabili  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t$ .

Nel Capitolo 4 mostreremo come cambiano le forze agenti sui punti  $P_i$  al variare del sistema di riferimento scelto.

### Le equazioni di Newton

Il principio del **determinismo meccanicistico** ci dice che la conoscenza dello stato cinetico (posizione e velocità) di un sistema di  $N$  punti materiali ad un certo istante permette di determinare tutta la sua evoluzione temporale.

Dato un sistema formato dai punti  $P_i, i = 1, \dots, N$ , di masse  $m_i$ , soggetti alle forze  $\vec{\mathbf{F}}_i$  nel sistema di riferimento  $\Sigma$ , assumiamo che valgano le equazioni di Newton (*secondo principio della Dinamica*). Più precisamente, siano

$$\vec{\mathbf{x}} = (\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N), \quad \vec{\mathbf{v}} = (\vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N)$$

i vettori delle posizioni e velocità degli  $N$  punti. Se

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{v}}, t)$$

è la forza agente sul punto  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , allora si assume che il moto  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$  sia soluzione del sistema di equazioni differenziali del secondo ordine

$$m_i \vec{\mathbf{a}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{v}}, t) \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.12)$$

oppure, in coordinate in  $\Sigma$ ,

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.13)$$

Le equazioni precedenti si possono scrivere come sistema del primo ordine introducendo le incognite  $\mathbf{v}_i$ :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i = \frac{1}{m_i} \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.14)$$

Il sistema (1.14) insieme alle posizioni e velocità dei punti a un certo istante iniziale definiscono un problema di Cauchy. L'esistenza e l'unicità di una soluzione di questo problema in un intorno del tempo iniziale è assicurata dalla teoria delle equazioni differenziali se le funzioni  $\mathbf{F}_i$  sono, ad esempio, di classe  $C^1$ .

**Esercizio 2.** *Trasformare in un sistema del primo ordine le equazioni di Newton*

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -y\dot{x}, \\ m\ddot{y} = x^2 + xy. \end{cases}$$

## 1.4 I riferimenti inerziali

Trattiamo adesso i sistemi di riferimento inerziali, nei quali ‘ogni corpo persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme fino a quando non sia costretto a mutare il suo stato dall'azione di una forza.’<sup>3</sup> Questa è la formulazione che Newton dà al suo primo principio della Dinamica, o principio di inerzia.

### Trasformazioni di Galileo

Consideriamo l'insieme  $\mathcal{G}$  delle trasformazioni affini dello spazio-tempo di Galileo  $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$  che conservano gli intervalli di tempo tra due eventi, con la loro orientazione,

<sup>3</sup>I. Newton, da *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687). ‘Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.’

e la distanza tra eventi simultanei. Fissato un sistema di riferimento, possiamo identificare lo spazio-tempo di Galileo con lo spazio delle sue coordinate  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  e considerare  $\mathcal{G}$  agente su quest'ultimo.

Sia  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$  l'insieme delle matrici quadrate di ordine  $n \in \mathbb{N}$  a coefficienti reali. Introduciamo l'insieme

$$O(3) = \{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3) : AA^T = A^T A = I\}$$

delle matrici ortogonali di ordine 3. Osserviamo che, per  $A \in O(3)$ , si ha  $1 = \det(AA^T) = (\det A)^2$ , per cui  $\det A = \pm 1$ . Denotiamo con  $SO(3)$  l'insieme delle matrici di  $O(3)$  che hanno determinante uguale a 1.

**Proposizione 2. (Eulero)** *Gli elementi di  $SO(3)$  sono matrici di rotazione attorno ad un asse.*

*Dimostrazione.* Mostriamo che ogni matrice  $R \in SO(3)$  ha l'autovalore 1. Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , da  $R\mathbf{x} \cdot R\mathbf{x} = R^T R\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$  segue che  $|R\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ , cioè  $R$  è una **isometria**. Dunque se  $\lambda$  è un autovalore di  $R$  si ha  $|\lambda| = 1$ . Vale inoltre la relazione seguente:

$$\det(R - I) = \det R^T \det(R - I) = \det(R^T(R - I)) = \det(I - R^T) = \det(I - R),$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\det(R^T) = \det(R) = 1$  e il teorema di Binet.<sup>4</sup> Se  $A$  è una matrice di ordine 3, per le proprietà dei determinanti si ha

$$\det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -\det A.$$

Concludo che

$$\det(R - I) = 0,$$

quindi  $R$  ha l'autovalore  $\lambda_1 = 1$ . Gli altri autovalori  $\lambda_2, \lambda_3$  devono soddisfare le condizioni

$$\lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1,$$

quindi si hanno 3 casi:<sup>5</sup> i)  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , ii)  $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ , iii)  $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $\lambda_2 = \mu + i\nu$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ ,  $\nu \neq 0$ .

Nel caso i) si ha  $R = I$ , cioè  $R$  rappresenta la rotazione che lascia invariato ogni elemento di  $\mathbb{R}^3$ .

Se  $R \neq I$  l'autospazio  $V_1$  relativo all'autovalore  $\lambda_1 = 1$  ha dimensione uno perché, se avessimo  $\dim V_1 = 2$ , potremmo completare l'insieme  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$  composto da due autovettori ortonormali di  $V_1$  ad una base ortonormale  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  di  $\mathbb{R}^3$

<sup>4</sup>per ogni coppia di matrici quadrate  $A, B$  dello stesso ordine si ha  $\det(AB) = \det A \det B$ .

<sup>5</sup> $\overline{z}$  indica il numero complesso coniugato a  $z \in \mathbb{C}$ .



e, in questa base, la matrice associata alla trasformazione lineare definita da  $R$  sarebbe diagonale. Infatti i suoi coefficienti sono dati da  $\mathbf{x}_i \cdot R\mathbf{x}_j$  e si ha

$$\mathbf{x}_i \cdot R\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = 0,$$

se  $i = 1, 2, 3, j = 1, 2$  con  $i \neq j$ . Dato che  $\det R = 1$  si avrebbe quindi che  $R = I$ , contro l'ipotesi fatta. Quindi ogni matrice  $R \in SO(3)$  diversa dall'identità ha esattamente un asse di punti fissi (*asse di rotazione*).

Nel caso ii) l'autospazio  $V_{-1}$  di  $\lambda_2 = -1$  ha dimensione 2. Infatti, due autovettori unitari  $\mathbf{x}_1 \in V_1, \mathbf{x}_2 \in V_{-1}$  relativi a  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -1$  sono ortogonali poiché

$$\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = R^T R\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = R\mathbf{x}_2 \cdot R\mathbf{x}_1 = -\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1.$$

Come prima, possiamo completare  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$  ad una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  e, in questa base, la matrice associata alla trasformazione definita da  $R$  è diagonale e necessariamente della forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Quindi  $R$  rappresenta la rotazione di  $\pi$  attorno all'asse corrispondente alla direzione di  $\mathbf{x}_1$ .

Nel caso iii) gli autovettori relativi a  $\lambda_2 = \mu + i\nu, \lambda_3 = \mu - i\nu$  sono complessi coniugati:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{a} - i\mathbf{b},$$

con  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  entrambi ortogonali ad  $\mathbf{x}_1$ . Infatti, passando ai coniugati, la relazione  $R\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$  diventa  $R\mathbf{x}_3 = \lambda_3\mathbf{x}_3$ . Inoltre, da

$$\lambda_2\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = R\mathbf{x}_2 \cdot R\mathbf{x}_1 = R^T R\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1$$

si ricava

$$(\mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1) - \nu(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_1)) + i(\nu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1) + \mu(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_1)) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1) + i(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_1),$$

cioè, uguagliando parte reale e immaginaria,

$$\begin{cases} (\mu - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1) - \nu(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_1) = 0, \\ \nu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1) - (\mu - 1)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_1) = 0. \end{cases}$$

Questo sistema ha solo la soluzione nulla  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_1 = 0$ , infatti

$$(\mu - 1)^2 + \nu^2 > 0$$

perché  $\nu \neq 0$ . Nella base  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}\}$  la matrice associata alla trasformazione definita da  $R$  si scrive nella forma canonica reale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

dove

$$\cos \theta = \mu, \quad \sin \theta = \nu.$$

Quindi  $R$  rappresenta la rotazione di  $\theta$  attorno all'asse corrispondente alla direzione di  $\mathbf{x}_1$ .  $\square$

Vale il seguente risultato:

**Proposizione 3.** *Ogni elemento  $g \in \mathcal{G}$  si scrive in modo unico come prodotto di trasformazioni del tipo seguente:*

- i)  $g_1(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} + t\mathbf{u}, t)$  (moto uniforme con velocità  $\mathbf{u}$ )
- ii)  $g_2(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + s)$  (traslazione dell'origine)
- iii)  $g_3(\mathbf{x}, t) = (G\mathbf{x}, t)$  (isometria spaziale)

con  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, t, s \in \mathbb{R}, G \in O(3)$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo che le trasformazioni della forma  $g_1, g_2, g_3$  stanno in  $\mathcal{G}$ . Consideriamo adesso una generica trasformazione affine  $\Phi$  di  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  in sé:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} A \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} + \mathbf{b}, \quad (1.15)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} G & \mathbf{u} \\ \mathbf{w}^T & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ s \end{pmatrix}, \quad G \in \mathcal{M}(3, 3), \quad \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad a, s \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo che se  $\Phi$  è una trasformazione dell'insieme  $\mathcal{G}$  si ha  $\mathbf{w} = \mathbf{0}, a = 1, G \in O(3)$ . Da questo seguirà la tesi. Con la notazione introdotta, l'immagine della trasformazione  $\Phi$  in (1.15) si scrive

$$\begin{pmatrix} G\mathbf{x} + t\mathbf{u} + \mathbf{y} \\ \mathbf{w}^T\mathbf{x} + at + s \end{pmatrix}.$$

L'invarianza degli intervalli di tempo tra due eventi qualunque  $(\mathbf{x}_1, t_1), (\mathbf{x}_2, t_2)$  ci dice che

$$|\mathbf{w}^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + a(t_1 - t_2)| = |t_1 - t_2|$$

per ogni  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ . Da questo segue che  $\mathbf{w} = \mathbf{0}, |a| = 1$ . Per conservare anche il verso del tempo si deve scegliere  $a = 1$ . L'invarianza della distanza tra eventi simultanei  $(\mathbf{x}_1, t), (\mathbf{x}_2, t)$  ci dà

$$|G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)| = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

per ogni  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ , da cui segue che  $G \in O(3)$ . Infatti, da  $|G\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  segue  $\mathbf{x} \cdot G^T G \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ . La matrice  $S = G^T G$  è simmetrica e con essa possiamo definire la forma quadratica  $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot S \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$ . Si ha

$$\mathbf{x} \cdot S \mathbf{y} = \frac{1}{2}(q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})) = \frac{1}{2}(|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ , da cui segue che  $G^T G = S = I$ .  $\square$

Si verifica facilmente che l'insieme  $\mathcal{G}$ , col prodotto di composizione, è un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni affini di  $\mathbb{E}^4$ , che chiameremo gruppo di Galileo.<sup>6</sup> Siccome vogliamo conservare anche l'orientazione dello spazio, data dalla scelta del sistema di riferimento, ci restringeremo alle trasformazioni con  $G \in SO(3)$ , cioè alle trasformazioni ortogonali con determinante uguale a 1.

## Principio di relatività di Galileo

Dato un sistema di punti materiali  $P_1, \dots, P_N$ , possiamo estendere in modo naturale l'azione del gruppo di Galileo alle mappe  $t \mapsto \mathbf{x}_i(t), i = 1, \dots, N$ , che rappresentano il moto dei punti. Precisamente si ha:

$$\begin{aligned} g_1 \mathbf{x}_i(t) &= \mathbf{x}_i(t) + t\mathbf{u}, \\ g_2 \mathbf{x}_i(t) &= \mathbf{x}_i(t + s) + \mathbf{y}, \\ g_3 \mathbf{x}_i(t) &= G \mathbf{x}_i(t). \end{aligned}$$

**Definizione 1.** *Diciamo che un sistema di riferimento è inerziale se le equazioni di Newton (1.13) per ogni sistema di punti materiali isolato scritte in questo riferimento sono invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo di Galileo  $\mathcal{G}$ .*

L'invarianza delle equazioni di Newton significa che, data una qualunque soluzione  $t \rightarrow \mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t))$  di queste equazioni, ogni elemento  $g \in \mathcal{G}$  la trasforma in un'altra soluzione delle stesse equazioni.

*Il principio di relatività di Galileo afferma che esistono dei riferimenti inerziali.*

---

<sup>6</sup>Un insieme  $G$  ha la struttura di gruppo se in esso è definito un prodotto associativo, indicato con  $*$ , tale che esista in  $G$  un elemento neutro  $e$  (per cui  $g * e = e * g = g, \forall g \in G$ ) ed ogni elemento  $g$  abbia un inverso  $g^{-1}$  (per cui  $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$ ). Un sottogruppo  $H$  di un gruppo  $G$  è un sottoinsieme di  $G$  che ha anch'esso una struttura di gruppo con lo stesso prodotto di  $G$ .

Questo principio porta il nome di Galileo Galilei poiché in un passo di un suo libro egli scrive che, facendo alcuni semplici esperimenti all'interno di una barca che si muove di moto rettilineo uniforme, partendo da una posizione qualunque e andando in una qualunque direzione, si osservano gli stessi effetti che si avrebbero sulla terraferma. Quindi, in particolare, non si può distinguere sulla base di questi esperimenti se la barca sia in movimento oppure no.<sup>7</sup>

La proprietà di invarianza rispetto al gruppo di Galileo impone delle restrizioni

---

<sup>7</sup>G. Galilei, dal *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632). 'Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le goccioline cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con più fatica noteranno verso la precedente che verso la susseguente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate; e se abbruciando alcuna lagrima d'incenso si farà un poco di fumo, vedrassi ascender in alto ed a guisa di nuvoletta trattenervisi, e indifferentemente muoversi non più verso questa che quella parte. E di tutta questa corrispondenza d'effetti ne è cagione l'esser il moto della nave comune a tutte le cose contenute in essa ed all'aria ancora, che per ciò dissi io che si stesse sotto coverta; ché quando si stesse di sopra e nell'aria aperta e non seguace del corso della nave, differenze più e men notabili si vedrebbero in alcuni de' gli effetti nominati: e non dubbio che il fumo resterebbe in dietro, quanto l'aria stessa; le mosche parimente e le farfalle, impedito dall'aria, non potrebb' seguir il moto della nave, quando da essa per spazio assai notevole si separassero; ma trattenendovisi vicine, perché la nave stessa, come di fabbrica anfrattuosa, porta seco parte dell'aria sua prossima, senza intoppo o fatica seguirebbon la nave, e per simil cagione veggiamo tal volta, nel correr la posta, le mosche importune e i tafani seguir i cavalli, volandogli ora in questa ed ora in quella parte del corpo; ma nelle goccioline cadenti pochissima sarebbe la differenza, e ne i salti e ne i proietti gravi, del tutto impercettibile.'

sulla forma delle forze:

- a) *invarianza per traslazioni del tempo*: se  $\mathbf{x}(t)$  è soluzione di (1.13) anche  $\mathbf{x}(t+s)$  lo è, cioè

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i(t+s) = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}(t+s), \dot{\mathbf{x}}(t+s), t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.16)$$

per ogni  $t, s \in \mathbb{R}$  per cui la relazione di sopra è definita. Ne segue che le forze  $\mathbf{F}_i$  non dipendono da  $t$ :

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad (1.17)$$

cioè ‘*le leggi della natura restano le stesse al passare del tempo*’ [2]. Infatti, dati  $t, s$ , possiamo scegliere  $t_1, s_1 \in \mathbb{R}$  in modo che  $t_1 + s_1 = t + s = \tau$  e scrivere

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i(t_1 + s_1) = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}(t_1 + s_1), \dot{\mathbf{x}}(t_1 + s_1), t_1), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.18)$$

Dal confronto tra le equazioni (1.16) e (1.18) si ottiene

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), t) = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), t_1),$$

per ogni  $\tau, t, t_1$  per cui tale relazione è definita, per cui

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial t}(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_i(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), t+h) - \mathbf{F}_i(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), t)}{h} = \mathbf{0},$$

cioè le forze  $\mathbf{F}_i$  non dipendono dal tempo.

Grazie all’arbitrarietà di  $\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)$ , che possono essere scelte come condizioni iniziali che definiscono la soluzione  $\mathbf{x}(t)$ , possiamo concludere che vale (1.17).

- b) *invarianza per traslazioni uniformi nello spazio*  $\mathbb{E}^3$ : se  $\mathbf{x}(t)$  è soluzione anche  $\mathbf{x}(t) + t\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{y}}$ , con  $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}), \tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}, \dots, \mathbf{y})$ , lo è per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  (lo spazio è omogeneo). Ne segue che<sup>8</sup>

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k), \quad (1.19)$$

cioè le forze dipendono solo dalle posizioni e dalle velocità relative.

Fissando un tempo arbitrario  $\tau$  e usando l’invarianza per trasformazioni della forma  $g_2$  con  $\mathbf{y} = -\mathbf{x}_1(\tau), s = 0$ , cioè  $g_2 \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_1(\tau)$ , per  $t = \tau$  si ottiene

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)) = \mathbf{F}_i(\mathbf{0}, \mathbf{x}_2(\tau) - \mathbf{x}_1(\tau), \dots, \mathbf{x}_N(\tau) - \mathbf{x}_1(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)). \quad (1.20)$$

---

<sup>8</sup>con questa notazione si intende che gli argomenti di  $\mathbf{F}_i$  possono essere tutte le combinazioni  $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k$ , con  $2 \leq j < k \leq N$ .

Usando (1.20), cioè il fatto che la dipendenza dalle posizioni dei punti appaia solo tramite le differenze  $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1$ , e l'invarianza per trasformazioni della forma  $g_1$  con  $\mathbf{u} = -\dot{\mathbf{x}}_1(\tau)$ , cioè  $g_1 \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - t\dot{\mathbf{x}}_1(\tau)$ , per  $t = \tau$  si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)) &= \mathbf{F}_i(\mathbf{0}, \mathbf{x}_2(\tau) - \mathbf{x}_1(\tau), \dots, \mathbf{x}_N(\tau) - \mathbf{x}_1(\tau), \\ &\quad \mathbf{0}, \dot{\mathbf{x}}_2(\tau) - \dot{\mathbf{x}}_1(\tau), \dots, \dot{\mathbf{x}}_N(\tau) - \dot{\mathbf{x}}_1(\tau)). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Grazie all'arbitrarietà delle condizioni iniziali  $\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau)$  possiamo concludere che<sup>9</sup>

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_1), \quad (1.22)$$

cioè le forze  $\mathbf{F}_i$  dipendono solo dalle posizioni e velocità relative a  $P_1$  dei punti  $P_2, \dots, P_N$ .

Osserviamo anche che (1.22) è equivalente a (1.19), cioè possiamo scrivere le  $\mathbf{F}_i$  nella forma (1.22) se e solo se le possiamo scrivere nella forma (1.19), infatti

$$\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1) - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1), \quad \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k = (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_1) - (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_1).$$

- c) invarianza per rotazioni nello spazio  $\mathbb{E}^3$ : se  $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t))$  è soluzione anche  $(G\mathbf{x}_1(t), \dots, G\mathbf{x}_N(t))$  lo è, per ogni  $G \in SO(3)$  (lo spazio è isotropo). Ne segue che

$$\mathbf{F}_i(G(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k), G(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k)) = G\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k). \quad (1.23)$$

La (1.23) segue applicando  $G$  ai due membri dell'equazione di Newton:

$$Gm_i\ddot{\mathbf{x}}_i = G\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{x}}_k),$$

e osservando che l'invarianza per trasformazioni della forma  $g_3$  ci dà

$$m_i G \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(G(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k), G(\dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{x}}_k)).$$

**Osservazione 1.** *In particolare, se il sistema consiste di un solo punto, in ogni sistema di riferimento inerziale la forza che agisce sul punto è nulla e quindi il suo moto è rettilineo uniforme. Infatti per a), b) la forza non dipende da  $t, \mathbf{x}, \mathbf{v}$ , quindi è costante; inoltre per c) essa è invariante per rotazioni, quindi è nulla.*

<sup>9</sup>in modo analogo a prima, anche qui intendiamo che gli argomenti di  $\mathbf{F}_i$  possono essere tutte le combinazioni  $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_1$ , con  $j = 1, \dots, N$ .

## 1.5 Sistemi meccanici

**Definizione 2.** Consideriamo un insieme di  $N$  punti materiali,  $P_i, i = 1, \dots, N$ , di masse  $m_i$ , su cui agiscono delle forze  $\vec{F}_i$  assegnate a priori in un sistema di riferimento  $\Sigma$ . Diciamo che questo è un **sistema meccanico classico** (discreto, non vincolato) se il moto dei punti soddisfa le equazioni di Newton (1.13). Se nel riferimento scelto le equazioni di Newton sono invarianti per l'azione del gruppo  $\mathcal{G}$  (cioè il riferimento considerato è inerziale), parleremo di **sistema meccanico galileiano**.

La dimensione dello spazio vettoriale in cui si possono muovere i punti del sistema, che nel caso di  $N$  punti è  $3N$ , si chiama **numero di gradi di libertà** del sistema.

Per i sistemi meccanici che studieremo le equazioni del moto potranno non essere invarianti per le trasformazioni di Galileo. L'esempio più semplice è quello della caduta di un grave, cioè il moto di un punto materiale di massa  $m$  soggetto alla forza di gravità  $-mg\hat{e}_3$  in un riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ . È evidente la mancanza di invarianza per rotazione dell'equazione del moto, che si scrive:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -mge_3.$$

In questo caso la direzione della gravità è privilegiata. Osserviamo che il sistema meccanico considerato non è isolato in quanto risente della forza di gravità, esterna al sistema.

## 1.6 Esercizi

**Esercizio 3.** Siano  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3$  con  $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ . Dato  $\vec{a} \in \text{span}(\vec{u}, \vec{v})$ , trovare i coefficienti  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tali che

$$\vec{a} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

Trovare inoltre i vettori  $\lambda\vec{u}$  e  $\mu\vec{v}$  col metodo grafico.

**Esercizio 4.** Siano  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$  con  $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} \neq 0$ . Dato  $\vec{a} \in \mathbb{V}^3$ , trovare i coefficienti  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$  tali che

$$\vec{a} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}.$$

Trovare inoltre i vettori  $\lambda\vec{u}$ ,  $\mu\vec{v}$  e  $\nu\vec{w}$  col metodo grafico.

**Esercizio 5.** Mostrare che per ogni scelta di  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{V}^3$  vale la relazione

$$(\vec{a} \cdot \vec{c} \times \vec{d}) \vec{b} + (\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}) \vec{d} = (\vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{d}) \vec{a} + (\vec{d} \cdot \vec{a} \times \vec{b}) \vec{c}.$$

# Capitolo 2

## Dinamica di un punto materiale libero

Studiamo il moto di un punto materiale libero. Introduciamo inoltre i problemi integrabili secondo Liouville e, tra essi, i moti unidimensionali.

### 2.1 Quantità dinamiche per un punto materiale

Consideriamo un punto materiale  $P$  di massa  $m$  sul quale agisce una forza  $\vec{F}$  nel sistema di riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ . Siano  $\vec{x}_P, \vec{v}_P, \vec{a}_P$  la posizione, la velocità e l'accelerazione di  $P$  relative a  $\Sigma$ . Denoteremo con  $\mathbf{x}_P, \mathbf{v}_P, \mathbf{a}_P$  i vettori delle coordinate in  $\Sigma$  di queste quantità.

Introduciamo le seguenti definizioni:

QUANTITÀ DI MOTO (o MOMENTO LINEARE)

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A UN POLO  $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{M}_Q = (P - Q) \times m\vec{v},$$

ENERGIA CINETICA<sup>1</sup>

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2,$$

MOMENTO DELLA FORZA  $\vec{F}$  RISPETTO A UN POLO  $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{N}_Q = (P - Q) \times \vec{F},$$

---

<sup>1</sup>la quantità  $m|\vec{v}|^2$  è stata introdotta da Leibniz con il nome di *vis viva*.



POTENZA DELLA FORZA  $\vec{F}$

$$\Pi = \vec{F} \cdot \vec{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v},$$

LAVORO ELEMENTARE<sup>2</sup> ALL'ISTANTE  $t$  DELLA FORZA  $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$

$$\delta\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}.$$

Osserviamo che il valore della potenza e del lavoro elementare è lo stesso in qualunque base ortonormale si rappresentino  $\vec{F}$ ,  $\vec{v}$ ,  $d\vec{x}$ .

ENERGIA POTENZIALE

Si dice che un campo di forze posizionale  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  è **conservativo** se ammette un potenziale, cioè se esiste una funzione scalare  $U(\mathbf{x})$  tale che<sup>3</sup>

$$\nabla U = \mathbf{F}.$$

In tal caso la funzione  $V = -U$  si chiama **energia potenziale** del campo di forze e si ha<sup>4</sup>

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad \delta\mathcal{L} = -\nabla V \cdot d\mathbf{x} = -dV,$$

ENERGIA TOTALE

Se la forza  $\mathbf{F}$  è conservativa, con energia potenziale  $V$ , possiamo definire l'**energia totale** del sistema come

$$E = T + V.$$

## Esempi

Forze conservative:

1)  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -mg\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  (forza peso)

$$V(\mathbf{x}) = mg\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3, \quad \nabla V(\mathbf{x}) = mg\mathbf{e}_3 = -\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

2)  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -k\mathbf{x}$ ,  $k > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  (forza elastica centrale)

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}k|\mathbf{x}|^2, \quad \nabla V(\mathbf{x}) = k\mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

<sup>2</sup>dette  $(x_1, x_2, x_3)$  e  $(F_1, F_2, F_3)$  le coordinate di  $\vec{x}$  e  $\vec{F}$ , il lavoro elementare ha un'espressione del tipo  $F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$ , che si chiama *forma differenziale* su  $\mathbb{R}^3$ .

<sup>3</sup>data una funzione  $f(\mathbf{x})$ , con il simbolo  $\nabla f$  indicheremo il vettore colonna delle derivate parziali di  $f$  rispetto ad  $\mathbf{x}$ , cioè  $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T$ .

<sup>4</sup>in questo caso si dice che la forma differenziale  $\delta\mathcal{L}$  è *esatta*, cioè rappresenta il differenziale di una funzione.

3)  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}$ ,  $\rho = |\mathbf{x}|$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  (forza centrale a simmetria sferica)

$$V(\mathbf{x}) = - \int f(\rho) d\rho, \quad \nabla V(\mathbf{x}) = -f(\rho)\nabla\rho = -f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Forza non conservativa:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x^2 + y^2, xy, 0).$$

Ragioniamo per assurdo. Se esistesse una funzione  $V(\mathbf{x})$  tale che  $-\nabla V = \mathbf{F}$ , si avrebbe in particolare

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = x^2 + y^2, \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = xy.$$

Poiché le funzioni  $x^2 + y^2$  e  $xy$  sono polinomiali, quindi sicuramente di classe  $C^1$ , possiamo applicare il teorema di Schwartz e notare che nelle derivate seconde miste di  $V(\mathbf{x})$  l'ordine di derivazione non conta. Quindi si avrebbe

$$y = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = 2y,$$

che è una contraddizione.

## 2.2 Equazioni di bilancio e leggi di conservazione

Consideriamo un punto materiale  $P$  di massa  $m$  con coordinate  $\mathbf{x}$ , su cui agisca una forza  $\mathbf{F}$ .

**Proposizione 4.** *Sia  $\mathbf{x}(t)$  una qualunque soluzione dell'equazione di Newton  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ . Allora, lungo questa soluzione<sup>5</sup> valgono le relazioni*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \tag{2.1}$$

e, per ogni punto  $Q \in \mathbb{E}^3$ ,

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q - m\mathbf{v}_Q \times \mathbf{v}. \tag{2.2}$$

*Dimostrazione.* Basta calcolare la derivata totale di  $\mathbf{p}$  e di  $\mathbf{M}_Q$ , cioè la derivata temporale lungo una qualunque soluzione dell'equazione di Newton. □

---

<sup>5</sup>dire che queste relazioni valgono lungo una soluzione  $\mathbf{x}(t)$  dell'equazione di Newton significa che tali relazioni sono soddisfatte sostituendo le funzioni  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  al posto di  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}$ .

**Proposizione 5.** (teorema dell'energia cinetica) Sia  $\mathbf{x}(t)$  una qualunque soluzione dell'equazione di Newton  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ . Allora, lungo questa soluzione vale la relazione

$$\dot{T} = \Pi.$$

*Dimostrazione.*

$$\Pi = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{x}} = m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) = \dot{T}.$$

□

**Definizione 3.** Si dice che una funzione  $I(\mathbf{x}, t)$  è un **integrale primo** di un'equazione differenziale  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, k > 0$ , se il suo valore è costante lungo una qualunque soluzione  $\mathbf{x}(t)$  di questa equazione.

Questo significa che, se  $I(\mathbf{x}, t)$  è un integrale primo e  $\mathbf{x}(t)$  è una qualunque soluzione di  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , si ha

$$\frac{d}{dt}I(\mathbf{x}(t), t) = 0$$

e quindi, integrando a partire dal tempo iniziale  $t_0$ , si ottiene la legge di conservazione

$$I(\mathbf{x}(t), t) = I(\mathbf{x}(t_0), t_0).$$

I valori dell'integrale primo  $I$  saranno in generale diversi in corrispondenza di soluzioni  $\mathbf{x}(t)$  diverse.

**Esercizio 6.** Trovare un integrale primo dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

**Proposizione 6.** Valgono le seguenti proprietà:

- 1) se la componente di  $\mathbf{F}$  nella direzione  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$  è nulla allora  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}$  è un integrale primo;
- 2) se il momento della forza  $\mathbf{F}$  rispetto ad un polo  $Q$  in quiete (nel riferimento in cui si studia il moto) ha componente nulla nella direzione  $\mathbf{e}$  allora  $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}$  è un integrale primo.

*Dimostrazione.* Basta moltiplicare scalarmente per  $\mathbf{e}$  le relazioni (2.1), (2.2), tenendo conto che in quest'ultima si ha  $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ .

□

Ad esempio, per un punto materiale soggetto alla forza peso  $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_3$  si conservano  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}_3$  rispetto ad ogni polo fisso  $Q$ .

Dato un versore  $\hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{V}^3$ , la quantità  $\vec{\mathbf{M}}_Q \cdot \hat{\mathbf{e}}$  si chiama **momento angolare assiale** relativo alla retta  $Q\hat{\mathbf{e}} = \{Q + \lambda\hat{\mathbf{e}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ , passante per  $Q$  e avente la direzione di  $\hat{\mathbf{e}}$ . Il suo valore non cambia scegliendo come polo un punto qualunque su tale retta, infatti, se  $Q' \in Q\hat{\mathbf{e}}$ , dalla relazione

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = \vec{\mathbf{M}}_{Q'} + (Q - Q') \times m\vec{\mathbf{v}}_P$$

segue che

$$\vec{\mathbf{M}}_Q \cdot \hat{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{M}}_{Q'} \cdot \hat{\mathbf{e}}$$

poiché  $(Q - Q') \times m\vec{\mathbf{v}}_P \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0$ .

**Proposizione 7. (conservazione dell'energia)** *Se il campo di forze  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  è conservativo, con energia potenziale  $V(\mathbf{x})$ , allora l'energia totale  $E = T + V$  è un integrale primo.*

*Dimostrazione.*

$$\dot{T} = \Pi = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{x}} = -\nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} = -\dot{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(T + V) = 0.$$

□

## 2.3 Problemi integrabili

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

dove  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un campo vettoriale di classe  $C^1$  definito su un aperto  $U \in \mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 1$ , e  $\mathbf{x}_0 \in U$  è la condizione iniziale al tempo  $t = 0$ .

Per il teorema di Cauchy-Lipschitz una soluzione locale  $\mathbf{x}(t)$  di (2.3) esiste ed è unica, però in generale non abbiamo nessuna informazione sulla sua espressione. In alcuni casi, molto particolari, la soluzione  $\mathbf{x}(t)$  di (2.3) si riesce a trovare esplicitamente. Ad esempio, se  $n = 1$  ed

$$f(x) = ax,$$

con  $a \neq 0$  costante, la soluzione è data da

$$x(t) = e^{at}x_0,$$

dove  $x_0 \in \mathbb{R}$  è la condizione iniziale.

Ci interessa adesso studiare una situazione intermedia, in cui la soluzione  $\mathbf{x}(t)$  si può scrivere in forma implicita e precisamente *a meno di inversioni e quadrature*<sup>6</sup>. In questo caso diciamo che il problema (2.3) è **integrabile** secondo Liouville, o semplicemente che è integrabile. Un esempio di problema integrabile è descritto di seguito.

## Equazioni differenziali a variabili separabili

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

dove  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$  definita su un intervallo aperto  $I \subset \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$  è la condizione iniziale. I valori di  $x_0$  tali che  $f(x_0) = 0$  danno luogo a soluzioni stazionarie  $x(t) = x_0$ . Se la condizione iniziale  $x_0$  non annulla  $f$  allora, per l'unicità della soluzione  $x(t)$  di (2.4), si avrà  $f(x(t)) \neq 0$  in tutto l'intervallo massimale di definizione di tale soluzione. Per risolvere il problema posso dividere l'equazione differenziale per  $f(x(t))$  e integrare nella variabile temporale tra 0 e  $t$ . Usando il cambiamento di variabili nell'integrazione ottengo

$$t = \int_0^t \frac{\dot{x}(t')}{f(x(t'))} dt' = \int_{x_0}^x \frac{1}{f(x')} dx' =: G(x). \quad (2.5)$$

Osserviamo che la funzione  $\frac{1}{f(x)}$  è di classe  $C^1$ , quindi la sua primitiva  $G(x)$  esiste, anche se non è detto che si riesca a calcolare in termini di funzioni elementari, come ad esempio nel caso  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ . Inoltre, siccome  $f$  non può cambiare segno nell'intervallo considerato, la funzione  $G(x)$  è strettamente monotona e quindi invertibile, anche se non è detto che si riesca a calcolarne esplicitamente l'inversa, come ad esempio nel caso  $G(x) = xe^x$ . Possiamo quindi concludere che il problema (2.4) è integrabile secondo Liouville.

**Osservazione 2.** *Può succedere che il moto diventi illimitato in tempo finito. Se  $f$  non è lipschitziana,<sup>7</sup> nemmeno localmente, può anche succedere che la soluzione non sia unica.*

<sup>6</sup>cioè a meno di invertire esplicitamente delle funzioni e a meno di calcolare delle primitive in termini di funzioni elementari. Si richiede comunque l'esistenza di tali funzioni inverse e di tali primitive.

<sup>7</sup> $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  si dice lipschitziana su un aperto  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  se esiste una  $L > 0$  tale che  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ .

**Esercizio 7.** Studiare le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

## 2.4 Moti unidimensionali

In questa sezione consideriamo il problema di Cauchy unidimensionale

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \\ x(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) = v_0. \end{cases}$$

dove  $n = 1$ ,  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ .

Osserviamo che un tale problema può apparire anche nel caso di moti tridimensionali soggetti a forze di un certo tipo. Fissiamo un sistema di riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$  e consideriamo il moto di un punto materiale  $P$  di massa  $m$  soggetto ad una forza  $\vec{F} = \vec{F}((P-O) \cdot \hat{e}, \vec{v} \cdot \hat{e}, t)$ , tale che  $\vec{F} \times \hat{e} = \vec{0}$ , con  $\hat{e}$  vettore unitario costante, cioè ad una forza che ha direzione costante e dipende solo dalla proiezione dei vettori posizione e velocità lungo quella direzione. A meno di ruotare il riferimento, che corrisponde ad applicare una particolare trasformazione galileiana<sup>8</sup>, possiamo supporre che  $\hat{e} = \hat{e}_1$ , per cui le equazioni di Newton si possono scrivere

$$m\ddot{x}_1 = F_1(x_1, \dot{x}_1, t), \quad m\ddot{x}_2 = 0, \quad m\ddot{x}_3 = 0, \quad (2.6)$$

dove  $x_1, x_2, x_3$  sono le coordinate del punto  $P$  in  $\Sigma$  ed  $F_1 = \vec{F} \cdot \hat{e}_1$ . Consideriamo il problema di Cauchy dato dalla (2.6) e dalle condizioni iniziali

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0,$$

con  $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^3$ . A meno di applicare un'altra trasformazione galileiana della forma

$$g(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - t\mathbf{v}_0, t),$$

possiamo assumere che

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

e considerare il problema di Cauchy unidimensionale

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = F_1(x_1, \dot{x}_1, t), \\ x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_1(0) = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

---

<sup>8</sup>per cui, se il riferimento  $\Sigma$  era inerziale, continua ad esserlo.

in quanto le componenti  $x_2, x_3$  della soluzione nel nuovo riferimento sono identicamente nulle. Più in generale, chiameremo problema del **moto unidimensionale** il problema di Cauchy

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = F_1(x_1, \dot{x}_1, t), \\ x_1(0) = x_0, \\ \dot{x}_1(0) = v_0, \end{cases} \quad (2.9)$$

con  $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ . Data la soluzione  $x_1(t)$  di (2.9),<sup>9</sup> osserviamo che  $\mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1$  risolve le equazioni differenziali (2.6) e soddisfa le condizioni iniziali (2.7). Se  $F_1$  è di classe  $C^1$ , per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy  $\mathbf{x}(t)$  è la soluzione cercata. Nel seguito scriveremo semplicemente  $x, \dot{x}, F$  al posto di  $x_1, \dot{x}_1, F_1$ .

Nel caso di un moto unidimensionale, se la forza  $F$  in (2.9) è continua e puramente posizionale allora è conservativa e possiamo determinare un'energia potenziale, cioè una funzione  $V(x)$  con  $-V'(x) = F(x)$ . In questo caso il problema di Cauchy (2.9) si scrive

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -V'(x), \\ x(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) = v_0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Se  $F$  è anche  $C^1$  la soluzione di (2.10) è unica.<sup>10</sup> Assumiamo che  $F$  sia  $C^1$ .

**Osservazione 3.** *Le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$m\ddot{x} = -V'(x) \quad (2.11)$$

*sono invarianti per traslazioni e riflessioni temporali, cioè se  $x(t)$  è una soluzione di (2.11), allora anche  $y(t) = x(t - \tau)$  con  $\tau \in \mathbb{R}$  e  $z(t) = x(-t)$  risolvono la stessa equazione differenziale.*

**Proposizione 8.** *Il problema (2.10) è integrabile secondo Liouville.*

*Dimostrazione.* L'energia totale

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

è un integrale primo di (2.11). Posto  $E_0 = E(x_0, v_0)$  scriviamo la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + V(x(t)) = E_0 \quad (2.12)$$

---

<sup>9</sup>il problema di Cauchy (2.9) ammette un'unica soluzione anche se  $F_1$  dipende da  $t$ , purché  $F_1$  sia abbastanza regolare.

<sup>10</sup>basta che  $F$  sia lipschitziana

lungo la soluzioni  $x(t)$  di (2.10). Dalla (2.12) si vede che i valori ammissibili di  $x(t)$  soddisfano necessariamente la condizione

$$E_0 - V(x) \geq 0.$$

I valori di  $x$  tali che

$$E_0 - V(x) = 0, \quad V'(x) \neq 0 \quad (2.13)$$

si chiamano **punti di inversione** del moto. I valori di  $x$  tali che

$$E_0 - V(x) = 0, \quad V'(x) = 0 \quad (2.14)$$

si chiamano **configurazioni di equilibrio**, o più semplicemente **equilibri**. Supponiamo che ci sia un numero finito (diverso da zero) di punti di inversione. Possiamo trovare un numero finito di intervalli disgiunti di valori di  $x$  in cui si può svolgere il moto. Questi intervalli possono essere sia limitati che illimitati.

Dalla (2.12) ricaviamo che la soluzione di (2.10) soddisfa

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2(E_0 - V(x))}{m}}. \quad (2.15)$$

Distinguiamo 3 casi in base alle condizioni iniziali di (2.10):

$$\text{i) } v_0 > 0, \quad \text{ii) } v_0 < 0, \quad \text{iii) } v_0 = 0.$$

Nel caso i) scegliamo il segno positivo in (2.15) e consideriamo il problema di Cauchy

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2(E_0 - V(x))}{m}}, \quad x(0) = x_0. \quad (2.16)$$

Nel caso ii) scegliamo il segno negativo e consideriamo

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{2(E_0 - V(x))}{m}}, \quad x(0) = x_0. \quad (2.17)$$

Infine, nel caso iii)  $x_0$  è un punto di inversione oppure un equilibrio. Nel primo caso si ha  $V'(x_0) \neq 0$  e scegliamo in (2.15) il segno della forza  $F(x_0)$ . Infatti, se  $F(x_0) > 0$  allora  $\ddot{x}(0) > 0$ , quindi  $\dot{x}$  deve essere crescente, almeno inizialmente. Analogamente, se  $F(x_0) < 0$  allora  $\dot{x}$  deve essere inizialmente decrescente. Nel caso di un equilibrio si ha  $F(x_0) = -V'(x_0) = 0$  e  $\dot{x}_0 = 0$ , e la funzione costante  $x(t) = x_0$  è la soluzione di (2.10).

□

Diciamo che un valore  $E_0$  dell'energia  $E$  è **critico** se nell'insieme  $\{(x, v) : E(x, v) = E_0\}$  c'è un punto critico di  $E$ , cioè un punto  $(x, v) = (x_c, 0)$  tale che  $V'(x_c) = 0$ . In caso contrario diciamo che  $E_0$  è un valore **regolare**.



**Osservazione 4.** Nel caso iii) della dimostrazione della Proposizione 8  $x_0$  è un punto di inversione oppure un equilibrio. Se  $E_0$  è un valore regolare di  $E$ , la funzione  $\sqrt{E_0 - V(x)}$  non è lipschitziana in nessun intorno (destra o sinistra) di  $x_0$  dove  $E_0 - V(x) \geq 0$ , cioè dove è possibile il moto.<sup>11</sup> In questo caso si perde l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy (2.16), (2.17), che hanno anche la soluzione costante  $x(t) = x_0$ . Quest'ultima è la soluzione unica di (2.10) se e solo se  $E_0$  è un valore critico, cioè se  $V'(x_0) = 0$ .

## Moti per valori regolari di $E$

Consideriamo due punti di inversione consecutivi  $x_{\min}$ ,  $x_{\max}$ , con  $x_{\min} < x_{\max}$ , che corrispondono a un valore regolare  $E_0$  dell'energia e sono tali che il moto si possa svolgere all'interno dell'intervallo  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , cioè

$$\begin{aligned} E_0 - V(x_{\min}) &= E_0 - V(x_{\max}) = 0, \\ E_0 - V(x) &> 0 \text{ se } x \in (x_{\min}, x_{\max}), \\ V'(x_{\min}) &< 0 < V'(x_{\max}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

**Definizione 4.** Diciamo che una soluzione  $x(t)$  di (2.10) è un **moto periodico** di periodo  $T > 0$  se

$$x(t + T) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e per nessun  $T'$ , con  $0 < T' < T$ , si ha  $x(t + T') = x(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

**Proposizione 9.** Se valgono le relazioni (2.18), con  $E_0 = E(x_0, v_0)$ , la soluzione  $x(t)$  di (2.10) dà luogo a un moto periodico con periodo

$$T = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{\frac{m}{2(E_0 - V(x'))}} dx'. \quad (2.19)$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la soluzione  $x(t)$  del problema di Cauchy (2.10) con  $x_0 = x_{\min}$  e  $v_0 = 0$  (perché  $x_{\min}$  è un punto di inversione). Osserviamo che  $x(t)$  soddisfa l'equazione (2.15) con la scelta positiva del segno poiché  $-V'(x_{\min}) > 0$ . Mostriamo che  $x(t)$  è definita su  $[0, T/2]$ , dove  $T$  è dato dalla relazione (2.19) e corrisponde al doppio del tempo necessario per andare da  $x_{\min}$  a  $x_{\max}$ . Per farlo dobbiamo dimostrare che questo tempo è finito. Consideriamo lo sviluppo di Taylor di  $E_0 - V(x)$  centrato in  $x_{\min}$  per  $x \in [x_{\min}, \bar{x}]$ , con  $x_{\min} \leq \bar{x} < x_{\max}$ :

$$E_0 - V(x) = -V'(x_{\min})(x - x_{\min}) - \frac{1}{2}V''(x_{\min})(x - x_{\min})^2 + o(|x - x_{\min}|^2).$$

<sup>11</sup>Questo si giustifica scrivendo lo sviluppo di Taylor di  $E_0 - V(x)$  in  $x = x_0$ :

$$E_0 - V(x) = \underbrace{E_0 - V(x_0)}_{=0} - V'(x_0)(x - x_0) + O(|x - x_0|^2).$$

Il tempo impiegato dal punto  $P$  per arrivare a  $\bar{x}$  partendo da  $x_{\min}$  è dato dall'integrale

$$\int_{x_{\min}}^{\bar{x}} \sqrt{\frac{m}{2(E_0 - V(x'))}} dx',$$

che è finito perché

$$\int_{x_{\min}}^{\bar{x}} \frac{1}{\sqrt{|x - x_{\min}|}} dx < +\infty.$$

In modo analogo si dimostra che il tempo impiegato da  $P$  per andare da  $\bar{x}$  a  $x_{\max}$  è finito.

Osserviamo che la funzione

$$y(t) = x(T - t),$$

definita per  $t \in [T/2, T]$ , è ancora soluzione di (2.11) e si ha

$$y(T/2) = x(T/2) = x_{\max}, \quad \dot{y}(T/2) = -\dot{x}(T/2) = 0. \quad (2.20)$$

Da questo e dall'unicità della soluzione del problema di Cauchy per (2.11), con condizioni iniziali date da (2.20) al tempo  $t = T/2$ , segue che

$$x(T - t) = x(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.21)$$

e in particolare la soluzione  $x(t)$  è definita sull'intervallo  $[0, T]$ . Osserviamo che anche la funzione

$$z(t) = x(t + T),$$

definita per  $t \in [-T, 0]$ , è soluzione di (2.11). Dalla relazione (2.21) segue che

$$z(0) = x(T) = x(0) = x_{\min}, \quad \dot{z}(0) = \dot{x}(T) = -\dot{x}(0) = 0. \quad (2.22)$$

Quindi, usando l'unicità della soluzione del problema di Cauchy per (2.11) con condizioni finali date da (2.22) al tempo  $t = 0$  otteniamo che

$$x(t + T) = x(t), \quad \forall t \in [-T, T],$$

e in particolare la soluzione  $x(t)$  è definita sull'intervallo  $[-T, T]$ . Iterando la costruzione precedente, otteniamo che

$$x(t + T) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

cioè il moto è periodico di periodo  $T$ .

□

### Moti per valori critici di $E$

Assumiamo adesso che  $E_0$  sia un valore critico dell'energia, corrispondente a un punto critico  $x_c$  di  $V(x)$ , e che il moto sia possibile in un intervallo sinistro  $[x_0, x_c]$  di  $x_c$ . Poiché  $V'(x_c) = 0$ , lo sviluppo di Taylor di  $E_0 - V(x)$  centrato in  $x_c$  è

$$E_0 - V(x) = -\frac{1}{2}V''(x_c)(x - x_c)^2 + o(|x - x_c|^2).$$

Il tempo impiegato dal punto  $P$  per arrivare a  $x_c$  partendo da  $x_0$  è dato dall'integrale

$$\int_{x_0}^{x_c} \sqrt{\frac{m}{2(E_0 - V(x'))}} dx',$$

che è infinito perché

$$\int_{x_0}^{x_c} \frac{1}{|x - x_c|} dx = +\infty.$$

Osserviamo anche che il problema di Cauchy (2.10) con  $x_0 = x_c, v_0 = 0$  ammette la soluzione di equilibrio  $x(t) = x_c$ .

Il caso in cui il moto sia possibile in un intervallo destro  $[x_c, x_0]$  di  $x_c$  si tratta in modo analogo.

### Ritratto di fase

La funzione  $t \mapsto x(t)$  è soluzione di (2.10) se e solo se la curva piana  $t \mapsto (x(t), v(t))$  è soluzione del sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{1}{m}V'(x) \end{cases} \quad (2.23)$$

con le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0. \quad (2.24)$$

Il **ritratto di fase** di un moto unidimensionale conservativo è un disegno nel piano della fasi, con coordinate  $x, v$ , delle traiettorie delle soluzioni di (2.23). Per questo sistema abbiamo l'integrale primo dell'energia

$$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

per cui le traiettorie delle sue soluzioni giacciono sulle curve di livello

$$\mathcal{C}_E = \{(x, v) : E(x, v) = E_0\}$$

al variare di  $E_0$  in  $\mathbb{R}$ . Nel disegnare il ritratto di fase si scelgono dei valori dei livelli  $E_0$  che corrispondono a curve qualitativamente diverse.

Le traiettorie delle soluzioni di (2.24) non si possono intersecare nel piano con coordinate  $(x, v)$ , infatti vale il seguente risultato:

**Proposizione 10.** *Siano  $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$  due soluzioni di*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, n \geq 1, \quad (2.25)$$

con  $\mathbf{f}$  di classe  $C^1$  su un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , tali che le loro traiettorie si intersecano in un punto, cioè esistono  $t_1, t_2$  tali che  $\mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}_2(t_2)$ . Allora queste traiettorie coincidono.

*Dimostrazione.* Definisco  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_2(t - t_1 + t_2)$ . La curva  $t \mapsto \mathbf{y}(t)$  è ancora una soluzione di (2.25) e la sua traiettoria coincide con quella di  $\mathbf{x}_2$ . Inoltre si ha

$$\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{x}_2(t_2) = \mathbf{x}_1(t_1),$$

quindi le soluzioni  $\mathbf{y}(t)$  e  $\mathbf{x}_1(t)$  coincidono, e in particolare coincidono le loro traiettorie. □

**Corollario 1.** *In un moto per un valore critico di  $E$ , partendo da un punto  $(x, \dot{x})$  diverso da un equilibrio  $(x_0, 0)$ , non si può mai raggiungere tale equilibrio se non asintoticamente per  $t \rightarrow \pm\infty$ .*

I cambiamenti qualitativi nella topologia delle curve di livello possono avvenire solo attraversando i livelli critici di  $E$ , per cui  $E(x, v) = E(x_0, 0)$  con  $V'(x_0) = 0$ . Quindi nel ritratto di fase dovremo tracciare sicuramente le curve che corrispondono a tali livelli.

**Esempio 1.** Tracciamo il ritratto di fase del moto unidimensionale con energia potenziale

$$V(x) = -x^3 + 2x - 4. \quad (2.26)$$

I punti critici di  $V$  sono  $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Indichiamo con  $h_1 = V(x_1) \approx -2.9113$ ,  $h_2 = V(x_2) \approx -5.0887$  i corrispondenti valori critici dell'energia

$$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x).$$

Nella Figura 2.1 disegniamo il grafico dell'energia potenziale  $V$  (sopra) e alcune curve di livello di  $E$  (sotto). Oltre ai livelli critici, abbiamo scelto dei livelli intermedi dell'energia. I valori considerati sono

$$(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5) = (-6, h_2, -4, h_1, -2.5).$$

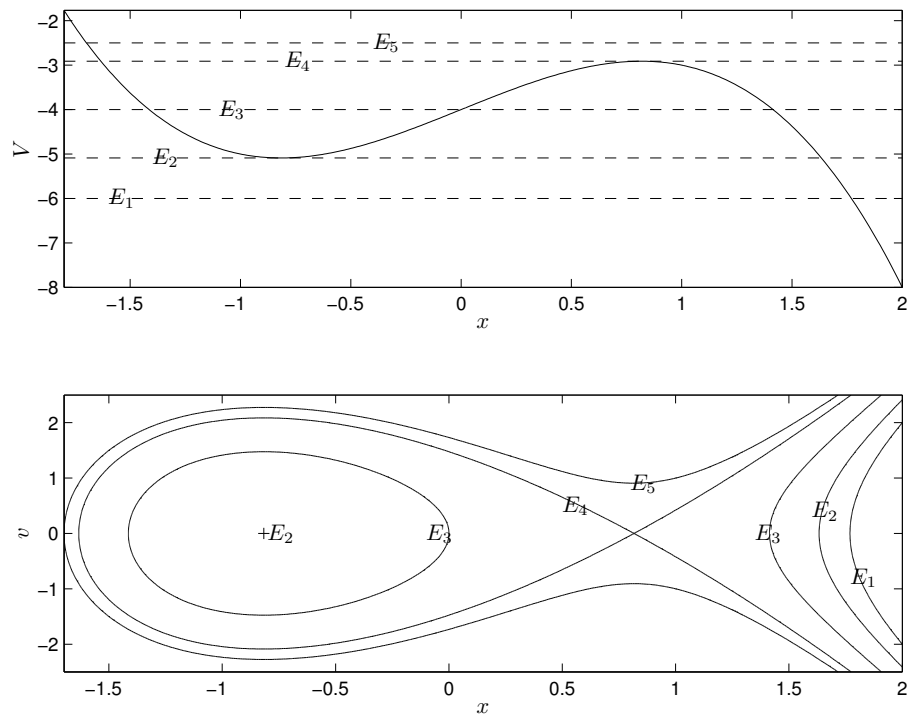


Figura 2.1: Sopra: grafico dell'energia potenziale in (2.26). Sotto: curve di livello dell'energia totale  $E(x, v)$ .

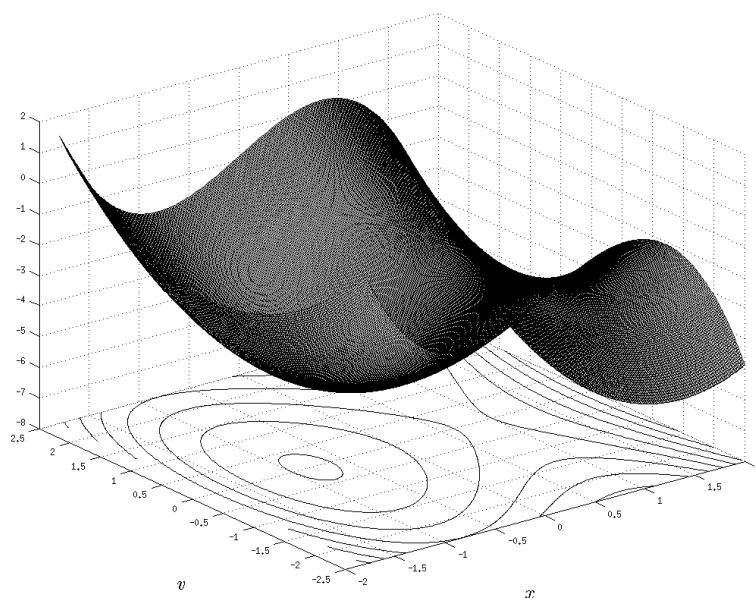


Figura 2.2: Grafico dall'energia  $E(x, v)$  insieme ad alcune curve di livello.

Ai minimi locali di  $V(x)$  corrispondono minimi locali di  $E(x, v)$  e ai massimi locali di  $V(x)$  corrispondono punti di sella di  $E(x, v)$ .

Nella Figura 2.2 tracciamo il grafico della superficie definita dall'energia  $E(x, v)$  insieme ad alcune sue curve di livello nel piano  $(x, v)$ .

**Osservazione 5.** *Vedremo che alcuni problemi della Meccanica saranno riconducibili allo studio di moti unidimensionali in seguito a un procedimento di riduzione del numero di gradi di libertà.*



# Capitolo 3

## Moti centrali

Descriviamo le proprietà delle forze centrali a simmetria sferica e mostriamo come queste diano luogo a problemi integrabili. Trattiamo inoltre in dettaglio il caso particolare del problema di Keplero.

**Definizione 5.** Si dice che  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un **campo di forze centrale** con centro  $O$  se per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  vale la relazione

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad (3.1)$$

dove  $\rho = |\mathbf{x}|$  ed  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$ .

**Proposizione 11.** Un campo di forze  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  è centrale se e solo se

$$\mathbf{F}(R\mathbf{x}) = R\mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \forall R \in SO(3). \quad (3.2)$$

*Dimostrazione.* Se  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  è della forma (3.1) allora si verifica facilmente che vale (3.2), in quanto si ha  $|R\mathbf{x}| = |\mathbf{x}| = \rho$  per ogni  $R \in SO(3)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Assumiamo adesso che valga (3.2). Mostriamo prima che  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , scelta arbitrariamente una rotazione  $R_{\mathbf{x}} \in SO(3)$  con  $R_{\mathbf{x}}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ , dalla (3.2) si ottiene

$$R_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(R_{\mathbf{x}}\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

cioè ogni rotazione che lascia fisso il vettore posizione  $\mathbf{x}$  lascia fissa anche la forza  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Ma ogni rotazione in  $\mathbb{R}^3$  diversa dall'identità lascia fissi solo i vettori di uno spazio lineare unidimensionale (che è appunto l'asse di rotazione). Si ha quindi

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Per dimostrare che  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}$  per una qualche funzione  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , cioè che il campo di forze è a simmetria sferica, scegliamo arbitrariamente  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  tali



che  $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$ , che rappresentano le coordinate di due punti sulla stessa superficie sferica centrata nell'origine, e dimostriamo che

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y}. \quad (3.3)$$

Scelta  $R \in SO(3)$  tale che  $R\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , e usando (3.2) si ha

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{F}(R\mathbf{x}) \cdot R\mathbf{x} = R\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot R\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}.$$

Dalla (3.3) segue che l'intensità della forza  $\mathbf{F}$  è la stessa in tutti i punti della sfera di raggio  $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$ . □

Osserviamo che in questo caso le equazioni di Newton  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  sono invarianti solo rispetto ad alcune trasformazioni di Galileo, quelle del tipo  $g_3$ , ma non lo sono rispetto alle traslazioni dell'origine, che corrisponde al centro di forza.

### 3.1 Integrabilità dei moti centrali

Consideriamo il moto di un punto materiale di massa  $m$  in un campo di forze centrali  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}$ . Dalla relazione

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \mathbf{N}_O = \mathbf{x} \times f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho} = \mathbf{0}$$

abbiamo la conservazione del momento angolare  $\mathbf{M}_O$  rispetto al centro di forze  $O$ . Inoltre la forza  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  è conservativa, con energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\rho(\mathbf{x})), \quad \mathcal{V}(\rho) = - \int f(\rho) d\rho, \quad (3.4)$$

infatti

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \frac{d\mathcal{V}}{d\rho}(\rho(\mathbf{x}))\nabla\rho(\mathbf{x}) = -f(\rho(\mathbf{x}))\frac{\mathbf{x}}{\rho(\mathbf{x})},$$

per cui si conserva l'energia totale  $E = T + V$ .

Ricordiamo che un sistema meccanico si dice integrabile secondo Liouville se per ogni scelta delle condizioni iniziali possiamo scrivere la soluzione delle equazioni di Newton a meno di inversioni e quadrature.

**Proposizione 12.** *Il sistema dato da un punto materiale che si muove in un campo di forze centrali è integrabile.*

Trattiamo prima il caso particolare in cui  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$  e mostriamo che in questo caso il moto si svolge su una retta passante per  $O$ . Poiché  $\mathbf{M}_O = m\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ , possiamo trovare un vettore unitario  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$  con<sup>1</sup>

$$\mathbf{x}(0) = \rho_0 \mathbf{e}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\rho}_0 \mathbf{e}.$$

Se  $t \mapsto \rho(t)$  è la soluzione del problema di Cauchy unidimensionale

$$m\ddot{\rho} = f(\rho), \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \dot{\rho}(0) = \dot{\rho}_0, \quad (3.5)$$

che si può scrivere a meno di inversioni e quadrature, allora

$$t \mapsto \mathbf{x}(t) = \rho(t)\mathbf{e}$$

è la soluzione di  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , con dati iniziali  $\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)$ , e il moto è quindi rettilineo, su una retta passante per  $O$ .

Osserviamo che vale anche il viceversa: se il moto avviene lungo una retta passante per  $O$  allora  $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)$  sono sempre paralleli, quindi  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ .

Il problema di Cauchy (3.5) può essere scritto nella forma (2.10) con

$$V(x) = - \int f(x) dx$$

ed è quindi integrabile secondo Liouville per la Proposizione 8.

Assumiamo adesso che  $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$ . Possiamo usare la conservazione del momento angolare  $\mathbf{M}_O$  per ridurci ad un problema unidimensionale. L'invarianza della direzione di  $\mathbf{M}_O$  implica che il moto si svolge su un piano fisso  $\pi_O$  che dipende dalle condizioni iniziali: infatti la relazione

$$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \times m\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} = 0$$

ci dice che il vettore  $\mathbf{x}$  è sempre ortogonale a  $\mathbf{M}_O$ . Possiamo quindi ruotare il sistema di riferimento  $O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$  introdotto, in funzione delle condizioni iniziali, facendo in modo che  $\mathbf{e}_3 \parallel \mathbf{M}_O$ . Con questa rotazione il moto si svolge quindi nel piano  $\pi_O = O\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2$ . Introduciamo in questo piano delle coordinate polari  $\rho, \theta$ , definite da

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\mathbf{x}}{\rho} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2.$$

Consideriamo anche il vettore

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_\rho = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2$$

---

<sup>1</sup>possiamo scegliere il verso di  $\mathbf{e}$  in modo tale che  $\rho_0 > 0$ .

ed osserviamo che valgono le relazioni

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_\rho.$$

Possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{x} = \rho\mathbf{e}_\rho, \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \dot{\theta}\rho\mathbf{e}_\theta, \quad \ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta.$$

L'equazione di Newton, proiettata lungo  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$ , ci dà

$$m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = f(\rho), \quad m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\theta = 0. \quad (3.6)$$

La seconda equazione in (3.6) rappresenta la conservazione della terza componente del momento angolare

$$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_3 = \rho\mathbf{e}_\rho \times m(\dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \cdot \mathbf{e}_3 = m\rho^2\dot{\theta},$$

infatti

$$m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta}).$$

Fissiamo un valore  $c \neq 0$  di tale quantità:

$$m\rho^2\dot{\theta} = c. \quad (3.7)$$

Sostituendo  $\dot{\theta} = \frac{c}{m\rho^2}$  nella prima equazione in (3.6) si ottiene

$$m\ddot{\rho} = f(\rho) + \frac{c^2}{m\rho^3}, \quad (3.8)$$

che è un problema unidimensionale. Possiamo scrivere (3.8) nella forma

$$m\ddot{\rho} = -\frac{d}{d\rho}\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho), \quad (3.9)$$

con

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = \mathcal{V}(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}.$$

La funzione  $\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}$  si dice energia potenziale efficace. Il sistema (3.9) ha l'integrale primo

$$\mathcal{E}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho),$$

che corrisponde all'energia totale  $E = T + V$  (che non dipende da  $\theta$ ) se scriviamo  $\dot{\theta}$  come funzione di  $\rho, \dot{\rho}, c$  tramite la relazione (3.7):

$$E|_{\dot{\theta}=\frac{c}{m\rho^2}} = \left[ \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{V}(\rho) \right] \Big|_{\dot{\theta}=\frac{c}{m\rho^2}} = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{2m\rho^2} + \mathcal{V}(\rho) = \mathcal{E}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho, \dot{\rho}).$$

Di seguito scriveremo semplicemente  $\mathcal{V}_{\text{eff}}, \mathcal{E}_{\text{eff}}$ , evitando di sottolineare la dipendenza da  $c$  di tali funzioni.

## 3.2 Legge delle aree

Dalla conservazione del momento angolare si ha che, se  $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$ ,  $\theta$  è monotona, quindi può essere utilizzata come variabile indipendente per descrivere la traiettoria. Infatti se  $c \neq 0$ , allora  $\dot{\theta} = \frac{c}{m\rho^2}$  ha lo stesso segno di  $c$ .

Sia  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\theta; \theta_0)$  l'insieme descritto dal raggio vettore quando l'angolo polare passa dal valore  $\theta_0$  a  $\theta$ . L'area di questo insieme è

$$a(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \int_0^{\rho(\theta')} \rho' d\rho' d\theta' = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \rho^2(\theta') d\theta',$$

per cui, posto  $\tilde{a}(t) = a(\theta(t))$ , si ha

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = \frac{da}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta} = \frac{c}{2m},$$

quindi la conservazione della terza componente del momento angolare

$$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_3 = m\rho^2 \dot{\theta}$$

corrisponde alla conservazione della velocità areolare, detta anche **legge delle aree**.

## 3.3 Formula di Binet

Consideriamo un punto materiale che si muove in un piano in cui mettiamo coordinate polari  $(\rho, \theta)$ . Assumiamo che valga la legge delle aree:

$$\frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta} = \alpha,$$

con  $\alpha \neq 0$ . Queste ipotesi valgono in particolare nel caso dei moti centrali. Allora la componente radiale dell'accelerazione è

$$\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \right). \quad (3.10)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{d\rho}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{2\alpha}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} = -2\alpha \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\rho} \right), \\ \ddot{\rho} &= \frac{d\dot{\rho}}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho} \right), \end{aligned}$$

per cui, usando la relazione  $\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2$  si ottiene (3.10), che si chiama **formula di Binet**.

### 3.4 Traiettoria del moto

Fissate le condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)$ , per determinare il comportamento qualitativo della traiettoria nel piano del moto, con coordinate polari  $(\rho, \theta)$ , si utilizzano le leggi di conservazione

$$m\rho^2\dot{\theta} = c, \quad \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = E, \quad (3.11)$$

in cui  $c, E$  sono i valori delle quantità conservate al tempo iniziale  $t = 0$ .

Se  $c = 0$  abbiamo già visto nella Proposizione 12 che la traiettoria è rettilinea. Se  $c \neq 0$  allora possiamo descrivere la traiettoria attraverso una mappa  $\theta \mapsto \rho(\theta)$ . Dalle (3.11) si ottiene

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{m\rho^2}{|c|} \sqrt{\frac{2}{m}(E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho))}. \quad (3.12)$$

Consideriamo il caso seguente in cui la traiettoria è limitata. Siano  $\rho_{\min}, \rho_{\max}$  due punti di inversione consecutivi ( $\rho_{\min} < \rho_{\max}$ ) che corrispondono a un valore regolare  $E$  dell'energia, tali che il moto si svolge all'interno dell'intervallo  $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho_{\min}) &= E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho_{\max}) = 0, \\ E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) &> 0 \text{ se } \rho \in (\rho_{\min}, \rho_{\max}), \\ \mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho_{\min}) &< 0 < \mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho_{\max}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

In questo caso, nello spazio delle fasi ridotto con coordinate  $(\rho, \dot{\rho})$  abbiamo un'orbita periodica di periodo

$$T_\rho = \sqrt{2m} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{1}{\sqrt{E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho)}} d\rho.$$

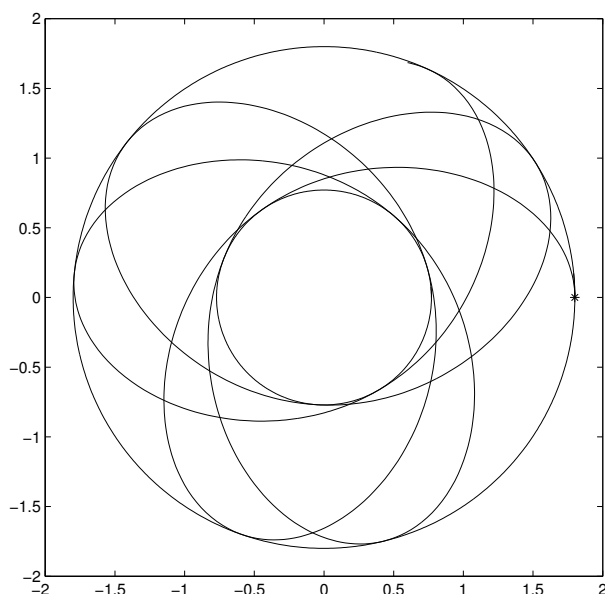
Nel piano del moto genericamente si ottiene una traiettoria a forma di rosetta (vedi figura), infatti dalla conservazione del momento angolare si ha che  $t \mapsto \theta(t)$  è monotona. Inoltre  $\rho$  oscilla periodicamente tra il valore massimo  $\rho_{\max}$  e il valore minimo  $\rho_{\min}$ .

Definiamo l'**angolo di avanzamento** del pericentro<sup>2</sup> come

$$\Delta\theta = c\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{1}{\rho^2 \sqrt{E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho)}} d\rho. \quad (3.14)$$

---

<sup>2</sup>nota che  $\Delta\theta$  può essere anche negativo e ha lo stesso segno di  $c$ .



**Proposizione 13.** *Assumendo che valgano le relazioni (3.13), la mappa  $\theta \mapsto \rho(\theta)$ , che definisce la traiettoria della soluzione tramite*

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta),$$

ha le simmetrie definite dalle relazioni

$$\begin{aligned} \rho(\Delta\theta - \theta) &= \rho(\theta), & \theta &\in [0, \Delta\theta] \\ \rho(\Delta\theta + \theta) &= \rho(\theta), & \theta &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dove abbiamo assunto che  $\rho(0)$  corrisponda ad un punto di inversione, per cui  $\rho'(0) = \dot{\rho}(0)/\dot{\theta}(0) = 0$ .

*Dimostrazione.* Possiamo dimostrare questa proprietà di simmetria tramite la formula di Binet. Infatti, posto

$$u = \frac{1}{\rho},$$

da

$$-\frac{4m\alpha^2}{\rho^2} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \right) = f(\rho)$$

si ottiene

$$u'' = g(u), \quad g(u) = -\frac{f(\frac{1}{u})}{4m\alpha^2 u^2} - u. \quad (3.15)$$

Siano  $u_{\max} = 1/\rho_{\min}$ ,  $u_{\min} = 1/\rho_{\max}$ . Questi sono punti di inversione per il moto unidimensionale definito da (3.15) in corrispondenza al livello  $\frac{E}{4m\alpha^2}$  dell'energia

$$\mathcal{E}(u, u') = \frac{1}{2}u'^2 + \mathcal{W}(u),$$

dove  $\mathcal{W}(u) = -\int g(u)du$ . Infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u) &= -\int g(u)du = -\frac{1}{4m\alpha^2} \int f\left(\frac{1}{u}\right)d\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{u^2}{2} \\ &= \frac{1}{4m\alpha^2} \mathcal{V}\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{u^2}{2} = \frac{1}{4m\alpha^2} \mathcal{V}_{\text{eff}}\left(\frac{1}{u}\right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

quindi  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  risolvono l'equazione

$$\frac{E}{4m\alpha^2} - \mathcal{W}(u) = 0.$$

Derivando la (3.16) rispetto a  $u$  si ottiene

$$\mathcal{W}'(u) = -\frac{1}{4m\alpha^2 u^2} \mathcal{V}'_{\text{eff}}\left(\frac{1}{u}\right),$$

quindi

$$\mathcal{W}'(u_{\max}) = -\frac{\rho_{\min}^2}{4m\alpha^2} \mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho_{\min}) > 0, \quad \mathcal{W}'(u_{\min}) = -\frac{\rho_{\max}^2}{4m\alpha^2} \mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho_{\max}) < 0.$$

Inoltre, si ha

$$\frac{E}{4m\alpha^2} - \mathcal{W}(u) > 0, \quad \forall u \in (u_{\min}, u_{\max}).$$

Avendo un moto per valori regolari dell'energia  $\frac{1}{2}u'^2 + \mathcal{W}(u)$  possiamo procedere come nella Sezione 2.4 per dimostrare, assumendo  $u(0) = u_{\min}$ , che la soluzione  $u(\theta)$  soddisfa le relazioni

$$\begin{aligned} u(T_u - \theta) &= u(\theta), & \theta &\in [0, T_u] \\ u(T_u + \theta) &= u(\theta), & \theta &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

con

$$T_u = 2 \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{E}{4m\alpha^2} - \mathcal{W}(u)\right)}} du.$$

Usando il cambiamento di variabile  $\rho = \frac{1}{u}$  osserviamo che

$$T_u = -2 \int_{\rho_{\max}}^{\rho_{\min}} \frac{\sqrt{4m\alpha^2}}{\sqrt{2(E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho))}\rho^2} d\rho = |c| \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{1}{\rho^2 \sqrt{E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho)}} d\rho = |\Delta\theta|,$$

dove  $\Delta\theta$  è l'angolo di avanzamento del pericentro. Si conclude utilizzando la relazione  $\rho(\theta) = 1/u(\theta)$ . □

**Osservazione 6.** Dalla Proposizione 3.4 si ottiene che la traiettoria  $\rho(\theta)$  è periodica di periodo  $\Delta\theta$  e si può costruire per simmetria a partire dal tratto che va dal pericentro  $P$  all'apocentro successivo  $A$ . Per ottenere il tratto seguente, che va da  $A$  al pericentro successivo  $P'$ , basta infatti riflettere il tratto precedente rispetto all'asse che passa per  $A$  e  $P$ .

**Osservazione 7.** La condizione per avere una traiettoria periodica nel piano del moto è che

$$\frac{\Delta\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}.$$

Infatti, se  $\frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{m}{n}$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$ , l'angolo  $\theta$  è avanzato di  $n\Delta\theta = 2m\pi$  dopo  $n$  periodi  $T_\rho$  della funzione  $\rho(t)$ . Quindi, partendo da un punto al pericentro ci si ritrova nello stesso punto dopo aver fatto  $m$  giri attorno all'origine. Inoltre, la velocità è la stessa in quanto  $\rho(t) = \rho(t + T_\rho)$  e  $\dot{\theta}(t) = \frac{c}{m\rho^2(t)}$ .

Dimostriamo adesso la seguente proprietà:

**Proposizione 14.** *Assumendo che valgano le relazioni (3.13), genericamente la traiettoria è ovunque densa nella corona circolare*

$$\mathcal{C} = \{(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}\}.$$

*Dimostrazione.* Vogliamo dimostrare che, se  $\frac{\Delta\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ , scelto comunque un punto della corona l'orbita passa arbitrariamente vicino a quel punto. Tutti i valori di  $\rho$  nell'intervallo  $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$  vengono raggiunti periodicamente. Fissiamo una circonferenza  $C_\rho$  centrata in  $O$  e di raggio  $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ . Dimostriamo, seguendo [3], che in generale  $C_\rho$  viene riempita in modo ovunque denso.

Definiamo la mappa

$$\phi : C_\rho \rightarrow C_\rho, \quad \phi(\rho e^{i\theta}) = \rho e^{i(\theta + \Delta\theta)}$$

dove  $\Delta\theta$  è l'angolo di avanzamento del pericentro.

Se  $\Delta\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$  allora i punti  $\{\phi^m(x)\}_m$ , con  $x = \rho e^{i\theta}$ , sono tutti distinti. Siccome  $C_\rho$  è compatto c'è almeno un punto di accumulazione, quindi per ogni  $\epsilon > 0$  esistono interi positivi  $n, m$ , con  $n > m$ , tali che

$$d(\phi^n(x), \phi^m(x)) < \epsilon.$$

Inoltre la mappa  $\phi$  conserva la distanza tra due punti perché è una rotazione, quindi

$$d(\phi^{n-m}(x), x) = d(\phi^n(x), \phi^m(x)).$$

Posto  $k = n - m$  otteniamo una successione

$$x, \phi^k(x), \phi^{2k}(x), \phi^{3k}(x), \dots$$



di punti distinti su  $C_\rho$  che sono equidistanti e due consecutivi di essi distano meno di  $\epsilon$ . Si conclude usando l'arbitrarietà di  $\epsilon$  e di  $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ .  $\square$

Si può dimostrare che solo due tipi di forze centrali, quelle dell'oscillatore armonico e del problema di Keplero, sono tali che tutte le orbite limitate con momento angolare non nullo sono periodiche. Questo risultato è noto come **teorema di Bertrand** (vedi Sezione 3.7).

### 3.5 Il problema dei due corpi

Studiamo il moto di due punti materiali di massa  $m_1, m_2$  soggetti alla loro interazione mutua. Le equazioni del moto sono

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_1, \quad m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_2$$

e assumiamo che le forze  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  soddisfino le seguenti proprietà:

- (i)  $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ,
- (ii)  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$ ,
- (iii)  $\mathbf{F}_j \times \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ,
- (iv)  $\mathbf{F}_1 = f(\rho) \frac{\mathbf{r}}{\rho}, \quad \rho = |\mathbf{r}|$

dove  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$ .

Il cambiamento di coordinate

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mapsto (\mathbf{x}_B, \mathbf{r})$$

definito dalle relazioni

$$(m_1 + m_2)\mathbf{x}_B = m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$

disaccoppia le equazioni di Newton: si ottengono infatti le equazioni

$$m\ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{0}, \quad \mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (3.17)$$

in cui

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad m = m_1 + m_2.$$

Possiamo quindi studiare il problema di moto centrale dato dalla seconda delle (3.17) e poi ricostruire la soluzione tramite le relazioni

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_B = \frac{m_2}{m}\mathbf{r}, \quad \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_B = -\frac{m_1}{m}\mathbf{r}. \quad (3.18)$$

**Osservazione 8.** Dalle (3.18) si vede che le traiettorie nel riferimento del centro di massa si ottengono per similitudine da quelle del moto relativo, soluzione di un problema di moto centrale.

**Osservazione 9.** Nel caso della forza di attrazione gravitazionale di Newton si ha  $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ , dove  $G$  è la costante di gravitazione universale, per cui, utilizzando la relazione  $m\mu = m_1 m_2$ , si ottiene  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{Gm\mu}{\rho^3} \mathbf{r}$ , con  $\rho = |\mathbf{r}|$ . In questo modo la seconda equazione in (3.17) si scrive

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -Gm\mu \frac{\mathbf{r}}{\rho^3},$$

che corrisponde al problema del moto di un corpo di massa  $\mu$  (**massa ridotta**) che si muove in un campo di forze centrali prodotto dall'attrazione gravitazionale di un punto di massa  $m$  fisso nell'origine.

### 3.6 Il problema di Keplero

Nel periodo tra il 1600 ed il 1601 Johannes Kepler (1571-1630) fu assistente di Tycho Brahe<sup>3</sup> a Praga. Sulla base delle osservazioni di Brahe, Kepler formulò le tre leggi seguenti:

- 1) le traiettorie dei pianeti sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi;
- 2) il raggio vettore che congiunge un pianeta al Sole descrive aree uguali in tempi uguali;
- 3) i quadrati dei periodi di rivoluzione  $T$  dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori  $a$  delle loro traiettorie. Inoltre la costante  $\frac{T^2}{a^3}$  è la stessa per tutti i pianeti.

Le prime due leggi appaiono in *Astronomia Nova* (1609), la terza si trova in *Harmonices Mundi* (1619).

In questa sezione discuteremo dei seguenti problemi:

- i) *problema di Keplero diretto*: dato il campo di forze calcolare i moti possibili;
- ii) *problema di Keplero inverso*: dati i moti possibili calcolare il campo di forze.

Entrambi i problemi sono stati risolti da Newton, vedi [15].

---

<sup>3</sup>L'astronomo Tycho Brahe (1546-1601) riuscì a fare diverse osservazioni astronomiche dei pianeti conosciuti, con una precisione dell'ordine di un minuto di arco (= 1/60 di grado), che era un'ottima accuratezza considerato il fatto che non aveva ancora a disposizione un telescopio.

### Problema diretto

Posto

$$k = GmM, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2,$$

consideriamo il moto centrale dato dalle equazioni

$$m\ddot{\mathbf{x}} = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad f(\rho) = -\frac{k}{\rho^2}$$

con  $\rho = |\mathbf{x}|$  e con condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$ . La forza centrale ammette l'energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{k}{\rho}.$$

Assumiamo che il momento angolare sia non nullo e introduciamo coordinate polari  $\rho, \theta$  nel piano del moto  $\Pi$ . Sia  $c = m\rho^2\dot{\theta}$  il valore costante della componente del momento angolare ortogonale a  $\Pi$ , che corrisponde alle condizioni iniziali scelte. Essendo il moto centrale vale la legge delle aree, che rappresenta la conservazione del momento angolare  $m\rho^2\dot{\theta}$  e ci dà la seconda legge di Keplero.

Proiettando l'equazione di Newton in direzione radiale  $\mathbf{e}_\rho$  e usando la formula di Binet si ottiene l'equazione per la componente radiale della forza:

$$-\frac{4m\alpha^2}{\rho^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \right] = -\frac{k}{\rho^2}$$

dove  $\alpha = \frac{c}{2m}$  è la costante delle aree. Ponendo

$$p = \frac{4m\alpha^2}{k} \tag{3.19}$$

e usando la variabile  $u = 1/\rho$  si ottiene l'equazione differenziale lineare

$$u'' + u = \frac{1}{p} \tag{3.20}$$

dove l'apice ' indica la derivata rispetto a  $\theta$ . L'equazione (3.20) ha come soluzione generale

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{p}$$

con  $A > 0$ ,  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ . Introducendo il parametro  $e = Ap$  si ha l'equazione di una conica in coordinate polari

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}. \tag{3.21}$$

**Esercizio 8.** Verificare questa affermazione confrontando (3.21) con l'equazione di una conica in coordinate cartesiane  $x, y$  nel piano del moto.

Scriviamo  $p, e$  in funzione di  $c, E$ . Sostituendo la relazione  $\alpha = \frac{c}{2m}$  in (3.19) si ottiene

$$p = \frac{c^2}{mk}. \quad (3.22)$$

Il valore minimo di  $\rho$  lungo la traiettoria definita da (3.21) è dato da

$$\rho_{\min} = \frac{p}{1+e} \quad (3.23)$$

ed è un punto di inversione del moto per la variabile  $\rho$  se  $e \neq 0$ , altrimenti abbiamo un'orbita circolare e  $\rho_{\min}$  è un equilibrio. In ogni caso, vale la relazione

$$E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho_{\min}) = 0, \quad (3.24)$$

dove

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{k}{\rho} + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

è l'energia potenziale efficace del problema di Keplero. Dalle relazioni (3.22), (3.23) si ottiene

$$\rho_{\min} = \frac{c^2}{mk(1+e)}$$

che, sostituita nella (3.24), ci dà

$$\begin{aligned} 0 &= E + \frac{k}{\rho_{\min}} - \frac{c^2}{2m\rho_{\min}^2} = E + \frac{mk^2(1+e)}{c^2} - \frac{c^2m^2k^2(1+e)^2}{2mc^4} = \\ &= E + \frac{mk^2(1+e)}{c^2} \left(1 - \frac{1+e}{2}\right) = E + \frac{mk^2(1-e^2)}{2c^2}, \end{aligned}$$

da cui

$$e^2 = 1 + \frac{2Ec^2}{mk^2}. \quad (3.25)$$

Dalla (3.25) si ottiene che

$$\begin{aligned} E < 0 &\iff e < 1 && \text{orbite ellittiche,} \\ E = 0 &\iff e = 1 && \text{orbite paraboliche,} \\ E > 0 &\iff e > 1 && \text{orbite iperboliche.} \end{aligned}$$

Inoltre dalla relazione  $mk^2 + 2Ec^2 \geq 0$  segue che non tutte le coppie  $(c, E)$  sono ammissibili (vedi Figura 3.1).

Calcoliamo adesso il periodo  $T$  di un'orbita ellittica che corrisponde ai valori  $c, E$  ( $E < 0$ ) del momento angolare e dell'energia. Valgono le relazioni seguenti,

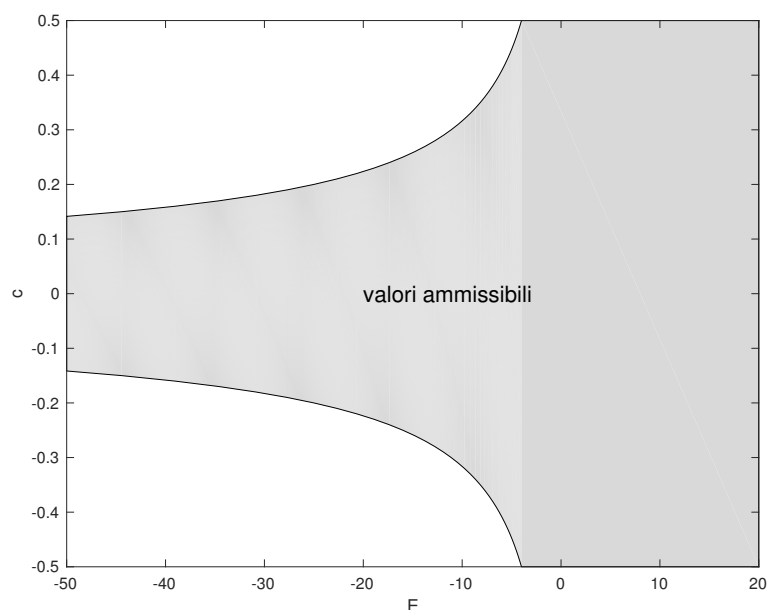


Figura 3.1: Valori ammissibili per la coppia  $(E, c)$ .

che legano semiasse maggiore  $a$ , semiasse minore  $b$  ai parametri  $p, e$  e quindi ai valori di  $c, E$ :

$$p = a(1 - e^2), \quad b = a\sqrt{1 - e^2}, \quad (3.26)$$

per cui

$$p = \frac{b^2}{a}. \quad (3.27)$$

L'area dell'ellisse è

$$\pi ab = \pi a\sqrt{ap} = \pi a^{3/2} \frac{|c|}{\sqrt{mk}}$$

e la velocità areale è

$$\alpha = \frac{c}{2m},$$

per cui

$$T^2 = \frac{(\pi ab)^2}{\alpha^2} = \frac{\pi^2 a^3 c^2 4m^2}{mk c^2} = \frac{4\pi^2 m}{k} a^3$$

che rappresenta la terza legge di Keplero. In particolare, il periodo  $T$  dipende solo dal semiasse maggiore  $a$  e quindi solo dall'energia  $E$ , infatti, usando

$$c^2 = mkp = mka(1 - e^2),$$

si ha

$$E = \mathcal{E}_{\text{eff}}(\rho_{\min}, 0) = -\frac{k}{a(1 - e)} + \frac{c^2}{2ma^2(1 - e)^2} = -\frac{k}{a(1 - e)} \left[ 1 - \frac{1}{2}(1 + e) \right] = -\frac{k}{2a}.$$

**Osservazione 10.** Se consideriamo il problema di Keplero derivante dal problema di due corpi di massa  $m_1, m_2$  si ha

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad k = G m_1 m_2,$$

per cui  $k/m = G(m_1 + m_2)$  e la costante di proporzionalità è quindi

$$\frac{4\pi^2 m}{k} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}. \quad (3.28)$$

Se  $m_1$  ed  $m_2$  rappresentano rispettivamente la massa del Sole e quella di un pianeta, dalla (3.28) segue che la costante  $k/m$  dipende dal pianeta scelto, contraddicendo quindi parte della terza legge di Keplero. Comunque, usando come unità la massa solare  $m_1$  e scegliendo pianeti diversi del sistema solare la variazione della somma  $m_1 + m_2$  è al massimo dell'ordine di  $10^{-3}$ , cioè uguale al rapporto tra la massa di Giove e quella del Sole.

## Il vettore di Laplace-Lenz

Introduciamo il **vettore di Laplace-Lenz**

$$\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O - mk \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad (3.29)$$

dove  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$ .

Mostriamo che  $\mathbf{L}$  è un integrale primo per il moto centrale con energia potenziale di Keplero  $\mathcal{V}(\rho) = -\frac{k}{\rho}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{M}_O - mk \left[ \frac{\mathbf{v}}{\rho} - \frac{\mathbf{x}}{\rho^2} \frac{d}{dt}(\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}) \right] = \\ &= \left( -\frac{k\mathbf{x}}{\rho^3} \right) \times (\mathbf{x} \times m\mathbf{v}) - \frac{mk}{\rho} \mathbf{v} + \frac{mk}{\rho^2} \mathbf{x} \left( \frac{2\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{2\rho} \right) = \\ &= -\frac{mk}{\rho^3} [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{x} - \rho^2 \mathbf{v}] - \frac{mk}{\rho} \mathbf{v} + \frac{mk}{\rho^3} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso la norma di  $\mathbf{L}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} &= \left( \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O - mk \frac{\mathbf{x}}{\rho} \right) \cdot \left( \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O - mk \frac{\mathbf{x}}{\rho} \right) = \\ &= |\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O|^2 - 2 \frac{mk}{\rho} \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} + m^2 k^2 = \\ &= \left( |\mathbf{p}|^2 - 2 \frac{mk}{\rho} \right) \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} + m^2 k^2, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato

$$\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O = \mathbf{p} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2 \mathbf{x} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{p},$$

per cui

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O) \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O) = |\mathbf{p}|^2 \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x}.$$

Usando la relazione

$$\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_O = |\mathbf{M}_O|^2 = c^2,$$

l'espressione dell'energia cinetica  $T = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}$  e la (3.25) si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} &= c^2 \left( |\mathbf{p}|^2 - 2 \frac{mk}{\rho} \right) + m^2 k^2 = c^2 \left( 2mT - 2 \frac{mk}{\rho} \right) + m^2 k^2 = \\ &= 2mEc^2 + m^2 k^2 = m^2 k^2 \left( \frac{2Ec^2}{mk^2} + 1 \right) = m^2 k^2 e^2. \end{aligned}$$

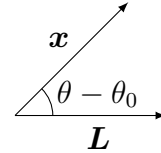
Concludo che la norma del vettore di Laplace-Lenz è il prodotto di  $mk$  e dell'eccentricità  $e$ . Per questo motivo  $\mathbf{L}$  viene anche chiamato **vettore eccentricità**.

Denotiamo con  $\psi$  l'angolo tra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{L}$ . Si ha allora

$$e \cos \psi = \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{x}}{mk} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x}}{mk\rho} - 1 = \frac{c^2}{mk\rho} - 1.$$

Usando la (3.22) si ottiene

$$1 + e \cos \psi = \frac{p}{\rho}$$



e si ritrova l'equazione della traiettoria in forma polare (3.21) con l'angolo  $\psi$  al posto di  $\theta - \theta_0$ .

Ne segue che  $\mathbf{L}$  deve indicare la direzione del pericentro, che corrisponde a  $\theta = \theta_0$  (vedi figura).

## Problema inverso

Mostriamo che, se valgono le leggi di Keplero, l'accelerazione di ogni pianeta è sempre diretta verso il Sole ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza da esso.

Il fatto che il moto sia piano (perché le traiettorie sono ellissi) e che valga la legge delle aree implica che l'accelerazione sia puramente radiale.

Sostituiamo l'equazione della traiettoria, nota per la prima legge di Keplero,

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

nella formula di Binet:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\rho = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \right] = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \left( -\frac{e \cos \theta}{p} + \frac{1 + e \cos \theta}{p} \right) = -\frac{4\alpha^2}{p} \frac{1}{\rho^2}.$$

Esaminiamo adesso il fattore  $\frac{4\alpha^2}{p}$ , che potrebbe cambiare al variare dalle condizioni iniziali. Scegliamo un'orbita ellittica. Siano  $T, a, b$  il periodo ed i semiassi maggiore e minore di quest'orbita. Usando la formula  $\alpha = \frac{\pi ab}{T}$  e la (3.27) si ottiene

$$\frac{4\alpha^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} \frac{a}{b^2} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

che per la terza legge di Keplero è costante.

### 3.7 Il teorema di Bertrand

Nel 1873 viene pubblicato il seguente risultato di J. Bertrand (vedi [5]): ‘tra le leggi di attrazione che assumono azione nulla a distanza infinita, quella della natura è la sola per la quale un corpo, lanciato *arbitrariamente*, con una velocità inferiore a un certo limite, e attirato verso un centro fisso, descrive necessariamente attorno a questo centro una curva chiusa. Tutte le leggi di attrazione *permettono* orbite chiuse, ma la legge della natura è la sola che le impone.<sup>4</sup>

Diamo di seguito un enunciato più formale, che include forze che non decadono con la distanza.

**Teorema 1.** *Dato un campo di forze centrale attrattivo  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}$ ,  $\rho = |\mathbf{x}|$ , con  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  analitica ed  $f(\rho) < 0$ , tale che tutte le traiettorie non rettilinee e limitate siano chiuse, allora*

$$f(\rho) = -\frac{A}{\rho^2} \quad \text{oppure} \quad f(\rho) = -A\rho$$

per una costante  $A > 0$ .

*Dimostrazione.* Utilizzeremo prevalentemente la notazione di Bertrand e seguiremo la sua dimostrazione, aggiungendo alcuni dettagli. Essendo la forza centrale, se consideriamo traiettorie non rettilinee queste hanno necessariamente momento

---

<sup>4</sup>J. Bertrand (1873): ‘parmi les lois d’attraction qui supposent l’action nulle à une distance infinie, celle de la nature est la seule pour laquelle un mobile lancé *arbitrairement* avec une vitesse inférieure à une certaine limite, et attiré vers un centre fixe, décrit nécessairement autour de ce centre une courbe fermée. Toutes les lois d’attraction *permettent* des orbites fermées, mais la loi de la nature est la seule qui les *impose*’



angolare non nullo. Introduciamo coordinate polari  $\rho, \theta$  nel piano del moto e denotiamo con  $c$  il valore costante della componente del momento angolare  $m\rho^2\dot{\theta}$ , ortogonale a tale piano. Dalla formula di Binet si ha

$$f(\rho) = -\frac{k^2}{\rho^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \right] \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{c^2}{m}.$$

Ponendo  $z = 1/\rho$  e

$$\psi(z) = -\rho^2 f(\rho)|_{\rho=1/z}$$

si ottiene

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z - \frac{1}{k^2} \psi(z) = 0. \quad (3.30)$$

Moltiplicando la relazione (3.30) per  $\frac{dz}{d\theta}$  ed integrando rispetto a  $\theta$  si ha

$$\left( \frac{dz}{d\theta} \right)^2 + z^2 - \frac{1}{k^2} w(z) = h$$

per una qualche costante  $h$ , con

$$w(z) = 2 \int \psi(z) dz. \quad (3.31)$$

Ricaviamo la relazione che lega  $h, k^2$  all'energia  $E$  di questo moto centrale. Dalle relazioni

$$w(z) = -2 \int \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2 \int f\left(\frac{1}{z}\right) d\left(\frac{1}{z}\right) = -2\mathcal{V}\left(\frac{1}{z}\right),$$

con  $-\frac{d\mathcal{V}}{d\rho}(\rho) = f(\rho)$  e

$$\left( \frac{dz}{d\theta} \right)^2 = \frac{1}{\rho^4} \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2,$$

con

$$\left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = \frac{\dot{\rho}^2}{\dot{\theta}^2} \Big|_{t=t(\theta)} = \frac{m^2}{c^2} \rho^4 \dot{\rho}^2 \Big|_{t=t(\theta)}, = \frac{m}{k^2} \rho^4 \dot{\rho}^2 \Big|_{t=t(\theta)},$$

si ottiene

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{k^2}{2\rho^2} + \mathcal{V}(\rho) \right) = \frac{E}{k^2}.$$

Osserviamo che l'ipotesi che la forza sia attrattiva implica l'esistenza di orbite circolari di raggio  $\rho_o = 1/z_o$  per ogni scelta di  $z_o > 0$ : infatti queste corrispondono ad equilibri dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = \phi_k(z),$$

con

$$\phi_k(z) = \frac{1}{k^2}\psi(z) - z,$$

e per ogni  $z_o > 0$  possiamo trovare  $k$  tale che  $\phi_k(z_o) = 0$ . In particolare si ottiene che l'insieme delle orbite limitate non è vuoto.

Mostriamo adesso, prendendo spunto da in [1], che se tutte le orbite non rettilinee e limitate sono chiuse possiamo trovare, variando  $k$ , un intervallo aperto non vuoto di valori di  $z = z_o$  corrispondenti ad orbite circolari che sono minimi locali non degeneri dell'energia potenziale

$$\mathcal{W}_k(z) = - \int \phi_k(z) dz,$$

cioè tali che  $\phi'_k(z_o) < 0$ . Il valore di  $h$  per cui si ha un'orbita circolare di raggio  $\rho_o = 1/z_o$  è dato da

$$\frac{h}{2} = \mathcal{W}_k(z_o).$$

Osserviamo che non è possibile che  $\phi'_k(z_o) > 0$ . Infatti, analizzando il comportamento della separatrice stabile del sistema  $\frac{dz}{d\theta} = v$ ,  $\frac{dv}{d\theta} = \phi_k(z)$ , si dimostra che ci sarebbe un'orbita limitata asintotica all'equilibrio  $z_o$ , che quindi non potrebbe essere chiusa.<sup>5</sup>

Osserviamo anche che le equazioni

$$\phi_k(z) = 0, \quad \phi'_k(z) = 0$$

non possono essere soddisfatte per valori di  $(z, k)$  che formano un continuo. Infatti in tal caso, usando la definizione di  $\phi_k$  ed eliminando  $k$ , si avrebbe

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \frac{1}{z},$$

che integrata ci dà  $\psi(z) = Az$ , con  $A > 0$ , e quindi

$$f(\rho) = -\frac{1}{\rho^2}\psi\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{A}{\rho^3}.$$

In questo caso l'energia potenziale efficace sarebbe

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = \frac{c^2 - mA}{2m\rho^2}$$

e si vede facilmente che, se  $c^2 < mA$  ed  $E < 0$ , si hanno delle traiettorie limitate, non rettilinee, che tendono all'origine (cioè  $\rho \rightarrow 0$ ), quindi non sono chiuse (l'origine è un punto singolare).

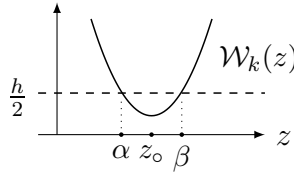
---

<sup>5</sup>basta prendere il ramo di separatrice stabile con  $z > z_o$  nel piano  $(z, z')$ .

Concludiamo che, in virtù delle ipotesi fatte, esiste una coppia  $(z_o, k)$  tale che

$$\phi_k(z_o) = 0, \quad \phi'_k(z_o) < 0.$$

Per continuità possiamo trovare (variando  $k$ ) un intervallo  $\mathcal{J}_o$  aperto non vuoto di valori di  $z$ , corrispondenti ad orbite circolari, che sono minimi locali non degeneri di  $\mathcal{W}_k(z)$ . Vicino a queste orbite circolari, troviamo (variando  $h$ ) delle orbite limitate, con traiettorie del tipo di quelle studiate nella Sezione 3.4. Per ciascuna di queste orbite limitate chiamiamo  $\alpha = z_{\min}$ ,  $\beta = z_{\max}$  i valori minimo e massimo di  $z$ . L'idea è di considerare dei valori degli integrali primi  $k^2, h$  tali che  $0 < \alpha < \beta$ , e  $\mathcal{W}_k''(z) > 0$  per ogni  $z \in [\alpha, \beta]$ , come nella figura seguente



Calcoliamo la relazione che lega  $k^2, h$  ad  $\alpha, \beta$ . Osserviamo che questi ultimi sono punti di inversione, quindi

$$h + \frac{1}{k^2}w(\alpha) - \alpha^2 = 0, \quad h + \frac{1}{k^2}w(\beta) - \beta^2 = 0,$$

da cui

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{w(\beta) - w(\alpha)}, \quad h = \frac{\alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha)}{w(\beta) - w(\alpha)}.$$

Il determinante della matrice jacobiana della mappa

$$(\alpha, \beta) \mapsto (1/k^2, h) \tag{3.32}$$

si scrive

$$-\frac{1}{(w(\beta) - w(\alpha))^3} [w'(\alpha)(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha(w(\beta) - w(\alpha))] [w'(\beta)(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta(w(\beta) - w(\alpha))]. \tag{3.33}$$

Mostriamo che questo determinante non si può annullare per ogni  $\alpha, \beta$  scelti in un intervallo di valori positivi. Se per assurdo questo non fosse vero, allora esisterebbe un intervallo  $\mathcal{I}$  tale che

$$w'(\alpha)(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha(w(\beta) - w(\alpha)) = 0, \tag{3.34}$$

oppure

$$w'(\beta)(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta(w(\beta) - w(\alpha)) = 0, \tag{3.35}$$

per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ , con  $0 < \alpha < \beta$ . Sostituendo nell'equazione (3.34) lo sviluppo di Taylor

$$w(\beta) = w(\alpha) + w'(\alpha)(\beta - \alpha) + \frac{1}{2}w''(\alpha)(\beta - \alpha)^2 + O((\beta - \alpha)^3)$$

si ottiene

$$[-w'(\alpha) + \alpha w''(\alpha)](\beta - \alpha)^2 + O((\beta - \alpha)^3) = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{I}.$$

Si ha quindi

$$\alpha w''(\alpha) - w'(\alpha) = 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{I}.$$

Ricordando la relazione (3.31), si ottiene l'equazione differenziale

$$z\psi'(z) = \psi(z)$$

da cui  $\psi(z) = Az$ , con  $A > 0$ , quindi

$$f(\rho) = -\frac{A}{\rho^3},$$

che non soddisfa le ipotesi del teorema per quanto detto prima. L'equazione (3.35) conduce in modo analogo alla stessa contraddizione.

Esiste quindi un intervallo aperto non vuoto  $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_o$  tale che nell'insieme

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathcal{J} \times \mathcal{J} : 0 < \alpha < \beta\}$$

la mappa (3.32) è un diffeomorfismo.

L'angolo di avanzamento del pericentro  $\Delta\theta$  è dato da

$$\Delta\theta = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}w(z) - z^2}}.$$

Poichè le orbite considerate sono chiuse, si deve avere  $\Delta\theta = q\pi$ , con  $q \in \mathbb{Q}$ . Scrivendo  $k^2, h$  in funzione di  $\alpha, \beta$  otteniamo che deve valere la relazione

$$q\pi = I(\alpha, \beta) \tag{3.36}$$

con

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{w(\beta) - w(\alpha)}}{\sqrt{\alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)w(z) - z^2(w(\beta) - w(\alpha))}} dz \tag{3.37}$$

per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{J}$ , con  $0 < \alpha < \beta$ , quindi  $q$  deve essere costante poichè  $\mathbb{Q}$  è un insieme totalmente sconnesso.

Selezioniamo in due passi i potenziali ammissibili, che soddisfano (3.36). Il primo passo consiste nel considerare traiettorie con  $\alpha, \beta$  molto vicini e passare al limite per  $\beta \rightarrow \alpha$ . Consideriamo un valore di  $\alpha \in \mathcal{J}$  e poniamo  $\beta = \alpha + u$ ,  $z = \alpha + y$ . Calcoliamo  $\lim_{u \rightarrow 0} I(\alpha, \alpha + u)$  tramite la formula di Taylor:

$$w(\beta) - w(\alpha) = w'(\alpha)u + \frac{1}{2}w''(\alpha)u^2 + o(u^2),$$

inoltre

$$\begin{aligned} & \alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)w(z) - z^2(w(\beta) - w(\alpha)) = \\ &= \alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2) \left[ w(\alpha) + w'(\alpha)y + \frac{1}{2}w''(\alpha)y^2 + o(y^2) \right] - \\ & - (\alpha^2 + 2\alpha y + y^2)(w(\beta) - w(\alpha)) = \\ &= (\beta^2 - \alpha^2) \left[ w'(\alpha)y + \frac{1}{2}w''(\alpha)y^2 \right] - (2\alpha y + y^2)(w(\beta) - w(\alpha)) + o(u^3) = \\ &= (u - y)uy(w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)) + o(u^3), \end{aligned}$$

poiché i termini del secondo ordine in  $u$  si cancellano. Ottengo quindi che

$$\begin{aligned} q\pi &= \lim_{u \rightarrow 0} I(\alpha, \alpha + u) = \frac{\sqrt{w'(\alpha)}}{\sqrt{w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)}} \lim_{u \rightarrow 0} \int_0^u \frac{dy}{\sqrt{uy - y^2}} (1 + o(1)) = \\ &= \frac{\pi \sqrt{w'(\alpha)}}{\sqrt{w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)}}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

infatti, usando il cambio di variabili  $x = \sqrt{uy - y^2}$  su  $[0, u/2]$ , si ha

$$\int_0^u \frac{dy}{\sqrt{uy - y^2}} = \frac{2}{u} \int_{-u/2}^{u/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - 4\frac{x^2}{u^2}}} = \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \pi,$$

quindi l'ultimo integrale è indipendente da  $u$ . Elevando al quadrato la (3.38) si ottiene che  $w$  deve soddisfare l'equazione differenziale

$$q^2 \alpha w''(\alpha) + (1 - q^2)w'(\alpha) = 0. \quad (3.39)$$

Dalla (3.31) si ottiene l'equazione a variabili separate

$$q^2 z \psi'(z) + (1 - q^2)\psi(z) = 0. \quad (3.40)$$

Se  $q^2 = 1$ , dalla (3.40) si ha  $\psi(z) = A$  e dunque

$$w(z) = 2Az + B, \quad (3.41)$$

con  $A, B$  costanti di integrazione ( $A > 0$ ). Se  $q^2 \neq 1$ , ponendo  $\sigma = 1/q^2$  abbiamo

$$\log \psi = \log z^{1-\sigma} + \log A, \quad A > 0$$

e, passando agli esponenziali,  $\psi(z) = Az^{1-\sigma}$ , per cui

$$w(z) = \frac{2A}{2-\sigma} z^{2-\sigma} + B, \quad B \in \mathbb{R}, \quad (3.42)$$

che per  $\sigma = 1$  si riduce alla (3.41).

Secondo passo: sostituendo l'espressione (3.42) di  $w(z)$  in (3.37) si ha

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\beta^{2-\sigma} - \alpha^{2-\sigma}}}{\sqrt{\alpha^2 \beta^{2-\sigma} - \beta^2 \alpha^{2-\sigma} + (\beta^2 - \alpha^2) z^{2-\sigma} - z^2 (\beta^{2-\sigma} - \alpha^{2-\sigma})}} dz. \quad (3.43)$$

A questo punto passiamo al limite per  $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 1$  in (3.43). Osserviamo che in entrambi i casi  $\alpha, \beta$  possono assumere tutti i valori reali con  $0 < \alpha < \beta < 1$ . Infatti,

$$\mathcal{W}_k(z) = - \int \phi_k(z) dz = z^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{Az^{-\sigma}}{k^2(2-\sigma)} \right]$$

e scelti arbitrariamente  $\alpha, \beta$  con  $0 < \alpha < \beta < 1$ , possiamo trovare dei valori di  $k^2, h$  tali che

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} - \mathcal{W}_k(\alpha) &= \frac{h}{2} - \mathcal{W}_k(\beta) = 0, \\ \frac{h}{2} - \mathcal{W}_k(z) &> 0 \quad \text{se } z \in (\alpha, \beta), \\ \mathcal{W}'_k(\alpha) &< 0 < \mathcal{W}'_k(\beta). \end{aligned}$$

Distinguiamo due casi: a)  $2 - \sigma > 0$ ; b)  $2 - \sigma < 0$ . Nel caso a), usando la sostituzione  $\zeta = z^{\sigma/2}$ , otteniamo

$$q\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^{2-\sigma}(1-z^\sigma)}} = 2q^2 \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = q^2\pi,$$

quindi  $q = 1, \psi(z) = A$  ed  $f(\rho) = -A/\rho^2$ . Nel caso b) invece

$$q\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2},$$

quindi  $q = \frac{1}{2}, \psi(z) = Az^{-3}$  ed  $f(\rho) = -A\rho$ .

□

### 3.8 Esercizi

**Esercizio 9.** Si consideri un punto materiale  $P$  di massa  $m$  libero di muoversi in un campo di forze centrali con energia potenziale

$$\mathcal{V}(\rho) = k \arctan \rho,$$

dove  $k > 0$  è una costante e  $\rho$  è la distanza di  $P$  dal centro di forze.

1. Detto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  il vettore delle coordinate del punto  $P$ , scrivere esplicitamente l'espressione della forza centrale  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ .
2. Dimostrare che per ogni valore  $c \neq 0$  della componente del momento angolare ortogonale al piano del moto esiste un'unica traiettoria circolare.
3. Disegnare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto con coordinate  $\rho, \dot{\rho}$ ;
4. Trovare il valore  $h$  dell'energia totale  $E$  tale che le traiettorie sono illimitate se e solo se  $E \geq h$ .

**Soluzione.** 1. La forza centrale si scrive

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho},$$

con

$$f(\rho) = -\mathcal{V}'(\rho) = -\frac{k}{1 + \rho^2}.$$

2. L'energia potenziale efficace si scrive

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = \mathcal{V}(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}.$$

Consideriamo un valore qualunque di  $c$ , con  $c \neq 0$ . Dobbiamo mostrare che questa funzione ha un unico punto stazionario positivo  $\bar{\rho}$ . Si ha

$$\mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho) = \frac{k}{1 + \rho^2} - \frac{c^2}{m\rho^3},$$

per cui, dall'equazione  $\mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho) = 0$  si trova l'equazione polinomiale

$$p(\rho) = km\rho^3 - c^2\rho^2 - c^2 = 0.$$

Per la regola dei segni di Cartesio<sup>6</sup> questa equazione ha al massimo una soluzione positiva. Quest'ultima esiste perché

$$p(0) = -c^2, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} p(\rho) = +\infty.$$

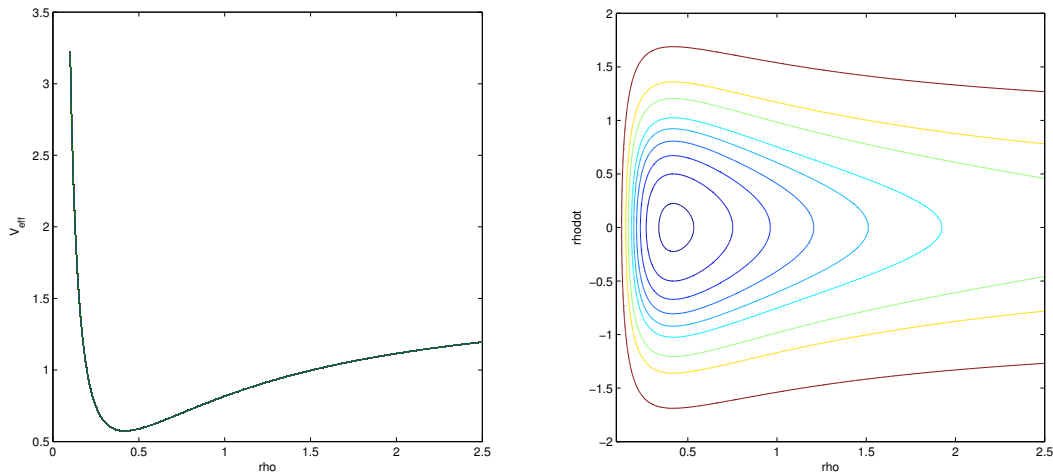
---

<sup>6</sup>dato un polinomio  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , con coefficienti reali  $a_j$ , il numero di radici positive è al massimo uguale al numero di cambiamenti di segno nella successione dei coefficienti  $a_n, \dots, a_0$ .

3. Tenendo conto dei limiti

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = +\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = k \frac{\pi}{2}$$

e di quanto dimostrato al punto precedente, possiamo tracciare qualitativamente il grafico di  $\mathcal{V}_{\text{eff}}$  (a sinistra) ed il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto (a destra):



4. Dallo studio fatto al punto 3. si vede che il valore cercato dell'energia totale è

$$h = k \frac{\pi}{2}.$$





# Capitolo 4

## Sistemi di riferimento in moto relativo

Mostriamo come cambiano la velocità e l'accelerazione di un punto materiale rispetto a sistemi di riferimento diversi, in moto relativo tra loro. A tal fine introduciamo il vettore velocità angolare e le sue proprietà.

### 4.1 Velocità angolare e formule di Poisson

Consideriamo due sistemi di riferimento

$$\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \quad \Sigma' = O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$$

nello spazio euclideo  $\mathbb{E}^3$ . Le terne di vettori  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  e  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  dei sistemi di riferimento formano due basi  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  dello spazio vettoriale  $\mathbb{V}^3$  associato ad  $\mathbb{E}^3$ . Pertanto, dato un vettore  $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$ , esistono uniche le rappresentazioni in tali basi

$$\vec{u} = \sum_{h=1}^3 u_h \hat{e}_h = \sum_{h=1}^3 u'_h \hat{e}'_h.$$

Data una mappa vettoriale

$$t \mapsto \vec{u}(t) \in \mathbb{V}^3,$$

definita in  $\mathbb{R}$  o in un suo intervallo, se i coefficienti  $u_h, u'_h$  di  $\vec{u}$  nelle basi  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  sono derivabili rispetto al tempo, definiamo le derivate temporali di  $\vec{u}$  nei sistemi di riferimento  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  come

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma} = \sum_{h=1}^3 \dot{u}_h \hat{e}_h, \quad \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma'} = \sum_{h=1}^3 \dot{u}'_h \hat{e}'_h.$$

**Proposizione 15.** *Se le coordinate di  $\hat{e}'_h$  in  $\Sigma$  sono funzioni derivabili del tempo  $t$  allora esiste un'unica mappa  $t \mapsto \vec{\omega}(t) \in \mathbb{V}^3$ , tale che*

$$\left. \frac{d\hat{e}'_h}{dt} \right|_{\Sigma} = \vec{\omega} \times \hat{e}'_h, \quad h = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

Le relazioni (4.1) si chiamano **formule di Poisson** e il vettore  $\vec{\omega}(t)$  si dice **velocità angolare** di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$  al tempo  $t$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo la matrice  $R$  di cambiamento di base da  $\mathcal{B}' = \{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  a  $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , con componenti  $R_{ji} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Poichè

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

la matrice  $R = (R_{jh})$  è ortogonale, cioè soddisfa la relazione

$$RR^T = I = R^T R.$$

Inoltre le terne che formano  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  sono entrambe levogire, per cui  $\det R = 1$ , cioè

$$R \in SO(3).$$

Siano inoltre  $e_h \in \mathbb{R}^3$  i vettori della base canonica, che rappresentano  $\hat{e}_h$  nella base  $\mathcal{B}$  ed  $e'_h \in \mathbb{R}^3$  i vettori delle componenti di  $\hat{e}'_h$  in  $\mathcal{B}$ . Valgono le relazioni  $e'_h = R e_h$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Il vettore

$$\left. \frac{d\hat{e}'_h}{dt} \right|_{\Sigma}$$

è rappresentato da  $\dot{e}'_h \in \mathbb{R}^3$  nella base  $\mathcal{B}$ . Dalla relazione  $R^T R = I$  si ottiene

$$\dot{e}'_h = \dot{R} R^T R e_h = \dot{R} R^T e'_h.$$

La matrice  $\dot{R} R^T$  è antisimmetrica, infatti derivando  $R R^T = I$  rispetto a  $t$  si ottiene

$$\dot{R} R^T + R \dot{R}^T = \dot{R} R^T + (\dot{R} R^T)^T = 0.$$

Data una matrice antisimmetrica  $A$ , esiste un unico vettore  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  tale che

$$A\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.2)$$

La relazione tra le componenti di  $A$  e quelle di  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  è la seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Concludo che esiste un unico vettore  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ , associato alla matrice  $\dot{R}R^T$ , tale che

$$\dot{\mathbf{e}}'_h = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_h, \quad h = 1, 2, 3.$$

Il vettore  $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{h=1}^3 \omega_h \hat{\mathbf{e}}_h \in \mathbb{V}^3$ , rappresentato da  $\boldsymbol{\omega}$  in  $\mathcal{B}$ , soddisfa la (4.1). Infatti se  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  rappresentano  $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$  in  $\mathcal{B}$ , allora  $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$  è rappresentato da  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} &= \sum_{i=1}^3 a_i \hat{\mathbf{e}}_i \times \sum_{j=1}^3 b_j \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{\substack{i,j=1 \\ 3}}^3 a_i b_j \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (a_i b_j - a_j b_i) \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{h=1}^3 (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_h \hat{\mathbf{e}}_h. \end{aligned} \quad (4.3)$$

L'unicità di  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  si dimostra per assurdo. Se esistessero  $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1, \vec{\boldsymbol{\omega}}_2$  che soddisfano le (4.1), allora si avrebbe  $(\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 - \vec{\boldsymbol{\omega}}_2) \times \hat{\mathbf{e}}'_h = \mathbf{0}$  per  $h = 1, 2, 3$ . Quindi  $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 = \vec{\boldsymbol{\omega}}_2$ .  $\square$

**Esercizio 10.** Per ogni  $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{V}^3$  l'applicazione lineare

$$\mathbb{V}^3 \ni \vec{\mathbf{u}} \mapsto \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3$$

ha un nucleo di dimensione dispari.

*Suggerimento:* scrivere la matrice corrispondente a questa applicazione in una base di cui  $\vec{\mathbf{a}}$  è un elemento.

**Proposizione 16.** Una formula esplicita per la velocità angolare è data da

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^3 \dot{\mathbf{e}}'_h \times \left. \frac{d\dot{\mathbf{e}}'_h}{dt} \right|_{\Sigma} \quad (4.4)$$

*Dimostrazione.* Usando le formule di Poisson (4.1) si ha

$$\sum_{h=1}^3 \dot{\mathbf{e}}'_h \times \left. \frac{d\dot{\mathbf{e}}'_h}{dt} \right|_{\Sigma} = \sum_{h=1}^3 \dot{\mathbf{e}}'_h \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{e}}'_h) = \sum_{h=1}^3 [\vec{\boldsymbol{\omega}} - (\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \dot{\mathbf{e}}'_h) \dot{\mathbf{e}}'_h] = 2\vec{\boldsymbol{\omega}}.$$

$\square$

**Esempio 2.** Siano  $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$ ,  $\Sigma' = O \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3$  due sistemi di riferimento con la stessa origine  $O$ . Assumiamo che  $\Sigma'$  ruoti attorno all'asse  $O \hat{\mathbf{e}}_3$  di  $\Sigma$  in modo che i vettori  $\hat{\mathbf{e}}'_1$  e  $\hat{\mathbf{e}}_1$  formino un angolo  $\theta(t)$ . Calcoliamo la velocità angolare di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$ .

Abbiamo che

$$\hat{\mathbf{e}}'_1 = \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}'_2 = -\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}'_3 = \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (4.5)$$

Derivando le (4.5) rispetto a  $t$  ed applicando (4.4) si ottiene che

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_3.$$

### 4.1.1 Derivata temporale di un vettore in riferimenti diversi

Mostriamo la relazione tra le derivate temporali di una stessa mappa vettoriale eseguite in due riferimenti diversi.

**Proposizione 17.** *Data una mappa vettoriale  $t \mapsto \vec{u}(t) \in \mathbb{V}^3$ , definita in  $\mathbb{R}$  o in un suo intervallo e derivabile in due riferimenti  $\Sigma, \Sigma'$ , vale la relazione*

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{u}. \quad (4.6)$$

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che, poiché  $\hat{e}'_i = \sum_j R_{ji} \hat{e}_j$ ,

$$\vec{u} = \sum_i u'_i \hat{e}'_i = \sum_i u'_i \sum_j R_{ji} \hat{e}_j = \sum_j \left( \sum_i u'_i R_{ji} \right) \hat{e}_j,$$

dove le somme su  $i$  e  $j$  si intendono da 1 a 3. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma} &= \sum_j \frac{d}{dt} \left( \sum_i u'_i R_{ji} \right) \hat{e}_j = \sum_j \sum_i \left( \dot{u}'_i R_{ji} + u'_i \dot{R}_{ji} \right) \hat{e}_j = \\ &= \sum_i \dot{u}'_i \left( \sum_j R_{ji} \hat{e}_j \right) + \sum_i u'_i \sum_j \dot{R}_{ji} \hat{e}_j = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \sum_i u'_i \left. \frac{d\hat{e}'_i}{dt} \right|_{\Sigma} = \\ &= \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \sum_i u'_i \vec{\omega} \times \hat{e}'_i = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{u}. \end{aligned}$$

□

**Osservazione 11.** *Dalla (4.6) segue che la derivata temporale di  $\vec{\omega}$  in  $\Sigma$  ed in  $\Sigma'$  coincidono. Per questo motivo in seguito scriveremo anche  $\dot{\vec{\omega}}$  al posto di  $\left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma}$  e di  $\left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma'}$ .*

Se  $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$  rappresentano le coordinate del vettore  $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$  nelle basi  $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  rispettivamente, possiamo scrivere

$$\dot{\mathbf{u}} = R\dot{\mathbf{u}}' + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{u}',$$

dove  $R \in SO(3)$ ,  $Re_h = \hat{e}'_h$ .

### 4.1.2 Composizione di velocità angolari

Consideriamo tre sistemi di riferimento in  $\mathbb{E}^3$ :

$$\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3, \quad \Sigma' = O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3, \quad \Sigma'' = O'' \hat{e}''_1 \hat{e}''_2 \hat{e}''_3.$$

**Proposizione 18.** *Se  $\vec{\omega}'$  è la velocità angolare di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$  e se  $\vec{\omega}''$  è la velocità angolare di  $\Sigma''$  rispetto a  $\Sigma'$ , allora la velocità angolare  $\vec{\omega}$  di  $\Sigma''$  rispetto a  $\Sigma$  è data dalla somma  $\vec{\omega}' + \vec{\omega}''$ .*

*Dimostrazione.* Usando la (4.6) e le formule di Poisson si ha, per  $h = 1, 2, 3$ ,

$$\vec{\omega} \times \hat{e}''_h = \left. \frac{d\hat{e}''_h}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\hat{e}''_h}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega}' \times \hat{e}''_h = (\vec{\omega}'' + \vec{\omega}') \times \hat{e}''_h.$$

Si conclude usando l'unicità della velocità angolare. □

## 4.2 Equazione del moto in riferimenti diversi

Scriviamo le formule che legano la velocità  $\vec{v}$  e l'accelerazione  $\vec{a}$  di un punto materiale  $P$  in un sistema di riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$  alla velocità  $\vec{v}'$  e all'accelerazione  $\vec{a}'$  relative ad un altro riferimento  $\Sigma' = O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$ , in moto con velocità angolare  $\vec{\omega}$  rispetto a  $\Sigma$ .

**Proposizione 19.** *Valgono le relazioni*

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}^T, \tag{4.7}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}^T + \vec{a}^C, \tag{4.8}$$

in cui

$$\begin{aligned} \vec{v}^T &= \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P - O'), \\ \vec{a}^T &= \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')) + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O'), \\ \vec{a}^C &= 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \end{aligned}$$

dove  $\vec{v}_{O'}$ ,  $\vec{a}_{O'}$  sono la velocità e l'accelerazione di  $O'$  in  $\Sigma$ .

*Dimostrazione.* Per ricavare le formule precedenti scriviamo

$$P - O = (P - O') + (O' - O).$$

Derivando rispetto a  $t$  in  $\Sigma$  e usando la (4.6) si ha

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \left. \frac{d(P-O')}{dt} \right|_{\Sigma} + \left. \frac{d(O'-O)}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d(P-O')}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times (P-O') + \vec{v}_{O'} \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega} \times (P-O') + \vec{v}_{O'},\end{aligned}$$

che corrisponde alla (4.7). Derivando ancora e usando la (4.6) si ottiene<sup>1</sup>

$$\vec{a} = \left. \frac{d\vec{v}'}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times (P-O') + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P-O')) + \vec{a}_{O'},$$

da cui segue la (4.8). □

I termini  $\vec{a}^T$  e  $\vec{a}^C$  si chiamano rispettivamente **accelerazione di trascinamento** e **accelerazione di Coriolis**. Il termine  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P-O'))$  si chiama **accelerazione centripeta**. In coordinate nella base  $\mathcal{B}$  abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= R\mathbf{x}' + \mathbf{x}_{O'}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= R\dot{\mathbf{x}}' + \dot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}', \\ \ddot{\mathbf{x}} &= R\ddot{\mathbf{x}}' + \ddot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times R\mathbf{x}' + 2\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{x}}'\end{aligned}$$

in cui  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$  è il vettore delle coordinate di  $(P-O')$  in  $\mathcal{B}'$ .

Se l'equazione del moto di un punto materiale  $P$  di massa  $m$  in un riferimento  $O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$  si scrive

$$m\vec{a} = \vec{F}(P-O, \vec{v}, t),$$

allora nel riferimento  $O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$  possiamo scrivere

$$m\vec{a}' = \vec{F}((P-O') + (O'-O), \vec{v}' + \vec{v}^T, t) - m\vec{a}^T - m\vec{a}^C.$$

In coordinate nella base  $\mathcal{B}$  l'ultima equazione diventa

$$\begin{aligned}mR\ddot{\mathbf{x}}' &= \mathbf{F}(R\mathbf{x}' + \mathbf{x}_{O'}, R\dot{\mathbf{x}}' + \dot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}', t) \\ &\quad - m(\ddot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times R\mathbf{x}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{x}}'.\end{aligned}$$

### 4.3 Deviazione dei gravi in caduta libera

Si consideri un sistema di riferimento  $\Sigma = Oxyz$ , avente per origine il centro della Terra. Studiamo il moto di un punto materiale  $P$  in un sistema di riferimento solidale alla Terra, assumendo che questa abbia forma sferica e che ruoti attorno all'asse  $Oz$  con velocità angolare  $\vec{\omega}$  costante. In prima approssimazione la forza di

<sup>1</sup>usiamo la relazione  $\left. \frac{d(\vec{u} \times \vec{v})}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma} \times \vec{v} + \vec{u} \times \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\Sigma}$ , che segue dalla (4.3).

attrazione gravitazionale esercitata dal Sole sul punto materiale è bilanciata dalla forza centrifuga del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole.

Dato un sistema di riferimento  $\Sigma' = O'\xi\eta\zeta$  solidale alla Terra, l'accelerazione relativa è data da

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}^T - \vec{a}^C,$$

dove

$$\vec{a} = \vec{g}, \quad \vec{a}^T = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')), \quad \vec{a}^C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}',$$

con  $\vec{g}$  costante in  $\Sigma'$ . Inoltre

$$\vec{a}_{O'} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (O' - O)), \quad (4.9)$$

infatti  $O, O'$  sono fissi in  $\Sigma'$ , per cui (4.9) segue applicando la formula (4.6) nel calcolo della derivata prima e seconda di  $O' - O$  rispetto a  $t$  in  $\Sigma$ , e tenendo conto che  $O' - O$  è costante in  $\Sigma'$ , oppure da

$$\vec{a}_O = \vec{a}'_O + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (O - O')] + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_O$$

e da  $\vec{a}_O = \vec{a}'_O = \vec{v}'_O = \vec{0}$ . Siccome  $P - O'$  è molto più piccolo di  $O' - O$  posso trascurare il termine  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O'))$  quindi

$$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (O' - O)) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Poniamo

$$\vec{g}_{O'} = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (O' - O)),$$

che è l'accelerazione di gravità locale, dipendente dalla latitudine. Possiamo orientare il riferimento  $\Sigma'$  nel modo seguente: scelgo l'asse  $O'\zeta$  lungo la direzione della gravità locale, l'asse  $O'\xi$  parallelo al piano del meridiano, diretto verso l'equatore, e l'asse  $O'\eta$  in modo tale che i versori di  $O'\xi\eta\zeta$  formino una terna levogira, vedi Figura 4.1. Approssimiamo la gravità locale con  $\vec{g}$ , trascurando<sup>2</sup> il termine  $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (O' - O))$ . Con queste approssimazioni l'equazione del moto per il punto  $P$  in  $\Sigma'$  diventa quindi

$$\frac{d^2}{dt^2}(P - O')|_{\Sigma'} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'. \quad (4.10)$$

Indicando con  $\lambda$  la latitudine di  $O'$  e usando le coordinate  $\xi, \eta, \zeta$ , l'equazione (4.10) si scrive

$$\ddot{\xi} = 2\omega \sin \lambda \dot{\eta}, \quad \ddot{\eta} = -2\omega \sin \lambda \dot{\xi} - 2\omega \cos \lambda \dot{\zeta}, \quad \ddot{\zeta} = -g + 2\omega \cos \lambda \dot{\eta}, \quad (4.11)$$

<sup>2</sup>Osserviamo che la norma della velocità angolare del moto di rotazione della Terra è  $\omega = \frac{2\pi}{86400} \text{s}^{-1}$  e la misura del raggio equatoriale della Terra è  $R_{\oplus} \approx 6378 \text{ Km}$ . Stimiamo la norma del termine trascurato con  $\omega^2 R_{\oplus} \approx 0.03373 \text{ ms}^{-2}$ , che è più piccolo di due ordini di grandezza del valore della accelerazione di gravità  $g \approx 9.81 \text{ ms}^{-2}$ .



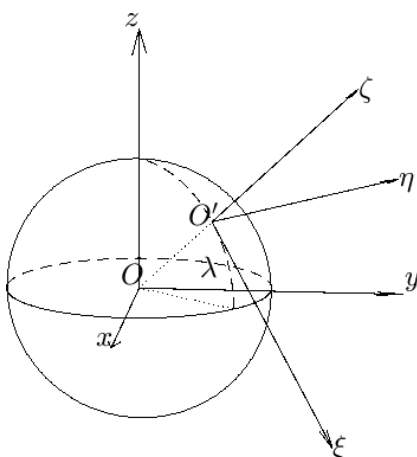


Figura 4.1: Il riferimento  $O'\xi\eta\zeta$  in cui si studia il moto del grave.

infatti

$$\vec{\omega} = \omega(-\cos \lambda \hat{e}_\xi + \sin \lambda \hat{e}_\zeta),$$

dove  $\hat{e}_\xi, \hat{e}_\zeta$  sono i versori degli assi  $O'\xi, O'\zeta$ .

Considero per queste equazioni le condizioni iniziali

$$\xi(0) = \eta(0) = \zeta(0) = \dot{\xi}(0) = \dot{\eta}(0) = \dot{\zeta}(0) = 0. \quad (4.12)$$

La soluzione del problema di Cauchy lineare dato da (4.11), (4.12) si potrebbe scrivere esplicitamente. Comunque possiamo semplificare i conti facendo un'ulteriore approssimazione. Integrando rispetto al tempo la prima e la terza equazione in (4.11) e sostituendo le risultanti espressioni di  $\dot{\xi}, \dot{\zeta}$  nella seconda si ottiene

$$\ddot{\eta} = -4\omega^2\eta + 2g\omega t \cos \lambda.$$

Trascurando il termine con  $\omega^2$  e integrando si ottiene

$$\eta(t) = \frac{1}{3}g\omega t^3 \cos \lambda.$$

Questa formula ci dice che un grave in caduta libera sulla Terra è soggetto a deviazione verso Est.

# Capitolo 5

## Dinamica dei sistemi di $N$ punti materiali liberi

Studiamo il moto di un sistema di  $N$  punti materiali liberi nello spazio tridimensionale. Introduciamo il baricentro del sistema e descriviamo le sue proprietà. Distinguiamo tra forze interne ed esterne e mostriamo che le prime sono sempre conservative. Parliamo inoltre dei sistemi di vettori applicati equivalenti e di quelli equilibrati.

### 5.1 Quantità dinamiche per $N$ punti materiali

Consideriamo un sistema di punti materiali  $P_i$  di massa  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , su cui agiscono le forze  $\vec{F}_i$  nel sistema di riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ . Siano  $\vec{x}_i, \vec{v}_i, \vec{a}_i$  la posizione, la velocità e l'accelerazione di  $P_i$  relative a  $\Sigma$ . Siano inoltre  $F_j, x_i, v_i, a_i \in \mathbb{R}^3$  le coordinate di questi vettori in  $\Sigma$ . Introduciamo le seguenti quantità, utili a descrivere la dinamica degli  $N$  punti nel loro insieme:

QUANTITÀ DI MOTO TOTALE (MOMENTO LINEARE)

$$\vec{p} = \sum_{j=1}^N \vec{p}_j = \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j.$$

MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A UN POLO  $Q$

$$\vec{M}_Q = \sum_{j=1}^N (P_j - Q) \times m_j \vec{v}_j.$$

ENERGIA CINETICA

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j |\vec{v}_j|^2.$$

RISULTANTE DELLE FORZE  $\vec{F}_j$

$$\vec{R} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j.$$

MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE  $\vec{F}_j$  RISPETTO A UN POLO  $Q$

$$\vec{N}_Q = \sum_{j=1}^N (P_j - Q) \times \vec{F}_j.$$

POTENZA RISULTANTE DELLE FORZE  $\vec{F}_j$

$$\Pi = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{v}_j.$$

LAVORO ELEMENTARE ALL'ISTANTE  $t$  DELLE FORZE  $\vec{F}_j$

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \cdot d\vec{x}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot d\mathbf{x}_j.$$

## 5.2 Teoremi di scomposizione relativi al baricentro

Introduciamo la massa totale

$$m = \sum_{j=1}^N m_j$$

e il baricentro  $B \in \mathbb{E}^3$  degli  $N$  punti materiali, definito da

$$m(B - Q) = \sum_{j=1}^N m_j(P_j - Q), \quad (5.1)$$

dove  $Q \in \mathbb{E}^3$  è un punto scelto a piacere.

Osserviamo che la definizione di  $B$  non dipende dalla scelta di  $Q$  infatti, scelto  $Q' \neq Q$  e definito  $B'$  tramite la relazione

$$m(B' - Q') = \sum_{j=1}^N m_j(P_j - Q')$$

si ha

$$\begin{aligned} B' - Q' &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j (P_j - Q') = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j (P_j - Q) + (Q - Q') \\ &= (B - Q) + (Q - Q') = B - Q', \end{aligned}$$

per cui  $B' = B$ .

**Definizione 6.** *Il sistema di riferimento  $\Sigma_B$ , centrato in  $B$  e orientato come  $\Sigma$ , si chiama riferimento del baricentro.*

## Rappresentazione della quantità di moto

Dalla (5.1) segue subito che la quantità di moto totale corrisponde a quella di un punto avente massa totale  $m$ , che si muove come il baricentro del sistema:

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_j = m \mathbf{v}_B. \quad (5.2)$$

**Proposizione 20.** *(teorema del centro di massa) Il baricentro di un sistema di  $N$  punti si muove come un punto materiale di massa  $m$  su cui agisce la risultante  $\mathbf{R}$  delle forze che agiscono sui singoli punti:*

$$m \ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{R}. \quad (5.3)$$

*Dimostrazione.* Valutando la (5.2) lungo le soluzioni delle equazioni di Newton e derivando rispetto al tempo si ottiene

$$m \ddot{\mathbf{x}}_B = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j.$$

□

## Scomposizione del momento angolare rispetto a un polo $Q$

Il momento angolare totale rispetto ad un polo  $Q \in \mathbb{E}^3$  si può scomporre come somma di due componenti

$$\mathbf{M}_Q = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m \mathbf{v}_B + \mathbf{M}^{(B)}, \quad \mathbf{M}^{(B)} = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B). \quad (5.4)$$

La prima corrisponde al momento angolare rispetto a  $Q$  di un punto di massa  $m$  che si muove come il baricentro del sistema. La seconda corrisponde al momento angolare nel sistema nel riferimento del baricentro e non dipende dalla scelta del polo  $Q$ .

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m_j \mathbf{v}_j = \\ &= \mathbf{M}_B + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m \mathbf{v}_B. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}^{(B)} + \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_B$$

e si ha

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_B = \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{v}_B = m (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{v}_B = \mathbf{0}.$$

□

**Osservazione 12.** *Nel riferimento del baricentro il momento angolare non dipende dalla scelta del polo. Infatti in tale riferimento vale la relazione*

$$\sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_j = m \mathbf{v}_B = \mathbf{0}$$

e quindi, se  $Q, Q' \in \mathbb{E}^3$  con  $Q \neq Q'$ , si ha

$$\mathbf{M}_Q = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q) \times m_j \mathbf{v}_j + (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_{Q'}) \times \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{Q'}) \times m_j \mathbf{v}_j = \mathbf{M}_{Q'}.$$

### Scomposizione del momento risultante delle forze rispetto a un polo $Q$

Il momento risultante delle forze rispetto ad un polo  $Q \in \mathbb{E}^3$  si può scomporre come somma di due componenti

$$\mathbf{N}_Q = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{R} + \mathbf{N}^{(B)}, \quad \mathbf{N}^{(B)} = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times (\mathbf{F}_j - m_j \mathbf{a}_B) \quad (5.5)$$

la prima corrisponde al momento rispetto al polo  $Q$  della forza risultante  $\mathbf{R}$  agente su un punto di massa  $m$  che si muove come il baricentro  $B$  del sistema. La seconda corrisponde al momento risultante delle forze nel riferimento del baricentro<sup>1</sup> e non dipende dalla scelta del polo  $Q$ .

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_Q &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{F}_j + \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{F}_j = \\ &= \mathbf{N}_B + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\mathbf{N}_B = \mathbf{N}^{(B)} + \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{a}_B$$

e si ha

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{a}_B = \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{a}_B = m (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{a}_B = \mathbf{0}.$$

□

**Osservazione 13.** *Nel riferimento del baricentro, lungo le soluzioni delle equazioni di Newton, il momento risultante delle forze non dipende dalla scelta del polo. Infatti, in queste ipotesi, vale la relazione*

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = m \ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{0}$$

e quindi, se  $Q, Q' \in \mathbb{E}^3$  con  $Q \neq Q'$ , si ha

$$\mathbf{N}_Q = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{F}_j + (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_{Q'}) \times \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{Q'}) \times \mathbf{F}_j = \mathbf{N}_{Q'}.$$

---

<sup>1</sup>in questo riferimento alle forze  $\mathbf{F}_j$  agenti sui punti  $P_j$  si aggiungono le forze di trascinarsi  $-m_j \mathbf{a}_B$ .

## Scomposizione dell'energia cinetica

L'energia cinetica del sistema si può scomporre come somma di due componenti

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N m_j(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B), \quad (5.6)$$

la prima corrisponde all'energia cinetica di un punto materiale di massa  $m$  che si muove come il baricentro del sistema, la seconda corrisponde all'energia cinetica del sistema nel riferimento del baricentro. Questo risultato è noto come **teorema di König**.

*Dimostrazione.*

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N m_j(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) + \sum_{j=1}^N m_j\mathbf{v}_B \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^N m_j\right)\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{v}_B.$$

Inoltre il secondo addendo a destra è nullo. □

## 5.3 Forze interne e forze esterne

Possiamo scomporre le forze  $\vec{\mathbf{F}}_i$  che agiscono sui punti  $P_i$  come somma vettoriale di due contributi:  $\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} + \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}$ . Il vettore  $\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}$  è la somma delle forze che gli altri punti del sistema esercitano su  $P_i$  e si chiama **forza interna** (agente su  $P_i$ );  $\vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}$  è la somma delle altre forze e si chiama **forza esterna**.

Assumiamo che

$$\vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} = \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}(\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{v}}_i, t),$$

cioè che ogni forza esterna  $\vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}$  dipenda solo dallo stato del punto  $P_i$ .

Sulle forze interne  $\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}$  facciamo le seguenti ipotesi (*forze di tipo classico*):

$$\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}(\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{\mathbf{F}}_{ij}(\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{x}}_j), \quad (5.7)$$

dove  $\vec{\mathbf{F}}_{ij}$  è la forza esercitata da  $P_j$  su  $P_i$ . Quindi le  $\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}$  sono puramente posizionali e sono la somma vettoriale di interazioni a due corpi. Assumiamo inoltre che valgano le seguenti proprietà:

- 1)  $\vec{\mathbf{F}}_{ij} + \vec{\mathbf{F}}_{ji} = \vec{\mathbf{0}}, \quad \forall i, j,$
- 2)  $\vec{\mathbf{F}}_{ij} \times \vec{\mathbf{r}}_{ij} = \vec{\mathbf{0}},$  con  $\vec{\mathbf{r}}_{ij} = \vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_j,$

$$3) \vec{\mathbf{F}}_{ij} = f_{ij}(\rho_{ij}) \frac{\vec{\mathbf{r}}_{ij}}{\rho_{ij}}, \text{ con } \rho_{ij} = |\vec{\mathbf{r}}_{ij}|.$$

Osserviamo che le relazioni precedenti implicano che  $f_{ij} = f_{ji}$ .

**Osservazione 14.** *Queste ipotesi sulle forze sono caratteristiche della Meccanica Classica: le proprietà 1) e 2) corrispondono al principio di azione e reazione.*<sup>2</sup>

Con queste ipotesi si dimostra che la risultante e il momento risultante delle forze interne (rispetto a qualunque polo  $Q$ ) sono nulli. Infatti

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{R}}^{(I)} &= \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\vec{\mathbf{F}}_{ij} + \vec{\mathbf{F}}_{ji}) = \vec{\mathbf{0}}, \\ \vec{\mathbf{N}}_Q^{(I)} &= \sum_{i=1}^N (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left[ (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} + (P_j - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ji} \right] = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (P_i - P_j) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \vec{\mathbf{0}}. \end{aligned}$$

## 5.4 Le equazioni cardinali

Si consideri un sistema meccanico formato da  $N$  punti materiali di massa  $m_1, \dots, m_n$ , sui quali agiscono delle forze  $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j^{(I)} + \mathbf{F}_j^{(E)}$ , con forze interne  $\mathbf{F}_j^{(I)}$  di tipo classico.

**Proposizione 21.** *Sia  $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t))$  una qualunque soluzione del sistema di equazioni di Newton*

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \quad j = 1 \dots N.$$

Allora  $\mathbf{x}(t)$  risolve le seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}^{(E)} \\ \dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q^{(E)} - \mathbf{v}_Q \times \mathbf{p} \end{cases}. \quad (5.8)$$

Le (5.8) si chiamano **equazioni cardinali della Dinamica**.

<sup>2</sup>Troviamo già negli scritti di Leonardo da Vinci un chiaro riferimento a questo principio. Nel suo *Codice sul volo degli uccelli* (1505) egli scrive: ‘Tanta forza si fa con la cosa in contra all’aria, quanto l’aria contro alla cosa. Vedi l’alie percosse contro all’aria far sostenere la pesante aquila nella suprema sottile aria vicina all’elemento fuoco. Ancora vedi la mossa aria sopra’l mare, ripercossa nelle gonfiate vele, far correre la carica e pesante nave; sicché per queste dimostrative e assegnate ragioni potrai conoscere l’omo con le sue congegnate e grandi alie, facendo forza contro alla resistente aria e, vincendo, poterla soggiogare e levarsi sopra di lei’.



*Dimostrazione.* Calcolando la derivata di  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{M}_Q$  rispetto al tempo lungo le soluzioni delle equazioni di Newton si ottiene che

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= m\ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{R} = \mathbf{R}^{(I)} + \mathbf{R}^{(E)}, \\ \dot{\mathbf{M}}_Q &= \mathbf{N}_Q - \dot{\mathbf{x}}_Q \times m\dot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{N}_Q^{(I)} + \mathbf{N}_Q^{(E)} - \dot{\mathbf{x}}_Q \times m\dot{\mathbf{x}}_B.\end{aligned}$$

Si conclude usando le ipotesi sulle forze interne fatte nella sezione precedente.  $\square$

## 5.5 Sistemi equivalenti di vettori applicati

Un sistema di vettori applicati è un insieme  $\mathcal{S}$  della forma

$$\mathcal{S} = \{(\vec{\mathbf{v}}_1, P_1), \dots, (\vec{\mathbf{v}}_N, P_N)\}$$

costituito da un insieme di coppie  $(\vec{\mathbf{v}}_j, P_j)$  che rappresentano un vettore e il suo punto di applicazione. Le rette

$$P_j\vec{\mathbf{v}}_j = \{P_j + \lambda\vec{\mathbf{v}}_j, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

passanti per  $P_j$  e aventi la direzione di  $\vec{\mathbf{v}}_j$ , si dicono **rette di applicazione**, o anche **linee di azione**, dei vettori  $\vec{\mathbf{v}}_j$ .

I vettori

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{j=1}^N \vec{\mathbf{v}}_j, \quad \vec{\mathbf{N}}_Q = \sum_{j=1}^N (P_j - Q) \times \vec{\mathbf{v}}_j$$

si chiamano **risultante** e **momento risultante rispetto al polo**  $Q \in \mathbb{E}^3$  del sistema  $\mathcal{S}$ .

Consideriamo adesso due sistemi di vettori applicati:

$$\mathcal{S}_1 = \{(\vec{\mathbf{v}}_1, P_1), \dots, (\vec{\mathbf{v}}_N, P_N)\}, \quad \mathcal{S}_2 = \{(\vec{\mathbf{w}}_1, Q_1), \dots, (\vec{\mathbf{w}}_M, Q_M)\}.$$

**Definizione 7.** I sistemi  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  si dicono **equivalenti** se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo  $O$  qualunque.

**Osservazione 15.** Osserviamo che nelle equazioni cardinali (5.8) appaiono solamente la risultante e il momento risultante delle forze esterne applicate nei punti del sistema, quindi considerando un sistema di forze equivalente otteniamo le stesse equazioni differenziali.

Notiamo che se i sistemi  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  hanno la stessa risultante ( $\vec{R}^{\mathcal{S}_1} = \vec{R}^{\mathcal{S}_2}$ ) e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo  $Q$  ( $\vec{N}_Q^{\mathcal{S}_1} = \vec{N}_Q^{\mathcal{S}_2}$ ), allora i due sistemi hanno lo stesso momento risultante rispetto ad un qualunque altro polo  $Q'$ :

$$\begin{aligned}\vec{N}_{Q'}^{\mathcal{S}_1} &= \sum_{h=1}^N (P_h - Q') \times \vec{v}_h = \vec{N}_Q^{\mathcal{S}_1} + (Q - Q') \times \vec{R}^{\mathcal{S}_1} = \\ &= \vec{N}_Q^{\mathcal{S}_2} + (Q - Q') \times \vec{R}^{\mathcal{S}_2} = \sum_{k=1}^M (Q_k - Q') \times \vec{w}_k = \vec{N}_{Q'}^{\mathcal{S}_2}\end{aligned}$$

**Definizione 8.** Diciamo che un sistema di vettori applicati  $\{(\vec{v}_j, P_j)\}_{j=1\dots N}$  è **equilibrato** se la risultante  $\vec{R}$  e il momento risultante  $\vec{N}_Q$  rispetto ad un polo  $Q$  qualunque sono nulli.

Dalla relazione

$$\vec{N}_{Q'} = \vec{N}_Q + (Q - Q') \times \vec{R}$$

valida per ogni  $Q, Q' \in \mathbb{E}^3$ , segue che per verificare che un sistema è equilibrato basta controllare che, oltre alla risultante  $\vec{R}$ , si annulli il momento risultante  $\vec{N}_Q$  rispetto ad un particolare polo  $Q$ .

Introduciamo delle **operazioni elementari**, eseguibili su un sistema  $\mathcal{S} = \{(\vec{v}_j, P_j)\}_{j=1\dots N}$  di vettori applicati, che danno luogo ad un sistema ad esso equivalente:

- (i) composizione e scomposizione di vettori applicati in uno stesso punto;
- (ii) aggiunta o eliminazione di due vettori opposti e paralleli alla retta congiungente i loro punti di applicazione (vettori *direttamente opposti*).

Infatti, eseguendo ciascuna delle due operazioni otteniamo la stessa risultante. Per vedere che anche il momento risultante resta lo stesso basta calcolarlo nel punto in cui sono applicati i vettori oggetto della composizione o scomposizione per l'operazione (i), e in un punto qualsiasi della linea di azione dei due vettori direttamente opposti per l'operazione (ii).

Osserviamo che tramite queste operazioni elementari possiamo trasportare ogni vettore applicato lungo la sua linea di azione. Infatti dato un vettore  $\vec{v}$  applicato in  $P$  e scelto un punto  $Q$  sulla linea di azione di  $\vec{v}$  possiamo aggiungere il vettore nullo  $\vec{0}$  applicato in  $Q$  e scomporlo come somma di  $\vec{v}$  e  $-\vec{v}$  (operazione (i), o anche (ii)). Possiamo poi eliminare i vettori applicati  $(\vec{v}, P)$ ,  $(-\vec{v}, Q)$ , in quanto direttamente opposti (operazione (ii)). Il sistema che ne risulta è quindi composto dal vettore  $\vec{v}$  applicato in  $Q$ .

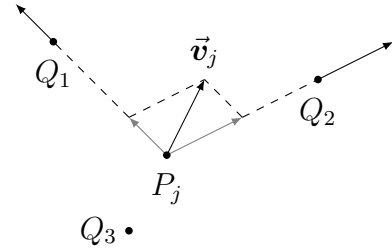
**Proposizione 22.** *Ogni sistema di vettori applicati  $\{(\vec{v}_j, P_j)\}_{j=1, \dots, N}$  può essere ridotto tramite operazioni elementari ad un sistema di tre vettori (possibilmente nulli) applicati in tre punti non allineati scelti a piacere.*

*Dimostrazione.* Siano  $Q_1, Q_2, Q_3$  tre punti non allineati. Mostriamo che ogni vettore  $\vec{v}_j$  applicato nel punto  $P_j$  si può sostituire con tre vettori applicati nei punti  $Q_i$ . Infatti, se  $\vec{v}_j$  appartiene allo spazio lineare generato da  $Q_2 - Q_1, Q_3 - Q_1$  e  $P_j$  giace nel piano  $Q_1Q_2Q_3$ , allora usando la prima operazione elementare possiamo scrivere  $\vec{v}_j$  come combinazione lineare di due dei vettori  $(Q_i - P_j), i = 1, 2, 3$ .

Assumiamo ad esempio che

$$\vec{v}_j = \lambda_1(Q_1 - P_j) + \lambda_2(Q_2 - P_j),$$

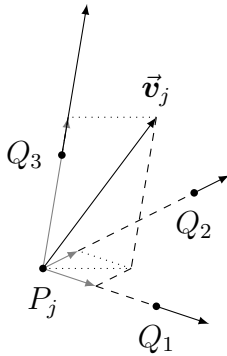
per opportuni coefficienti  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Possiamo sostituire  $(\vec{v}_j, P_j)$  con i due vettori  $\lambda_i(Q_i - P_j), i = 1, 2$  applicati nel punto  $P_j$ . Poi possiamo traslare tali vettori lungo la loro linea di azione e considerarli applicati nei punti  $Q_i$ .



Se invece  $\vec{v}_j$  non appartiene allo spazio lineare generato da  $Q_2 - Q_1, Q_3 - Q_1$ , a meno di una traslazione sulla sua linea di azione si può supporre  $\vec{v}_j$  applicato in un punto  $P_j$  che non giaccia nel piano  $Q_1Q_2Q_3$ . Possiamo quindi scrivere

$$\vec{v}_j = \lambda_1(Q_1 - P_j) + \lambda_2(Q_2 - P_j) + \lambda_3(Q_3 - P_j),$$

per opportuni coefficienti  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , sostituire  $(\vec{v}_j, P_j)$  con i tre vettori  $\lambda_i(Q_i - P_j), i = 1, 2, 3$  applicati in  $P_j$  e traslare tali vettori lungo la loro linea di azione in modo che siano applicati nei punti  $Q_i$ .



Concludo osservando che per ogni indice  $j$  abbiamo sostituito a  $(\vec{v}_j, P_j)$  tre vettori (possibilmente nulli) applicati in  $Q_1, Q_2, Q_3$ . Usando la prima operazione elementare possiamo considerare, per ciascuno dei tre punti  $Q_i$ , la somma vettoriale di tutti i vettori applicati in questo. Si ottiene così la tesi. □

**Proposizione 23.** *Ogni sistema  $\mathcal{S}$  di vettori applicati può essere ridotto tramite operazioni elementari ad un sistema di due soli vettori applicati. Uno dei due punti di applicazione può essere scelto a piacere.*

*Dimostrazione.* Si scelga un punto  $Q$  a piacere e altri due punti  $Q_1, Q_2$  in modo che  $Q, Q_1, Q_2$  non siano allineati. Per la Proposizione 22 possiamo ridurre  $\mathcal{S}$  tramite

operazioni elementari ad un sistema di tre vettori (eventualmente nulli)  $\vec{w}, \vec{w}_1, \vec{w}_2$  applicati in  $Q, Q_1, Q_2$  rispettivamente. Sia  $\Pi_1$  il piano passante per  $Q, Q_1, Q_1 + \vec{w}_1$  e  $\Pi_2$  il piano passante per  $Q, Q_2, Q_2 + \vec{w}_2$ . Se  $\vec{w}_1$  (risp.  $\vec{w}_2$ ) è nullo scegliamo un piano qualsiasi passante per  $Q$  e  $Q_1$  (risp.  $Q$  e  $Q_2$ ).

Consideriamo prima il caso generale, in cui

$$\Pi_1 \neq \Pi_2, \quad Q_1, Q_2 \notin r$$

dove  $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$  è la retta corrispondente all'intersezione dei due piani. Scegliamo un punto  $A \neq Q$  su  $r$ . Il vettore applicato  $(\vec{w}_1, Q_1)$  è equivalente all'insieme dei due vettori applicati  $\{(\vec{w}_1^Q, Q_1), (\vec{w}_1^A, Q_1)\}$ , diretti come  $Q_1 - Q$  e  $Q_1 - A$  e tali che  $\vec{w}_1 = \vec{w}_1^Q + \vec{w}_1^A$ . Questi due vettori si possono trasportare lungo le loro linee di azione in modo che risultino applicati in  $Q$  e  $A$  rispettivamente. Possiamo inoltre eseguire una riduzione analoga sul vettore applicato  $(\vec{w}_2, Q_2)$ . In questo modo abbiamo ridotto  $\mathcal{S}$  ad un sistema di tre vettori applicati in  $Q$  e due vettori applicati in  $A$ . Si conclude usando la prima operazione elementare.

Nei casi particolari non ancora considerati possiamo procedere come sopra scegliendo il punto  $A$  in modo opportuno. Se

$$\Pi_1 \neq \Pi_2 \quad \text{e} \quad Q_1 \in r \quad (\text{risp.} \quad Q_2 \in r)$$

basta prendere  $A \equiv Q_1$  (risp.  $A \equiv Q_2$ ), se invece

$$\Pi_1 = \Pi_2$$

possiamo prendere indifferentemente  $A \equiv Q_1$  oppure  $A \equiv Q_2$ . □

**Proposizione 24.** *Ogni sistema di vettori applicati equilibrato si può ridurre ad un sistema nullo, cioè costituito da soli vettori nulli, tramite operazioni elementari.*

*Dimostrazione.* Applicando a tale sistema la riduzione della Proposizione 23 si arriva ad un sistema di due vettori applicati che risultano necessariamente opposti (poiché la risultante è nulla) e diretti lungo la retta congiungente i loro due punti di applicazione (poiché il momento risultante rispetto a un polo qualunque è nullo). Tale sistema si riduce mediante la seconda operazione elementare ad un sistema nullo. □

**Proposizione 25.** *Sia  $\mathcal{S} = \{(\vec{v}_1, P_1), (\vec{v}_2, P_2), (\vec{v}_3, P_3)\}$  un sistema equilibrato formato da soli tre vettori. Allora le rette di applicazione di tali vettori sono coplanari. Inoltre, tali rette sono concorrenti in uno stesso punto oppure parallele.*

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $r_1, r_2, r_3$  le tre rette di applicazione. Se queste sono coincidenti il risultato vale banalmente. Se non è così allora possiamo trasportare i vettori  $\vec{v}_j$  lungo le loro linee di azione e assumere che i punti di applicazione  $P_j$  non siano allineati. Consideriamo le coppie  $(\vec{v}_1, P_1)$  e  $(\vec{v}_2, P_2)$ . Dato un punto  $Q$  dell'asse  $r_{12}$ , passante per  $P_1, P_2$ , le proiezioni dei momenti

$$(P_1 - Q) \times \vec{v}_1, \quad (P_2 - Q) \times \vec{v}_2$$

lungo  $r_{12}$  sono nulle. Poiché il sistema è equilibrato, il momento risultante rispetto a qualunque polo è nullo, quindi anche la proiezione del momento

$$(P_3 - Q) \times \vec{v}_3$$

lungo  $r_{12}$  deve essere nulla. Dunque i vettori  $\vec{v}_3, P_3 - Q, P_2 - P_1$  sono linearmente dipendenti e il punto  $P_3 + \vec{v}_3$  sta nel piano  $P_1P_2P_3$ . Analogamente si dimostra che i punti  $P_1 + \vec{v}_1, P_2 + \vec{v}_2$  stanno in tale piano. Quindi le rette di applicazione  $r_1, r_2, r_3$  sono coplanari.

Se  $r_1, r_2$  si incontrano in un punto  $Q$ , si possono trasportare  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  fino ad avere il loro punto di applicazione in  $Q$ . La somma  $\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  di tali vettori applicata in  $Q$  equivale al sistema dei due vettori applicati. Poiché il sistema  $\mathcal{S}$  è equilibrato, la linea di azione  $r$  di  $(\vec{u}, Q)$  deve coincidere con la linea di azione  $r_3$  di  $(\vec{v}_3, P_3)$ , che quindi deve passare per  $Q$ . Se invece  $r_1$  e  $r_2$  sono parallele, è parallela ad esse anche  $r_3$ : infatti, se  $r_1, r_3$  avessero un punto in comune, in questo punto dovrebbe concorrere anche  $r_2$ . □

**Proposizione 26.** *Dati due sistemi equivalenti di vettori applicati*

$$\mathcal{S}_1 = \{(\vec{v}_j, P_j)\}_{j=1, \dots, N}, \quad \mathcal{S}_2 = \{(\vec{w}_k, Q_k)\}_{k=1, \dots, M},$$

*possiamo sempre ridurre l'uno all'altro tramite operazioni elementari.*

*Dimostrazione.* Si consideri il sistema  $\mathcal{S}'_2 = \{(-\vec{w}_h, Q_h)\}_{h=1, \dots, M}$ . Il sistema  $\mathcal{S}_3 = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}'_2\}$ , composto dall'unione dei tre sistemi, si può ridurre a  $\mathcal{S}_1$  tramite operazioni elementari. Infatti per ogni vettore  $\vec{w}_k$  in  $\mathcal{S}_2$  si trova  $-\vec{w}_k$  in  $\mathcal{S}'_2$  applicato allo stesso punto  $Q_k$ , quindi queste coppie di vettori si possono cancellare. Osserviamo adesso che il sistema  $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}'_2\}$  è equilibrato, poiché la risultante e il momento risultante (rispetto a qualsiasi polo) di  $\mathcal{S}'_2$  sono opposti a quelli di  $\mathcal{S}_2$ , che sono uguali a quelli di  $\mathcal{S}_1$ . Quindi  $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}'_2\}$  si può ridurre tramite operazioni elementari ad un sistema nullo per la Proposizione 24. Concludiamo quindi che il sistema  $\mathcal{S}_3$  si può ridurre anche a  $\mathcal{S}_2$  tramite operazioni elementari. □

### 5.5.1 Asse centrale

Dimostriamo il seguente risultato.

**Proposizione 27.** *Dato un sistema di vettori applicati*

$$\mathcal{S} = \{(\vec{v}_i, P_i)\}_{i=1\dots N}, \quad (5.9)$$

con risultante  $\vec{R}$  non nulla, esiste un'unica retta  $r$ , detta **asse centrale**, formata da tutti e soli i punti  $Q \in \mathbb{E}^3$  tali che

$$\vec{N}_Q \times \vec{R} = \vec{0}. \quad (5.10)$$

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che per ogni scelta di  $P, Q \in \mathbb{E}^3$  si ha

$$\vec{N}_P = \sum_{j=1}^N ((P_j - Q) + (Q - P)) \times \vec{v}_j = \vec{N}_Q + (Q - P) \times \vec{R}. \quad (5.11)$$

Scelto a piacere un punto  $O' \in \mathbb{E}^3$ , consideriamo il piano  $\Pi_{O'}$  passante per  $O'$  e ortogonale alla risultante  $\vec{R}$ . Osserviamo che se  $Q \in \Pi_{O'}$  e  $Q'$  è un punto della retta  $\{Q + \lambda \vec{R}, \lambda \in \mathbb{R}\}$  passante per  $Q$  e parallela a  $\vec{R}$ , dalla relazione (5.11) si ottiene  $\vec{N}_{Q'} = \vec{N}_Q$ , per cui

$$\vec{N}_{Q'} \times \vec{R} = \vec{N}_Q \times \vec{R}.$$

Per dimostrare l'esistenza dell'asse centrale posso quindi limitarmi a cercare nel piano  $\Pi_{O'}$  un punto  $Q_0$  tale che  $\vec{R} \times \vec{N}_{Q_0}$  sia nullo. Si ha

$$\vec{N}_{Q_0} \times \vec{R} = (\vec{N}_{O'} + (O' - Q_0) \times \vec{R}) \times \vec{R} = \vec{N}_{O'} \times \vec{R} - |\vec{R}|^2 (O' - Q_0),$$

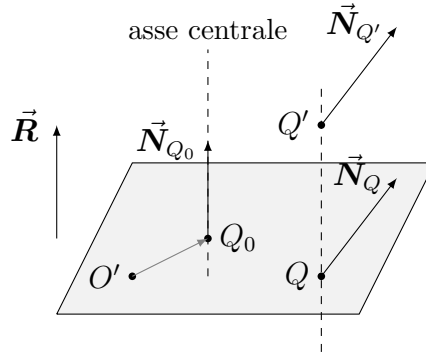
poichè  $(O' - Q_0) \perp \vec{R}$ . Quindi, ponendo  $\vec{N}_{Q_0} \times \vec{R} = \vec{0}$ , si ottiene come unica soluzione

$$Q_0 - O' = \frac{1}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \times \vec{N}_{O'}.$$

□

Dalla relazione (5.11) segue anche che

$$\vec{N}_P \cdot \vec{R} = \vec{N}_Q \cdot \vec{R}, \quad \forall P, Q \in \mathbb{E}^3. \quad (5.12)$$



L'espressione  $\vec{N}_P \cdot \vec{R}$  non dipende dalla scelta del polo e si chiama **trinomio invariante**, con riferimento alla somma dei tre termini che si ottengono sviluppando il prodotto scalare.

Per ogni punto  $Q \in \mathbb{E}^3$  usando la formula (1.8) possiamo scrivere  $\vec{N}_Q$  come somma di due vettori ortogonali:

$$\vec{N}_Q = \frac{1}{|\vec{R}|^2} [(\vec{N}_Q \cdot \vec{R})\vec{R} + \vec{R} \times (\vec{N}_Q \times \vec{R})]. \quad (5.13)$$

Il primo vettore è lo stesso al variare di  $Q$  perché  $\vec{N}_Q \cdot \vec{R}$  è il trinomio invariante. Se si sceglie come polo un punto  $Q_0$  dell'asse centrale si ha  $\vec{N}_{Q_0} \times \vec{R} = \vec{0}$ . Quindi

$$|\vec{N}_{Q_0}| = \min_{Q \in \mathbb{E}^3} |\vec{N}_Q|.$$

Dalla relazione (5.13) segue anche che se  $Q_0$  è un punto dell'asse centrale si ha  $\vec{N}_{Q_0} = \vec{0}$  se e solo se  $\vec{N}_{Q_0} \cdot \vec{R} = 0$ , quindi solo se il trinomio invariante (che può essere calcolato usando un polo qualunque) è nullo.

**Esercizio 11.** *Trovare l'asse centrale nel caso del sistema  $\mathcal{S}$  costituito delle forze di gravità applicate in  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$ :*

$$\mathcal{S} = \{(\vec{F}_i, P_i)\}_{i=1 \dots N}, \quad \vec{F}_i = -m_i g \hat{e}_3, \quad (5.14)$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità.

*Soluzione.* La risultante delle forze è  $\vec{R} = -mg\hat{e}_3$ , dove  $m$  è la massa totale. Scelto a piacere un punto  $O' \in \mathbb{E}^3$  si ha

$$\begin{aligned} Q_0 - O' &= \frac{1}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \times \vec{N}_{O'} = -\frac{1}{mg} \hat{e}_3 \times \left[ \sum_{j=1}^N (P_j - O') \times (-m_j g \hat{e}_3) \right] \\ &= \hat{e}_3 \times [(B - O') \times \hat{e}_3] \end{aligned}$$

L'asse centrale passa per il punto  $Q_0$  ed è parallelo ad  $\vec{R}$ . Se scegliamo  $O' = B$ , la formula precedente ci dice anche che il baricentro  $B$  è un punto dell'asse centrale.  $\square$

### 5.5.2 Coppie di vettori applicati

Una **coppia di vettori applicati** è un sistema della forma

$$\{(\vec{v}_1, P_1), (\vec{v}_2, P_2)\}$$

tali che  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0}$ . Assumiamo  $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ . La quantità  $|(P_1 - P_2) \times \vec{v}_1|/|\vec{v}_1|$ , che rappresenta la distanza tra le due rette di applicazione  $P_1\vec{v}_1, P_2\vec{v}_2$ , si chiama **braccio della coppia**.

Osserviamo che il momento di una coppia di vettori applicati non dipende dalla scelta del polo. Infatti si ha

$$(Q_1 - Q) \times \vec{v}_1 + (Q_2 - Q) \times \vec{v}_2 = (Q_1 - Q_2) \times \vec{v}_1, \quad \forall Q \in \mathbb{E}^3.$$

**Proposizione 28.** *Ogni sistema di vettori applicati  $\mathcal{S} = \{(\vec{v}_i, P_i)\}_{i=1, \dots, N}$  è equivalente ad un sistema costituito da un vettore applicato in un punto qualunque  $Q$ , e da una coppia di vettori applicati, dipendente dalla scelta di  $Q$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\vec{R} = \sum_i \vec{v}_i$  la risultante dei vettori del sistema e  $\vec{N}_Q = \sum_i (P_i - Q) \times \vec{v}_i$  il momento risultante rispetto ad un polo fissato  $Q \in \mathbb{E}^3$ . Consideriamo il sistema di vettori applicati

$$\mathcal{S}' = \{(\vec{R}, Q), (\vec{v}, Q_1), (-\vec{v}, Q_2)\}$$

con  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{E}^3$  e  $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$ , scelti in modo che il momento della coppia  $(Q_1 - Q_2) \times \vec{v}$  sia uguale a  $\vec{N}_Q$ . Si verifica facilmente che  $\mathcal{S}'$  è equivalente a  $\mathcal{S}$ . □

**Proposizione 29.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di vettori applicati  $\mathcal{S} = \{(\vec{v}_i, P_i)\}_{i=1, \dots, N}$  sia equivalente al sistema composto da un unico vettore applicato in un punto opportuno, oppure ad una sola coppia, è che il trinomio invariante sia nullo. Se la risultante  $\vec{R}$  è non nulla si ha il primo caso e il punto di applicazione è un punto qualunque dell'asse centrale; se  $\vec{R} = \vec{0}$  si ha il secondo.*

*Dimostrazione.* La condizione

$$\vec{N}_Q \cdot \vec{R} = 0 \tag{5.15}$$

per un polo  $Q \in \mathbb{E}^3$  (e quindi per tutti) è necessaria. Infatti se  $\mathcal{S}$  è equivalente ad un sistema composto da una sola coppia allora questo sistema ha risultante nulla. Se invece  $\mathcal{S}$  è equivalente ad un unico vettore applicato in un punto  $Q'$  allora il momento risultante rispetto a  $Q'$  è nullo. In entrambi i casi il trinomio invariante risulta nullo.

Vediamo che la condizione (5.15) è anche sufficiente. Se  $\vec{R} = \vec{0}$  allora, usando la Proposizione 28, si trova che  $\mathcal{S}$  è equivalente ad una coppia di vettori applicati. Se  $\vec{R} \neq \vec{0}$  basta osservare che  $\vec{N}_Q = \vec{0}$  per ogni punto  $Q$  dell'asse centrale, infatti si ha

$$\vec{N}_Q \cdot \vec{R} = 0, \quad \vec{N}_Q \times \vec{R} = \vec{0}.$$

Dunque  $\mathcal{S}$  è equivalente al sistema  $\{(\vec{R}, Q)\}$ . □



Osserviamo che nella discussione precedente è compreso il caso di un sistema equilibrato: in tal caso l'unico vettore o l'unica coppia sono nulli.

**Esempio 3.** Il sistema di forze di gravità  $\mathcal{S}$  dell'Esercizio 11 è equivalente al sistema  $\mathcal{S}' = \{(\vec{R}, B)\}$  formato da un'unica forza  $\vec{R} = -mg\hat{e}_3$  applicata nel baricentro  $B$ , infatti il trinomio invariante  $\vec{N}_Q \cdot \vec{R}$  è nullo (tutte le forze sono parallele ed  $\vec{N}_Q$  è ad esse ortogonale) e il baricentro è un punto dell'asse centrale.

Come conseguenza il momento risultante delle forze di gravità rispetto al baricentro è nullo.

**Osservazione 16.** *L'esempio precedente mostra anche che ogni sistema di vettori applicati paralleli ha trinomio invariante nullo.*

Diciamo che un sistema  $S = \{(\vec{v}_j, P_j)\}_{j=1, \dots, N}$  di vettori applicati è **piano** se i punti  $P_j, P_j + \vec{v}_j, j = 1, \dots, N$  giacciono tutti in uno stesso piano.

**Esercizio 12.** *Mostrare che ogni sistema piano di vettori applicati ha trinomio invariante nullo.*

### 5.5.3 Centro di vettori paralleli

Consideriamo un sistema di vettori applicati tutti paralleli, della forma

$$S = \{(\vec{v}_j, P_j)\}_{j=1, \dots, N},$$

in cui

$$\vec{v}_j = v_j \hat{e},$$

con  $v_j \in \mathbb{R}$  ed  $\hat{e} \in \mathbb{V}^3$  è un vettore unitario. Scelto  $Q \in \mathbb{E}^3$  arbitrariamente, chiamiamo **centro dei vettori paralleli**  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$  il punto  $C \in \mathbb{E}^3$  definito dalla relazione

$$C - Q = \frac{\sum_{j=1}^N v_j (P_j - Q)}{\sum_{j=1}^N v_j}. \quad (5.16)$$

In modo analogo a quanto fatto per il baricentro si può dimostrare che la definizione del centro  $C$  non dipende dalla scelta di  $Q$ .

Se  $v = \sum_{j=1}^N v_j \neq 0$  osserviamo che il punto  $C$  appartiene all'asse centrale, infatti

$$\vec{N}_C = \sum_{j=1}^N (P_j - C) \times v_j \hat{e} = \sum_{j=1}^N v_j (P_j - C) \times \hat{e} = v(C - C) \times \hat{e} = \vec{0}.$$

Osserviamo che il centro  $C$  del sistema resta lo stesso se cambiamo la direzione comune  $\hat{e}$  dei vettori  $\vec{v}_j$  lasciando invariati i loro punti di applicazione  $P_j$ , infatti la definizione (5.16) non dipende da  $\hat{e}$ .

## 5.6 Sistemi meccanici conservativi

**Proposizione 30.** *Le forze interne di tipo classico ammettono l'energia potenziale*

$$V^{(I)}(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathcal{V}_{ij}(\rho_{ij}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N), \quad (5.17)$$

con

$$\frac{d\mathcal{V}_{ij}}{d\rho_{ij}} = -f_{ij},$$

cioè valgono le relazioni

$$\mathbf{F}_k^{(I)} = -\nabla_{\mathbf{x}_k} V^{(I)}, \quad k = 1, \dots, N$$

dove

$$\nabla_{\mathbf{x}_k} V^{(I)} = \left[ \frac{\partial V^{(I)}}{\partial \mathbf{x}_k} \right]^T.$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$  e che le funzioni  $\mathcal{V}_{ij}(\rho_{ij})$  e  $\mathcal{V}_{ji}(\rho_{ij})$  possono differire solo per una costante additiva poiché  $f_{ij} = f_{ji}$ . Si ha quindi

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}_k} V^{(I)} &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \nabla_{\mathbf{x}_k} \mathcal{V}_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \nabla_{\mathbf{x}_k} \mathcal{V}_{kj} \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \frac{d\mathcal{V}_{kj}}{d\rho_{kj}} \nabla_{\mathbf{x}_k} \rho_{kj} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N f_{kj} \frac{\mathbf{r}_{kj}}{\rho_{kj}} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \mathbf{F}_{kj} = -\mathbf{F}_k^{(I)}. \end{aligned}$$

Nei passaggi precedenti abbiamo usato il fatto che

$$\mathcal{V}_{ij} = \mathcal{V}_{ij}(\rho_{ij}) = \mathcal{V}_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|),$$

per cui  $\mathcal{V}_{ij}$  non dipende da  $\mathbf{x}_k$  se  $k \neq i, j$ . Inoltre abbiamo usato le relazioni

$$\nabla_{\mathbf{x}_k} \rho_{kj} = \left[ \frac{\partial |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j|}{\partial \mathbf{x}_k} \right]^T = \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j|}, \quad k, j = 1, \dots, N.$$

□

Nella Figura 5.1, per  $N = 4$ , evidenziamo a sinistra con una curva tratteggiata gli indici dei termini che appaiono nella somma che definisce  $V^{(I)}$ ; a destra mettiamo invece in evidenza gli indici dei termini non nulli che appaiono nell'espressione di  $\nabla_{\mathbf{x}_k} V^{(I)}$  per  $k = 2$ . I cerchi grigi più grandi corrispondono agli indici  $(i, j)$  per cui si ha  $i = k$  oppure  $j = k$ . Al posto dell'indice  $(1, 2)$  possiamo considerare  $(2, 1)$  perché  $\mathcal{V}_{12}$  e  $\mathcal{V}_{21}$  differiscono al più per una costante.

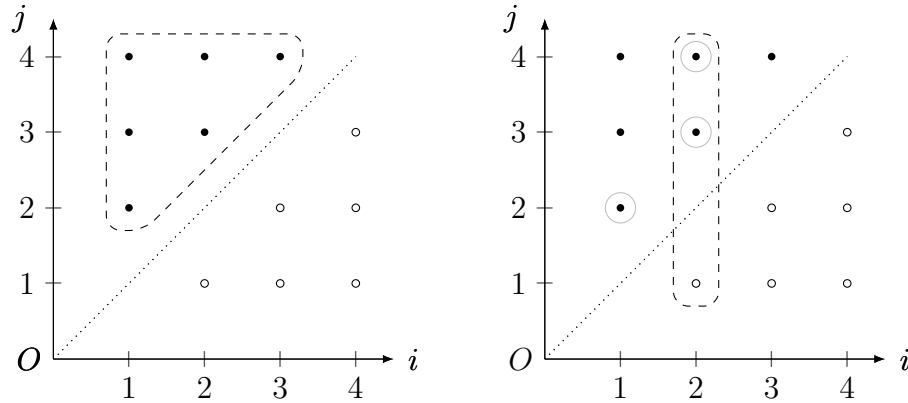


Figura 5.1: Caso  $N = 4$ . Indici dei termini della somma che definisce  $V^{(I)}$  (a sinistra); indici dei termini non nulli che appaiono in  $\nabla_{\mathbf{x}_k} V^{(I)}$  per  $k = 2$  (a destra).

**Osservazione 17.** Possiamo anche assumere, senza perdita di generalità, che  $\mathcal{V}_{ij} = \mathcal{V}_{ji}$ . In questo caso l'energia potenziale delle forze interne si scrive

$$V^{(I)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \mathcal{V}_{ij}(\rho_{ij}).$$

**Osservazione 18.** Le funzioni

$$V_k^{(I)}(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \mathcal{V}_{kj}(\rho_{kj}), \quad k = 1, \dots, N$$

soddisfano le relazioni

$$\mathbf{F}_k^{(I)} = -\nabla_{\mathbf{x}_k} V_k^{(I)},$$

ma la somma  $\sum_{k=1}^N V_k^{(I)}$  non va bene come energia potenziale delle forze interne, perché ci dà un contributo doppio delle forze.

Introduciamo la potenza delle forze interne e esterne, denotate rispettivamente con

$$\Pi^{(I)} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(I)} \cdot \mathbf{v}_j, \quad \Pi^{(E)} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(E)} \cdot \mathbf{v}_j.$$

Con questa notazione si ottiene

$$\Pi = \Pi^{(I)} + \Pi^{(E)}.$$

Abbiamo la seguente

**Proposizione 31.** (teorema dell'energia cinetica) Sia  $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t) \dots \mathbf{x}_N(t))$  una qualunque soluzione delle equazioni di Newton (1.13). Allora, lungo questa soluzione vale la relazione

$$\dot{T} = \Pi = \Pi^{(I)} + \Pi^{(E)}. \quad (5.18)$$

Se le forze interne sono di tipo classico, con energia potenziale  $V^{(I)}$ , allora la (5.18) si può scrivere

$$\frac{d}{dt}(T + V^{(I)}) = \Pi^{(E)}. \quad (5.19)$$

*Dimostrazione.*

$$\Pi = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \dot{\mathbf{x}}_j = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{x}}_j \cdot \dot{\mathbf{x}}_j = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{x}}_j \cdot \dot{\mathbf{x}}_j) = \dot{T}.$$

Siccome le forze interne ammettono l'energia potenziale  $V^{(I)}$ , abbiamo

$$\frac{d}{dt}V^{(I)} = \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_i} V^{(I)} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = -\Pi^{(I)},$$

da cui segue (5.19). □

**Definizione 9.** La forza esterna  $\mathbf{F}_j^{(E)}$  che agisce sul punto  $P_j$  si dice conservativa se è puramente posizionale, cioè  $\mathbf{F}_j^{(E)} = \mathbf{F}_j^{(E)}(\mathbf{x}_j)$ , ed esiste una funzione scalare  $V_j(\mathbf{x}_j)$  tale che  $\mathbf{F}_j^{(E)} = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V_j$ .

**Definizione 10.** Un sistema meccanico di  $N$  punti materiali si dice **conservativo** se le forze  $\mathbf{F}_j$  che agiscono sui punti  $P_j$  sono puramente posizionali e se esiste una funzione scalare  $V(\mathbf{x})$  tale che  $\mathbf{F}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V$ , per  $j = 1 \dots N$ . La funzione  $V$  si chiama energia potenziale del sistema.

Se le forze esterne  $\mathbf{F}_j^{(E)}$  sono tutte conservative allora la funzione

$$V^{(E)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N V_j(\mathbf{x}_j)$$

soddisfa

$$\mathbf{F}_j^{(E)} = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V^{(E)}, \quad j = 1 \dots N.$$

In questo caso il sistema meccanico è conservativo, con energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = V^{(I)}(\mathbf{x}) + V^{(E)}(\mathbf{x}).$$

Introduciamo l'**energia totale**

$$E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + V^{(I)}(\mathbf{x}) + V^{(E)}(\mathbf{x}).$$

**Proposizione 32.** (conservazione dell'energia) *L'energia totale di un sistema di  $N$  punti materiali soggetto a forze interne di tipo classico e a forze esterne conservative è un integrale primo.*

*Dimostrazione.* Usando la (5.19) si ha

$$\frac{d}{dt}(T + V^{(I)} + V^{(E)}) = \Pi^{(E)} + \frac{d}{dt}V^{(E)} = 0,$$

infatti

$$\frac{d}{dt}V^{(E)} = \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_i} V^{(E)} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = -\Pi^{(E)}.$$

□

## 5.7 Altri risultati sul problema degli $N$ corpi

Consideriamo  $N$  punti materiali  $P_1 \dots P_N$  di masse  $m_1 \dots m_N$  soggetti soltanto alla loro interazione mutua, dovuta a forze interne di tipo classico. Sia  $V(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N)$  l'energia potenziale di tali forze, per cui il moto dei punti soddisfa le equazioni

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N).$$

Introduciamo il **momento di inerzia** del sistema rispetto al baricentro  $\mathbf{x}_B$ :

$$I(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N) = \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2.$$

Dimostriamo che il momento di inerzia si può scrivere in termini delle distanze mutue tra i punti:

**Proposizione 33.** *Vale la seguente formula*

$$I = \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2 = \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2. \quad (5.20)$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_i m_j (|\mathbf{x}_i|^2 + |\mathbf{x}_j|^2 - 2\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (m - m_i) |\mathbf{x}_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (m - m_j) |\mathbf{x}_j|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) = \\
&= m \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{i=1}^N m_i^2 |\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) = \\
&= m \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{i,j=1}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j).
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2 &= \sum_{i=1}^N m_i \left( \mathbf{x}_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{x}_j \right) \cdot \left( \mathbf{x}_i - \frac{1}{m} \sum_{h=1}^N m_h \mathbf{x}_h \right) = \\
&= \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^N \frac{m_i m_j}{m} \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{m^2} \sum_{j,h=1}^N m_j m_h \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_h = \\
&= \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - \frac{2}{m} \sum_{i,j=1}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) + \frac{1}{m} \sum_{i,j=1}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j).
\end{aligned}$$

□

**Osservazione 19.** *Il risultato precedente è utile per interpretare alcune questioni sul moto degli  $N$  corpi in termini del moto delle distanze mutue.*

A meno di applicare una trasformazione galileiana, possiamo assumere che il baricentro degli  $N$  punti sia fermo nell'origine:  $\mathbf{x}_B = \mathbf{0}$ . Dimostriamo la seguente

**Proposizione 34.**

$$\ddot{I} = 4T + 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i$$

*Dimostrazione.* Basta derivare due volte  $I(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N)$  rispetto a  $t$  ed usare le equazioni di Newton:

$$\dot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i, \quad \ddot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{x}}_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i.$$

□

**Corollario 2.** (*identità di Lagrange*) Se le forze sono conservative e l'energia potenziale  $V$  è omogenea di grado  $\alpha$  allora

$$\ddot{I} = 4T - 2 \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_i} V \cdot \mathbf{x}_i = 4T - 2\alpha V = 4E - 2(\alpha + 2)V,$$

cioè  $\ddot{I}$  dipende solo dalla posizione dei punti e dall'energia totale  $E$ .

## 5.8 Esercizi

### Esercizio 13.

i) In un piano assegnato si fissi un sistema di riferimento  $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$  e si consideri il sistema di forze applicate

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_1, P_1), \dots, (\vec{\mathbf{F}}_5, P_5)\}$$

con

$$\vec{\mathbf{F}}_j = j\hat{\mathbf{e}}_2, \quad P_j = O + j\hat{\mathbf{e}}_1, \quad j = 1, \dots, 5.$$

Trovare l'asse centrale del sistema  $\mathcal{F}$ .

ii) In un piano assegnato si consideri un sistema di vettori applicati paralleli

$$\mathcal{S} = \{(\vec{\mathbf{v}}_1, P_1), \dots, (\vec{\mathbf{v}}_N, P_N)\}, \quad N > 1.$$

Si prendano in tale piano due rette  $r_1, r_2$  parallele e distinte, aventi la stessa direzione dei vettori  $\vec{\mathbf{v}}_j$  del sistema  $\mathcal{S}$ .

Mostrare che è possibile trovare un sistema di vettori applicati equivalente ad  $\mathcal{S}$  costituito da due vettori paralleli alle rette  $r_1, r_2$  (eventualmente nulli) applicati uno a un punto di  $r_1$  e l'altro a un punto di  $r_2$ .

**Soluzione.** i) Un punto  $Q$  dell'asse centrale è dato dalla formula

$$Q - O = \frac{\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{N}}_O}{|\vec{\mathbf{R}}|^2},$$

dove

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{j=1}^5 j\hat{\mathbf{e}}_2 = 15\hat{\mathbf{e}}_2, \quad \vec{\mathbf{N}}_O = \sum_{j=1}^5 j\hat{\mathbf{e}}_1 \times j\hat{\mathbf{e}}_2 = 55\hat{\mathbf{e}}_3.$$

Si ottiene quindi

$$Q - O = \frac{11}{3}\hat{\mathbf{e}}_1.$$

L'asse centrale è la retta costituita dai punti

$$Q + \lambda \vec{R},$$

al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

ii) Scelte in modo arbitrario due rette  $r_1, r_2$ , parallele ai vettori  $\vec{v}_j$  e distinte tra loro, mostriamo che ogni sistema costituito da un solo vettore applicato  $(\vec{v}_j, P_j)$  del sistema  $\mathcal{S}$  ammette un sistema equivalente composto da due vettori paralleli alle rette  $r_1, r_2$  (possibilmente nulli), applicati uno a un punto di  $r_1$  e l'altro a un punto di  $r_2$ .

Fissiamo un riferimento  $O\hat{e}_1\hat{e}_2$  nel piano assegnato in modo che  $\vec{v}_j \times \hat{e}_2 = \vec{0}$  per  $j = 1, \dots, N$ . Quindi le rette  $r_1, r_2$  sono parallele a  $\hat{e}_2$ . Se  $P_j \in r_1$  il sistema  $\{(\vec{v}_j, P_j), (\vec{0}, Q)\}$ , con  $Q \in r_2$  scelto arbitrariamente, soddisfa le proprietà richieste. Se  $P_j \in r_2$  procedo in modo analogo.

Se invece  $P_j \notin r_1 \cup r_2$  faccio la costruzione seguente. Dato  $(\vec{v}_j, P_j)$  scelgo due punti  $Q_1 \in r_1, Q_2 \in r_2$  in modo che

$$(Q_1 - P_j) \cdot \hat{e}_2 = (Q_2 - P_j) \cdot \hat{e}_2 \neq 0.$$

Osservo che possiamo scrivere

$$\vec{v}_j = \vec{v}_j^{(1)} + \vec{v}_j^{(2)}$$

dove

$$\vec{v}_j^{(1)} = \lambda_j^{(1)}(Q_1 - P_j), \quad \vec{v}_j^{(2)} = \lambda_j^{(2)}(Q_2 - P_j)$$

per due coefficienti  $\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)} \neq 0$ . Consideriamo le scomposizioni

$$\vec{v}_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)} \hat{e}_1 + \beta_j^{(1)} \hat{e}_2, \quad \vec{v}_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)} \hat{e}_1 + \beta_j^{(2)} \hat{e}_2.$$

e osserviamo che si ha

$$\alpha_j^{(1)} = -\alpha_j^{(2)}$$

perché la componente di  $\vec{v}_j$  lungo  $\hat{e}_1$  è nulla.

Usando le operazioni elementari si vede quindi che un sistema equivalente al vettore applicato  $(\vec{v}_j, P_j)$  è allora

$$\{(\beta_j^{(1)} \hat{e}_2, Q_1), (\beta_j^{(2)} \hat{e}_2, Q_2)\}.$$

Possiamo ripetere questa scomposizione per ogni vettore applicato del sistema  $\mathcal{S}$  e concludiamo considerando il sistema equivalente ad  $\mathcal{S}$  definito da

$$\{(\vec{v}^{(1)}, A_1), (\vec{v}^{(2)}, A_2)\},$$

dove

$$\vec{v}^{(1)} = \sum_{j=1}^N \beta_j^{(1)} \hat{e}_2, \quad \vec{v}^{(2)} = \sum_{j=1}^N \beta_j^{(2)} \hat{e}_2$$

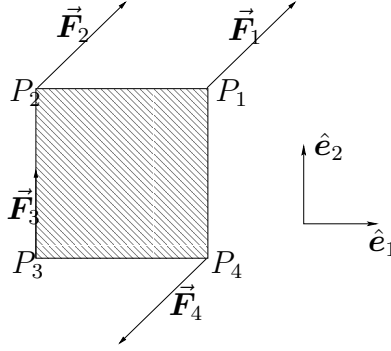
e  $A_1, A_2$  sono rispettivamente due punti qualunque delle rette  $r_1, r_2$ .



**Esercizio 14.** In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento  $O\hat{e}_1\hat{e}_2$  e si consideri una lamina quadrata, orientata come in figura, con lati di lunghezza  $2\ell$  e vertici  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Ai vertici della lamina vengono applicate le forze

$$\vec{F}_1 = F(\hat{e}_1 + \hat{e}_2), \quad \vec{F}_2 = \vec{F}_1, \quad \vec{F}_3 = F\hat{e}_2, \quad \vec{F}_4 = -\vec{F}_1,$$

con  $F > 0$ .



i) Trovare l'asse centrale del sistema

$$\mathcal{F} = \{(\vec{F}_j, P_j)\}_{j=1\dots 4}.$$

e dire se esso interseca la lamina.

ii) È possibile aggiungere una forza  $\vec{F}_5$  applicata ad un punto  $P_5$  della lamina in modo tale che il sistema di forze applicate esteso

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{(\vec{F}_j, P_j)\}_{j=1\dots 5}$$

sia equilibrato?

**Soluzione.** i) La risultante delle forze è

$$\vec{R} = \sum_{j=1}^4 \vec{F}_j = F(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) \quad (5.21)$$

ed il momento risultante delle forze rispetto al polo  $P_3$  è

$$\vec{N}_{P_3} = \sum_{j=1}^4 (P_j - P_3) \times \vec{F}_j = -4\ell F \hat{e}_3.$$

Il punto  $Q_0$  dell'asse centrale che si trova sulla retta passante per  $P_3$  e ortogonale ad  $\vec{R}$  è dato da

$$Q_0 - P_3 = \frac{\vec{R} \times \vec{N}_{P_3}}{|\vec{R}|^2} = -\frac{4}{5}\ell(2\hat{e}_1 - \hat{e}_2).$$

L'asse centrale è la retta passante per  $Q_0$  e parallela ad  $\vec{R}$ .

Dette  $x, y$  le coordinate cartesiane nel riferimento  $P_3\hat{e}_1\hat{e}_2$ , l'equazione dell'asse centrale si scrive

$$y - \frac{4}{5}\ell = 2\left(x + \frac{8}{5}\ell\right),$$

cioè

$$y = 2x + 4\ell. \quad (5.22)$$

Osservo che l'asse centrale non interseca la lamina, in quanto la funzione  $y(x)$  definita da (5.22) è crescente e per  $x = 0$ , che è l'ascissa di  $P_2$ , si ha  $y(0) = 4\ell > 2\ell$ , che è l'ordinata di  $P_2$ .

ii) Imponiamo le condizioni per avere un sistema equilibrato:

$$\sum_{j=1}^5 \vec{F}_j = \vec{0}, \quad \sum_{j=1}^5 (P_j - Q) \times \vec{F}_j = \vec{0}$$

per una scelta qualunque del polo  $Q \in \mathbb{E}^3$ . Osservo che queste si possono scrivere come

$$\vec{R} + \vec{F}_5 = \vec{0}, \quad \vec{N}_Q + (P_5 - Q) \times \vec{F}_5 = \vec{0},$$

dove  $\vec{R}$  è data da (5.21) ed

$$\vec{N}_Q = \sum_{j=1}^4 (P_j - Q) \times \vec{F}_j.$$

Si ottiene che

$$\vec{F}_5 = -\vec{R}.$$

Inoltre, i punti  $Q$  dove  $\vec{N}_Q = \vec{0}$  sono tutti e soli i punti dell'asse centrale del sistema  $\mathcal{F}$ , poichè il trinomio invariante  $\vec{N}_Q \cdot \vec{R}$  è nullo. Per cui si ha

$$(P_5 - Q) \times \vec{F}_5 = -(P_5 - Q) \times \vec{R} = \vec{0}. \quad (5.23)$$

La relazione (5.23) ci dice che la forza  $\vec{F}_5$  deve essere applicata ad un punto  $P_5$  dell'asse centrale del sistema  $\mathcal{F}$ . Abbiamo già visto nel punto i) che tale asse non interseca la lamina.



# Capitolo 6

## Il corpo rigido

Descriviamo l'insieme delle configurazioni e le proprietà cinematiche dei corpi rigidi, nel caso discreto e continuo.

### 6.1 Definizioni e preliminari geometrici

**Definizione 11.** *Un corpo rigido discreto è un sistema formato da  $N$  punti materiali che mantengono invariate nel tempo le loro distanze mutue.*

**Definizione 12.** *Un corpo rigido continuo è un sistema formato da una distribuzione continua di punti che mantengono invariate nel tempo le loro distanze mutue.*

Nel seguito svilupperemo la teoria per un corpo rigido discreto e nella Sezione 6.6 discuteremo il caso di un corpo rigido continuo.

Sia  $\mathfrak{C}$  un corpo rigido discreto formato da  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$ . Fissato un riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ , le posizioni dei punti  $P_j$  sono individuate dai vettori  $P_j - O$ , con coordinate  $\mathbf{x}_j$  nella base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ . Le distanze mutue  $\rho_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$  tra punti diversi  $P_i, P_j$  di  $\mathfrak{C}$  soddisfano le relazioni

$$\rho_{ij} = c_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (6.1)$$

per certe costanti  $c_{ij} > 0$ .

Con la definizione di corpo rigido discreto incontriamo un primo caso in cui i punti del sistema non si possono muovere liberamente, infatti le loro coordinate sono soggette alle relazioni (6.1). Questo è un caso di **moto vincolato**, per descrivere il quale introduciamo adesso alcuni concetti. I moti vincolati saranno poi trattati in dettaglio nel Capitolo 7.

### 6.1.1 Sottovarietà di $\mathbb{R}^m$

**Definizione 13.** Sia  $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  una mappa differenziabile, con  $1 \leq k < m$ . Diciamo che l'insieme

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \quad (6.2)$$

è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^m$  (o semplicemente una varietà) di dimensione  $n = m - k$  se

$$\text{rank} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = k, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}.$$

**Esempio 4.** Il cerchio di raggio unitario centrato nell'origine

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Psi(x, y) = 0\},$$

dove

$$\Psi(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$  di dimensione uno, infatti

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (x, y)}(x, y) = 2(x, y) \neq (0, 0), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{C}.$$

**Esempio 5.** L'insieme  $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Psi(x, y) = 0\}$ , con

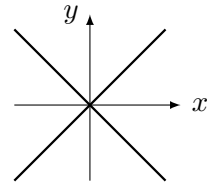
$$\Psi(x, y) = x^2 - y^2,$$

è l'unione di due rette ortogonali passanti per l'origine e non è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$ . Infatti

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (x, y)}(x, y) = 2(x, -y),$$

che si annulla per  $(x, y) = (0, 0) \in \mathcal{C}$ .

Notiamo che in  $(x, y) = (0, 0)$  la retta tangente a  $\mathcal{C}$  non è definita. Comunque l'insieme  $\mathcal{C} \setminus \{(0, 0)\}$ , composto da quattro semirette disgiunte, è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$ .



### Rappresentazione parametrica e coordinate locali

In (6.2) abbiamo introdotto la sottovarietà  $\mathcal{C}$  tramite una sua rappresentazione implicita, nel senso che essa viene definita come luogo di zeri della mappa  $\Psi$ . È anche utile descrivere  $\mathcal{C}$  in un altro modo, tramite delle sue **parametrizzazioni**

**locali.** Per il teorema delle funzioni implicite, possiamo introdurre in un intorno<sup>1</sup> di ogni punto di  $\mathcal{C}$  delle coordinate locali

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$$

e una mappa della forma

$$\mathbb{R}^n \supseteq U \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) \in \mathcal{C},$$

con

$$\text{rank} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) = n,$$

definita su un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^n$ . Una scelta delle coordinate locali si può fare nel modo seguente. A meno di riordinare le componenti  $x_1, \dots, x_m$  di  $\mathbf{x}$  possiamo assumere che in un intorno di  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  si abbia

$$\det \frac{\partial \Psi}{\partial (x_1, \dots, x_k)} \neq 0$$

e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, possiamo scrivere  $x_1, \dots, x_k$  in funzione delle  $n$  variabili  $x_{k+1}, \dots, x_m$ , che dunque si possono usare come coordinate locali.

**Esempio 6.** Si consideri la sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$  dell'Esempio 4, definita da

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Psi(x, y) = 0\}, \quad \Psi(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Il punto  $(x_1, y_1) = (0, 1)$  appartiene a  $S^1$ . Poiché

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0,$$

per il teorema delle funzioni implicite esistono  $a > 0$  ed un'unica funzione  $y = f(x)$  tale che  $f(0) = 1$  e

$$\Psi(x, f(x)) = 0$$

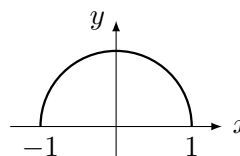
per ogni  $x \in (-a, a)$ . In questo caso si può anche scrivere esplicitamente l'espressione della funzione  $f$ :

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

La mappa

$$(-1, 1) \ni x \mapsto (x, f(x))$$

è una parametrizzazione locale di  $S^1$  in un intorno di  $(x_1, y_1) = (0, 1)$ .



<sup>1</sup>Un intorno di un punto  $\mathbf{x}_0$  di una sottovarietà  $\mathcal{C}$  di  $\mathbb{R}^m$  è dato dall'intersezione  $V \cap \mathcal{C}$  di questa varietà con un intorno  $V$  di  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^m$ .

Osserviamo che anche il punto  $(x_2, y_2) = (1, 0)$  appartiene a  $\mathcal{C}$ , però

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(1, 0) = 0,$$

quindi non possiamo usare il teorema delle funzioni implicite per descrivere  $S^1$  in un intorno di  $(x_2, y_2)$  con una funzione della variabile  $x$ . Poiché

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(1, 0) = 2 \neq 0,$$

possiamo trovare  $a > 0$  ed una funzione  $x = g(y)$  tale che  $g(0) = 1$  e

$$\Psi(g(y), y) = 0$$

per ogni  $y \in (-a, a)$ .

Anche in questo caso possiamo scrivere  $g$  esplicitamente come

$$g(y) = \sqrt{1 - y^2}, \quad y \in (-1, 1)$$

e possiamo scrivere la parametrizzazione locale come

$$(-1, 1) \ni y \mapsto (g(y), y).$$

L'insieme  $S^1$  ammette anche le seguenti parametrizzazioni locali, che usano la coordinata angolare  $\theta$ :

$$(a - \pi, a + \pi) \ni \theta \mapsto \boldsymbol{\chi}(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta),$$

dove  $a \in [0, 2\pi)$ . Scegliendo opportunamente il valore di  $a$  possiamo rappresentare un intorno di ogni punto di  $S^1$ .

**Esempio 7.** Si consideri la sfera bidimensionale in  $\mathbb{R}^3$ , definita da

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \Psi(x, y, z) = 0\},$$

dove

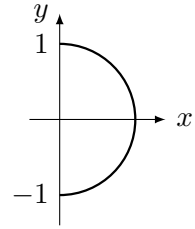
$$\Psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Poiché

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (x, y, z)}(x, y, z) = 2(x, y, z) \neq \mathbf{0}, \quad \forall (x, y, z) \in S^2,$$

l'insieme  $S^2$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 2. Possiamo rappresentare  $S^2$  tramite due parametrizzazioni locali della forma

$$\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) = (x(\mathbf{q}), y(\mathbf{q}), z(\mathbf{q}))^T,$$



dove  $\mathbf{q} = (\alpha, \delta)$  sono coordinate sferiche. Una delle due mappe è data da

$$x = \cos \delta \cos \alpha, \quad y = \cos \delta \sin \alpha, \quad z = \sin \delta,$$

con  $\alpha \in (-\pi, \pi), \delta \in (-\pi/2, \pi/2)$  e ricopre  $S^2$  meno un arco  $\gamma_1$ , che corrisponde a un meridiano. L'altra mappa è data da

$$x = -\cos \alpha \cos \delta, \quad y = \sin \alpha, \quad z = \cos \alpha \sin \delta,$$

con  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2), \delta \in (-\pi, \pi)$  e ricopre  $S^2$  meno un arco  $\gamma_2$ , che corrisponde a metà dell'equatore. Osserviamo che  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ .

## 6.2 Proprietà cinematiche di un corpo rigido

### 6.2.1 Configurazioni di un corpo rigido con tutti i punti allineati

Consideriamo prima il caso in cui tutti i punti del corpo rigido  $\mathcal{C}$  siano allineati.

**Proposizione 35.** *Se tutti i punti di  $\mathcal{C}$  sono allineati, il suo insieme delle configurazioni è in corrispondenza biunivoca con l'insieme*

$$\mathbb{R}^3 \times S^2,$$

dove  $S^2$  è la sfera unitaria bidimensionale in  $\mathbb{R}^3$ .

*Dimostrazione.* Dati i valori delle costanti  $c_{ij}$  in (6.1), per conoscere le posizioni di tutti i punti del corpo basta conoscere le posizioni di due di essi, ad esempio  $P_1, P_2$ . Le coordinate di ogni altro punto  $P_j$  di  $\mathcal{C}$  sono determinate univocamente dalle costanti  $c_{1j}, c_{2j}$ . Per conoscere la posizione di  $P_1$  possiamo specificare le sue coordinate cartesiane in  $\mathbb{R}^3$  e, visto che la distanza tra  $P_1$  e  $P_2$  è la costante  $c_{12} \neq 0$ , per conoscere la posizione di  $P_2$  ci basta conoscere il versore  $\frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|}$ , che individua un punto della sfera  $S^2$ . □

Poiché  $\mathbb{R}^3 \times S^2$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  di dimensione 5, concludiamo che ci servono 5 parametri per rappresentare l'insieme delle configurazioni di un corpo rigido discreto i cui punti siano tutti allineati.

Il fatto che  $\mathcal{C}$  corrisponda ad una sottovarietà di  $\mathbb{R}^6$  di dimensione 5 si può anche dimostrare nel modo seguente. Le coordinate  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  di tutte le possibili configurazioni dei punti  $P_1, P_2$ , sono caratterizzate dalla relazione  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ , con

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2 - c_{12}^2.$$



Poniamo  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ . Il vettore

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 2((x_1 - x_2), (y_1 - y_2), (z_1 - z_2), (x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1))$$

è non nullo nei punti  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  tali che  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ . Ne segue che l'insieme

$$\{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^6 : \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0\}$$

è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^6$  di dimensione 5.

### 6.2.2 Configurazioni di un corpo rigido con tre punti non allineati

**Definizione 14.** Diciamo che un sistema di riferimento  $\Sigma' = O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$  è **solidale** al corpo rigido  $\mathfrak{C}$  se i punti  $P_j$  del corpo hanno tutti velocità nulla rispetto a  $\Sigma'$ , cioè se le coordinate di tutti i punti  $P_j$  sono costanti in  $\Sigma'$ .

Consideriamo adesso il caso in cui esistano tre punti del corpo non allineati. A meno di rinumerare i punti possiamo assumere che questi siano  $P_1, P_2, P_3$ .

Possiamo costruire esplicitamente un sistema di riferimento solidale facendo uso di questi tre punti. Ad esempio, poniamo  $O' = P_1$ ,  $\hat{e}'_1 = (P_2 - P_1)/\rho_{12}$ ,  $\hat{e}'_2 \in \pi(P_1, P_2, P_3)$ , che è il piano generato dai tre punti, con  $\hat{e}'_2 \in \hat{e}'_1^\perp$  e  $(P_3 - P_1) \cdot \hat{e}'_2 > 0$ . Infine  $\hat{e}'_3 = \hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2$ .

Osserviamo che le coordinate di ogni altro punto  $P_j$  del corpo sono costanti<sup>2</sup> nel riferimento  $\Sigma' = O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$ . Quindi ci basta conoscere la posizione di  $P_1, P_2, P_3$  per determinare quella degli altri punti del corpo.

Diamo la seguente caratterizzazione dell'insieme delle configurazioni del corpo rigido.

**Proposizione 36.** Se  $\mathfrak{C}$  ha tre punti non allineati, il suo insieme delle configurazioni è in corrispondenza biunivoca con

$$\mathbb{R}^3 \times SO(3).$$

*Dimostrazione.* Sia  $\Sigma' = O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$  un riferimento solidale a  $\mathfrak{C}$ . Dato che le coordinate  $\mathbf{x}'_j$  dei punti  $P_j$  del corpo sono costanti in  $\Sigma'$ , assumendo che queste siano note

---

<sup>2</sup>Osserviamo che le coordinate di ogni altro punto  $P_j$  ( $j \geq 4$ ) del corpo non sono univocamente determinate dalle costanti  $c_{1j}, c_{2j}, c_{3j}$  in quanto l'intersezione non vuota delle 3 sfere di centro  $P_i$  e raggio  $c_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3$  dà luogo genericamente a due punti. Comunque, la continuità del moto dei  $P_j$  implica che le loro coordinate  $\mathbf{x}'_j$  in  $\Sigma'$  siano costanti nel tempo.

a priori, per determinare le coordinate dei punti del corpo in  $\Sigma$  ci basta determinare la posizione del sistema di riferimento  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$ . Questa è determinata una volta note le coordinate dell'origine  $O'$  ed i coseni direttori

$$R_{kh} = \hat{e}'_h \cdot \hat{e}_k$$

della terna  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  rispetto a  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ . La matrice  $R = (R_{kh})$ , che ci fornisce l'orientazione di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$ , è ortogonale, e  $\det R = 1$  perché le due terne sono entrambe levogire, per cui  $R \in SO(3)$ . Notiamo che i vettori

$$\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_j, \quad j = 1 \dots N,$$

dove  $\mathbf{x}_{O'}$  è il vettore delle coordinate di  $O'$  in  $\Sigma$ , descrivono tutte le possibili coordinate dei punti del corpo  $\mathcal{C}$  in  $\Sigma$ , in quanto le coppie  $(\mathbf{x}_{O'}, R)$  descrivono tutte le possibili posizioni del riferimento solidale  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$ .

Mostriamo adesso che la corrispondenza tra le possibili coordinate dei punti del corpo in  $\Sigma$  e l'insieme  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$  è biunivoca. Assumiamo che  $P_1, P_2, P_3$  siano tre punti di  $\mathcal{C}$  non allineati e definiamo una mappa

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^9$$

tramite la relazione

$$\Phi(\mathbf{x}_{O'}, R) = (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_2, \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_3), \quad (6.3)$$

Osserviamo che  $\Phi$  è iniettiva, infatti se

$$\mathbf{x}_{O'}^{(1)} + R_1\mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_{O'}^{(2)} + R_2\mathbf{x}'_j, \quad j = 1, 2, 3$$

allora

$$R_1(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1) = R_2(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1), \quad R_1(\mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1) = R_2(\mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1)$$

con  $\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1$  vettori linearmente indipendenti. Ne segue che  $(R_2)^{-1}R_1$ , che è un elemento di  $SO(3)$ , ha due autovettori indipendenti relativi all'autovalore 1, dunque  $R_1 = R_2$  e di conseguenza  $\mathbf{x}_{O'}^{(1)} = \mathbf{x}_{O'}^{(2)}$ . □

L'insieme delle configurazioni di un corpo rigido con tre punti non allineati corrisponde ad una sottovarietà di  $\mathbb{R}^{12}$  di dimensione 6, infatti vale il seguente risultato.

**Proposizione 37.** *L'insieme  $O(3)$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^9$  di dimensione 3.*

*Dimostrazione.* Considero la mappa  $\Psi : \mathbb{R}^9 \mapsto \mathbb{R}^6$  le cui componenti  $\Psi_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq 3$  sono definite da

$$\Psi_{ij}(\mathbf{a}) = \sum_{h=1}^3 a_{ih}a_{jh} - \delta_{ij},$$

dove  $\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33})$ . Se  $\mathbf{a}$  soddisfa  $\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ , allora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

è ortogonale, cioè  $A \in O(3)$ . Abbiamo

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{bmatrix}.$$

Dette  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_6 \in \mathbb{R}^9$  le righe di  $\partial \Psi / \partial \mathbf{a}$ , la relazione

$$\sum_{j=1}^6 \lambda_j \mathbf{r}_j = \mathbf{0}, \quad (6.4)$$

con  $\lambda_1, \dots, \lambda_6 \in \mathbb{R}$ , può valere solo se i  $\lambda_j$  sono tutti nulli. Infatti, dalle prime tre equazioni scalari in (6.4) otteniamo

$$2\lambda_1 \mathbf{A}_1 + \lambda_2 \mathbf{A}_2 + \lambda_3 \mathbf{A}_3 = \mathbf{0},$$

dove  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$  sono le righe della matrice  $A$ , che sono linearmente indipendenti perché  $\det A = \pm 1$ , quindi  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Analogamente, dalle tre equazioni scalari intermedie otteniamo che anche  $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$  e dalle ultime tre equazioni scalari si ha che anche  $\lambda_6 = 0$ . □

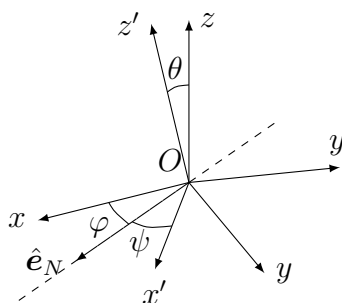
**Osservazione 20.**  $SO(3)$  è una componente connessa di  $O(3)$ , definita dalle matrici di  $O(3)$  con determinante 1. Ne segue che anche  $SO(3)$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^9$  di dimensione 3.

### 6.2.3 Gli angoli di Eulero

Introduciamo delle coordinate locali sulla varietà  $SO(3)$  delle rotazioni in  $\mathbb{R}^3$ . Abbiamo visto che  $SO(3)$  corrisponde all'insieme delle configurazioni di un corpo rigido con un punto fisso, che abbia tre punti non allineati.

Sia  $\Sigma = Oxyz$  un riferimento fissato, con  $O$  il punto fisso del corpo ed  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  i versori degli assi di  $\Sigma$ . Sia inoltre  $\Sigma' = Ox'y'z'$  un riferimento solidale al corpo rigido, ed  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  i versori degli assi di  $\Sigma'$ . A meno di ruotare  $\Sigma$  si può assumere che il piano  $O\hat{e}_1\hat{e}_2$  non sia parallelo a  $O\hat{e}'_1\hat{e}'_2$ . Dall'intersezione dei due piani risulta definita una retta

$$r_N = \{\lambda \hat{e}_N, \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad \hat{e}_N = \frac{\hat{e}_3 \times \hat{e}'_3}{|\hat{e}_3 \times \hat{e}'_3|}$$



detta **linea dei nodi**.

Introduciamo le seguenti quantità:

l'angolo  $\varphi$  tra  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_N$  (angolo di precessione);

l'angolo  $\theta$  tra  $\hat{e}_3$  e  $\hat{e}'_3$  (angolo di nutazione);

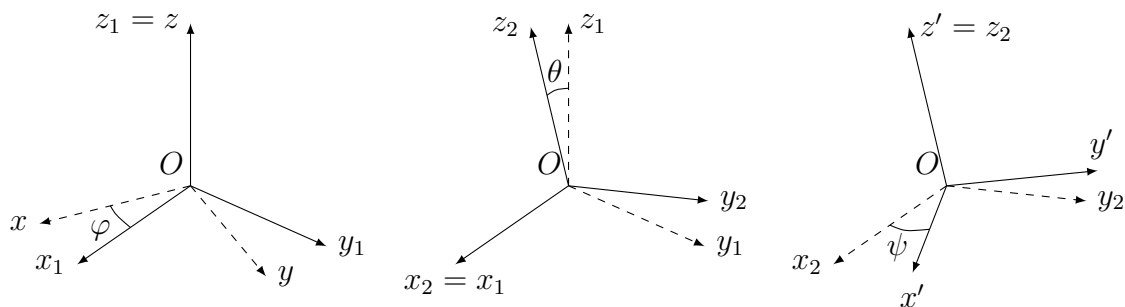
l'angolo  $\psi$  tra  $\hat{e}_N$  e  $\hat{e}'_1$  (angolo di rotazione propria).

Vale la relazione

$$\hat{e}_N = \cos \psi \hat{e}'_1 - \sin \psi \hat{e}'_2. \quad (6.5)$$

Le quantità  $\varphi, \psi, \theta$  si chiamano **angoli di Eulero**.

La matrice di rotazione  $R \in SO(3)$  che porta il riferimento  $\Sigma = Oxyz$  a coincidere con  $\Sigma' = Ox'y'z'$  si può scrivere come prodotto di tre rotazioni passando da sistemi di riferimento intermedi  $\Sigma_1 = Ox_1y_1z_1, \Sigma_2 = Ox_2y_2z_2$  (vedi figura).



Prima si fa una rotazione di  $\varphi$  attorno a  $Oz$ , in modo che l'asse  $Ox_1$  abbia la stessa orientazione di  $\hat{e}_N$ . Poi si esegue una rotazione di  $\theta$  attorno a  $Ox_1$  portando  $Oz$  in  $Oz_2 = Oz'$ . Infine si fa una rotazione di  $\psi$  attorno a  $Oz'$  per arrivare al riferimento  $\Sigma'$ .

Dette  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  ed  $\mathbf{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$  le coordinate di un vettore  $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3$  nelle basi  $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$  e  $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$  rispettivamente, vale la relazione

$$\mathbf{u} = R\mathbf{u}', \quad R = R_\varphi^{(3)} R_\theta^{(1)} R_\psi^{(3)}, \quad (6.6)$$

in cui  $R_\alpha^{(i)}$  è la matrice di rotazione di un angolo  $\alpha$  attorno all' $i$ -mo asse coordinato:

$$R_\alpha^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad R_\alpha^{(3)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Proposizione 38.** *Consideriamo un corpo rigido con tre punti  $P_1, P_2, P_3$  non allineati. La mappa*

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^9$$

definita da

$$\Phi(\mathbf{x}_{O'}, R) = (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_2, \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_3),$$

dove  $\mathbf{x}'_j$  sono le coordinate dei punti  $P_j$  nel riferimento solidale, è un diffeomorfismo sull'immagine  $\Phi(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$ .

*Dimostrazione.* Per la Proposizione 36 sappiamo già che la mappa  $\Phi$  è iniettiva. Sia  $\boldsymbol{\alpha} = (\psi, \theta, \varphi)$  il vettore degli angoli di Eulero, definito sull'aperto  $U \subset \mathbb{R}^3$ , che parametrizza localmente la varietà  $SO(3)$ . Considero la mappa

$$\chi : \mathbb{R}^3 \times U \rightarrow \Phi(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$$

definita da

$$\chi(\mathbf{x}_{O'}, \boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{x}_{O'} + R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_{O'} + R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}'_2, \mathbf{x}_{O'} + R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}'_3).$$

La sua matrice jacobiana è

$$\frac{\partial \chi}{\partial (\mathbf{x}_{O'}, \boldsymbol{\alpha})} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \frac{\partial R}{\partial \psi} \mathbf{x}'_1 & \frac{\partial R}{\partial \theta} \mathbf{x}'_1 & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \frac{\partial R}{\partial \psi} \mathbf{x}'_2 & \frac{\partial R}{\partial \theta} \mathbf{x}'_2 & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \frac{\partial R}{\partial \psi} \mathbf{x}'_3 & \frac{\partial R}{\partial \theta} \mathbf{x}'_3 & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \mathbf{x}'_3 \end{bmatrix}.$$

Mostriamo che le colonne  $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_6$  di questa matrice sono linearmente indipendenti. Assumiamo che valga la relazione

$$\lambda_1 \mathbf{C}_1 + \dots + \lambda_6 \mathbf{C}_6 = \mathbf{0}, \quad (6.7)$$

per dei coefficienti reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ . Facendo la differenza tra la quarta e la prima equazione in (6.7), tra la quinta e la seconda, e tra la sesta e la terza, si ottiene l'equazione

$$A(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1) = \mathbf{0}, \quad (6.8)$$

in cui

$$A = \lambda_4 \frac{\partial R}{\partial \psi} + \lambda_5 \frac{\partial R}{\partial \theta} + \lambda_6 \frac{\partial R}{\partial \varphi}.$$

Usando le relazioni

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_j$$

la (6.8) si può scrivere

$$AR^T(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \mathbf{0},$$

dove  $AR^T$  è una matrice antisimmetrica.<sup>3</sup> In modo simile, facendo la differenza tra la settima e la prima equazione, tra l'ottava e la seconda, e tra la nona e la terza, si ottiene

$$A(\mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1) = AR^T(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) = \mathbf{0}.$$

Poiché  $P_1, P_2, P_3$  non sono allineati, i vettori  $\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1$  e  $\mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1$  sono linearmente indipendenti, quindi la matrice antisimmetrica  $AR^T$  deve essere necessariamente nulla, e dunque deve essere nulla anche la matrice  $A$ . Abbiamo adesso bisogno del seguente risultato.

**Lemma 2.** *Sia*

$$R = R_\varphi^{(3)} R_\theta^{(1)} R_\psi^{(3)}$$

definita come in (6.6). Allora la relazione

$$\lambda_\psi \frac{\partial R}{\partial \psi} + \lambda_\theta \frac{\partial R}{\partial \theta} + \lambda_\varphi \frac{\partial R}{\partial \varphi} = \mathbf{0},$$

con coefficienti reali  $\lambda_\psi, \lambda_\theta, \lambda_\varphi$ , implica che

$$\lambda_\psi = \lambda_\theta = \lambda_\varphi = 0.$$

*Dimostrazione.* Omettendo la scritta (1) e (3) nelle matrici  $R_\psi^{(3)}, R_\theta^{(1)}, R_\varphi^{(3)}$ , indicando con un apice la derivata rispetto all'unica variabile da cui tali matrici dipendono, e osservando che

$$R_\psi^T R'_\psi = R_\varphi^T R'_\varphi = J^{(3)} := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

$$R_\theta^T R'_\theta = J^{(1)} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

---

<sup>3</sup>infatti le matrici  $\frac{\partial R}{\partial \psi}, \frac{\partial R}{\partial \theta}, \frac{\partial R}{\partial \varphi}$  sono antisimmetriche, come si vede derivando rispetto a  $\psi, \theta, \varphi$  la relazione  $RR^T = I$ .

si ottiene

$$\begin{aligned}
& \lambda_\psi \frac{\partial R}{\partial \psi} + \lambda_\theta \frac{\partial R}{\partial \theta} + \lambda_\varphi \frac{\partial R}{\partial \varphi} = \lambda_\psi R_\varphi R_\theta R'_\psi + \lambda_\theta R_\varphi R'_\theta R_\psi + \lambda_\varphi R'_\varphi R_\theta R_\psi \\
& = \lambda_\psi R(R_\psi^T R'_\psi) + \lambda_\theta R R_\psi^T (R_\theta^T R'_\theta) R_\psi + \lambda_\varphi R R_\psi^T R_\theta^T (R'_\varphi R_\varphi) R_\theta R_\psi \\
& = R \left( \lambda_\psi J^{(3)} + \lambda_\theta R_\psi^T J^{(1)} R_\psi + \lambda_\varphi R_\psi^T R_\theta^T J^{(3)} R_\theta R_\psi \right) = 0.
\end{aligned}$$

Svolgendo i conti l'equazione precedente si scrive

$$\begin{aligned}
\lambda_\psi \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_\theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 0 & -\cos \psi \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \end{bmatrix} \\
+ \lambda_\varphi \begin{bmatrix} 0 & -\cos \theta & \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta & 0 & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0},
\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\lambda_\psi + \lambda_\varphi \cos \theta = 0, \quad (6.11)$$

$$\lambda_\theta \sin \psi - \lambda_\varphi \sin \theta \cos \psi = 0, \quad (6.12)$$

$$\lambda_\theta \cos \psi + \lambda_\varphi \sin \theta \sin \psi = 0. \quad (6.13)$$

Dalle equazioni (6.12),(6.13) si ottiene

$$\lambda_\theta = 0, \quad \lambda_\varphi \sin \theta = 0.$$

Affinché gli angoli di Eulero siano definiti ci deve essere una linea dei nodi, quindi  $\sin \theta \neq 0$ , per cui  $\lambda_\varphi = 0$ . Sostituendo l'ultima relazione in (6.11) si ottiene  $\lambda_\psi = 0$ .

□

Dal lemma precedente si conclude che

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$$

e, sostituendo nella relazione (6.7), ne segue che

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

□

### 6.2.4 I quaternioni di Hamilton

Nel 1843 William Rowan Hamilton introdusse l'insieme dei **quaternioni** per poter operare in modo più agevole con le rotazioni di  $\mathbb{R}^3$ . Questo modo di rappresentare le rotazioni è molto utile, ad esempio, nel campo della robotica.

Un quaternione è un'espressione della forma

$$\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \quad (6.14)$$

dove  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . I quaternioni si possono sommare e moltiplicare tra loro: la moltiplicazione è distributiva rispetto alla somma e i simboli  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  soddisfano le relazioni

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ijk} = -1. \quad (6.15)$$

Dalle (6.15) si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} = \mathbf{k}, & \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, & \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{ik} = -\mathbf{j}, & \quad \mathbf{ji} = -\mathbf{k}, & \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}. \end{aligned}$$

Dato un quaternione  $\mathbf{q}$  della forma (6.14) introduciamo il suo **coniugato**

$$\bar{\mathbf{q}} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}.$$

La norma di  $\mathbf{q}$  si definisce come

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

e vale la proprietà

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}}. \quad (6.16)$$

Dalla (6.16) segue che

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2}.$$

Se  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ , allora il quaternione  $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  si dice **unitario**. Utilizzeremo il simbolo  $\mathbf{u}$  al posto di  $\mathbf{q}$  per denotare quaternioni unitari. Possiamo identificare l'insieme dei quaternioni unitari con la sfera unitaria tridimensionale  $S^3$ . Osserviamo che si ha

$$\mathbf{u}^{-1} = \bar{\mathbf{u}}.$$

Un quaternione della forma

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

si dice **puro**. Utilizzeremo il simbolo  $\mathbf{p}$  per denotare quaternioni puri. Possiamo identificare l'insieme dei quaternioni puri con  $\mathbb{R}^3$ .



Sia  $\mathbf{u}$  un quaternione unitario. Consideriamo la mappa

$$\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{p} \mapsto \mathbf{u}\mathbf{p}\bar{\mathbf{u}} =: R_{\mathbf{u}}\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3.$$

Si verifica facilmente che gli elementi dell'immagine di questa mappa sono quaternioni puri. Si può dimostrare che questa mappa codifica una rotazione di  $\mathbb{R}^3$ , vedi [12]. Se  $a = \pm 1$  allora  $R_{\mathbf{u}}$  è la rotazione identica. Altrimenti  $R_{\mathbf{u}}$  è la rotazione dell'angolo

$$\theta = 2 \arccos a = 2 \arcsin(\sqrt{b^2 + c^2 + d^2})$$

attorno all'asse orientato definito dal vettore  $(b, c, d)$ .

**Esercizio 15.** Mostrare che si ha

$$R_{\mathbf{u}}R_{\mathbf{v}} = R_{\mathbf{uv}},$$

dove  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  sono quaternioni unitari.

**Osservazione 21.** La mappa

$$S^3 \ni \mathbf{u} \mapsto R_{\mathbf{u}} \in SO(3)$$

è un omomorfismo di gruppi, con nucleo  $\mathbb{Z}_2$ , infatti quaternioni unitari opposti definiscono la stessa rotazione. Otteniamo quindi l'isomorfismo

$$S^3/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3).$$

**Esercizio 16.** Calcolare il vettore di  $\mathbb{R}^3$  che si ottiene ruotando  $(1, 2, 3)$  di un angolo  $\theta = \pi/3$  attorno all'asse passante per l'origine definito da  $(1, 0, 1)$ .

**Soluzione:** Considero

$$\mathbf{p} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$

e calcolo il quaternione unitario  $\mathbf{u}$  corrispondente alla rotazione scelta. Dalle relazioni

$$a = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad c = 0, \quad \frac{3}{4} + b^2 + d^2 = 1, \quad b = d$$

si ottiene

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathbf{k} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{6} + \mathbf{i} + \mathbf{k}),$$

per cui

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{u}}\mathbf{p} &= \mathbf{u}\mathbf{p}\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{8}(\sqrt{6} + \mathbf{i} + \mathbf{k})(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})(\sqrt{6} - \mathbf{i} - \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{8}\left(-4 + (\sqrt{6} - 2)\mathbf{i} + (2\sqrt{6} - 2)\mathbf{j} + (3\sqrt{6} + 2)\mathbf{k}\right)(\sqrt{6} - \mathbf{i} - \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{4}\left((6 - 2\sqrt{6})\mathbf{i} + (-2\sqrt{6} + 4)\mathbf{j} + (2\sqrt{6} + 10)\mathbf{k}\right). \end{aligned}$$

Si ottiene quindi il vettore

$$\left(\frac{3 - \sqrt{6}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5 + \sqrt{6}}{2}\right).$$

### La mappa di Hopf

Interpretando l'insieme dei quaternioni puri come  $\mathbb{R}^3$  (per cui ad esempio  $\mathbf{i}$  corrisponde a  $(1, 0, 0)$ ) definiamo la **mappa di Hopf**

$$S^3 \ni \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}\mathbf{i}\bar{\mathbf{u}} \in S^2. \quad (6.17)$$

Se  $\mathbf{u} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  allora (6.17) si scrive

$$(a, b, c, d) \mapsto (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac)).$$

Le fibre di questa mappa sono circonferenze e questa mappa fornisce un esempio di fibrazione non banale.<sup>4</sup>

### 6.2.5 Formula fondamentale della cinematica rigida

**Definizione 15.** *Definiamo la velocità angolare  $\vec{\omega}$  di un corpo rigido  $\mathcal{C}$  come quella di minima norma tra le velocità angolari di tutti i sistemi di riferimento solidali rispetto ad un riferimento dato  $\Sigma$ .*

Verifichiamo che questa è una buona definizione. Si presentano due casi:

**Proposizione 39.** *i) Se  $\mathcal{C}$  ha 3 punti non allineati allora la sua velocità angolare è quella di un qualunque riferimento solidale a  $\mathcal{C}$ . ii) Se invece tutti i punti di  $\mathcal{C}$  sono allineati allora la sua velocità angolare è data dalla differenza tra quella di un qualunque riferimento solidale a  $\mathcal{C}$  e la sua componente in direzione dell'allineamento dei punti.*

*Dimostrazione.* Consideriamo due riferimenti solidali  $\Sigma', \Sigma''$ . Denotiamo con  $\vec{\omega}, \vec{\omega}'$  le velocità angolari di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$  e di  $\Sigma''$  rispetto a  $\Sigma'$  rispettivamente.

Caso i) La velocità angolare di  $\Sigma''$  rispetto a  $\Sigma$  è data da  $\vec{\omega} + \vec{\omega}'$ . Se  $P_1, P_2, P_3$  sono punti del corpo non allineati, dalla (4.6) applicata a  $P_2 - P_1$  e a  $P_3 - P_1$  si ha

$$\vec{\omega}' \times (P_2 - P_1) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \vec{\omega}' \times (P_3 - P_1) = \vec{\mathbf{0}}, \quad (6.18)$$

infatti

$$\frac{d}{dt}(P_2 - P_1) \Big|_{\Sigma'} = \frac{d}{dt}(P_2 - P_1) \Big|_{\Sigma''} + \vec{\omega}' \times (P_2 - P_1)$$

e si ha

$$\frac{d}{dt}(P_2 - P_1) \Big|_{\Sigma'} = \frac{d}{dt}(P_2 - P_1) \Big|_{\Sigma''} = \vec{\mathbf{0}}$$

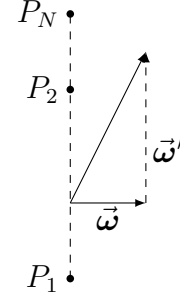
poiché  $P_1, P_2$  sono solidali sia a  $\Sigma'$  che a  $\Sigma''$ . La seconda relazione in (6.18) si dimostra in modo analogo. Dalle (6.18) segue che

$$\vec{\omega}' = \vec{\mathbf{0}},$$

quindi le velocità angolari di  $\Sigma'$  e  $\Sigma''$  rispetto a  $\Sigma$  sono le stesse.

<sup>4</sup>si può scrivere  $S^3$  come un fibrato con base  $S^2$  e fibre  $S^1$  che non è diffeomorfo al prodotto  $S^2 \times S^1$ .

Caso ii) Si considerino due punti  $P_1, P_2$  del corpo. Dalla (4.6) abbiamo  $\vec{\omega}' \times (P_2 - P_1) = \vec{0}$ , quindi le velocità angolari di  $\Sigma'$  e  $\Sigma''$  possono differire solo per una componente lungo la direzione di allineamento. Concludiamo che per ottenere la velocità angolare di minima norma tra quelle dei sistemi di riferimento solidali al corpo basta considerare la velocità angolare di un qualunque sistema di riferimento solidale e sottrarre da essa la sua componente lungo la direzione di allineamento dei punti.



□

**Definizione 16.** Diciamo che un punto  $P$  è solidale ad un corpo rigido  $\mathcal{C}$  se  $P$  ha velocità nulla in tutti i riferimenti  $\Sigma'$  solidali a  $\mathcal{C}$  che hanno velocità angolare di minima norma.

Per quanto detto prima, nel caso in cui  $\mathcal{C}$  abbia tre punti non allineati, affinché  $P$  sia un punto solidale basta che esso abbia velocità nulla in un qualunque riferimento solidale. Se invece tutti i punti di  $\mathcal{C}$  sono allineati serve che  $P$  abbia velocità nulla in un riferimento  $\Sigma'$  tale che la sua velocità angolare rispetto a  $\Sigma$  abbia in ogni istante componente nulla nella direzione dell'allineamento dei punti di  $\mathcal{C}$ .

**Proposizione 40.** Indichiamo con  $\vec{v}_h, \vec{v}_k \in \mathbb{V}^3$  le velocità di due punti  $P_h, P_k$  di un corpo rigido, o ad esso solidali, relative ad un riferimento  $\Sigma$ . Se il corpo è in moto con velocità angolare  $\vec{\omega}$  vale la formula

$$\vec{v}_k = \vec{v}_h + \vec{\omega} \times (P_k - P_h). \quad (6.19)$$

*Dimostrazione.* Denotando con  $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$  un sistema di riferimento solidale al corpo, con velocità angolare  $\vec{\omega}$  di minima norma, e usando le relazioni (4.7) si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{v}_k - \vec{v}_h &= \vec{v}'_k + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P_k - O') - \vec{v}'_h - \vec{v}_{O'} - \vec{\omega} \times (P_h - O') \\ &= \vec{\omega} \times (P_k - P_h), \end{aligned}$$

in cui abbiamo usato il fatto che le velocità  $\vec{v}'_h, \vec{v}'_k$  di  $P_k, P_h$  relative a  $\Sigma'$  sono nulle.

□

Le relazione (6.19) si chiama **formula fondamentale della cinematica rigida**.

**Esempio 8.** Calcoliamo la velocità angolare di un disco  $\mathcal{D}$  omogeneo di raggio  $R$  che si muove nel piano  $Oxy$ , rotolando senza strisciare sull'asse  $Ox$ . Usiamo

come coordinata l'ascissa  $s$  del punto di contatto tra il disco e l'asse  $Ox$ . Scelto un riferimento solidale con  $\hat{e}'_3 = \hat{e}_3$ , dall'Osservazione 23 abbiamo

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Poiché il disco rotola senza strisciare, la velocità  $\vec{v}_P$  del punto  $P$  del disco a contatto con l'asse  $Ox$  è nulla. Detto  $B$  il baricentro del disco, dalla formula fondamentale (6.19) si ottiene

$$\vec{0} = \vec{v}_P = \vec{v}_B + \omega \hat{e}_3 \times (P - B) = \dot{s} \hat{e}_1 - \omega \hat{e}_3 \times R \hat{e}_2 = (\dot{s} + \omega R) \hat{e}_1.$$

Si trova quindi che

$$\omega = -\frac{\dot{s}}{R}.$$

### 6.2.6 Velocità angolare e angoli di Eulero

Facendo riferimento alla notazione introdotta nella Sezione 6.2.3 dimostriamo la formula seguente.

**Proposizione 41.** *la velocità angolare di un corpo rigido si può scrivere in termini degli angoli di Eulero e delle loro derivate temporali come segue:*

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{e}'_3 + \dot{\theta} \hat{e}_N + \dot{\varphi} \hat{e}_3. \quad (6.20)$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che

$$\mathbf{e}'_i = R \mathbf{e}_i, \quad R = R_\varphi^{(3)} R_\theta^{(1)} R_\psi^{(3)},$$

con le matrici  $R_\alpha^{(i)}$  definite come in (6.6), per cui, omettendo la scritta (1) e (3) in queste matrici, si ha

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}'_i = \dot{R} \mathbf{e}_i &= (\dot{R}_\varphi R_\theta R_\psi + R_\varphi \dot{R}_\theta R_\psi + R_\varphi R_\theta \dot{R}_\psi) R_\psi^T R_\theta^T R_\varphi^T \mathbf{e}'_i = \\ &= [\dot{R}_\varphi R_\varphi^T + R_\varphi (\dot{R}_\theta R_\theta^T) R_\varphi^T + R_\varphi R_\theta (\dot{R}_\psi R_\psi^T) R_\theta^T R_\varphi^T] \mathbf{e}'_i. \end{aligned}$$

Le matrici

$$\dot{R}_\varphi R_\varphi^T = \dot{\varphi} \frac{\partial R_\varphi}{\partial \varphi} R_\varphi^T, \quad \dot{R}_\theta R_\theta^T = \dot{\theta} \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} R_\theta^T, \quad \dot{R}_\psi R_\psi^T = \dot{\psi} \frac{\partial R_\psi}{\partial \psi} R_\psi^T,$$

sono antisimmetriche, come si vede derivando rispetto a  $\varphi, \theta, \psi$  le relazioni

$$R_\varphi R_\varphi^T = R_\theta R_\theta^T = R_\psi R_\psi^T = I,$$

e si ha

$$\frac{\partial R_\varphi}{\partial \varphi} R_\varphi^T = \frac{\partial R_\psi}{\partial \psi} R_\psi^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J^{(3)}, \quad \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} R_\theta^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = J^{(1)},$$

in modo analogo a (6.9), (6.10). Inoltre le matrici

$$R_\varphi^T, \quad R_\theta^T R_\varphi^T$$

rappresentano rispettivamente il cambiamento di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}_1$  e da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}_2$ , dove

$$\mathcal{B}_1 = \{\hat{e}_N, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_3\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{\hat{e}_N, \hat{e}_\psi, \hat{e}'_3\}$$

con

$$\hat{e}_N = \cos \psi \hat{e}'_1 - \sin \psi \hat{e}'_2 \quad (6.21)$$

$$\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_2,$$

$$\hat{e}_\psi = \sin \psi \hat{e}'_1 + \cos \psi \hat{e}'_2, \quad (6.22)$$

i versori degli assi  $Oy_1, Oy_2$  dei riferimenti intermedi  $\Sigma_1, \Sigma_2$  introdotti nella Sezione 6.2.3.

Usando la corrispondenza tra matrici antisimmetriche e vettori descritta in (4.2) notiamo che le matrici

$$R_\varphi (\dot{R}_\theta R_\theta^T) R_{-\varphi}^T, \quad R_\varphi R_\theta (\dot{R}_\psi R_\psi^T) R_\theta^T R_\varphi^T,$$

scritte nella base  $\mathcal{B}$ , corrispondono rispettivamente al vettore velocità angolare del riferimento  $\Sigma_1 = O\hat{e}_N\hat{e}_\varphi\hat{e}_3$  che ruota di un angolo  $\theta(t)$  attorno all'asse  $O\hat{e}_N$  e al vettore velocità angolare del riferimento  $\Sigma_2 = O\hat{e}_N\hat{e}_\psi\hat{e}'_3$  che ruota di un angolo  $\psi(t)$  attorno all'asse  $O\hat{e}'_3$ . La (6.20) segue allora dalle formule di Poisson.  $\square$

Utilizzando il versore ausiliario  $\hat{e}_\psi$ , definito da (6.22), che è ortogonale a  $\hat{e}_N$  e giace nel piano generato da  $\hat{e}_3, \hat{e}'_3$ , possiamo scrivere

$$\hat{e}_3 = \cos \theta \hat{e}'_3 + \sin \theta \hat{e}_\psi. \quad (6.23)$$

Possiamo quindi scrivere  $\vec{\omega}$  nella base  $\mathcal{B}' = \{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  come

$$\vec{\omega} = (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \hat{e}'_1 + (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \hat{e}'_2 + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{e}'_3. \quad (6.24)$$

### 6.2.7 Posizioni e velocità dei punti di un corpo rigido

Date le coordinate costanti  $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_N$  dei punti di un corpo rigido discreto in un riferimento solidale  $\Sigma'$ , le coordinate delle posizioni  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  e delle velocità  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$  di questi punti in  $\Sigma$  sono determinate ad ogni istante dalla posizione e velocità di un punto  $O'$  solidale al corpo, da una matrice  $R \in SO(3)$  e dalla velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  del corpo:

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{O'} + R \mathbf{x}'_j, \quad \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{O'}). \quad (6.25)$$

Le componenti della matrice di rotazione  $R$  possono essere espresse in funzione degli angoli di Eulero  $\varphi, \theta, \psi$ , e le componenti della velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  in funzione di  $\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ .

### 6.2.8 Asse istantaneo di rotazione

**Proposizione 42.** *Se  $\vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \neq \vec{\mathbf{0}}$  è la velocità angolare di un corpo rigido all'istante  $t$ , allora esiste un'unica retta  $r(t)$ , detta **asse istantaneo di rotazione**, composta di punti solidali al corpo che hanno tutti velocità parallela ad  $\vec{\boldsymbol{\omega}}(t)$  oppure nulla, cioè dai punti  $P$  solidali al corpo tali che*

$$\vec{\mathbf{v}}_P \times \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{0}}.$$

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che dati due punti  $P, Q$  solidali al corpo, che all'istante  $t$  si trovano su una retta parallela ad  $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}(t)$ , si ha

$$\vec{\mathbf{v}}_P = \vec{\mathbf{v}}_Q + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - Q) = \vec{\mathbf{v}}_Q$$

e dunque

$$\vec{\mathbf{v}}_P \times \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{v}}_Q \times \vec{\boldsymbol{\omega}}.$$

Quindi ci basta dimostrare che all'istante  $t$  esiste un punto  $P_0$  solidale al corpo con  $\vec{\mathbf{v}}_{P_0}$  parallela ad  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  oppure nulla. L'asse istantaneo di rotazione corrisponderà allora alla retta passante per  $P_0$  e parallela a  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ .

Siano  $O'$  un punto solidale al corpo e  $\Pi_{O'}$  il piano ortogonale a  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  e passante per  $O'$ . Determiniamo un punto  $P_0 \in \Pi_{O'}$  solidale al corpo e tale che  $\vec{\mathbf{v}}_{P_0} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{0}}$ . Moltiplichiamo vettorialmente per  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  la formula fondamentale relativa a  $P_0$  e  $O'$ :

$$\vec{\mathbf{v}}_{P_0} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{v}}_{O'} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} + (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_0 - O')) \times \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{v}}_{O'} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} + |\vec{\boldsymbol{\omega}}|^2 (P_0 - O'),$$

poiché  $(P_0 - O') \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0$ . Imponendo che la velocità di  $P_0$  sia parallela ad  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  oppure nulla otteniamo

$$P_0 - O' = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{\omega}}|^2} \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}_{O'},$$

che individua il punto  $P_0$  cercato. Dalla dimostrazione costruttiva della sua esistenza segue anche l'unicità dell'asse istantaneo di rotazione.  $\square$

**Osservazione 22.** *La dimostrazione di questa proposizione è analoga a quella della Proposizione 5.10, relativa all'asse centrale: basta sostituire  $\vec{N}_{Q_0}$  con  $\vec{v}_{P_0}$  ed  $\vec{R}$  con  $\vec{\omega}$ .*

### 6.2.9 Campo delle velocità di un moto rigido

Il seguente risultato descrive globalmente il campo delle velocità di un moto rigido:

**Proposizione 43.** *Le velocità dei punti solidali al corpo rigido hanno una simmetria cilindrica rispetto all'asse istantaneo di rotazione.*

*Dimostrazione.* Assumiamo che  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$  all'istante  $t$  e consideriamo l'asse istantaneo di rotazione  $r = r(t)$ . Per quanto mostrato nella Proposizione 42, ci basta mostrare che tale simmetria sussiste per i punti di un piano ortogonale all'asse  $r$ . Dato un punto  $P_1 \notin r$  definisco  $P_0 = r \cap \Pi_{P_1}$  con  $\Pi_{P_1}$  il piano passante per  $P_1$  e ortogonale a  $r$ . Dato un punto  $P_2$  sulla circonferenza di centro  $P_0$ , raggio  $|P_1 - P_0|$  e ortogonale a  $\vec{\omega}$  consideriamo l'applicazione lineare  $\mathcal{R}$  che corrisponde ad una rotazione attorno all'asse  $r$  tale che

$$P_2 = P_0 + \mathcal{R}(P_1 - P_0).$$

Per la (6.19) si ha

$$\vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_0} + \vec{\omega} \times (P_1 - P_0), \quad \vec{v}_{P_2} = \vec{v}_{P_0} + \vec{\omega} \times (P_2 - P_0). \quad (6.26)$$

Siccome  $\vec{v}_{P_0}$  e  $\vec{\omega}$  sono paralleli all'asse,

$$\mathcal{R}\vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_0} + \vec{\omega} \times \mathcal{R}(P_1 - P_0) = \vec{v}_{P_2}.$$

Inoltre dalla prima equazione in (6.26) segue che

$$\vec{v}_{P_1} \cdot (P_1 - P_0) = 0$$

poiché  $\vec{v}_{P_0} \times \vec{\omega} = \vec{0}$  e  $\vec{\omega} \times (P_1 - P_0) \cdot (P_1 - P_0) = 0$ .

Quindi, in coordinate cilindriche con asse  $r(t)$ , la componente radiale della velocità dei punti solidali al corpo rigido è nulla.

Consideriamo due punti  $P, Q$  qualunque solidali al corpo. Scomponiamo le loro velocità  $\vec{v}_P, \vec{v}_Q$  come somma di due vettori ortogonali:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{\parallel} + \vec{v}_P^{\perp}, \quad \vec{v}_Q = \vec{v}_Q^{\parallel} + \vec{v}_Q^{\perp} \quad (6.27)$$

dove

$$\vec{v}_P^{\parallel} = \frac{(\vec{v}_P \cdot \vec{\omega})}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}, \quad \vec{v}_P^{\perp} = \vec{v}_P - \vec{v}_P^{\parallel}, \quad \vec{v}_Q^{\parallel} = \frac{(\vec{v}_Q \cdot \vec{\omega})}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}, \quad \vec{v}_Q^{\perp} = \vec{v}_Q - \vec{v}_Q^{\parallel}.$$

Dalla formula fondamentale (6.19) segue che

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_Q \cdot \vec{\omega}, \quad (6.28)$$

quindi le componenti  $\vec{v}_P^{\parallel}$ ,  $\vec{v}_Q^{\parallel}$  lungo l'asse istantaneo di rotazione sono le stesse.

Dalla (6.19), (6.27) e (6.28) si ottiene

$$\vec{v}_P^{\perp} = \vec{v}_Q^{\perp} + \vec{\omega} \times (P - Q).$$

Nel caso particolare in cui  $Q$  sia un punto dell'asse istantaneo di rotazione si ha  $\vec{v}_Q^{\perp} = \vec{0}$ , per cui

$$\vec{v}_P^{\perp} = \vec{\omega} \times (P - Q).$$

Viste queste proprietà delle velocità dei punti di un corpo rigido, si parla di **atto di moto elicoidale**.<sup>5</sup>

□

### 6.3 Moti rigidi piani

Si parla di **moto rigido piano** se la velocità angolare  $\vec{\omega}$  è non nulla e ha direzione costante, e tutti i punti  $P$  solidali al corpo rigido hanno velocità ortogonale a tale direzione:

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0.$$

Posso dunque fissare un piano di riferimento  $\Pi$  ortogonale ad  $\vec{\omega}$  in cui studiare il moto.

**Osservazione 23.** In un moto rigido piano, se consideriamo un riferimento solidale al corpo rigido  $O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ , con  $\hat{e}'_3 = \hat{e}_3$ , ortogonale al piano di riferimento usato per studiare il moto, la sua velocità angolare  $\vec{\omega}$  sarà sempre parallela a  $O\hat{e}_3$ . Per dimostrarlo basta usare la formula di Poisson

$$\omega \times \hat{e}'_3 = \dot{\hat{e}}'_3 = \dot{\hat{e}}_3 = \mathbf{0}.$$

Quindi, nel caso di un corpo rigido con tutti i punti allineati, la velocità angolare di un riferimento solidale  $\Sigma'$  così scelto avrà sempre minima norma, in quanto la sua direzione sarà sempre ortogonale alla direzione di allineamento dei punti.

<sup>5</sup>l'atto di moto ad un dato istante è l'insieme di tutte le velocità a quell'istante.



**Osservazione 24.** Consideriamo un moto rigido piano con il piano di riferimento  $\Pi$  ortogonale al vettore  $\hat{e}_3$  del sistema di riferimento  $\Sigma$ . Sia  $\theta$  l'angolo tra due rette giacenti nel piano  $\Pi$ , una solidale al corpo e l'altra fissa in  $\Sigma$  e assumiamo che  $\theta$  cresca quando la retta solidale ruota in senso antiorario attorno all'asse orientato  $O\hat{e}_3$ . La velocità angolare del corpo rigido che esegue questo moto rigido piano è data da

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{e}_3.$$

Per dimostrarlo basta scegliere un riferimento solidale  $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ , con  $\hat{e}'_1$  lungo la direzione della retta solidale,  $\hat{e}'_3 = \hat{e}_3$  ed  $\hat{e}'_2 = \hat{e}'_3 \times \hat{e}'_1$ . La dimostrazione prosegue come nell'Esempio 2.

### 6.3.1 Centro istantaneo di rotazione

Consideriamo un moto rigido piano con piano di riferimento  $\Pi$ . In ogni istante  $t$  tale che  $\vec{\omega}(t) \neq \vec{0}$  sia  $r(t)$  l'asse istantaneo di rotazione: definiamo il **centro istantaneo di rotazione** come il punto  $C_0(t) = r(t) \cap \Pi$ .

**Proposizione 44. (teorema di Chasles)** *In un moto rigido piano il centro istantaneo di rotazione  $C_0$  si trova sulla retta normale alla velocità di ciascuno dei punti solidali al corpo distinti da  $C_0$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $C_0$  il centro istantaneo di rotazione. Osserviamo che  $\vec{v}_{C_0} = \vec{0}$ , poiché  $\vec{v}_{C_0} \times \vec{\omega} = \vec{0}$ ,  $\vec{v}_{C_0} \cdot \vec{\omega} = 0$ . Quindi

$$(P - C_0) \cdot \vec{v}_P = (P - C_0) \cdot (\vec{v}_{C_0} + \vec{\omega} \times (P - C_0)) = 0$$

per ogni punto  $P$  solidale al corpo. □

Per le proprietà dell'asse istantaneo di rotazione possiamo concludere che in un moto rigido piano, ad ogni istante  $t$ , il centro istantaneo di rotazione  $C_0 = C_0(t)$  è l'unico punto solidale al corpo che ha velocità nulla. Tale punto è anche detto **centro delle velocità** all'istante  $t$ .

### 6.3.2 Traiettorie polari

Consideriamo un moto rigido piano e denotiamo con  $\Pi$  il piano di riferimento. Fissiamo in tale piano un riferimento  $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2$  ed un riferimento  $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2$  solidale al corpo rigido.

Chiamiamo **base** (o polare fissa) la curva descritta dal centro istantaneo di rotazione  $C_0$  nel riferimento  $\Sigma$  e **rulletta** (o polare mobile) la curva descritta da  $C_0$  nel riferimento  $\Sigma'$ . Possiamo associare alla rulletta un moto relativo al riferimento  $\Sigma$  considerando i suoi punti solidali al riferimento  $\Sigma'$ .

**Definizione 17.** Diciamo che due corpi rigidi rotolano senza strisciare l'uno sull'altro se le velocità dei punti dei corpi a contatto tra loro sono sempre le stesse. In particolare, si dice che un corpo rigido effettua un moto di puro rotolamento su un vincolo fisso se le velocità dei punti del corpo a contatto col vincolo sono nulle.

**Osservazione 25.** Nella definizione precedente incontriamo un altro caso di moto vincolato, quello di puro rotolamento, in cui viene data una condizione sulle velocità dei punti del sistema.

**Proposizione 45.** Durante il moto la rulletta rotola senza strisciare sulla base.

*Dimostrazione.* Ad ogni istante  $\bar{t}$  tale che  $\vec{\omega}(\bar{t}) \neq \vec{0}$  esiste un unico centro istantaneo di rotazione  $C_0$ . Dato il moto di un punto  $t \mapsto P(t)$  vale la relazione seguente

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \times (P - O'),$$

in cui  $\vec{v}_P, \vec{v}'_P$  sono le velocità di  $P$  in  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ ,  $\vec{v}_{O'}$  è la velocità dell'origine  $O'$  di  $\Sigma'$  e  $\vec{\omega}$  è la velocità angolare di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$ .<sup>6</sup>

Consideriamo il moto  $t \mapsto P(t)$  del punto che rappresenta ad ogni istante il centro istantaneo di rotazione, visto in  $\Sigma$  e in  $\Sigma'$ . All'istante  $\bar{t}$  si ha

$$P = C_0.$$

Allo stesso punto possiamo attribuire tre velocità diverse al tempo  $\bar{t}$ : 1) la velocità  $\vec{v}_{C_0} = \vec{0}$  del centro delle velocità; 2) la velocità  $\vec{v}_P$  del punto  $P$  in  $\Sigma$ , utile per descrivere la polare fissa; 3) la velocità  $\vec{v}'_P$  del punto  $P$  in  $\Sigma'$ , utile per descrivere la polare mobile. Dalla formula fondamentale della cinematica rigida si ha

$$\vec{0} = \vec{v}_{C_0} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (C_0 - O')$$

e, usando la relazione

$$P = C_0$$

all'istante  $\bar{t}$ , si ottiene che

$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P$$

a tale istante, quindi la base  $\mathfrak{b}$  e la rulletta  $\mathfrak{r}$  sono tangenti nel loro punto di contatto  $P = C_0$ . Essendo la rulletta solidale al corpo rigido, la velocità del suo punto  $C_0$  a contatto con la base è nulla, quindi si ha un moto di puro rotolamento di  $\mathfrak{r}$  su  $\mathfrak{b}$ . □

---

<sup>6</sup>si intende la velocità angolare di un riferimento rispetto all'altro completando entrambi i riferimenti con un versore comune  $\hat{e}_3 = \hat{e}'_3$  ortogonale al piano di riferimento II.

**Esempio 9.** Si calcolino la base e la rulletta nel caso di un'asta di lunghezza  $\ell$  che si può muovere in un piano mantenendo i due estremi  $A, C$  sugli assi coordinati di un sistema di riferimento  $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2$ .

Introduciamo un sistema di riferimento  $\Sigma' = A\hat{e}'_1\hat{e}'_2$  con l'asse  $A\hat{e}'_1$  diretto lungo l'asta. Per il teorema di Chasles, le coordinate in  $\Sigma$  del centro istantaneo di rotazione dell'asta sono

$$x_0 = \ell \sin \theta, \quad y_0 = \ell \cos \theta.$$

Ne segue che l'equazione della base è

$$x_0^2 + y_0^2 = \ell^2,$$

che è una circonferenza di raggio  $\ell$  centrata nell'origine  $O$ . Indicate con  $x'_{C_0}, y'_{C_0}$  le coordinate di  $C_0$  in  $\Sigma'$  si ha

$$\mathbf{x}_{C_0} = \mathbf{x}_A + R\mathbf{x}'_{C_0},$$

dove

$$\mathbf{x}_{C_0} = (x_{C_0}, y_{C_0})^T, \quad \mathbf{x}_A = (0, \ell \cos \theta)^T, \quad \mathbf{x}'_{C_0} = (x'_{C_0}, y'_{C_0})^T$$

ed

$$R = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

è la matrice con componenti  $R_{kh} = \hat{e}'_h \cdot \hat{e}_k$ .

Si ottiene che

$$x'_{C_0} = \ell \sin^2 \theta, \quad y'_{C_0} = \ell \sin \theta \cos \theta.$$

Dalla relazione precedente si ha

$$x'^2_{C_0} + y'^2_{C_0} = \ell^2 \sin^2 \theta = \ell x_{C_0},$$

che si può anche scrivere

$$\left(x'_{C_0} - \frac{\ell}{2}\right)^2 + y'^2_{C_0} = \frac{\ell^2}{4},$$

ed è l'equazione di una circonferenza di raggio  $\ell/2$  centrata nel centro  $B$  dell'asta.

### 6.3.3 Profili coniugati

Consideriamo più in generale una curva piana  $c$  solidale al corpo rigido. Sia  $\gamma$  la curva che corrisponde all'involuppo della famiglia  $\{c_t\}_t$ , definita dal moto del corpo rigido al variare del tempo  $t$ .<sup>7</sup> Le curve  $c$  e  $\gamma$  si chiamano profili coniugati.

**Proposizione 46.** *La normale comune alle curve  $c$  e  $\gamma$  nel loro punto di contatto  $P$  passa ad ogni istante per il centro istantaneo di rotazione.*

*Dimostrazione.* Sia  $P$  il punto della curva  $c$  a contatto con  $\gamma$  e  $C_0$  il centro istantaneo di rotazione. Se  $P = C_0$  non c'è nulla da dimostrare. Se invece  $P \neq C_0$  possiamo assumere che il riferimento solidale abbia origine  $O' = P$  e, dalla relazione

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \times (P - O'),$$

si ottiene

$$\vec{v}_{O'} = \vec{v}_P - \vec{v}'_P.$$

Osserviamo che  $\vec{v}_{O'} \neq \vec{0}$  perché  $O' \neq C_0$ . Siccome  $\gamma$  è l'involuppo della famiglia di curve  $\{c_t\}_t$  si ha  $\vec{v}_P \parallel \vec{v}'_P$ , quindi il vettore  $\vec{v}_{O'}$  è tangente alle curve  $c$  e  $\gamma$  in  $P$  e, per il teorema di Chasles, il centro istantaneo di rotazione  $C_0$  si trova sulla normale alle due curve passante da  $P$ .

□

### 6.3.4 Campo delle accelerazioni

Dato un moto rigido piano, sia  $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2$  un sistema di riferimento solidale al corpo rigido nel piano di riferimento e sia  $\hat{e}'_3 = \hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2$ . Per ogni punto  $P$  solidale al corpo, dalle (4.7), (4.8) si ottiene

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P - O'), \quad (6.29)$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')) \quad (6.30)$$

poiché  $\vec{v}'_P = \vec{a}'_P = \vec{0}$ .

Dalla (6.30) si ottiene subito il seguente risultato:

**Proposizione 47. (teorema di Rivals)** *In un moto rigido piano l'accelerazione di qualsiasi punto  $P$  solidale al corpo rigido è data dalla somma dell'accelerazione di un dato punto  $O'$  solidale e dell'accelerazione che avrebbe  $P$  in un moto rotatorio con velocità angolare  $\vec{\omega}$  attorno alla normale al piano di riferimento per  $O'$ .*

Dalla stessa relazione si ottiene anche il seguente risultato:

---

<sup>7</sup>L'involuppo di una famiglia di curve  $\{c_t\}_t$  è una curva che è tangente in ogni suo punto ad una curva  $c_t$  della famiglia.

**Proposizione 48.** *Se  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ , esiste un unico punto del piano, detto **centro delle accelerazioni**, la cui accelerazione è nulla.*

*Dimostrazione.* Annullando il membro destro della (6.30) si ottiene l'equazione

$$\vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')) = \vec{0}.$$

Dette  $(x, y)$  le coordinate di  $P - O'$  in  $\Sigma$  si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{O'} - \dot{\omega}y - \omega^2x &= 0 \\ \ddot{y}_{O'} + \dot{\omega}x - \omega^2y &= 0 \end{aligned}$$

per le coordinate  $(\ddot{x}_{O'}, \ddot{y}_{O'})$  dell'accelerazione  $\vec{a}_{O'}$  in  $\Sigma$ , e queste equazioni hanno un'unica soluzione poiché  $\omega^4 + \dot{\omega}^2 \neq 0$ . □

## 6.4 Operatore di inerzia

Per studiare il moto di un corpo rigido  $\mathfrak{C}$  è utile introdurre l'**operatore di inerzia**<sup>8</sup>  $\mathfrak{I}_Q : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$  rispetto al polo  $Q \in \mathbb{E}^3$ , definito da

$$\mathfrak{I}_Q \vec{u} = \sum_{h=1}^N m_h (P_h - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - Q)], \quad \vec{u} \in \mathbb{V}^3.$$

**Proposizione 49.** *Per ogni scelta del polo  $Q$  l'applicazione bilineare*

$$\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{v} \in \mathbb{R}$$

*è simmetrica e, se il corpo  $\mathfrak{C}$  ha tre punti non allineati, è definita positiva.*

*Dimostrazione.* Dalle proprietà del prodotto misto e dalla simmetria del prodotto scalare abbiamo la simmetria dell'operatore  $\mathfrak{I}_Q$ , infatti

$$\vec{u} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{v} = \sum_{h=1}^N m_h [\vec{u} \times (P_h - Q)] \cdot [\vec{v} \times (P_h - Q)] = \vec{v} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{u}.$$

Similmente si ha

$$\vec{u} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{u} = \sum_{h=1}^N m_h |\vec{u} \times (P_h - Q)|^2$$

e, se ci sono tre punti non allineati, almeno un addendo della sommatoria è strettamente positivo. Se tutti i punti del corpo sono allineati ed  $\hat{e} \in \mathbb{V}^3$ ,  $|\hat{e}| = 1$ , corrisponde alla direzione della retta di allineamento, allora  $\hat{e} \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{e} = 0$  se  $Q$  sta su tale retta. □

---

<sup>8</sup>detto anche **tensore di inerzia**.

## Scomposizione dell'operatore di inerzia

Si verifica facilmente che

$$\mathfrak{I}_Q \vec{u} = \mathfrak{I}_B \vec{u} + m(B - Q) \times [\vec{u} \times (B - Q)], \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{V}^3, \quad (6.31)$$

infatti

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_Q \vec{u} &= \sum_{h=1}^N m_h (P_h - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - Q)] = \\ &= \sum_{h=1}^N m_h (P_h - B) \times [\vec{u} \times (P_h - B)] + \sum_{h=1}^N m_h (B - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - B)] + \\ &+ \sum_{h=1}^N m_h (P_h - B) \times [\vec{u} \times (B - Q)] + \sum_{h=1}^N m_h (B - Q) \times [\vec{u} \times (B - Q)] \end{aligned}$$

e si ha

$$\sum_{h=1}^N m_h (B - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - B)] = \sum_{h=1}^N m_h (P_h - B) \times [\vec{u} \times (B - Q)] = \vec{0}.$$

Dati un punto  $Q \in \mathbb{E}^3$  ed una direzione  $\hat{e} \in \mathbb{V}^3$ ,  $|\hat{e}| = 1$ , definiamo **momento di inerzia relativo all'asse  $Q\hat{e}$** , passante da  $Q$  e parallelo a  $\hat{e}$ , la quantità

$$I_{Q\hat{e}} = \hat{e} \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{e}.$$

Osserviamo che se  $Q'$  è un altro punto qualsiasi dell'asse  $Q\hat{e}$  si ha

$$\begin{aligned} I_{Q'\hat{e}} &= \sum_{h=1}^N m_h |\hat{e} \times (P_h - Q')|^2 = \sum_{h=1}^N m_h |\hat{e} \times [(P_h - Q) + (Q - Q')]|^2 \\ &= \sum_{h=1}^N m_h |\hat{e} \times (P_h - Q)|^2 = I_{Q\hat{e}}, \end{aligned}$$

quindi il momento di inerzia  $I_{Q\hat{e}}$  non dipende dal particolare polo  $Q$  scelto sull'asse.

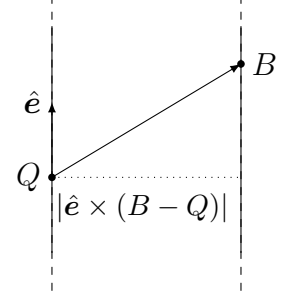
Abbiamo il seguente

**Proposizione 50. (Huygens-Steiner)** *Vale la seguente proprietà:*

$$I_{Q\hat{e}} = I_{B\hat{e}} + m|\hat{e} \times (B - Q)|^2, \quad (6.32)$$

in cui  $B$  è il baricentro del corpo rigido.

*Dimostrazione.* Il risultato si ottiene subito calcolando  $\hat{e} \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{e}$  tramite la (6.31).  $\square$



**Osservazione 26.** *Dalla (6.32) segue che*

$$I_{B\hat{e}} = \min_{Q \in \mathbb{E}^3} I_{Q\hat{e}}.$$

La relazione (6.32) si chiama **teorema di Huygens-Steiner**.

## Matrici di inerzia

Fissata una base  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ , l'operatore di inerzia  $\mathfrak{I}_Q$  si scrive tramite la seguente matrice

$$I_Q = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}, \quad I_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{e}'_j.$$

Più precisamente, posto

$$P_h - Q = x_h \hat{e}'_1 + y_h \hat{e}'_2 + z_h \hat{e}'_3, \quad h = 1, \dots, N, \quad (6.33)$$

si ha

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_{h=1}^N m_h (y_h^2 + z_h^2); & I_{22} &= \sum_{h=1}^N m_h (x_h^2 + z_h^2); & I_{33} &= \sum_{h=1}^N m_h (x_h^2 + y_h^2); \\ I_{12} &= - \sum_{h=1}^N m_h x_h y_h; & I_{13} &= - \sum_{h=1}^N m_h x_h z_h; & I_{23} &= - \sum_{h=1}^N m_h y_h z_h. \end{aligned}$$

Infatti

$$I_{ij} = \sum_{h=1}^N m_h \hat{e}'_i \times (P_h - Q) \cdot \hat{e}'_j \times (P_h - Q),$$

con

$$\begin{aligned}\hat{e}'_1 \times (P_h - Q) &= y_h \hat{e}'_3 - z_h \hat{e}'_2, \\ \hat{e}'_2 \times (P_h - Q) &= z_h \hat{e}'_1 - x_h \hat{e}'_3, \\ \hat{e}'_3 \times (P_h - Q) &= x_h \hat{e}'_2 - y_h \hat{e}'_1.\end{aligned}$$

## Simmetrie e momenti principali di Inerzia

Gli autovalori dell'operatore  $\mathfrak{I}_Q$  si chiamano **momenti principali** di inerzia e le direzioni degli autovettori si dicono **direzioni principali** di inerzia. Più semplicemente si parlerà anche di momenti e direzioni principali.

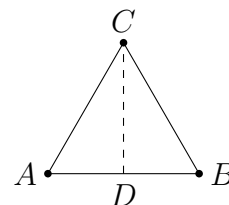
La matrice di inerzia è simmetrica, dunque per il teorema spettrale essa è diagonalizzabile in una base ortonormale  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ . Possiamo quindi trovare una matrice di cambiamento di base  $B$  che corrisponda ad una rotazione e che porti la matrice di inerzia in forma diagonale, cioè

$$B^T I_Q B = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

dove  $I_1, I_2, I_3$  sono i momenti principali di inerzia. Una base  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  in cui  $I_Q$  si scrive in forma diagonale si dice **base principale** (di inerzia).

**Osservazione 27.** *Dato un corpo rigido, il fatto che  $\mathcal{B}$  sia una base principale per l'operatore di inerzia  $\mathfrak{I}_Q$  dipende dalla scelta del polo  $Q$ .*

Si consideri ad esempio un corpo rigido formato da tre masse uguali  $m$  poste ai vertici  $A, B, C$  di un triangolo equilatero  $\mathcal{T}$  di lato  $\ell$ . Sia  $D$  il punto medio del lato  $AB$  e  $h$  l'altezza di  $\mathcal{T}$ . Mostriamo che il segmento  $AB$  individua una direzione principale di inerzia per  $\mathfrak{I}_D$ , ma non per  $\mathfrak{I}_A$ . Osserviamo che la direzione ortogonale al piano di  $\mathcal{T}$  è sempre principale, qualunque sia il polo  $Q$  scelto nel piano di  $\mathcal{T}$ .



Infatti, scelta la base  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  con

$$\hat{e}'_1 = \frac{B - A}{|B - A|}, \quad \hat{e}'_3 = \frac{(B - A) \times (C - A)}{|(B - A) \times (C - A)|}, \quad \hat{e}'_2 = \hat{e}'_3 \times \hat{e}'_1$$

si ha sempre

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

perché la terza coordinata di tutti i punti del corpo è nulla. Si ha inoltre, con ovvio significato dei simboli,

$$I_{12}^D = \hat{e}'_1 \cdot \mathfrak{I}_D \hat{e}'_2 = 0,$$



perché se l'origine delle coordinate è  $D$ , cioè se poniamo  $Q = D$  nella (6.33), si ha

$$x_A = -x_B, \quad x_C = y_A = y_B = 0.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} I_{12}^A &= \hat{e}'_1 \cdot \mathfrak{I}_A \hat{e}'_2 = \hat{e}'_1 \cdot [m(B-A) \times (\hat{e}'_2 \times (B-A)) + m(C-A) \times (\hat{e}'_2 \times (C-A))] \\ &= m \hat{e}'_1 \cdot [|B-A|^2 \hat{e}'_2 - [(B-A) \cdot \hat{e}'_2](B-A) + |C-A|^2 \hat{e}'_2 - [(C-A) \cdot \hat{e}'_2](C-A)] \\ &= -m[(C-A) \cdot \hat{e}'_1][(C-A) \cdot \hat{e}'_2] = -\frac{\sqrt{3}}{4} m \ell^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo alcune proprietà dei momenti e degli assi principali di inerzia.

**Proposizione 51.** *Valgono le seguenti proprietà:*

- (i) *Se esiste un piano  $\Pi$  di simmetria per riflessione (cioè, detta  $\tilde{\mathcal{R}} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  la riflessione rispetto a  $\Pi$ , ad ogni punto  $P$  di massa  $m$  del corpo corrisponde un altro punto  $\tilde{\mathcal{R}}P$  del corpo con la stessa massa) allora la direzione ortogonale al piano  $\Pi$  è principale per  $\mathfrak{I}_Q$ , dove  $Q$  è un qualunque punto di  $\Pi$ .*
- (ii) *Se esiste un asse  $r$  di simmetria per rotazione (cioè, per ogni punto  $P$  di massa  $m$  del corpo esiste un intero  $k > 1$  tale che, detta  $\mathcal{R}_k : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  la rotazione di  $2\pi/k$  attorno ad  $r$ , i punti dell'orbita  $\{\mathcal{R}_k^h P\}_{h=0, \dots, k-1}$  di  $P$  sotto l'azione del gruppo ciclico generato da  $\mathcal{R}_k$  corrispondono ad altri punti del corpo con la stessa massa  $m$ ) allora la direzione dell'asse  $r$  è principale per  $\mathfrak{I}_Q$ , dove  $Q$  è un qualunque punto di  $r$ .*

Inoltre, se  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  è una base principale per  $\mathfrak{I}_Q$ ,

- (iii) *I momenti principali di inerzia soddisfano  $I_1 \leq I_2 + I_3$  e si ha  $I_1 = I_2 + I_3$  solo quando il corpo rigido è piano, e sta nel piano  $Q\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ .*
- (iv) *Sia  $\vec{v}$  un autovettore di  $\mathfrak{I}_Q$  con autovalore  $\lambda$ .*
  1. *Se  $\vec{v} = v_i \hat{e}'_i + v_j \hat{e}'_j$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$  e  $v_i v_j \neq 0$ , allora tutti i vettori del piano generato da  $\hat{e}'_i, \hat{e}'_j$  definiscono direzioni principali di inerzia con lo stesso valore  $\lambda = I_i = I_j$  del momento principale.*
  2. *Se  $\vec{v} = \sum_{j=1}^3 v_j \hat{e}'_j$ ,  $v_j \neq 0 \forall j$ , allora  $\mathfrak{I}_Q$  è un multiplo dell'identità, quindi tutte le direzioni sono principali.*

*Dimostrazione.* (i) Consideriamo un riferimento  $Q\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ , dove  $Q$  è un punto del piano  $\Pi$  e l'asse  $Q\hat{e}'_3$  è ortogonale a  $\Pi$ . Osserviamo che  $I_{13} = I_{23} = 0$  perché, dette  $x_h, y_h, z_h$  le coordinate di un punto  $P_h$  del corpo, se  $z_h = 0$  questo non contribuisce alla somma che definisce  $I_{13}, I_{23}$ . Se invece  $z_h \neq 0$  esiste un altro punto  $P_k$  del

corpo con la stessa massa e tale che  $x_h = x_k, y_h = y_k, z_h = -z_k$ , quindi i contributi dei due punti a  $I_{13}, I_{23}$  sono opposti.

(ii) Consideriamo un riferimento  $Q\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ , dove  $Q$  è un punto dell'asse  $r$  e  $Q\hat{e}'_3 = r$ . Osserviamo che  $I_{13} = I_{23} = 0$ . Dimostriamo che il numero complesso  $I_{13} + iI_{23}$  è nullo, dove  $i$  è l'unità immaginaria. Infatti possiamo trovare  $s$  interi  $k_1, \dots, k_s$ , dove ogni  $k_j$  è  $\geq 1$  e  $\sum_{j=1}^s k_j = N$ , tali che

$$I_{13} + iI_{23} = - \sum_{h=1}^N m_h (x_h + iy_h) z_h = - \sum_{j=1}^s m_j z_j \sum_{l=0}^{k_j-1} \omega_{k_j}^l (x_j + iy_j)$$

dove  $\omega_{k_j} = e^{2\pi i/k_j}$ . Si conclude utilizzando il fatto che per ogni  $k \in \mathbb{N}$  si ha

$$\sum_{h=0}^{k-1} \omega_k^h = \frac{\omega_k^k - 1}{\omega_k - 1} = 0.$$

(iii) Segue direttamente dalle formule per  $I_{jj}, j = 1, 2, 3$ .

(iv) Dalle relazioni  $\mathfrak{I}_Q \hat{e}'_j = I_j \hat{e}'_j, \vec{v} = \sum_{k=1}^3 v_k \hat{e}'_k$  si ha

$$\sum_{k=1}^3 v_k I_k \hat{e}'_k = \mathfrak{I}_Q \vec{v} = \lambda \vec{v} = \sum_{k=1}^3 v_k \lambda \hat{e}'_k.$$

Dall'unicità della rappresentazione di un vettore come combinazione lineare degli elementi della base abbiamo  $\lambda = I_k$  se  $v_k \neq 0$ . Da qui segue la tesi, infatti se  $\mathfrak{I}_Q \hat{e}'_i = \lambda \hat{e}'_i, \mathfrak{I}_Q \hat{e}'_j = \lambda \hat{e}'_j$ , con  $i \neq j$  allora ogni combinazione lineare  $\alpha \hat{e}'_i + \beta \hat{e}'_j$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) è un autovettore di  $\mathfrak{I}_Q$  con autovalore  $\lambda$ :

$$\mathfrak{I}_Q(\alpha \hat{e}'_i + \beta \hat{e}'_j) = \alpha \lambda \hat{e}'_i + \beta \lambda \hat{e}'_j = \lambda(\alpha \hat{e}'_i + \beta \hat{e}'_j).$$

Se inoltre troviamo un autovettore  $\vec{v} = \sum_{j=1}^3 v_j \hat{e}'_j$  con  $v_1 v_2 v_3 \neq 0$  allora  $I_1 = I_2 = I_3$  e la matrice di inerzia è un multiplo dell'identità. □

**Esercizio 17.** Consideriamo un corpo rigido costituito da  $N$  punti di uguale massa  $m$ , posti ai vertici di uno dei cinque poliedri platonici, cioè il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro ( $N$  può essere uguale a 4, 8, 12). Dimostrare che ogni direzione è principale per l'operatore di inerzia  $\mathfrak{I}_B$  relativo al baricentro  $B$ .

## 6.5 Momento angolare ed energia cinetica di un corpo rigido

Fissiamo un riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ . Dato un corpo rigido  $\mathfrak{C}$ , usando la formula fondamentale (6.19) abbiamo

$$\vec{M}_Q = \sum_{h=1}^N m_h (P_h - Q) \times [\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P_h - O')] = \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} &= m(B - Q) \times \vec{v}_{O'} + \mathfrak{I}_Q \vec{\omega} + m(B - Q) \times [\vec{\omega} \times (Q - O')] \quad (6.35) \\ &= m(B - Q) \times \vec{v}_Q + \mathfrak{I}_Q \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Osserviamo che nella (6.34) le velocità  $\vec{v}_{O'}$ ,  $\vec{v}_Q$  sono quelle di punti solidali a  $\mathfrak{C}$ . La formula (6.34) si semplifica in

$$\vec{M}_Q = \mathfrak{I}_Q \vec{\omega}$$

per  $\vec{v}_Q = \mathbf{0}$  oppure per  $Q = B$ .

Utilizzando la (6.19) possiamo anche rappresentare l'energia cinetica come

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}_{O'}|^2 + m \vec{\omega} \cdot (B - O') \times \vec{v}_{O'} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathfrak{I}_{O'} \vec{\omega}$$

Se scegliamo  $O' = B$  otteniamo la versione per i corpi rigidi del teorema di König:

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathfrak{I}_B \vec{\omega}. \quad (6.36)$$

Se  $\vec{v}_{O'} = \vec{\mathbf{0}}$  otteniamo

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathfrak{I}_{O'} \vec{\omega}.$$

## 6.6 Corpi rigidi continui

Si distinguono corpi continui a 1, 2 e 3 dimensioni, a cui si attribuiscono rispettivamente una densità lineare, di superficie e di volume, denotate con  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$ . Consideriamo l'ultimo caso, che è il più generale. La discussione relativa agli altri casi è simile. Sia

$$\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad \mathbf{x}' \mapsto \rho(\mathbf{x}')$$

la densità di volume, dove  $\mathbf{x}'$  sono coordinate in un riferimento solidale  $\Sigma'$ . Assumiamo che  $\rho$  sia integrabile sull'insieme  $C \subset \mathbb{R}^3$  delle coordinate dei punti del corpo relative a  $\Sigma'$ . Se il corpo rigido non è soggetto ad altri vincoli, una

parametrizzazione locale dell'insieme delle configurazioni del corpo è data dalla mappa

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') = \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3, \quad (6.37)$$

con  $\mathbf{q} = (\mathbf{x}_{O'}, \boldsymbol{\alpha})$  ed  $R = R(\boldsymbol{\alpha})$ , dove  $\boldsymbol{\alpha} = (\varphi, \theta, \psi)$  sono gli angoli di Eulero (vedi Sezione 6.2.3).

Le velocità dei punti del corpo si ottengono dalla mappa (6.37):

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3, \quad (6.38)$$

con  $\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{v}_{O'}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ .

Introduciamo le definizioni delle quantità dinamiche sostituendo alla somma finita l'integrale sull'insieme  $C$  occupato dal corpo. L'insieme  $C$  viene definito in un riferimento solidale al corpo, in modo che  $C$  non cambi col tempo.

MASSA TOTALE

$$m = \int_C \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

BARICENTRO

$$m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) = \int_C \rho(\mathbf{x}') R\mathbf{x}' d\mathbf{x}' = R \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}' \quad (6.39)$$

**Osservazione 28.** Se  $O' = B$  si ottiene

$$\int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}' = \mathbf{0}.$$

QUANTITÀ DI MOTO

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_C \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= m\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}' = m\mathbf{v}_{O'} + m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) \\ &= m\mathbf{v}_{O'} + m(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_{O'}) = m\mathbf{v}_B. \end{aligned}$$

MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A  $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \int_C \rho(\mathbf{x}') (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \int_C \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q) \times (\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (6.40)$$

Introduciamo la matrice di inerzia  $I_Q$ , definita da

$$\begin{aligned} I_Q \mathbf{u} &= \int_C \rho(\mathbf{x}') (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times [\mathbf{u} \times (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q)] d\mathbf{x}' \\ &= \int_C \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q) \times [\mathbf{u} \times (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q)] d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (6.41)$$

per ogni  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ . Se  $O' = Q$  la (6.41) assume l'espressione più semplice

$$I_Q \mathbf{u} = \int_C \rho(\mathbf{x}') R \mathbf{x}' \times (\mathbf{u} \times R \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

e la (6.40) si scrive

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \int_C \rho(\mathbf{x}') R \mathbf{x}' \times (\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times R \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_C \rho(\mathbf{x}') R \mathbf{x}' d\mathbf{x}' \times \mathbf{v}_Q + I_Q \boldsymbol{\omega} = \\ &= m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{v}_Q + I_Q \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

#### MOMENTI DI INERZIA

Le componenti  $I_{ij}$  della matrice di inerzia  $I_{O'}$  in una base solidale  $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$  si scrivono

$$I_{ij} = \int_C \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{e}_i \times \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

#### ENERGIA CINETICA

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_C \rho(\mathbf{x}') |\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}')|^2 d\mathbf{x}' = \frac{1}{2} \int_C \rho(\mathbf{x}') |\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R \mathbf{x}'|^2 d\mathbf{x}' = \\ &= \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_{O'}|^2 + \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} \times R \mathbf{x}' d\mathbf{x}' + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_{O'} \boldsymbol{\omega} = \\ &= \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_{O'}|^2 + m \mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_{O'} \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

**Osservazione 29.** Se  $O' = B$  si ottiene

$$T = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_B \boldsymbol{\omega}.$$

**Esercizio 18.** Mostrare che vale il teorema di scomposizione di  $\mathbf{M}_Q$ .

Si introduce la densità di forza  $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}')$ .

#### RISULTANTE DELLE FORZE

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

#### MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE RISPETTO A $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\mathbf{N}_Q = \int_C (\chi(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

Se  $O' = Q$  si ottiene l'espressione più semplice

$$\mathbf{N}_Q = \int_C R \mathbf{x}' \times \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

**Esempio 10.** (forza di gravità) Con una scelta opportuna del riferimento abbiamo

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = -\rho(\mathbf{x}')g\mathbf{e}_3,$$

per cui la risultante è

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = -mg\mathbf{e}_3,$$

ed il momento risultante rispetto ad un polo  $Q$  è

$$\mathbf{N}_Q = \int_C R\mathbf{x}' \times [-\rho(\mathbf{x}')g\mathbf{e}_3] d\mathbf{x}' = R \int_C \rho(\mathbf{x}')\mathbf{x}' d\mathbf{x}' \times (-g\mathbf{e}_3) = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times (-mg\mathbf{e}_3),$$

in cui abbiamo usato la relazione (6.39) con  $O' = Q$ .

**Esempio 11.** (forza centrifuga) Se  $\boldsymbol{\omega}$  è la velocità angolare abbiamo

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = -\rho(\mathbf{x}')\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}'),$$

per cui, usando (6.39), la risultante è

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'})),$$

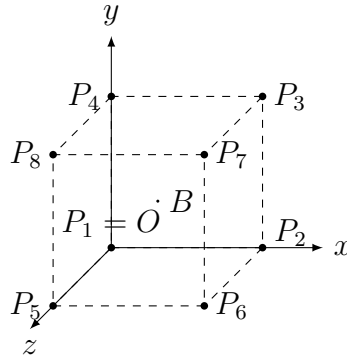
ed il momento risultante rispetto ad un polo  $Q$  è (scegliendo  $O' = Q$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_Q &= - \int_C \rho(\mathbf{x}')R\mathbf{x}' \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}')) d\mathbf{x}' = \\ &= - \int_C \rho(\mathbf{x}')(\boldsymbol{\omega} \cdot R\mathbf{x}')R\mathbf{x}' \times \boldsymbol{\omega} d\mathbf{x}'. \end{aligned}$$

## 6.7 Esercizi

**Esercizio 19.** Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$  e si consideri un corpo rigido  $\mathcal{C}$  formato da 8 punti materiali  $P_1, \dots, P_8$  di massa  $m$  posti ai vertici di un cubo di lato  $\ell$ . Il punto  $P_1$  del corpo si trova nell'origine  $O$  e i tre spigoli del cubo contenenti  $P_1$  giacciono sugli assi  $Ox, Oy, Oz$  (vedi figura).

- i) Sia  $B$  il baricentro del corpo rigido. Calcolare il momento di inerzia di  $\mathcal{C}$  rispetto all'asse passante per  $O$  e  $B$ .
- ii) Consideriamo il vettore  $\hat{\mathbf{e}}$ , di coordinate  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $|\hat{\mathbf{e}}| = 1$ . Calcolare il momento di inerzia di  $\mathcal{C}$  rispetto all'asse passante per  $O$  e parallelo ad  $\hat{\mathbf{e}}$ .



**Soluzione.** i) Posto

$$\hat{e}_B = \frac{B - O}{|B - O|},$$

il momento di inerzia rispetto all'asse passante per  $O$  e  $B$  si scrive

$$I_{O\hat{e}_B} = \hat{e}_B \cdot \mathfrak{J}_O \hat{e}_B.$$

Osserviamo che il momento di inerzia rispetto ad un asse non dipende dal polo scelto sull'asse, quindi

$$I_{O\hat{e}_B} = I_{B\hat{e}_B}.$$

Per il corpo rigido considerato ogni asse passante per il baricentro è principale e si ha

$$I_{B\hat{e}_B} = I_{B\hat{e}},$$

dove  $\hat{e}$  è un qualunque vettore unitario. Scegliendo ad esempio  $\hat{e} = \hat{e}_1$  e considerato che tutti i punti del corpo si trovano a distanza  $d = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell$  dall'asse  $O\hat{e}_1$ , si trova

$$I_{O\hat{e}_B} = 8md^2 = 4m\ell^2.$$

ii) Sia  $\hat{e}$  il vettore unitario di coordinate  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Per il teorema di Huygens-Steiner si ha

$$I_{O\hat{e}} = I_{B\hat{e}} + (8m)d^2,$$

dove

$$I_{B\hat{e}} = 4m\ell^2$$

per il risultato del punto precedente e  $d$  è la distanza tra gli assi  $O\hat{e}$  e  $B\hat{e}$ . Quest'ultima è data da

$$d = |(B - O) \times \hat{e}| = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma},$$

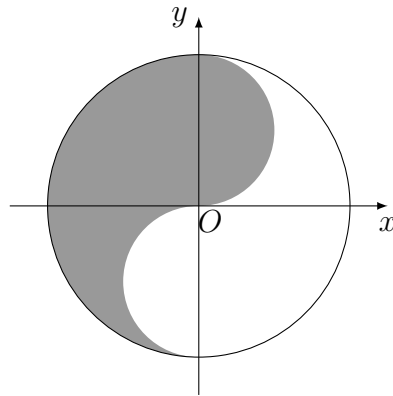
infatti

$$(B - O) \times \hat{e} = \frac{\ell}{2} [(\beta - \gamma)\hat{e}_1 + (\gamma - \alpha)\hat{e}_2 + (\alpha - \beta)\hat{e}_3].$$

In conclusione si ottiene

$$I_{O\hat{e}} = 4m\ell^2(2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma).$$

**Esercizio 20.** Calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al polo  $O$  del disco non omogeneo di raggio  $2R$  rappresentato in figura. La parte scura del disco ha densità costante  $2\mu$ , mentre la parte chiara ha densità  $\mu$ , con  $\mu > 0$ . Le curve che separano le due parti sono semicirconferenze di raggio  $R$ .



**Soluzione. ...**





# Capitolo 7

## Sistemi vincolati

Introduciamo le diverse classificazioni dei vincoli e presentiamo il problema dello studio del moto vincolato in cui, oltre al moto, appaiono come incognite anche le forze di reazione dei vincoli.

### 7.1 Vincoli e reazioni vincolari

I vincoli sono una restrizione dell'insieme delle posizioni e velocità dei punti del sistema. Queste restrizioni si ottengono imponendo delle relazioni (equazioni o disequazioni) che possono coinvolgere le coordinate delle posizioni dei punti, quelle delle loro velocità ed il tempo. Se in tali relazioni appaiono delle disequazioni, che non si possono ridurre ad equazioni<sup>1</sup>, allora i vincoli si dicono **unilaterali**. Altrimenti si dicono **bilaterali**. Nel seguito tratteremo esclusivamente il caso dei vincoli bilaterali. Inoltre, i vincoli si dicono **fissi** se nelle relazioni che li definiscono non appare esplicitamente il tempo  $t$ . Se invece il tempo vi appare tali vincoli si dicono **mobili**.

Con il termine ‘*vincoli*’ indicheremo anche i mezzi materiali con cui vengono attuate queste restrizioni alle posizioni e velocità.

Esempi elementari di sistemi meccanici con vincoli bilaterali che si incontrano comunemente sono i seguenti: 1) un punto materiale vincolato ad una curva o una superficie, 2) un insieme di punti materiali che mantengono invariata la loro distanza mutua (cioè un corpo rigido), 3) un corpo rigido che rotola senza strisciare su una superficie.

Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali di masse  $m_1, \dots, m_N$  soggetto a vincoli bilaterali. Tipicamente questi vincoli sono definiti da un'equazione vettoriale della forma

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (7.1)$$

---

<sup>1</sup>ad esempio il sistema  $f(\mathbf{x}) \geq 0, f(\mathbf{x}) \leq 0$  si riduce a  $f(\mathbf{x}) = 0$ .

dove  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ ,  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$  denotano le coordinate delle posizioni e delle velocità dei punti,  $\mathbf{a}$  è un vettore di  $\mathbb{R}^k$  e  $B$  una matrice di dimensioni  $k \times 3N$ , entrambi con coefficienti che sono funzioni di  $(\mathbf{x}, t)$  di classe  $C^2$ . Osserviamo che in (7.1) la dipendenza dalle velocità è lineare.

Affinchè queste equazioni siano soddisfatte si assume che i vincoli esercitino delle forze  $\Phi_j$  sui punti del sistema, che si chiamano **reazioni vincolari**. Anche in presenza di vincoli assumiamo che valgano le equazioni di Newton, che in questo caso si scrivono nella forma

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \Phi_j(t), \quad j = 1 \dots N.$$

Le reazioni vincolari  $\Phi_j$  si aggiungono alle forze attive  $\mathbf{F}_j$ , ma sono di natura diversa, in quanto le  $\mathbf{F}_j$  sono funzioni note dello stato cinetico dei punti del sistema mentre le  $\Phi_j$  sono incognite da determinarsi insieme al moto del sistema. Quindi, risolvere un problema di moto vincolato significa trovare il moto  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$  e le reazioni vincolari  $\Phi_j(t)$ . Vedremo che per risolvere tale problema è necessario aggiungere delle ipotesi sulle reazioni vincolari.

### 7.1.1 Coppie cinematiche

Altri esempi di vincoli sono dati dalle **coppie cinematiche**. Se due corpi rigidi sono vincolati in modo tale che una superficie  $\sigma_1$  solidale al primo resti sempre a contatto con una superficie  $\sigma_2$  solidale al secondo, allora si dice che i due corpi (o le due superfici) formano una coppia cinematica. I tipi principali di coppie cinematiche sono i seguenti:

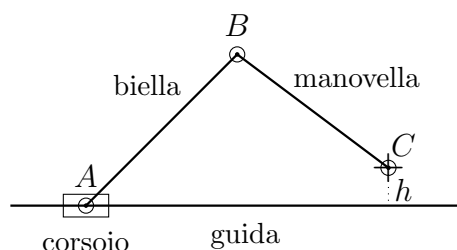
1. **coppia prismatica:**  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sono superfici cilindriche uguali, non di rotazione, per cui è possibile solo un moto traslatorio di un corpo rispetto all'altro lungo una direzione, che è quella delle generatrici del cilindro;
2. **coppia rotoidale:**  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sono superfici di rotazione uguali e coassiali, per cui è possibile solo un moto rotatorio di un corpo rispetto all'altro. L'asse comune alle due superfici si dice **asse della coppia**. Esse formano una cerniera cilindrica, che può essere fissa oppure mobile;
3. **coppia elicoidale:**  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sono superfici elicoidali uguali e coassiali. L'asse comune alle due superfici si dice asse della coppia. In questo caso in corrispondenza ad un moto traslatorio si ha anche un moto rotatorio ad esso correlato: si ha una traslazione di  $p$  (detto **passo dell'elica**) in direzione dell'asse della coppia quando  $\sigma_2$  ruota di  $2\pi$  rispetto a  $\sigma_1$ .
4. **coppia rototraslatoria:**  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sono superfici di rotazione, cilindriche, uguali e coassiali, con sezione circolare. L'asse della coppia corrisponde all'asse comune dei due cilindri. È possibile che i due corpi svolgano, l'uno

rispetto all'altro, sia un moto traslatorio lungo la direzione dell'asse della coppia che un moto rotatorio attorno allo stesso asse;

5. **coppia sferica:**  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sono sfere concentriche uguali, o porzioni di esse. Il centro delle due sfere si chiama **centro della coppia**.

Definiamo **catena cinematica** un sistema di corpi rigidi collegati con coppie cinematiche, tali che il moto relativo di ognuna di esse abbia un solo grado di libertà.

**Esempio 12.** Chiamiamo **manovellismo** una catena cinematica costituita da quattro corpi che si muovono in un piano e sono disposti come in figura: in base alle loro funzioni questi corpi si dicono **biella**, **manovella**, **guida** e **corsoio**. La guida e il corsoio formano una coppia prismatica; gli altri corpi sono collegati tra loro da coppie rotoidali. L'estremo  $C$  della manovella è fissato tramite una cerniera cilindrica. Se la distanza  $h$  tra  $C$  e la guida è nulla allora il manovellismo si dice *centrato*.



## 7.1.2 Studio del moto vincolato

Mostriamo alcuni esempi elementari che illustrano i problemi che si incontrano nello studio del moto vincolato.

### Punto materiale su una curva

Come primo esempio consideriamo il caso di un punto materiale vincolato a muoversi su una curva regolare in  $\mathbb{R}^3$ . Introduciamo la **base di Frénet**, che è una base naturale sulla quale si possono proiettare le equazioni di Newton.

Consideriamo una curva regolare  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , parametrizzata per lunghezza d'arco  $s$ . Indicando con  $'$  la derivata rispetto al parametro  $s$  si ha

$$\int_0^s |\gamma'(\sigma)| d\sigma = s,$$

o anche

$$|\gamma'(s)| = 1,$$

per ogni valore di  $s$  scelto nell'intervallo di definizione di  $\gamma$ . Allora si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \gamma(s(t)), \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{s}(t)\gamma'(s(t)), \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{s}^2(t)\gamma''(s(t)) + \ddot{s}(t)\gamma'(s(t)).\end{aligned}\tag{7.2}$$

Consideriamo la base (mobile) di  $\mathbb{R}^3$ , detta **base di Frénet**, costituita dai vettori

$$\mathbf{e}_t(s) = \gamma'(s), \quad \mathbf{e}_n(s) = \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}, \quad \mathbf{e}_b(s) = \mathbf{e}_t(s) \times \mathbf{e}_n(s).$$

Poiché  $s$  è il parametro arco si ha

$$\mathbf{e}_t(s) \cdot \mathbf{e}_t(s) = 1, \quad \forall s.\tag{7.3}$$

Derivando la relazione (7.3) rispetto ad  $s$  si ottiene

$$\mathbf{e}_t(s) \cdot \mathbf{e}_n(s) = 0.$$

La funzione  $\kappa(s) = |\gamma''(s)|$  si chiama **curvatura** della curva  $\gamma$ . Con questa notazione si ha

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{s}^2\kappa(s)\mathbf{e}_n(s) + \ddot{s}\mathbf{e}_t(s).$$

I vettori  $\mathbf{e}_t(s), \mathbf{e}_n(s), \mathbf{e}_b(s)$  si chiamano rispettivamente vettore **tangente**, **normale** e **binormale**.

Supponiamo che il punto sia soggetto ad una forza  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$  e alla reazione vincolare  $\Phi$  che costringe il punto a restare sulla curva  $\gamma$ . L'equazione di Newton si scrive

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \Phi(t),\tag{7.4}$$

dove le incognite sono il moto  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$  e la reazione vincolare  $\Phi$  che dipende da esso. Se sostituiamo le formule (7.2) nell'equazione (7.4) e proiettiamo questa equazione sulla base di Frénet si ottiene

$$\begin{aligned}m\ddot{s} &= F_t(s, \dot{s}, t) + \Phi_t, \\ m\dot{s}^2\kappa(s) &= F_n(s, \dot{s}, t) + \Phi_n, \\ 0 &= F_b(s, \dot{s}, t) + \Phi_b,\end{aligned}\tag{7.5}$$

dove  $F_t, F_n, F_b, \Phi_t, \Phi_n, \Phi_b$  sono le componenti della forza  $\mathbf{F}$  e della reazione vincolare  $\Phi$  lungo i vettori di questa base.

Già nel semplice esempio di un punto materiale vincolato ad una curva regolare si vede che, per determinare il moto  $s(t)$  e la reazione vincolare  $\Phi(t)$ , è necessario

fare delle ipotesi aggiuntive. Un'ipotesi comune è assumere che la reazione vincolare sia ortogonale alla curva (vincolo *liscio*, o *privo di attrito*). Questa ipotesi si scrive in modo naturale nella base di Frénet:

$$\Phi_t = \Phi \cdot \mathbf{e}_t = 0.$$

In questo caso la prima equazione in (7.5) si scrive

$$m\ddot{s} = F_t(s, \dot{s}, t).$$

Poiché questa equazione non contiene reazioni vincolari, da essa si può determinare il moto  $t \mapsto s(t)$ . Sostituendo  $s(t), \dot{s}(t)$  nelle altre due equazioni in (7.5) si ottengono le componenti  $\Phi_n, \Phi_b$  della reazione vincolare ortogonali al vincolo in funzione del tempo  $t$ :

$$\Phi_n = -F_n(s, \dot{s}, t) + m\dot{s}^2\kappa(s), \quad \Phi_b = -F_b(s, \dot{s}, t).$$

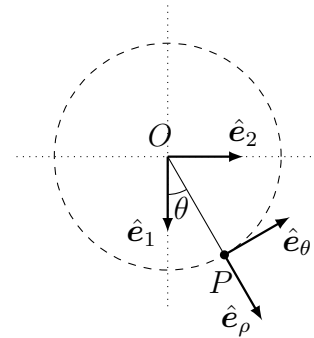
Sottolineamo che la soluzione del problema dipende dall'ipotesi fatta sulla reazione vincolare.

**Esercizio 21.** *Determinare il moto e la reazione vincolare per una particella di massa  $m$  vincolata a muoversi su una circonferenza di raggio  $R$  scabra, assumendo che valga la legge di **Coulomb-Morin***

$$\Phi_t = -\frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} \sqrt{\Phi_n^2 + \Phi_b^2}.$$

### Il pendolo

Si fissi un riferimento  $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$ , con l'asse  $O\hat{\mathbf{e}}_1$  verticale discendente. Consideriamo un pendolo, costituito da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  fissato ad un estremo di una sbarretta di lunghezza  $\ell$  e massa trascurabile. Il punto è quindi vincolato a muoversi su una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $\ell$ . Assumiamo che il sistema sia soggetto alla forza di gravità, di accelerazione  $g$ , e che la reazione vincolare  $\Phi$  sia diretta lungo la sbarretta, e quindi ortogonale alla circonferenza (vedi figura).



L'equazione di Newton si scrive

$$m\ddot{\mathbf{x}} = mg\mathbf{e}_1 + \Phi\mathbf{e}_\rho, \quad (7.6)$$

in cui, detto  $\theta$  l'angolo tra il pendolo e la direzione verticale,

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$$

individua la direzione della reazione vincolare. Sia inoltre

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2.$$

Usando le relazioni

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\ell\dot{\theta}^2\mathbf{e}_\rho + \ell\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_1 = \cos\theta\mathbf{e}_\rho - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$$

e proiettando l'equazione (7.6) lungo  $\mathbf{e}_\rho$  ed  $\mathbf{e}_\theta$  si ottiene

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0, \quad (7.7)$$

$$\dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell}\cos\theta + \frac{\Phi}{m\ell} = 0. \quad (7.8)$$

La (7.7) è l'equazione del moto del pendolo e corrisponde all'equazione del moto unidimensionale

$$\ddot{\theta} = -V'(\theta), \quad V(\theta) = -\frac{g}{\ell}\cos\theta.$$

Infine, dalla relazione (7.8) si può ricavare la reazione vincolare.

Concludiamo la discussione di questo esempio mostrando il ritratto di fase:

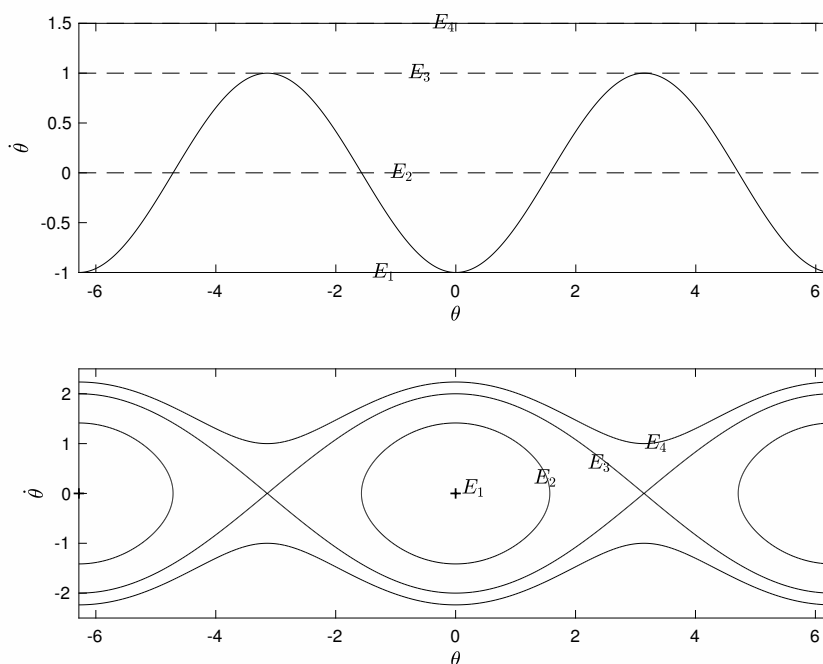


Figura 7.1: Sopra: grafico dell'energia potenziale  $V(\theta)$  del pendolo. Sotto: curve di livello dell'energia totale  $E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + V(\theta)$ .

## 7.2 Varietà e spazi tangenti

Sia  $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  una mappa differenziabile, con  $1 \leq k < m$ . Ricordiamo che

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

è una sottovarietà differenziabile di  $\mathbb{R}^m$  di dimensione  $n = m - k$  se

$$\text{rank} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = k, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}.$$

Nell'intorno di ogni punto di  $\mathcal{C}$  possiamo introdurre un sistema di coordinate locali  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  tramite delle mappe, dette parametrizzazioni locali, della forma

$$\mathbb{R}^n \supseteq U \ni \mathbf{q} \mapsto \chi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m, \quad (7.9)$$

dove  $U$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e

$$\text{rank} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) = n, \quad \forall \mathbf{q} \in U. \quad (7.10)$$

**Definizione 18.** *Dati una sottovarietà  $\mathcal{C}$  di  $\mathbb{R}^m$  di dimensione  $n$  ed  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ , diciamo che il vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  è **tangente** a  $\mathcal{C}$  in  $\mathbf{x}$  se esistono  $\epsilon > 0$  ed una curva differenziabile*

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{C}$$

*tale che*

$$\gamma(0) = \mathbf{x}, \quad \gamma'(0) = \mathbf{v}.$$

Denotiamo con  $T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}$  l'insieme dei vettori tangenti a  $\mathcal{C}$  in  $\mathbf{x}$ .

**Proposizione 52.** *Per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}$ , l'insieme  $T_{\mathbf{x}_0}\mathcal{C}$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ .*

*Dimostrazione.* Data una parametrizzazione locale  $\mathbf{q} \mapsto \chi(\mathbf{q})$  di  $\mathcal{C}$  in un intorno di  $\mathbf{x}_0 = \chi(\mathbf{q}_0)$ , con  $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^n$ , i vettori

$$\frac{\partial \chi}{\partial q_1}(\mathbf{q}_0), \dots, \frac{\partial \chi}{\partial q_n}(\mathbf{q}_0) \quad (7.11)$$

sono linearmente indipendenti per la proprietà (7.10). Inoltre tutti i vettori di  $T_{\mathbf{x}_0}\mathcal{C}$  si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori in (7.11). Infatti ogni curva regolare  $s \mapsto \gamma(s) \in \mathcal{C}$  tale che  $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$  si può scrivere in un intorno di  $s = 0$  come

$$\gamma(s) = \chi(\mathbf{q}(s)),$$



attraverso una curva  $s \mapsto \mathbf{q}(s)$  che rappresenta  $\gamma$  nell'insieme delle coordinate  $\mathbf{q}$ . Quindi

$$\boldsymbol{\gamma}'(0) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}_0) q'_h(0). \quad (7.12)$$

□

**Definizione 19.** Per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}$ , l'insieme  $T_{\mathbf{x}_0}\mathcal{C}$  si chiama **spazio tangente** a  $\mathcal{C}$  in  $\mathbf{x}_0$ .

I coefficienti  $q'_1(0), \dots, q'_n(0)$  della combinazione lineare (7.12) dei vettori  $\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}$  sono dunque coordinate naturali sugli spazi tangenti, che indicheremo brevemente con  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ . Poniamo inoltre  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ . Data quindi una parametrizzazione locale  $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$  di  $\mathcal{C}$ , per tutte le scelte di  $\mathbf{q}$  ogni vettore  $\mathbf{v}$  tangente a  $\mathcal{C}$  in  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$  si scrive in modo unico come

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}) \dot{q}_h. \quad (7.13)$$

**Definizione 20.** Chiamiamo **fibrato tangente** alla varietà  $\mathcal{C}$  l'insieme

$$TC = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}\}.$$

**Proposizione 53.** Il fibrato tangente  $TC$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  di dimensione  $2n$ .

*Dimostrazione.* Se  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ , allora i vettori  $\mathbf{v}$  tangenti a  $\mathcal{C}$  in  $\mathbf{x}$  soddisfano la relazione

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

perché sono ortogonali a tutti i vettori  $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \mathbf{x}}$ , dove  $\Psi_j$  sono le componenti di  $\boldsymbol{\Psi}$ . Consideriamo la mappa

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \ni (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \xrightarrow{\tilde{\boldsymbol{\Psi}}} \left( \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}), \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{v} \right),$$

con matrice jacobiana

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial (\mathbf{x}, \mathbf{v})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} \right) & \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che

$$\text{rank} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial (\mathbf{x}, \mathbf{v})}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 2k$$

per ogni  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in TC$ . □

Una scelta naturale per descrivere il fibrato tangente è usare parametrizzazioni locali della forma

$$U \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \left( \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}), \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) \in T\mathcal{C}, \quad (7.14)$$

dove  $U$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

### 7.3 Vincoli olonomi, fissi e mobili

Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali le cui posizioni  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  sono vincolate in ogni istante  $t$  ad appartenere all'insieme

$$\mathcal{C}_t = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} : \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \}, \quad (7.15)$$

dove

$$\boldsymbol{\Psi} : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad 1 \leq k < 3N,$$

e si ha

$$\text{rank} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = k, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}_t, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (7.16)$$

Quindi per ogni tempo  $t$ , l'insieme delle configurazioni  $\mathcal{C}_t$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^{3N}$  di dimensione  $n = 3N - k$ , che si chiama **varietà delle configurazioni** al tempo  $t$ .

**Definizione 21.** *Il numero di gradi di libertà del sistema è la dimensione della varietà  $\mathcal{C}_t$ .*

**Osservazione 30.** *Il numero di gradi di libertà di un sistema meccanico corrisponde quindi al numero minimo di parametri scalari necessari per individuare, ad ogni istante, la configurazione del sistema.*

Se la mappa  $\boldsymbol{\Psi}$  non dipende dal tempo i vincoli sono fissi e si scrive semplicemente  $\mathcal{C}$  per la varietà delle configurazioni.

Nel caso di vincoli mobili, per ogni  $t \in \mathbb{R}$  fissato, le mappe della forma

$$U \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t) \in \mathcal{C}_t,$$

definiscono parametrizzazioni locali della varietà delle configurazioni  $\mathcal{C}_t$ . Le componenti  $q_1, \dots, q_n$  del vettore  $\mathbf{q}$  si chiamano **coordinate lagrangiane**. I possibili vettori velocità dei punti del sistema al tempo  $t$  si scrivono nella forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}(\mathbf{q}, t), \quad (7.17)$$

al variare di  $\mathbf{q}, t$  e delle componenti  $\dot{q}_h$  del vettore  $\dot{\mathbf{q}}$ , che si chiamano **velocità lagrangiane**. Infatti, se  $t \mapsto \mathbf{q}(t)$  è una curva in  $\mathbb{R}^n$  che rappresenta un moto  $t \mapsto \chi(\mathbf{q}(t), t) \in \mathcal{C}_t$ , derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) \dot{q}_h(t) + \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{q}(t), t).$$

Al variare dei coefficienti  $\dot{q}_h$  l'espressione

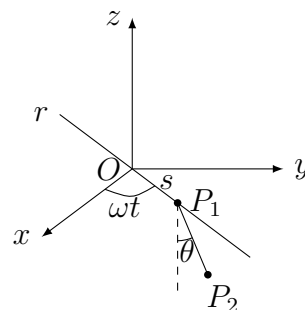
$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h \quad (7.18)$$

descrive tutti i vettori tangenti alla varietà  $\mathcal{C}_t$ : questi vettori si dicono anche **velocità virtuali**. Nel caso di vincoli fissi le velocità virtuali coincidono con quelle possibili, cioè

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

mentre, nel caso di vincoli mobili, queste due velocità sono genericamente distinte.

**Esercizio 22.** Fissato un riferimento  $Oxyz$ , con asse  $Oz$  verticale ascendente, consideriamo il sistema meccanico formato da due punti  $P_1, P_2$  vincolati a mantenere invariata la loro distanza. Il punto  $P_1$  può scivolare su una retta  $r$  passante per  $O$ , che ruota nel piano  $Oxy$  con velocità angolare costante  $\omega$ . Il punto  $P_2$  può muoversi su un piano verticale passante per la retta  $r$ . Scrivere la rappresentazione implicita dell'insieme delle configurazioni e mostrare che a ogni istante  $t$  questo è una varietà di dimensione 2, che indichiamo con  $\mathcal{C}_t$ . Usando come parametri l'ascissa  $s$  di  $P_1$  lungo  $r$  e l'angolo  $\theta$  che  $P_2 - P_1$  forma con la direzione verticale scrivere la parametrizzazione  $\chi(s, \theta, t)$ , in questo caso globale, di  $\mathcal{C}_t$ . Scrivere anche l'espressione di tutte le velocità possibili dei punti  $P_1, P_2$ .



**Soluzione.** Dette  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$  le coordinate dei due punti, per ogni tempo  $t$  l'insieme delle configurazioni è l'insieme degli zeri della mappa

$$\Psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t) = \begin{pmatrix} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - \ell^2 \\ z_1 \\ -x_1 \sin \omega t + y_1 \cos \omega t \\ -(x_2 - x_1) \sin \omega t + (y_2 - y_1) \cos \omega t \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobiana

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_2) & 2(y_1 - y_2) & 2(z_1 - z_2) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 2(z_2 - z_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \omega t & -\cos \omega t & 0 & -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 4 per ogni  $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$  in  $\mathcal{C}_t$  (verificarlo!).

Sia  $\mathbf{q} = (s, \theta)$ . Una parametrizzazione delle configurazioni dei due punti è data da

$$\chi(\mathbf{q}, t) = \begin{pmatrix} \chi_1(\mathbf{q}, t) \\ \chi_2(\mathbf{q}, t) \end{pmatrix}, \quad \chi_1 = \begin{pmatrix} s \cos \omega t \\ s \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} (s + l \sin \theta) \cos \omega t \\ (s + l \sin \theta) \sin \omega t \\ -l \cos \theta \end{pmatrix}$$

La parametrizzazione delle velocità dei punti è data da

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ \mathbf{v}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \chi_1}{\partial t}(\mathbf{q}, t) \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \chi_2}{\partial t}(\mathbf{q}, t) \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_1}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \cos \omega t & 0 \\ \sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{s} \cos \omega t \\ \dot{s} \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \cos \omega t & l \cos \theta \cos \omega t \\ \sin \omega t & l \cos \theta \sin \omega t \\ 0 & l \sin \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{s} \cos \omega t + l \dot{\theta} \cos \theta \cos \omega t \\ \dot{s} \sin \omega t + l \dot{\theta} \cos \theta \sin \omega t \\ l \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial t}(\mathbf{q}, t) &= \begin{pmatrix} -s \omega \sin \omega t \\ s \omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \chi_2}{\partial t}(\mathbf{q}, t) = \begin{pmatrix} -(s + l \sin \theta) \omega \sin \omega t \\ (s + l \sin \theta) \omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Definizione 22.** Diciamo che il vincolo è **olonomo**<sup>2</sup> se ad ogni istante  $t$  l'insieme delle configurazioni del sistema corrisponde<sup>3</sup> ad una varietà differenziabile  $\mathcal{C}_t$  e l'insieme delle velocità virtuali, quando il sistema si trova in una qualunque configurazione  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_t$ , è costituito da tutti i vettori dello spazio tangente  $T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}_t$ .

<sup>2</sup>Questo termine è stato introdotto da Heinrich Rudolf Hertz e deriva dal greco ὅλος (= tutto, intero) e νόμος (= legge), e si riferisce alla possibilità di scrivere una legge che coinvolga solo posizioni e tempo per l'equazione dei vincoli.

<sup>3</sup>la corrispondenza deve essere data da un **diffeomorfismo**, cioè da una mappa bigettiva, differenziabile, con inversa differenziabile.

Abbiamo sicuramente un vincolo olonomo se gli insiemi  $\mathcal{C}_t$  delle configurazioni al variare di  $t$  sono della forma (7.15) e vale (7.16). Infatti, se si impone una relazione che lega tra loro soltanto le posizioni e il tempo, questa implica sempre una relazione della forma (7.1), cioè

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

con

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad B(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}, \quad (7.19)$$

che lega tra loro posizioni, velocità e tempo. Questo si vede prendendo una generica curva  $\mathbf{x}(t)$  tale che  $\Psi(\mathbf{x}(t), t) = 0$  e derivando rispetto al tempo l'ultima relazione.

Ad ogni istante  $t$  le velocità virtuali sono della forma (7.18), dove  $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$  è una parametrizzazione locale di  $\mathcal{C}_t$ .

Viceversa, possiamo avere un vincolo olonomo anche quando le equazioni del vincolo sono della forma (7.1), purché queste relazioni siano conseguenza di una relazione che lega le sole posizioni e il tempo, cioè esista  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  che soddisfa (7.19). In questo caso si dice che il vincolo è **integrabile**. Come esempio di vincolo integrabile consideriamo il seguente.

**Esempio 13.** *Disco verticale di raggio  $R$  che rotola senza strisciare su una guida rettilinea orizzontale.* Assumiamo inizialmente che il disco possa anche strisciare mantenendosi sempre a contatto con la guida rettilinea. Per definire la configurazione del disco in questo caso possiamo usare l'ascissa  $s$  del suo baricentro lungo la guida e l'angolo  $\theta$  che un raggio del disco forma con una direzione fissa, per esempio quella verticale. Imponiamo adesso la condizione di puro rotolamento: questa si scrive

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = 0. \quad (7.20)$$

Integrando l'equazione (7.20) tra un tempo iniziale  $t_0$  e un tempo generico  $t$  si ottiene

$$(s - s_0) + R(\theta - \theta_0) = 0,$$

in cui  $s_0, \theta_0$  sono i valori iniziali di  $s, \theta$ . Si ottiene quindi un'equazione del vincolo della forma

$$\Psi(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) = 0, \quad \mathbf{x} = (s, \theta),$$

che dipende dalla configurazione iniziale di riferimento  $\mathbf{x}_0 = (s_0, \theta_0)$ .

## Vincoli anolonomi

Se l'equazione del vincolo è della forma (7.1), ma non esiste una funzione  $\Psi$  che soddisfa le equazioni (7.19), allora il vincolo si dice anolonomo. I sistemi anolonomi che si considerano di solito hanno tutti un insieme delle configurazioni che è una varietà, però non tutti i vettori tangenti a questa varietà sono accessibili.

**Esercizio 23.** *Mostrare che il sistema meccanico formato da un disco che si mantiene verticale e che può rotolare senza strisciare su un piano orizzontale senza mai staccarsi da esso è soggetto ad un vincolo anolonomo.*

*Suggerimento:* Mostrare che se il disco può anche strisciare sul piano abbiamo un vincolo olonomo con varietà delle configurazioni

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$$

dove  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$  è il toro bidimensionale. Mostrare inoltre che in caso di puro rotolamento l'insieme delle configurazioni ammissibili non cambia.

**Esercizio 24.** *Fissato un riferimento  $Oxyz$ , consideriamo il sistema meccanico formato da due punti  $P_1, P_2$  vincolati a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio  $R$  mantenendo tra loro una distanza costante  $\ell$ , con  $0 < \ell < 2R$ . Mostrare che il vincolo è olonomo con varietà delle configurazioni di dimensione 3.*

**Soluzione.** Sia  $\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$  il vettore delle coordinate dei punti  $P_1, P_2$ . Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 : \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\},$$

dove la mappa  $\Psi : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ha componenti

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - \ell^2, \\ & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2, \\ & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - R^2. \end{aligned}$$

La matrice jacobiana della mappa è

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_2) & 2(y_1 - y_2) & 2(z_1 - z_2) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 2(z_2 - z_1) \\ 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 \end{bmatrix}.$$

Vogliamo mostrare che questa matrice ha rango 3 su  $\mathcal{C}$ , per cui  $\mathcal{C}$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^6$  di dimensione 3. In modo equivalente, possiamo mostrare che ha rango 3 su  $\mathcal{C}$  la matrice

$$\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che i vettori  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$  e  $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$  sono linearmente indipendenti, perché  $0 < \ell < 2R$ . Se le righe di  $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}$  fossero dipendenti per qualche  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{C}$  allora varrebbe una combinazione lineare del tipo

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

con  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  non tutti nulli. Ma dalla relazione precedente si ottiene

$$\lambda_1 \mathbf{x}_2 + \lambda_2 \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \quad \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_3 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}. \quad (7.21)$$

Da  $\ell < 2R$  segue che  $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  per ogni  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ , per cui, dalla prima equazione in (7.21), si ottiene  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Inoltre, sostituendo  $\lambda_1 = 0$  nella seconda delle (7.21), si ha anche  $\lambda_3 = 0$ .

## 7.4 Spostamenti virtuali

Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  soggetti a vincoli olonomi. Sia  $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$  una parametrizzazione locale della varietà delle configurazioni al tempo  $t$ .

**Definizione 23.** *Uno spostamento virtuale*

$$\delta \boldsymbol{\chi} = (\delta \chi_1, \dots, \delta \chi_N)^T, \quad (7.22)$$

dove

$$\delta \chi_j = \delta \chi_j(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \chi_j}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) \delta \mathbf{q} \quad (7.23)$$

è una variazione infinitesima delle coordinate dei punti  $P_j$ , che li sposta da una configurazione ammissibile qualunque ad un'altra infinitamente vicina e relativa allo stesso istante, cioè ottenuta ignorando la dipendenza dal tempo in  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$ , come se il vincolo fosse fisso.

**Osservazione 31.** Gli spostamenti virtuali sono movimenti sugli spazi tangenti alla varietà delle configurazioni. Se i vincoli sono fissi gli spostamenti virtuali corrispondono ai differenziali

$$d\boldsymbol{\chi} = (d\chi_1, \dots, d\chi_N), \quad \text{con } d\chi_j = \frac{\partial \chi_j}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) d\mathbf{q}.$$

In generale ci si riferisce alle formule (7.22), (7.23) parlando di **differenziali virtuali**. Nel caso di vincoli fissi con il simbolo  $\delta \mathbf{q}$  si intende sempre il differenziale  $d\mathbf{q}$  delle variabili indipendenti  $\mathbf{q}$ .

Mostriamo alcune formule per gli spostamenti virtuali nei casi di vincoli incontrati in precedenza.

**1) corpo rigido:** in assenza di altri vincoli, oltre alle forze interne che assicurano la rigidità del corpo, gli spostamenti virtuali dei punti  $P_j$  quando essi si trovano in una configurazione  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  sono dati da

$$\delta \boldsymbol{\chi}_j = d\mathbf{x}_{O'} + \boldsymbol{\omega} dt \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{O'}), \quad (7.24)$$

dove  $\mathbf{x}_{O'} \in \mathbb{R}^3$  sono le coordinate di un punto  $O'$  solidale al corpo. In questa formula le variabili indipendenti sono lo spostamento infinitesimo  $d\mathbf{x}_{O'}$  e la rotazione infinitesima  $\boldsymbol{\omega}dt$ .

La (7.24) segue direttamente dalla formula fondamentale della cinematica rigida

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{O'})$$

e dal fatto che il vincolo di rigidità è fisso.

Nella (7.24) possiamo anche scrivere  $\boldsymbol{\chi}_j$  al posto di  $\mathbf{x}_j$ , per sottolineare il fatto che le posizioni dei punti  $P_j$  non sono indipendenti, ma dipendono tutte dalle coordinate  $\mathbf{x}_{O'}$  e dal vettore degli angoli di Eulero  $\boldsymbol{\alpha} = (\varphi, \theta, \psi)$  tramite le relazioni

$$\boldsymbol{\chi}_j = \mathbf{x}_{O'} + R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}'_j,$$

vedi la prima relazione in (6.25).

In presenza di altri vincoli oltre a quelli di rigidità, assumendo che gli angoli di Eulero  $\varphi, \theta, \psi$  non dipendano dal tempo a causa degli altri vincoli, gli spostamenti virtuali dei  $P_j$  si scrivono tramite una formula simile alla (7.24), cioè:

$$\delta\boldsymbol{\chi}_j = \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \boldsymbol{\omega}dt \times (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'}), \quad (7.25)$$

dove, detta  $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}_{O'}(\mathbf{q}, t)$  la mappa che fornisce le coordinate di  $O'$  al tempo  $t$  in funzione delle coordinate locali  $\mathbf{q}$ , si intende che

$$\delta\boldsymbol{\chi}_{O'} = \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_{O'}}{\partial\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)\delta\mathbf{q}.$$

Infatti il vettore  $(\mathbf{x}_{O'}, \boldsymbol{\alpha})$ , che caratterizza le posizioni dei punti del corpo, si può scrivere come funzione di coordinate locali  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d, 1 \leq d \leq 6$ , ed eventualmente del tempo:

$$\mathbf{x}_{O'} = \boldsymbol{\chi}_{O'}(\mathbf{q}, t), \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}).$$

Usando la prima relazione in (6.25), il vettore delle coordinate di ogni punto  $P_j$  del corpo si scrive

$$\boldsymbol{\chi}_j = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_j, t) = \boldsymbol{\chi}_{O'}(\mathbf{q}, t) + R(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}))\mathbf{x}'_j.$$

Per lo spostamento virtuale di  $P_j$  si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\chi}_j &= \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \left( \frac{\partial R}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial R}{\partial\theta}\delta\theta + \frac{\partial R}{\partial\psi}\delta\psi \right) R^T R\mathbf{x}'_j \\ &= \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \left( \frac{\partial R}{\partial\varphi}\dot{\varphi}dt + \frac{\partial R}{\partial\theta}\dot{\theta}dt + \frac{\partial R}{\partial\psi}\dot{\psi}dt \right) R^T (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'}) \\ &= \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \dot{R}R^T dt (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'}) = \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \boldsymbol{\omega}dt \times (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'}), \end{aligned}$$



dove abbiamo usato le relazioni

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{q}}d\mathbf{q} = \dot{\varphi}dt, \quad \delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{q}}d\mathbf{q} = \dot{\theta}dt, \quad \delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{q}}d\mathbf{q} = \dot{\psi}dt$$

ed il fatto che la matrice antisimmetrica  $\boldsymbol{\Omega} = \dot{R}R^T$  corrisponde alla velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  del corpo rigido attraverso la formula

$$\boldsymbol{\Omega}\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

**2) puro rotolamento:** se  $P_1, P_2$  sono i punti in cui due corpi rigidi si toccano senza strisciare ( $P_1 = P_2$ ) e  $\boldsymbol{\chi}_1, \boldsymbol{\chi}_2$  sono le loro coordinate si ha

$$\delta\boldsymbol{\chi}_1 = \delta\boldsymbol{\chi}_2.$$

**3) coppie cinematiche:** le superfici  $\sigma_1, \sigma_2$ , che delimitano i corpi della coppia cinematica, strisciano l'una sull'altra: un punto  $P_1 \in \sigma_1$  può staccarsi da un punto  $P_2 \in \sigma_2$ , con cui è a contatto, solo muovendosi in una direzione del piano  $\Pi$  tangente in  $P_1$  a  $\sigma_1$  (e  $\sigma_2$ ). Dette  $\boldsymbol{\chi}_1, \boldsymbol{\chi}_2$  le coordinate di  $P_1, P_2$  si ha

$$\delta\boldsymbol{\chi}_1 = \delta\boldsymbol{\chi}_2 + \delta\boldsymbol{\pi},$$

dove  $\delta\boldsymbol{\pi}$  è uno spostamento infinitesimo sul piano  $\Pi$ .

# Capitolo 8

## Statica dei sistemi meccanici

Studiamo la Statica dei sistemi composti da punti materiali e corpi rigidi, eventualmente soggetti ad altri vincoli olonomi e fissi. A tal fine introduciamo il principio dei lavori virtuali e le equazioni cardinali della Statica.

### 8.1 Statica di sistemi di punti materiali vincolati

Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$  soggetti a vincoli olonomi fissi e a forze attive indipendenti dal tempo in un riferimento assegnato  $\Sigma$ .

**Definizione 24.** *La configurazione  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  si dice di equilibrio se, ponendo i punti  $P_j$  in questa configurazione con velocità tutte nulle, essi vi restano per sempre.*

I problemi fondamentali della Statica sono la ricerca delle configurazioni di equilibrio e il calcolo delle reazioni vincolari in corrispondenza degli equilibri. In questo capitolo introduciamo due metodi diversi per trattare questi problemi.

### 8.2 Il lavoro virtuale

Fissato un sistema di riferimento, siano  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$  le forze attive, supposte indipendenti dal tempo, che agiscono sui punti  $P_1, \dots, P_N$  di un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi, che possono essere sia fissi che mobili. Siano inoltre

$$\mathbf{q} \mapsto \chi_j(\mathbf{q}, t), \quad (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \mathbf{v}_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

le mappe che forniscono ad ogni istante le coordinate delle posizioni e delle velocità virtuali dei punti  $P_j$  in termini delle coordinate e velocità lagrangiane  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  e del

tempo  $t$ , vedi (7.18). Chiamiamo **lavoro virtuale** (elementare) delle forze  $\mathbf{F}_j$  in corrispondenza agli spostamenti virtuali  $\delta\boldsymbol{\chi}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , la quantità

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{v}) \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_j.$$

dove  $\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_N)$  e  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$  sono i vettori di tutte le posizioni e velocità virtuali.

**Esempio 14.** Consideriamo il lavoro virtuale delle reazioni vincolari che assicurano la rigidità di un corpo rigido discreto. Usando la (7.25) si ottiene

$$\delta\mathcal{L} = \mathbf{R}^{(v)} \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \boldsymbol{\omega} dt,$$

dove  $\mathbf{R}^{(v)}$ ,  $\mathbf{N}_{O'}^{(v)}$  sono la risultante e il momento risultante delle reazioni vincolari rispetto ad un polo  $O'$ , solidale al corpo. Poiché queste reazioni sono le forze interne del sistema di punti che costituiscono il corpo, esse formano un sistema equilibrato ed il loro lavoro virtuale è nullo in corrispondenza ad un qualunque spostamento virtuale rigido.

**Osservazione 32.** In generale, per uno spostamento virtuale non rigido, il lavoro elementare delle forze interne non è nullo, anche se il sistema delle forze interne è equilibrato. Come esempio basta prendere un sistema composto da due punti materiali  $P_1, P_2$  di masse  $m_1, m_2$  che si muovono su una retta e sono collegati da una molla di costante elastica  $k > 0$ . In questo caso il sistema di forze è equilibrato perché, indicando con  $x_1, x_2$  le coordinate di  $P_1, P_2$  sulla retta, abbiamo una coppia di forze di intensità  $k|x_1 - x_2|$  e braccio nullo. Il lavoro elementare è invece

$$\delta\mathcal{L} = -k(x_1 - x_2)dx_1 - k(x_2 - x_1)dx_2 = -k(x_1 - x_2)(dx_1 - dx_2),$$

che è diverso da zero per la maggior parte degli spostamenti virtuali  $dx_1, dx_2$ .

**Proposizione 54.** *Il lavoro virtuale delle forze interne di un sistema meccanico, anche non rigido, non dipende dal sistema di riferimento scelto.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che la relazione tra le velocità dei punti  $P_j$  del sistema in due riferimenti  $\Sigma, \Sigma'$  è data da

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}'_j + \mathbf{v}_j^T, \quad \mathbf{v}_j^T = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{O'}).$$

Il lavoro virtuale delle forze interne in  $\Sigma$  differisce da quello in  $\Sigma'$  per il termine dovuto alle velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_j^T$ , che è

$$\delta\mathcal{L}^T = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(I)} \cdot (\delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \boldsymbol{\omega} dt \times (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'})) = \mathbf{R}^{(I)} \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \mathbf{N}_{O'}^{(I)} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = 0.$$

□

**Esempio 15.** *Nel caso del sistema dell'Osservazione 32, calcolando il lavoro elementare delle forze interne in un riferimento avente il punto  $P_1$  come origine, si ottiene lo stesso risultato.*

### 8.2.1 Vincoli senza attrito

Consideriamo un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi, eventualmente mobili, e privi di attrito. In questo caso il lavoro virtuale delle reazioni vincolari  $\Phi_j$  che agiscono sui punti  $P_j$  del sistema è nullo ad ogni istante e per ogni spostamento virtuale:<sup>1</sup>

$$\delta\mathcal{L}^{(v)} = \sum_{j=1}^N \Phi_j \cdot \delta\chi_j = 0. \quad (8.1)$$

La proprietà (8.1) è una legge sperimentale, la cui validità si può verificare in molti casi già trattati, e si assume valida sempre nelle ipotesi fatte.

Usando la (8.1) per le coppie cinematiche prive di attrito, elenchiamo di seguito le condizioni che devono essere soddisfatte dalla risultante e dal momento risultante delle reazioni vincolari  $\Phi_j$ , che sono forze interne alla coppia. Assumendo che non ci sia attrito tra le superfici  $\sigma_1, \sigma_2$  che delimitano i corpi rigidi che formano la coppia, dalla (8.1) segue che

$$\delta\mathcal{L}^{(v)} = \mathbf{R}^{(v)} \cdot \delta\chi_{O'} + \mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = 0 \quad (8.2)$$

per ogni scelta del polo  $O' \in \mathbb{E}^3$  e per ogni spostamento virtuale relativo di un elemento della coppia rispetto all'altro, definito da  $\delta\chi_{O'}, \boldsymbol{\omega} dt$ . Nella (8.2)  $\mathbf{R}^{(v)}$ ,  $\mathbf{N}_{O'}^{(v)}$  sono la risultante e il momento risultante rispetto a  $O'$  delle reazioni vincolari esercitate da un elemento della coppia sull'altro nel loro moto relativo. Trattiamo separatamente i vari casi.

1. **coppia prismatica:** siano  $\mathbf{u}$  il versore di una generatrice della superficie cilindrica  $\sigma_1 (= \sigma_2)$  ed  $s$  la coordinata lagrangiana della coppia lungo la generatrice scelta. Si ha

$$\delta\chi_{O'} = \mathbf{u} \delta s, \quad \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{0}.$$

Dalla (8.2), per l'arbitrarietà di  $\delta s$ , segue che

$$\mathbf{R}^{(v)} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

---

<sup>1</sup>per vincoli bilaterali, altrimenti si ha  $\delta\mathcal{L}^{(v)} \geq 0$ .

2. **coppia rotoidale:** siano  $\mathbf{u}$  il versore dell'asse di rotazione e  $\theta$  l'angolo di rotazione. Sia inoltre  $O'$  un punto dell'asse della coppia. Si ha

$$\delta\chi_{O'} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega}dt = \mathbf{u}\delta\theta.$$

Dalla (8.2), per l'arbitrarietà di  $\delta\theta$ , segue che

$$\mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

3. **coppia elicoidale:** siano  $\mathbf{u}$  il versore dell'asse di rotazione,  $\theta$  l'angolo di rotazione e  $p > 0$  il passo dell'elica. Si ha

$$\delta\chi_{O'} = \frac{p}{2\pi}\mathbf{u}\delta\theta, \quad \boldsymbol{\omega}dt = \mathbf{u}\delta\theta.$$

Dalla (8.2), per l'arbitrarietà di  $\delta\theta$ , segue che

$$\frac{p}{2\pi}\mathbf{R}^{(v)} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

4. **coppia rototraslatoria:** si ha

$$\delta\chi_{O'} = \mathbf{u}\delta s, \quad \boldsymbol{\omega}dt = \mathbf{u}\delta\theta.$$

Dalla (8.2) si ottiene

$$\mathbf{R}^{(v)} \cdot \mathbf{u}\delta s + \mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \mathbf{u}\delta\theta = 0,$$

da cui, per l'arbitrarietà di  $\delta s$  e di  $\delta\theta$ , segue che

$$\mathbf{R}^{(v)} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

5. **coppia sferica:** sia  $O'$  il centro della coppia. Si ha

$$\delta\chi_{O'} = \mathbf{0}.$$

Dalla (8.2), per l'arbitrarietà di  $\boldsymbol{\omega}dt$ , segue che

$$\mathbf{N}_{O'}^{(v)} = \mathbf{0}.$$

### 8.2.2 Vincoli di puro rotolamento

Il lavoro virtuale è uguale a zero anche per i vincoli di puro rotolamento, infatti per i punti  $P_1, P_2$  di due corpi a contatto si ha

$$\delta\mathcal{L}^{(v)} = \boldsymbol{\Phi}_1 \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2 \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_2 = \boldsymbol{\Phi}_1 \cdot (\delta\boldsymbol{\chi}_1 - \delta\boldsymbol{\chi}_2)$$

per il principio di azione e reazione, e in un moto di puro rotolamento si ha  $\delta\boldsymbol{\chi}_1 = \delta\boldsymbol{\chi}_2$ . Dunque si possono estendere a questo caso i risultati trovati per il caso dei vincoli olonomi fissi e senza attrito, se questi dipendono dall'annullarsi del lavoro virtuale delle reazioni vincolari.

### 8.3 Il principio dei lavori virtuali

**Principio di lavori virtuali:** *Si consideri un sistema meccanico costituito da  $N$  punti materiali soggetti a vincoli olonomi fissi, che siano anche privi di attrito o di puro rotolamento, e a forze attive  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$  indipendenti dal tempo. Condizione necessaria e sufficiente perché una configurazione  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  di tale sistema sia di equilibrio è che per ogni spostamento virtuale  $\delta\boldsymbol{\chi} = (\delta\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \delta\boldsymbol{\chi}_N)$  che allontani la configurazione del sistema da  $\mathbf{x}_0$  si abbia*

$$\delta\mathcal{L}^{(a)} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(a)}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{0}) \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_j = 0. \quad (8.3)$$

**Osservazione 33.** La validità del principio dei lavori virtuali viene assunta come postulato. Inoltre le relazioni che derivano da esso sono **equazioni pure**, cioè non contengono reazioni vincolari.

Inserendo la relazione

$$\delta\boldsymbol{\chi}_j = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} \delta q_h$$

nella (8.3) si ottiene

$$\delta\mathcal{L}^{(a)} = \sum_{h=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(a)}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{0}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} \right) \delta q_h = 0$$

per ogni spostamento infinitesimo  $\delta q = (\delta q_1, \dots, \delta q_n)$ . Ponendo

$$Q_h = Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(a)}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{v}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}, \quad h = 1, \dots, n, \quad (8.4)$$

e usando l'arbitrarietà dei  $\delta q_h$  si trova la seguente condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio:

$$Q_h(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = 0, \quad h = 1, \dots, n. \quad (8.5)$$

Le espressioni  $Q_h$ , definite in (8.4), si chiamano **forze generalizzate** oppure **componenti lagrangiane delle forze**.

Se le forze attive sono conservative, cioè se  $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x})$ , e se esiste una funzione  $\mathcal{V}(\mathbf{x})$  tale che

$$\mathbf{F}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} \mathcal{V}, \quad j = 1, \dots, N$$

allora, posto

$$V(\mathbf{q}) = \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})),$$

si ha

$$Q_h = Q_h(\mathbf{q}) = - \sum_{j=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_j} \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}) = - \frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q}),$$

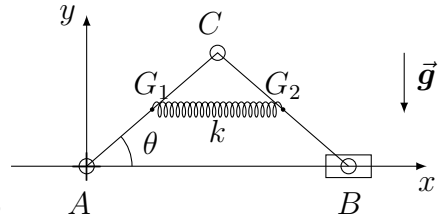
quindi (8.5) si scrive

$$\frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q}) = 0, \quad h = 1, \dots, n.$$

### 8.3.1 Alcuni esempi

**Esempio 16.** Si consideri il sistema meccanico formato da due aste omogenee, di lunghezza  $2\ell$  e massa  $m$ , incernierate in un loro estremo  $C$ .

L'estremo  $A$  della prima asta è collegato all'origine di un riferimento  $Axy$ , con asse  $Ay$  verticale ascendente. L'estremo  $B$  della seconda asta può scivolare senza attrito sull'asse orizzontale  $Ax$ . Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Inoltre una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla collega i due baricentri  $G_1, G_2$  delle aste. Sia  $\theta$  l'angolo tra l'asta  $AC$  e l'asse  $Ax$ . Assumiamo che tutti i vincoli siano privi di attrito.



Usiamo il principio dei lavori virtuali per trovare le configurazioni di equilibrio. Le forze attive sono conservative, con energia potenziale

$$V(\theta) = 2mg\ell \sin \theta + 2k\ell^2 \cos^2 \theta.$$

Dall'equazione

$$V'(\theta) = 2mg\ell \cos \theta \left(1 - 2 \frac{k\ell}{mg} \sin \theta\right) = 0$$

si ottengono le configurazioni di equilibrio

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$$

e, se  $J = \frac{mg}{2k\ell} < 1$ ,

$$\theta_3 = \arcsin J, \quad \theta_4 = \pi - \arcsin J.$$

Le configurazioni  $\theta_3, \theta_4$  esistono solo se  $J < 1$ . Si dice che  $J = 1$  è un valore di **biforcazione** del parametro  $J$ .

**Osservazione 34.** Nota una configurazione di equilibrio, possiamo usare il principio dei lavori virtuali anche per trovare le reazioni vincolari. Possiamo infatti immaginare di sopprimere il vincolo per cui si vuole calcolare la reazione vincolare e includere tale reazione tra le forze attive, che appaiono nell'espressione del lavoro virtuale (vedi Esempio 17).

## 8.4 Le equazioni cardinali della Statica

Sia dato un sistema di  $N$  punti materiali  $P_j$ ,  $j = 1 \dots N$  di masse  $m_j$ , soggetti a vincoli olonomi fissi. Fissato un riferimento  $\Sigma$ , assumiamo che sui punti agiscano delle forze  $\mathbf{F}_j$ , somma vettoriale di forze interne ed esterne:

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j^{(I)} + \mathbf{F}_j^{(E)},$$

Inoltre sia le forze interne che le forze esterne sono somma vettoriale di forze attive e reazioni vincolari, denotate rispettivamente con  $\mathbf{f}$  e  $\Phi$ :

$$\mathbf{F}_j^{(I)} = \mathbf{f}_j^{(I)} + \Phi_j^{(I)}, \quad \mathbf{F}_j^{(E)} = \mathbf{f}_j^{(E)} + \Phi_j^{(E)}.$$

Sia le forze attive che i vincoli si assumono indipendenti dal tempo. Nel riferimento  $\Sigma$  le equazioni di Newton per il sistema si scrivono

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{f}_j^{(I)} + \Phi_j^{(I)} + \mathbf{f}_j^{(E)} + \Phi_j^{(E)}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Condizione necessaria e sufficiente perché il sistema sia in equilibrio è che siano in equilibrio tutte le parti che lo compongono, cioè che

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, N$$

quando le velocità dei punti  $P_j$  sono tutte nulle. Ne segue che per la risultante  $\mathbf{R}$  e il momento risultante  $\mathbf{N}_Q$  delle forze  $\mathbf{F}_j$ , calcolato rispetto ad un polo  $Q$  qualunque, valgono le equazioni

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N}_Q = \mathbf{0}. \quad (8.6)$$

Poiché la risultante  $\mathbf{R}^{(I)}$  e il momento risultante  $\mathbf{N}_Q^{(I)}$  delle forze interne sono nulli, detti  $\mathbf{R}^{(E)}$ ,  $\mathbf{N}_Q^{(E)}$  le corrispondenti quantità per le forze esterne, dalle (8.6) si ottiene

$$\mathbf{R}^{(E)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N}_Q^{(E)} = \mathbf{0}. \quad (8.7)$$

Le relazioni (8.7) si chiamano **equazioni cardinali della Statica**.

Sottolineamo il fatto che le (8.7) sono in generale condizioni necessarie ma non sufficienti per l'equilibrio. Infatti, se consideriamo il problema dei due corpi (vedi Sezione 3.5) si ha

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1, \quad (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{0},$$

quindi

$$\mathbf{R} = \mathbf{N}_{P_1} = \mathbf{0},$$

ma il problema non ammette nessuna configurazione di equilibrio.



Se un sistema di  $N$  punti materiali vincolati è in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze attive, sostituendo ai vincoli le reazioni vincolari che questi esercitano, il sistema si può considerare costituito da un insieme di punti materiali liberi, ciascuno dei quali è in equilibrio sotto l'azione delle forze attive e vincolari agenti su di esso.

L'equilibrio dei punti del sistema non viene turbato se a due o più forze applicate ad uno stesso punto del sistema si sostituisce la loro risultante, oppure, se la forza agente su un punto del sistema si scompone come somma vettoriale di più forze applicate allo stesso punto. Quindi, per un sistema meccanico discreto in equilibrio possiamo sempre eseguire sulle forze applicate ai singoli punti la prima operazione elementare, introdotta nella Sezione 5.5, senza alterare l'equilibrio.

Nel caso di un corpo rigido si assume che valga il cosiddetto **postulato caratteristico dei solidi**: l'equilibrio di un corpo rigido non si altera se si applicano due forze direttamente opposte a due punti qualsiasi del corpo. Quindi, nel caso di un corpo rigido in equilibrio possiamo anche eseguire la seconda operazione elementare sulle forze applicate ai singoli punti senza alterare l'equilibrio.

Possiamo trarre la seguente conclusione.

**Proposizione 55.** *Nel caso di un corpo rigido le equazioni (8.7) sono anche sufficienti per avere un equilibrio.*

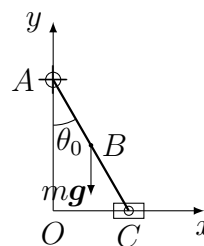
*Dimostrazione.* Assumiamo che valgano le equazioni (8.7), per cui le forze esterne che agiscono sui punti  $P_i$  del corpo formano un sistema equilibrato. Sappiamo già che le forze interne agenti sui  $P_i$  formano un altro sistema equilibrato, per cui anche l'unione dei due sistemi di forze applicate è equilibrato:

$$\mathbf{R} = \mathbf{N}_Q = \mathbf{0}$$

per ogni scelta del polo  $Q \in \mathbb{E}^3$ . Poiché per un corpo rigido abbiamo a disposizione entrambe le operazioni elementari, per la Proposizione 24 possiamo ridurre quest'ultimo sistema di forze (comprendente forze interne ed esterne) ad un sistema nullo. In questo modo ogni punto del corpo rigido risulta soggetto ad una forza nulla, e dunque il corpo è in equilibrio. □

Le equazioni (8.7) sono utili anche per il calcolo delle reazioni vincolari in condizioni di equilibrio.

**Esempio 17.** In un piano verticale si fissi un riferimento  $Oxy$ , con asse  $Oy$  verticale ascendente. Consideriamo un'asta  $AC$  omogenea, di lunghezza  $2\ell$  e massa  $m$ . L'estremo  $A$  dell'asta è incernierato all'asse  $Oy$  nel punto di coordinate  $(0, 2h)$ , con  $0 < h < \ell$ , tramite una cerniera cilindrica fissa. L'estremo  $C$  è vincolato all'asse  $Ox$  tramite una cerniera cilindrica scorrevole sull'asse  $Ox$  (vedi figura). Sull'asta agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ .



L'asta è chiaramente in equilibrio in quanto i vincoli non le permettono di muoversi. Il valore  $\theta_0$  dell'angolo tra l'asta e la direzione verticale è dato da  $\cos \theta_0 = h/\ell$ . Tutti i vincoli sono supposti privi di attrito e le cerniere hanno massa trascurabile. Calcoliamo le coordinate delle reazioni vincolari  $\Phi_A$ ,  $\Phi_C$  esercitate sull'asta nei punti  $A$ ,  $C$ . Siano  $e_1, e_2$  le coordinate dei versori degli assi  $Ox, Oy$ . Le reazioni vincolari si scrivono

$$\Phi_A = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad \Phi_C = \gamma e_2,$$

con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  da determinarsi. La prima equazione cardinale della Statica si scrive

$$\Phi_A + \Phi_C - mge_2 = \mathbf{0},$$

per cui si ottiene

$$\alpha = 0, \quad \beta + \gamma - mg = 0.$$

La seconda equazione cardinale della Statica, calcolata rispetto al polo  $A$ , si scrive<sup>2</sup>

$$(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \times (-mge_2) + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A) \times \gamma e_2 = \mathbf{0}, \quad (8.8)$$

con  $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_C$  le coordinate dei punti  $A, B, C$ . All'equilibrio si ha

$$\mathbf{x}_A = (0, 2h, 0), \quad \mathbf{x}_B = (\ell \sin \theta_0, \ell \cos \theta_0, 0), \quad \mathbf{x}_C = (2\ell \sin \theta_0, 0, 0).$$

Dalla (8.8) si ottiene

$$-mg + 2\gamma = 0.$$

Si ha quindi

$$\gamma = \frac{mg}{2}, \quad \beta = mg - \gamma = \frac{mg}{2}$$

e dunque

$$\Phi_A = \Phi_C = \frac{mg}{2} e_2.$$

Adesso calcoliamo le stesse reazioni vincolari usando il principio dei lavori virtuali. Immaginiamo di eliminare il vincolo in  $C$ , dato dalla cerniera scorrevole in

<sup>2</sup>si estendono questi vettori ad  $\mathbb{R}^3$  aggiungendo una terza coordinata nulla.

figura, e consideriamo la reazione  $\Phi_C$  come una forza esterna attiva. In questo caso il sistema acquista un grado di libertà. Detto  $\theta$  l'angolo tra l'asta e la direzione verticale, che adesso può variare, le coordinate del punto  $C$  dell'asta sono date da

$$\chi_C = 2\ell \sin \theta \mathbf{e}_1 + 2(h - \ell \cos \theta) \mathbf{e}_2,$$

per cui gli spostamenti virtuali del punto  $C$  dalla configurazione di equilibrio, con  $\theta = \theta_0$ , sono

$$\delta \chi_C = 2\ell \cos \theta_0 \delta \theta \mathbf{e}_1 + 2\ell \sin \theta_0 \delta \theta \mathbf{e}_2.$$

Dalla relazione  $\chi_B - \chi_A = \frac{1}{2}(\chi_C - \chi_A)$  si ottiene anche che

$$\delta \chi_B = \frac{1}{2} \delta \chi_C.$$

Il lavoro virtuale delle forze esterne attive (a cui si è aggiunta la reazione  $\Phi_C$ ) in corrispondenza ad uno spostamento virtuale  $\delta \chi_C$  è dato da

$$\delta \mathcal{L}^{(a)} = \gamma \mathbf{e}_2 \cdot \delta \chi_C - mg \mathbf{e}_2 \cdot \delta \chi_B = \ell \sin \theta_0 (2\gamma - mg) \delta \theta.$$

Poiché  $\delta \mathcal{L}^{(a)}$  si deve annullare per ogni spostamento virtuale ammissibile, cioè per ogni  $\delta \theta$ , si ottiene

$$\gamma = \frac{mg}{2}.$$

Immaginiamo adesso di eliminare la cerniera cilindrica in  $A$  e consideriamo la reazione  $\Phi_A$  come una forza esterna attiva. In questo caso il sistema acquista due gradi di libertà. Sia  $s$  l'ascissa di  $C$  sull'asse  $Ox$ . Le coordinate dei punti  $A, B, C$  sono date da

$$\chi_A = (s - 2\ell \sin \theta) \mathbf{e}_1 + 2\ell \cos \theta \mathbf{e}_2, \quad \chi_B = (s - \ell \sin \theta) \mathbf{e}_1 + \ell \cos \theta \mathbf{e}_2, \quad \chi_C = s \mathbf{e}_1,$$

per cui gli spostamenti virtuali di questi punti dalla configurazione di equilibrio sono

$$\begin{aligned} \delta \chi_A &= (\delta s - 2\ell \cos \theta_0 \delta \theta) \mathbf{e}_1 - 2\ell \sin \theta_0 \delta \theta \mathbf{e}_2, \\ \delta \chi_B &= (\delta s - \ell \cos \theta_0 \delta \theta) \mathbf{e}_1 - \ell \sin \theta_0 \delta \theta \mathbf{e}_2, \\ \delta \chi_C &= \delta s \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Il lavoro virtuale delle forze esterne attive (a cui si è aggiunta la reazione  $\Phi_A$ ) è dato da

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}^{(a)} &= \Phi_A \cdot \delta \chi_A - mg \mathbf{e}_2 \cdot \delta \chi_B + \Phi_C \cdot \delta \chi_C \\ &= \alpha (\delta s - 2\ell \cos \theta_0 \delta \theta) - 2\ell \beta \sin \theta_0 \delta \theta + mg \ell \sin \theta_0 \delta \theta \end{aligned}$$

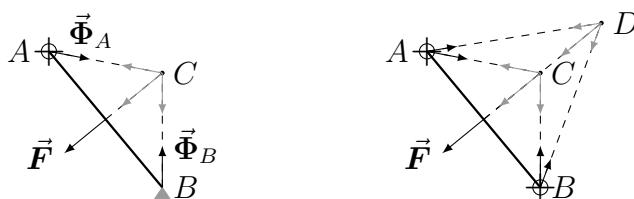


Figura 8.1: Sinistra: problema isostatico. Destra: problema iperstatico.

e si deve annullare in corrispondenza ad ogni spostamento virtuale, cioè per ogni scelta di  $\delta s$  e di  $\delta\theta$ . Se scegliamo  $\delta\theta = 0$ , per l'arbitrarietà di  $\delta s$  si ottiene

$$\alpha = 0.$$

Scegliendo invece  $\delta s = 0$ , per l'arbitrarietà di  $\delta\theta$  si ottiene

$$\beta = \frac{mg}{2}.$$

## 8.5 Problemi isostatici e iperstatici

Consideriamo un'asta con un estremo collegato ad un telaio verticale tramite una cerniera cilindrica fissa e con l'altro estremo appoggiato ad una superficie liscia, come in Figura 8.1 a sinistra. Sull'asta agisce anche una forza attiva esterna  $\vec{F}$ . Le componenti  $\vec{\Phi}_A$ ,  $\vec{\Phi}_B$  delle reazioni vincolari agenti sull'asta nei punti  $A$  e  $B$  risultano univocamente determinate. Infatti dalle equazioni cardinali della Statica otteniamo tre equazioni (due dalla prima equazione cardinale ed una dalla seconda) con tre incognite, in quanto è noto *a priori* che  $\vec{\Phi}_B$  ha direzione verticale per l'ipotesi fatta sul vincolo. Nella stessa figura mostriamo la costruzione grafica delle reazioni vincolari: per avere un sistema di forze equilibrato, se la forza  $\vec{F}$  non è diretta come l'asta, le linee di azione di  $\vec{F}$  e quelle di  $\vec{\Phi}_A$ ,  $\vec{\Phi}_B$  si devono incontrare in un punto, che in figura è chiamato  $C$ . In questo caso il problema è detto **isostatico**.

Supponiamo adesso che anche l'estremo  $B$  dell'asta sia vincolato ad un telaio orizzontale tramite una cerniera cilindrica fissa, come in Figura 8.1 a destra. In questo caso le componenti delle reazioni vincolari non sono univocamente determinate, infatti le incognite sono quattro. Nella stessa figura mostriamo due diverse soluzioni grafiche per le reazioni vincolari in  $A$  e  $B$ . In questo caso il problema è detto **iperstatico**.

## 8.6 Sovrapposizione degli effetti e metodo di scomposizione

Osserviamo che le equazioni introdotte per trattare i problemi di Statica dipendono linearmente dalle forze. Possiamo allora utilizzare il **principio di sovrapposizione degli effetti**: se un effetto dipende linearmente dalle cause che lo producono, allora tale effetto è dato dalla somma degli effetti che ciascuna causa produrrebbe se agisse da sola.

Come abbiamo già osservato, se un sistema meccanico è composto da più parti ed è in equilibrio, allora ciascuna delle sue parti deve soddisfare le condizioni per l'equilibrio. Questo fatto conduce a un procedimento detto **metodo di scomposizione** di un sistema meccanico.

Mostriamo come queste due osservazioni possono essere utilizzate per calcolare le reazioni vincolari di un sistema meccanico.

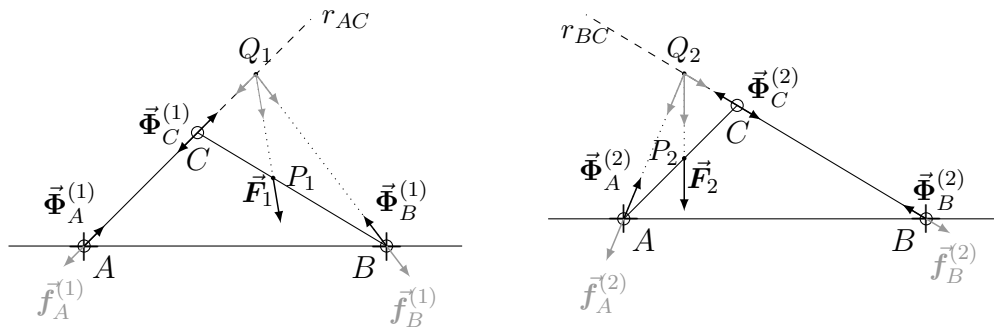


Figura 8.2: Reazioni vincolari in  $A$ ,  $B$  nell'ipotesi che una delle due aste sia scarica.

**Esempio 18. (arco a tre cerniere)** Si consideri il sistema formato da due aste rigide  $AC$ ,  $BC$  collegate nel loro estremo comune  $C$  da una cerniera cilindrica mobile. Gli altri estremi  $A$  e  $B$  delle due aste sono fissati ad un telaio rettilineo orizzontale attraverso due cerniere cilindriche fisse. Nel punto  $P_1$  dell'asta  $BC$  è applicata una forza  $\vec{F}_1$  e nel punto  $P_2$  dell'asta  $AC$  è applicata una forza  $\vec{F}_2$ . Tutti i vincoli sono supposti privi di attrito. Mostriamo come si calcolano le reazioni vincolari esercitate dalle cerniere in  $A$  e  $B$  sulle due aste.

Assumiamo dapprima che l'asta  $AC$  sia **scarica**, cioè che su di essa non agiscano forze attive esterne. In questa ipotesi chiamiamo  $\vec{\Phi}_A^{(1)}$  e  $\vec{\Phi}_C^{(1)}$  le reazioni vincolari esercitate dalle cerniere in  $A$  e  $C$  sull'asta  $AC$ , e chiamiamo  $\vec{\Phi}_B^{(1)}$  la reazione della cerniera in  $B$  sull'asta  $BC$ . Poiché il sistema composto dalla sola asta  $AC$  è in equilibrio, le reazioni  $\vec{\Phi}_A^{(1)}$  e  $\vec{\Phi}_C^{(1)}$  devono essere direttamente opposte e dirette lungo la retta  $r_{AC}$  per  $A, C$ .

Osserviamo che, per il principio di azione e reazione e poiché il sistema è in equilibrio, la cerniera in  $C$  esercita sull'asta  $BC$  una reazione vincolare opposta a quella che la stessa cerniera esercita su  $AC$ .

Anche il sistema costituito dalla sola asta  $BC$  è in equilibrio e su di essa agiscono le reazioni vincolari  $\vec{\Phi}_B^{(1)}$ ,  $-\vec{\Phi}_C^{(1)}$  e la forza  $\vec{F}_1$  applicata nel punto  $P_1$ . Scomponiamo tale forza nel sistema equivalente  $\{(\vec{f}_A^{(1)}, A), (\vec{f}_B^{(1)}, B)\}$ , con una componente lungo  $r_{AC}$  e l'altra applicata in  $B$ , vedi Figura 8.2 a sinistra<sup>3</sup>. Per avere l'equilibrio si ottiene quindi che

$$\vec{\Phi}_A^{(1)} = -\vec{f}_A^{(1)}, \quad \vec{\Phi}_B^{(1)} = -\vec{f}_B^{(1)}.$$

Assumiamo adesso che l'asta  $BC$  sia scarica e chiamiamo  $\vec{\Phi}_B^{(2)}$  e  $\vec{\Phi}_C^{(2)}$  le reazioni vincolari esercitate dalle cerniere in  $B$  e  $C$  sull'asta  $BC$ , e  $\vec{\Phi}_A^{(2)}$  la reazione della cerniera in  $A$  su  $AC$ .

In modo analogo a prima otteniamo che le reazioni  $\vec{\Phi}_B^{(2)}$  e  $\vec{\Phi}_C^{(2)}$  devono essere direttamente opposte e dirette lungo la retta  $r_{BC}$  per  $B, C$ . L'asta  $AC$  deve pure stare in equilibrio sotto l'azione delle reazioni  $\vec{\Phi}_A^{(2)}$ ,  $-\vec{\Phi}_C^{(2)}$  e della forza  $\vec{F}_2$  applicata in  $P_2$ . Decomponiamo tale forza nel sistema equivalente  $\{(\vec{f}_A^{(2)}, A), (\vec{f}_B^{(2)}, B)\}$ , con una componente lungo  $r_{BC}$  e l'altra applicata in  $A$ , vedi Figura 8.2 a destra. All'equilibrio si ottiene quindi

$$\vec{\Phi}_A^{(2)} = -\vec{f}_A^{(2)}, \quad \vec{\Phi}_B^{(2)} = -\vec{f}_B^{(2)}.$$

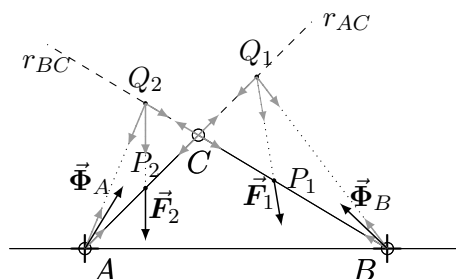


Figura 8.3: Reazioni vincolari esercitate sulle due aste dalle cerniere in  $A$ ,  $B$  in presenza delle forze  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ .

Usando il principio di sovrapposizione degli effetti, per determinare le reazioni vincolari  $\vec{\Phi}_A$  e  $\vec{\Phi}_B$  esercitate dalle cerniere in  $A$  e  $B$  sulle aste  $AC$  e  $BC$  rispettivamente, in presenza di entrambe le forze attive  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  applicate in  $P_1$ ,  $P_2$ , basta

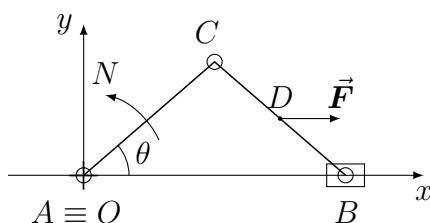
<sup>3</sup>la figura è disegnata nel caso in cui  $\vec{F}_1$  non sia parallela alla retta  $r_{AC}$ , comunque anche nel caso  $\vec{F}_1 \parallel r_{AC}$  si può scomporre  $(\vec{F}_1, P_1)$  in un sistema equivalente con le stesse caratteristiche (*dimostrarlo!*)

fare la somma vettoriale delle reazioni vincolari esercitate in  $A$  e  $B$  nei due casi precedenti, vedi Figura 8.3. Concludiamo quindi che

$$\vec{\Phi}_A = \vec{\Phi}_A^{(1)} + \vec{\Phi}_A^{(2)}, \quad \vec{\Phi}_B = \vec{\Phi}_B^{(1)} + \vec{\Phi}_B^{(2)}.$$

## 8.7 Esercizi

**Esercizio 25.** In un piano orizzontale si fissi un riferimento  $Oxy$ . In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da due aste, di uguale lunghezza  $2\ell$ , incernierate in un loro estremo  $C$ . L'estremo  $A$  della prima asta è incernierato nell'origine  $O$ . L'estremo  $B$  della seconda asta può scivolare sull'asse  $Ox$ . Siano  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  i versori degli assi  $Ox, Oy$ . Nel punto medio dell'asta  $BC$  agisce una forza costante  $\vec{F} = F\hat{e}_1$ , con  $F > 0$ . Sull'asta  $AC$  agisce una coppia di forze di momento  $\vec{N} = N\hat{e}_1 \times \hat{e}_2$ , con  $N > 0$ . Assumiamo che tutti i vincoli siano privi di attrito.



Usando come coordinate l'angolo  $\theta$  che l'asta  $AC$  forma con l'asse  $Ox$ ,

1. determinare le configurazioni di equilibrio con il principio dei lavori virtuali;
2. ritrovare le configurazioni di equilibrio e calcolare le reazioni vincolari nei punti  $A, B, C$  con le equazioni cardinali della statica.

**Soluzione.** 1. Il lavoro virtuale delle forze attive agenti sul sistema è dato da

$$\delta\mathcal{L} = N\dot{\theta}dt - 3F\ell \sin\theta\delta\theta = (N - 3F\ell \sin\theta)\delta\theta,$$

in cui si è usato  $\dot{\theta}dt = d\theta = \delta\theta$ . Per il principio dei lavori virtuali si ha

$$\delta\mathcal{L} = 0$$

per ogni scelta di  $\delta\theta$ , per cui gli equilibri corrispondono alle soluzioni di

$$\sin\theta = \frac{N}{3F\ell},$$

cioè

$$\theta_1 = \arcsin \frac{N}{3F\ell}, \quad \theta_2 = \pi - \theta_1.$$

2. Chiamiamo  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  i versori degli assi  $Ox, Oy$ . Sia  $\vec{\Phi}_C = \Phi_C^x \hat{e}_1 + \Phi_C^y \hat{e}_2$  la reazione vincolare esercitata dall'asta  $BC$  sull'asta  $AC$  nel punto  $C$ . Siano inoltre  $\vec{\Phi}_A = \Phi_A^x \hat{e}_1 + \Phi_A^y \hat{e}_2$  la reazione in  $A$  e  $\vec{\Phi}_B = \Phi_B^y \hat{e}_2$  la reazione in  $B$ .

Le aste  $AC$  e  $BC$  devono essere in equilibrio individualmente. Le equazioni cardinali della Statica per l'asta  $AC$  si scrivono

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_A + \vec{\Phi}_C &= \vec{0}, \\ N\hat{e}_3 + (C - A) \times \vec{\Phi}_C &= \vec{0},\end{aligned}\tag{8.9}$$

dove  $A$  è il polo scelto per la seconda equazione cardinale.

Le equazioni cardinali della Statica per l'asta  $BC$  si scrivono

$$\begin{aligned}-\vec{\Phi}_C + F\hat{e}_1 + \vec{\Phi}_B &= \vec{0}, \\ (D - C) \times F\hat{e}_1 + (B - C) \times \vec{\Phi}_B &= \vec{0},\end{aligned}\tag{8.10}$$

dove  $C$  è il polo scelto per la seconda equazione cardinale.

Dalla seconda equazione in (8.10) si trova

$$\Phi_B^y = -\frac{F}{2} \tan \theta$$

e dalla prima

$$\Phi_C^x = F, \quad \Phi_C^y = \Phi_B^y.$$

Sostituendo queste relazioni nella seconda equazione in (8.9) si ritrova l'equazione degli equilibri

$$\sin \theta = \frac{N}{3F\ell}.$$

Infine, dalla prima equazione in (8.9) si ottiene

$$\vec{\Phi}_A = -\vec{\Phi}_C.$$

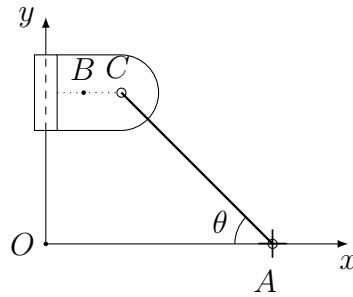
**Esercizio 26.** *In un piano verticale si fissi un riferimento  $Oxy$  con asse  $Oy$  verticale ascendente. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da un'asta omogenea  $AC$ , di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$ . L'estremo  $A$  dell'asta è incernierato nel punto dell'asse  $Ox$  di coordinate  $(\frac{3\sqrt{2}}{2}\ell, 0)$ . L'altro estremo  $C$  è incernierato in un punto di un corpo rigido  $\mathcal{D}$  di massa  $M$  e baricentro  $B$ . Il corpo  $\mathcal{D}$  è anche collegato all'asse  $Oy$  attraverso una coppia prismatica. Le coordinate dei punti  $B, C$  sono*

$$B \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\ell, \sqrt{2}\ell\right), \quad C \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \sqrt{2}\ell\right).$$

*Sui due corpi agisce la forza di gravità di accelerazione  $g$  e tutti i vincoli sono supposti privi di attrito.*

1. *Calcolare l'angolo  $\theta$  che l'asta  $AC$  forma con la direzione orizzontale.*





2. Usando il principio di sovrapposizione degli effetti ed il metodo di scomposizione determinare le componenti delle reazioni vincolari in A e in C esercitate rispettivamente dall'asse  $Ox$  e dal corpo  $\mathcal{D}$  sugli estremi dell'asta.

**Soluzione.** 1. Si ha

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{2}\ell}{\frac{3\sqrt{2}}{2}\ell - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell} = 1,$$

quindi

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

2. Supponiamo inizialmente che il corpo  $\mathcal{D}$  sia scarico, cioè che su di esso non agiscano forze attive esterne. Indichiamo con

$$\vec{\Phi}_A^{(1)}, \quad \vec{\Phi}_C^{(1)}$$

le reazioni vincolari che l'asse  $Ox$  e il corpo  $\mathcal{D}$  esercitano sull'asta  $AC$  in questa ipotesi. Usando il metodo di scomposizione, sia l'asta  $AC$  che il corpo  $\mathcal{D}$  devono soddisfare le equazioni cardinali della Statica individualmente.

Sull'asta  $AC$  agiscono la forza di gravità, equivalente ad un'unica forza  $-mg\hat{e}_2$  applicata nel baricentro e le reazioni  $\vec{\Phi}_A^{(1)}, \vec{\Phi}_C^{(1)}$ . Perché  $AC$  sia in equilibrio deve valere

$$\vec{\Phi}_C^{(1)} \neq \vec{0}.$$

Per il principio di azione e reazione l'asta  $AC$  esercita su  $\mathcal{D}$  una forza  $-\vec{\Phi}_C^{(1)}$ . Le forze di reazione esercitate dall'asse  $Oy$  su  $\mathcal{D}$  devono quindi avere risultante non nulla e sono equivalenti ad un'unica forza  $F^{(1)}\hat{e}_1$  applicata ad un punto del loro asse centrale. Dalla prima equazione cardinale della Statica applicata a  $\mathcal{D}$  si ottiene

$$-\vec{\Phi}_C^{(1)} + F^{(1)}\hat{e}_1 = \vec{0}.$$

Dall'equazione precedente si ottiene che  $\vec{\Phi}_C^{(1)}$  è diretta lungo  $\hat{e}_1$ :

$$\vec{\Phi}_C^{(1)} = F^{(1)}\hat{e}_1.$$

Le equazioni cardinali della Statica per l'asta (la seconda equazione è calcolata rispetto ad  $A$ ) ci danno

$$\begin{aligned} F^{(1)}\hat{e}_1 - mg\hat{e}_2 + \vec{\Phi}_A^{(1)} &= \vec{0}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}mgl - 2\frac{\sqrt{2}}{2}\ell F^{(1)} &= 0, \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$F^{(1)} = \frac{mg}{2}, \quad \vec{\Phi}_A^{(1)} = -\frac{mg}{2}\hat{e}_1 + mg\hat{e}_2.$$

Supponiamo adesso che l'asta  $AC$  sia scarica e indichiamo con

$$\vec{\Phi}_A^{(2)}, \quad \vec{\Phi}_C^{(2)}$$

le reazioni vincolari che l'asse  $Ox$  e il corpo  $\mathcal{D}$  esercitano sull'asta  $AC$  in questa ipotesi. Dalle equazioni cardinali della Statica applicate all'asta  $AC$  si ottiene

$$\vec{\Phi}_A^{(2)} + \vec{\Phi}_C^{(2)} = \vec{0}, \quad \vec{\Phi}_A^{(2)} = \Phi_A^{(2,\theta)}\hat{e}_\theta, \quad \vec{\Phi}_C^{(2)} = \Phi_C^{(2,\theta)}\hat{e}_\theta, \quad (8.11)$$

dove

$$\hat{e}_\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = \frac{C-A}{|C-A|}.$$

Su  $\mathcal{D}$  agiscono la forza di gravità, equivalente ad un'unica forza  $-Mg\hat{e}_2$  applicata nel baricentro  $B$ , la reazione  $-\vec{\Phi}_C^{(2)}$  (per il principio di azione e reazione) e le forze di reazione esercitate dall'asse  $Oy$ . Perché  $\mathcal{D}$  sia in equilibrio queste ultime devono avere necessariamente risultante non nulla e sono quindi equivalenti ad un'unica forza  $F^{(2)}\hat{e}_1$  applicata ad un punto del loro asse centrale. Dalla prima equazione cardinale della Statica applicata a  $\mathcal{D}$  si ottiene

$$-Mg\hat{e}_2 - \vec{\Phi}_C^{(2)} + F^{(2)}\hat{e}_1 = \vec{0},$$

da cui si ottiene

$$\Phi_C^{(2,\theta)} = -\sqrt{2}Mg$$

e, per la prima delle (8.11),

$$\Phi_A^{(2,\theta)} = \sqrt{2}Mg.$$

Usando il principio di sovrapposizione degli effetti concludo che

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_A &= \vec{\Phi}_A^{(1)} + \vec{\Phi}_A^{(2)} = -\left(\frac{m}{2} + M\right)g\hat{e}_1 + (m + M)g\hat{e}_2 \\ \vec{\Phi}_C &= \vec{\Phi}_C^{(1)} + \vec{\Phi}_C^{(2)} = \left(\frac{m}{2} + M\right)g\hat{e}_1 - Mg\hat{e}_2 \end{aligned}$$



# Capitolo 9

## Le equazioni cardinali della Dinamica

Studiamo la dinamica di sistemi composti da punti materiali e corpi rigidi, eventualmente soggetti ad altri vincoli. Lo studio è svolto utilizzando le equazioni cardinali. Mostriamo inoltre come calcolare le reazioni vincolari, cioè le forze esercitate dai vincoli sul sistema per mantenere le restrizioni imposte sulle posizioni e velocità. Trattiamo infine le equazioni di Eulero per il moto di un corpo rigido con un punto fisso  $O$  e la descrizione del moto dovuta a Poincot nel caso in cui il momento delle forze esterne rispetto ad  $O$  sia nullo (moti per inerzia).

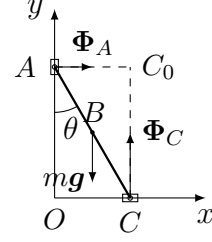
### 9.1 Equazioni cardinali e moti rigidi

Richiamiamo le due equazioni cardinali della Dinamica per un sistema di  $N$  punti materiali (5.8):

$$\begin{cases} m\mathbf{a}_B &= \mathbf{R}^{(E)} \\ \dot{\mathbf{M}}_Q &= -m\mathbf{v}_Q \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_Q^{(E)} \end{cases} \quad (9.1)$$

Possiamo usare le equazioni (9.1) per determinare il moto di un corpo rigido, anche soggetto ad altri vincoli. Consideriamo un esempio semplice e determiniamo le equazioni del moto in diversi modi.

**Esempio 19.** In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $\Sigma = Oxyz$ , con asse  $Oy$  verticale ascendente. Studiamo il moto di un'asta omogenea di estremi  $A, C$ , di lunghezza  $2\ell$  e massa  $m$ , che scivola mantenendo gli estremi sui due assi coordinati  $Ox, Oy$ . Assumiamo che il sistema sia soggetto alla forza di gravità, di accelerazione  $g$ , e che gli assi coordinati sviluppino le reazioni vincolari  $\Phi_A \mathbf{e}_1, \Phi_C \mathbf{e}_2$  sugli estremi dell'asta. Le componenti  $\Phi_A, \Phi_C$  sono incognite. Usiamo come coordinata l'angolo  $\theta$  che l'asta forma con la direzione verticale.



La velocità angolare dell'asta è  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{e}_3$ . Siamo interessati a scrivere delle equazioni che abbiano una forma semplice e che siano equazioni pure, cioè non contengano reazioni vincolari. Scriviamo la seconda equazione cardinale per l'asta facendo tre scelte diverse per il polo  $Q$ .

i)  $Q = O$ , l'origine del riferimento:

$$\dot{\mathbf{M}}_O = -m\mathbf{v}_O \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_O = \mathbf{N}_O, \quad (9.2)$$

ii)  $Q = B$ , il baricentro dell'asta:

$$\dot{\mathbf{M}}_B = -m\mathbf{v}_B \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_B = \mathbf{N}_B, \quad (9.3)$$

iii)  $Q = C_0$ , il centro istantaneo di rotazione:<sup>1</sup>

$$\dot{\mathbf{M}}_{C_0} = -m\mathbf{v}_{C_0} \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_{C_0} = \mathbf{N}_{C_0}. \quad (9.5)$$

<sup>1</sup>Al variare di  $\theta$  il centro istantaneo di rotazione  $C_0$  è un punto sempre diverso in un riferimento solidale al corpo, oltre che nel riferimento  $\Sigma$ . Le coordinate di  $C_0$  in  $\Sigma$  sono

$$\mathbf{x}_{C_0} = 2\ell(\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2),$$

quindi il termine  $-m\mathbf{v}_{C_0} \times \mathbf{v}_B$  è nullo perchè

$$\mathbf{v}_{C_0} = 2\dot{\theta}\ell(\cos \theta \mathbf{e}_1 - \sin \theta \mathbf{e}_2) \quad (9.4)$$

è parallelo a  $\mathbf{v}_B$ . Quando usiamo la formula fondamentale (6.19) con il centro istantaneo di rotazione  $C_0$  abbiamo  $\mathbf{v}_{C_0} = \mathbf{0}$ , perchè stiamo considerando la velocità di un punto solidale al corpo, cioè stiamo calcolando il limite del rapporto incrementale in cui appaiono le coordinate dello stesso punto del corpo a due tempi diversi, quindi non possiamo usare la (9.4). Nell'Esempio 19 la confusione tra le due velocità non produce effetti sulla forma dell'equazione, ma non è sempre così. Questa difficoltà nasce dalla notazione utilizzata tradizionalmente, che è la stessa per le due velocità.

La iii) è l'unica equazione pura, infatti

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_O &= \mathbf{x}_A \times \Phi_A \mathbf{e}_1 + \mathbf{x}_C \times \Phi_C \mathbf{e}_2 - \mathbf{x}_B \times mg \mathbf{e}_2 = \\
 &= (-2\Phi_A \cos \theta + 2\Phi_C \sin \theta - mg \sin \theta) \ell \mathbf{e}_3, \\
 \mathbf{N}_B &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \times \Phi_A \mathbf{e}_1 + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B) \times \Phi_C \mathbf{e}_2 = \\
 &= \ell(\sin \theta \mathbf{e}_1 - \cos \theta \mathbf{e}_2) \times (-\Phi_A \mathbf{e}_1 + \Phi_C \mathbf{e}_2) = \\
 &= (\Phi_C \sin \theta - \Phi_A \cos \theta) \ell \mathbf{e}_3, \\
 \mathbf{N}_{C_0} &= (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{C_0}) \times (-mg \mathbf{e}_2) = \mathbf{x}_B \times mg \mathbf{e}_2 = \\
 &= mg \ell \sin \theta \mathbf{e}_3.
 \end{aligned}$$

Quindi l'equazione (9.5) appare la scelta più conveniente. È comunque utile risolvere il problema nei tre modi diversi.

Nel caso i), usando la formula fondamentale (6.19), abbiamo

$$\mathbf{M}_O = m \mathbf{x}_B \times \mathbf{v}_O + I_O \boldsymbol{\omega}. \quad (9.6)$$

Notiamo che, se l'asta si muove,  $\mathbf{v}_O \neq \mathbf{0}$  perché corrisponde alla velocità di  $O$  come punto solidale all'asta. Al variare di  $\theta$  l'origine  $O$  ha coordinate diverse in un riferimento solidale, ma nella (9.6)  $\mathbf{v}_O$  si deve intendere come la velocità di un punto solidale. Per calcolarla possiamo usare nuovamente la formula fondamentale:

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_B - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_B = 2\ell\dot{\theta}(\cos \theta \mathbf{e}_1 - \sin \theta \mathbf{e}_2) = 2\mathbf{v}_B,$$

per cui

$$m \mathbf{x}_B \times \mathbf{v}_O = 2m \mathbf{x}_B \times \mathbf{v}_B = -2m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3.$$

Inoltre, sapendo che

$$I_3^{(B)} = \frac{m\ell^2}{3}$$

è il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse  $B\hat{\mathbf{e}}_3$  e che  $O\hat{\mathbf{e}}_3$  è un asse principale di inerzia, dal teorema di Huygens-Steiner otteniamo

$$I_O \boldsymbol{\omega} = I_3^{(O)} \boldsymbol{\omega} = (I_3^{(B)} + m\ell^2) \dot{\theta} \mathbf{e}_3 = \frac{4}{3} m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3.$$

Abbiamo dunque

$$\mathbf{M}_O = -2m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3 + \frac{4}{3} m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3 = -\frac{2}{3} m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3.$$

In alternativa si può calcolare il momento angolare  $\mathbf{M}_O$  come segue:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_B + \mathbf{x}_B \times m \mathbf{v}_B = \frac{1}{3} m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3 - m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3 = -\frac{2}{3} m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3.$$

In questo modo sparisce l'ambiguità di notazione, che nasceva dal fatto di calcolare la velocità di un punto solidale al corpo (il punto  $O$ ), ma sempre diverso al variare di  $\theta$ . Dalla (9.2) si ottiene

$$-\frac{2}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = (-2\Phi_A \cos \theta + 2\Phi_C \sin \theta - mg \sin \theta)\ell. \quad (9.7)$$

Possiamo eliminare le reazioni vincolari  $\Phi_A, \Phi_C$  dalla (9.7) utilizzando la prima equazione cardinale proiettata lungo  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ :

$$\Phi_A = m\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{e}_1 = m\ell(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta), \quad (9.8)$$

$$\Phi_C - mg = m\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{e}_2 = -m\ell(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta). \quad (9.9)$$

Sostituendo (9.8), (9.9) nella (9.7) otteniamo l'equazione del moto:

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4\ell} \sin \theta. \quad (9.10)$$

Nel caso ii) abbiamo

$$\mathbf{M}_B = I_B \boldsymbol{\omega} = \frac{m\ell^2}{3} \dot{\theta} \mathbf{e}_3,$$

per cui dalla (9.3) si ottiene l'equazione

$$\frac{m\ell^2}{3} \ddot{\theta} = (\Phi_C \sin \theta - \Phi_A \cos \theta)\ell. \quad (9.11)$$

Sostituendo (9.8), (9.9) nella (9.11) si ottiene l'equazione del moto (9.10).

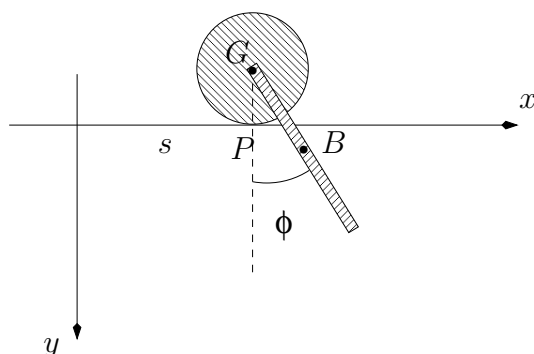
Nel caso iii) abbiamo

$$\mathbf{M}_{C_0} = \mathbf{M}_B + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{C_0}) \times m\mathbf{v}_B = \mathbf{M}_B - \mathbf{x}_B \times m\mathbf{v}_B = \frac{4}{3}m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3,$$

e dalla (9.5) si ottiene subito l'equazione (9.10).

**Esercizio 27.** *Si studi il moto di un disco omogeneo di raggio  $R$  e massa  $m$  che rotola senza strisciare su un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto ad un piano orizzontale.*

**Esercizio 28.** *Si scrivano le equazioni del moto di un sistema costituito da un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  e da un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  vincolata per un estremo al baricentro  $G$  del disco. Il moto si svolge nel piano  $(x, y)$  (vedi figura 28), il disco è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse  $x$  mentre l'asta può oscillare liberamente rispetto alla verticale (il vincolo in  $G$  è liscio). Si utilizzino coordinate  $(s, \varphi)$  in cui  $s$  è l'ascissa del punto del disco a contatto con l'asse  $x$  e  $\varphi$  è l'angolo tra l'asta e la verticale.*



**Soluzione.** Scriviamo la seconda equazione cardinale per la sola asta rispetto al polo  $G$ :

$$\dot{\mathbf{M}}_G^{(a)} = -\mathbf{v}_G \times m\mathbf{v}_B + \mathbf{N}_G^{(a)}.$$

Le coordinate del baricentro  $G$  del disco sono

$$\mathbf{x}_G = s\mathbf{e}_1 - R\mathbf{e}_2.$$

Le coordinate della posizione e velocità del baricentro  $B$  dell'asta sono

$$\mathbf{x}_B = (s + l \sin \varphi)\mathbf{e}_1 + (-R + l \cos \varphi)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v}_B = (\dot{s} + l\dot{\varphi} \cos \varphi)\mathbf{e}_1 - l\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_2.$$

Il momento angolare dell'asta rispetto al polo  $G$  si può scrivere nella forma

$$\mathbf{M}_G^{(a)} = \mathbf{M}_B^{(a)} + m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_G) \times \mathbf{v}_B,$$

in cui

$$m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_G) \times \mathbf{v}_B = -ml(\dot{s} \cos \varphi + l\dot{\varphi})\mathbf{e}_3$$

ed il momento angolare rispetto al baricentro  $B$  è

$$\mathbf{M}_B^{(a)} = -\frac{m\ell^2}{3}\dot{\varphi}\mathbf{e}_3.$$

Si ha inoltre

$$-\mathbf{v}_G \times m\mathbf{v}_B = ml\dot{s}\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_3,$$

e

$$\mathbf{N}_G^{(a)} = (B - G) \times mg\mathbf{e}_2 = mgl \sin \varphi \mathbf{e}_3.$$

Otengo l'equazione

$$-ml(\ddot{s} \cos \varphi - \dot{s}\dot{\varphi} \sin \varphi + l\ddot{\varphi}) - \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\varphi} = ml\dot{s}\dot{\varphi} \sin \varphi + mgl \sin \varphi,$$



che semplificando diventa

$$\frac{4}{3}\ell\ddot{\varphi} + \ddot{s}\cos\varphi = -g\sin\varphi.$$

Sia  $P = P(t)$  il punto del disco a contatto con l'asse  $Ox$  al generico tempo  $t$ . Scriviamo la seconda equazione cardinale per il sistema completo (asta e disco) rispetto al polo  $P$ :

$$\dot{\mathbf{M}}_P^{tot} = -\mathbf{v}_P \times (M\mathbf{v}_G + m\mathbf{v}_B) + \mathbf{N}_P^{tot} = -\mathbf{v}_P \times m\mathbf{v}_B + \mathbf{N}_P^{tot}$$

Il momento angolare totale rispetto a  $P$  si può scrivere sommando i due momenti angolari del disco e dell'asta:

$$\mathbf{M}_P^{tot} = \mathbf{M}_P^{(d)} + \mathbf{M}_P^{(a)}$$

dove

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_P^{(d)} &= \mathbf{M}_G^{(d)} + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \times M\mathbf{v}_G, \\ \mathbf{M}_P^{(a)} &= \mathbf{M}_B^{(a)} + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_P) \times m\mathbf{v}_B,\end{aligned}$$

in cui

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \times M\mathbf{v}_G &= MR\dot{s}\mathbf{e}_3, \\ (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_P) \times m\mathbf{v}_B &= (-m\ell^2\dot{\varphi} + m\ell\cos\varphi(R\dot{\varphi} - \dot{s}) + mR\dot{s})\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{M}_G^{(d)} &= \frac{MR}{2}\dot{s}\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{M}_B^{(a)} = -\frac{m\ell^2}{3}\dot{\varphi}\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Inoltre

$$-m\mathbf{v}_P \times \mathbf{v}_B = m\dot{s}\mathbf{e}_1 \times -[(\dot{s} + \ell\dot{\varphi}\cos\varphi)\mathbf{e}_1 - \ell\dot{\varphi}\sin\varphi\mathbf{e}_2] = m\ell\dot{s}\dot{\varphi}\sin\varphi\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{N}_P^{tot} = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_P) \times m\mathbf{g}\mathbf{e}_2 = mgl\sin\varphi\mathbf{e}_3.$$

Mettendo insieme le espressioni precedenti e semplificando otteniamo

$$\left(\frac{3}{2}M + m\right)R\ddot{s} - \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\varphi} + m\ell R(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) - m\ell\ddot{s}\cos\varphi = mgl\sin\varphi.$$

### 9.1.1 Equazioni del moto con la conservazione dell'energia

Per un corpo rigido discreto, dal teorema dell'energia cinetica abbiamo

$$\dot{T} = \Pi, \tag{9.12}$$

dove

$$\begin{aligned}\Pi &= \sum_{h=1}^N \vec{F}_h \cdot \vec{v}_h = \sum_{h=1}^N \mathbf{F}_h \cdot [\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P_h - O')] \\ &= \vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{v}_{O'} + \vec{\mathbf{N}}_{O'} \cdot \vec{\omega} = \vec{\mathbf{R}}^{(E)} \cdot \vec{v}_{O'} + \vec{\mathbf{N}}_{O'}^{(E)} \cdot \vec{\omega}.\end{aligned}\quad (9.13)$$

Nel caso di corpi rigidi continui otteniamo lo stesso risultato usando (6.38) e l'ipotesi che la risultante e il momento risultante delle forze interne siano nulli:

$$\Pi = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \mathbf{R}^{(E)} \cdot \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{N}_{O'}^{(E)} \cdot \boldsymbol{\omega}.\quad (9.14)$$

Nella scrittura dell'equazione (9.12) si possono quindi usare sistemi di forze equivalenti a quelli dati, sia per i corpi rigidi discreti che per quelli continui.

Se le forze esterne sono conservative allora esse ammettono un'energia potenziale  $V$  e l'energia totale

$$E = T + V$$

è un integrale primo. Ricordiamo che la conservazione di  $E$  segue dalla relazione (9.12) in cui abbiamo  $\Pi = -\dot{V} = -\nabla_{\mathbf{x}} V \cdot \dot{\mathbf{x}}$ .

Possiamo usare la conservazione dell'energia per scrivere le equazioni del moto del sistema dell'Esempio 19. Infatti in questo caso le reazioni vincolari sono forze esterne a potenza nulla, per ogni velocità possibile, quindi le possiamo tralasciare, e la forza di gravità è conservativa, con energia potenziale

$$V = mg\mathbf{x}_B \cdot \mathbf{e}_2 = mg\ell \cos \theta,$$

in cui abbiamo sostituito il sistema delle forze di gravità distribuito sugli elementi materiali che compongono l'asta con un'unica forza  $-mg\mathbf{e}_2$  applicata al baricentro. Questo è lecito perché, grazie alla relazione (9.14), possiamo usare sistemi di forze equivalenti.

L'energia cinetica si può calcolare col teorema di König:

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_B\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Derivando rispetto al tempo l'equazione della conservazione dell'energia si ottiene

$$\left(\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} - mg\ell \sin \theta\right)\dot{\theta} = 0.$$

Da questa si ottengono due equazioni: la prima,  $\dot{\theta} = 0$ , dice semplicemente che l'energia si conserva nelle configurazioni di equilibrio, la seconda ci fornisce l'equazione di moto:

$$\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} - mg\ell \sin \theta = 0.$$

**Esercizio 29.** Usando la conservazione dell'energia, scrivere l'equazione del moto per un disco che rotola senza strisciare su un piano inclinato verticale in presenza della forza di gravità, di accelerazione costante  $g$ .

## 9.2 Equazioni di Eulero per il corpo rigido con un punto fisso

Fissiamo un riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$  e scriviamo le equazioni che descrivono il moto di un corpo rigido  $\mathfrak{C}$  con un punto fisso  $O$ . La seconda equazione cardinale in questo caso è sufficiente per determinare il moto:

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{M}_O \right|_{\Sigma} = \vec{N}_O. \quad (9.15)$$

Sia  $\vec{\omega}$  la velocità angolare del corpo rigido e consideriamo un sistema di riferimento principale  $\Sigma' = O \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$ , solidale a  $\mathfrak{C}$  e centrato nel punto fisso  $O$ . Assumiamo inoltre che  $\Sigma'$  abbia la velocità angolare di minima norma tra quelle di tutti i riferimenti solidali a  $\mathfrak{C}$ . Dalla relazione

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{M}_O \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d}{dt} \vec{M}_O \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{M}_O$$

si ha

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{M}_O \right|_{\Sigma'} = \vec{M}_O \times \vec{\omega} + \vec{N}_O. \quad (9.16)$$

Usando la relazione

$$\vec{M}_O = \mathfrak{I}_O \vec{\omega}$$

otteniamo le **equazioni di Eulero**

$$\left. \frac{d}{dt} (\mathfrak{I}_O \vec{\omega}) \right|_{\Sigma'} = \mathfrak{I}_O \vec{\omega} \times \vec{\omega} + \vec{N}_O. \quad (9.17)$$

Rappresentiamo la velocità angolare  $\vec{\omega}$ , il momento angolare  $\vec{M}_O$  e il momento della forza  $\vec{N}_O$  in coordinate nella base  $\mathcal{B}' = \{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ :

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \hat{e}'_i, \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^3 M_i \hat{e}'_i = \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i \hat{e}'_i, \quad \vec{N}_O = \sum_{i=1}^3 N_i \hat{e}'_i.$$

Introduciamo anche i vettori

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T, \quad \mathbf{M}_O = (M_1, M_2, M_3)^T, \quad \mathbf{N}_O = (N_1, N_2, N_3)^T.$$

Le equazioni (9.17), scritte in coordinate in questa base, diventano

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + N_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 + N_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + N_3. \end{cases} \quad (9.18)$$

## 9.3 Moto per inerzia

**Definizione 25.** *Chiamiamo moti per inerzia o anche moti di Eulero-Poinsot le soluzioni delle equazioni*

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{I}_O \vec{\omega}) \Big|_{\Sigma'} = \mathfrak{I}_O \vec{\omega} \times \vec{\omega}, \quad (9.19)$$

cioè le soluzioni delle equazioni di Eulero (9.17) con  $\vec{N}_O = \vec{0}$ .

Con le equazioni (9.19) possiamo studiare il moto di un corpo rigido pesante, cioè soggetto alla forza di gravità, vincolato al suo baricentro, ma anche il moto di un corpo rigido pesante libero di muoversi nello spazio. Per quest'ultimo caso basta infatti studiare il moto nel riferimento del baricentro, che quindi diventa un punto fisso. Le equazioni (9.19), scritte in coordinate nella base  $\mathcal{B}'$ , diventano

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2. \end{cases} \quad (9.20)$$

Si può descrivere la soluzione generale di queste equazioni tramite l'uso di funzioni speciali, vedi [18]. È comunque interessante ottenere una descrizione delle soluzioni dal punto di vista geometrico utilizzando solo gli integrali primi della norma del momento angolare e dell'energia cinetica. Le componenti  $M_1, M_2, M_3$  del momento angolare nella base  $\mathcal{B}'$  in generale non si conservano, ma si conserva la loro norma euclidea  $|\mathbf{M}_O|$ , in quanto si conservano le componenti di  $\vec{M}_O$  nella base  $\mathcal{B}$  e la matrice di cambiamento di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  è una matrice di rotazione. L'energia cinetica si conserva poiché la potenza della reazione vincolare è nulla, infatti

$$\dot{T} = \Pi = \vec{R}^{(E)} \cdot \vec{v}_O + \vec{N}_O^{(E)} \cdot \vec{\omega} = 0,$$

dove  $\vec{R}^{(E)}$  è la risultante delle forze esterne e  $\vec{N}_O^{(E)}$  è il momento risultante delle forze esterne rispetto al punto fisso  $O$ , vedi (9.13) e (9.14).

Introduciamo la seguente

**Definizione 26.** *L'insieme*

$$\mathcal{E}_O = \{O + \vec{x} \in \mathbb{E}^3 : \vec{x} \cdot \mathfrak{I}_O \vec{x} = 1\}$$

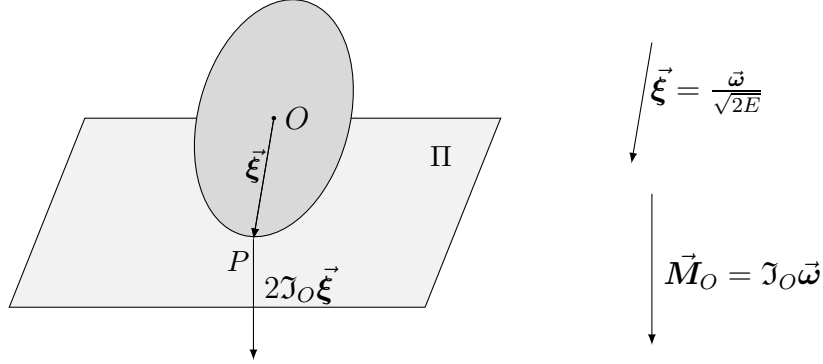
si dice **ellissoide di inerzia** relativo al punto  $O$ .

Le coordinate  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  dei punti dell'ellissoide di inerzia nel riferimento  $\Sigma'$  soddisfano la relazione

$$I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 = 1,$$

quindi gli assi principali dell'ellissoide sono diretti lungo le direzioni principali di inerzia e le loro lunghezze sono  $1/\sqrt{I_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

**Proposizione 56. (Poinsot)** *In un moto per inerzia di un corpo rigido con punto fisso  $O$  l'ellissoide di inerzia relativo al polo  $O$  rotola senza strisciare su un piano fisso  $\Pi$  perpendicolare al vettore momento angolare  $\vec{M}_O$ .*



*Dimostrazione.* Sia  $E$  il valore costante dell'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathcal{I}_O \vec{\omega} = E.$$

Il punto  $P = O + \vec{\xi}$ , con  $\vec{\xi} = \vec{\omega} / \sqrt{2E}$ , appartiene all'ellissoide di inerzia  $\mathcal{E}_O$ , infatti

$$\vec{\xi} \cdot \mathcal{I}_O \vec{\xi} = \frac{\vec{\omega} \cdot \mathcal{I}_O \vec{\omega}}{2E} = 1.$$

Osserviamo inoltre che:

1. ad ogni istante il piano tangente all'ellissoide nel punto  $P$  è ortogonale a  $\vec{M}_O$ , infatti

$$\nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{x} \cdot I_O \mathbf{x}) = 2I_O \mathbf{x}$$

e, sostituendo  $\xi = \omega / \sqrt{2E}$  al posto di  $\mathbf{x}$ , otteniamo

$$2I_O \xi = \sqrt{\frac{2}{E}} I_O \omega = \sqrt{\frac{2}{E}} \mathbf{M}_O.$$

Quindi  $2I_O \xi$ , che rappresenta un vettore normale all'ellissoide in  $P$ , è parallelo al momento angolare, che è costante nel riferimento  $\Sigma$ .

2. La distanza di tale piano da  $O$  è costante, infatti questa è data da

$$\frac{\xi \cdot \mathbf{M}_O}{|\mathbf{M}_O|} = \frac{\omega \cdot \mathbf{M}_O}{\sqrt{2E} |\mathbf{M}_O|} = \frac{\sqrt{2E}}{|\mathbf{M}_O|}.$$

3. La velocità del punto dell'ellissoide a contatto col piano è nulla, infatti l'ellissoide è solidale al corpo e  $O\vec{\xi}$  è l'asse istantaneo di rotazione perché da  $\vec{v}_O = \vec{0}$  e  $\vec{\xi} \parallel \vec{\omega}$  segue che tutti i punti solidali al corpo su  $O\vec{\xi}$  hanno velocità nulla.

□

Si chiama **poloide** la curva tracciata sulla superficie dell'ellissoide di inerzia dai punti dell'ellissoide a contatto con il piano fisso; si chiama **erpoloide** la curva tracciata sul piano fisso dai punti del piano  $\Pi$ .

Esaminiamo in dettaglio il caso perfettamente simmetrico ( $I_1 = I_2 = I_3$ ), il caso a simmetria giroscopica ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) e il caso generico ( $I_1 > I_2 > I_3$ ).

**Caso 1:**  $I_1 = I_2 = I_3 = I$

Ad esempio, questo è il caso di un corpo sferico omogeneo o di un corpo formato da 8 masse uguali disposte ai vertici di un cubo, vedi Esercizio 17.

Se la matrice che rappresenta  $\mathfrak{J}_O$  nella base principale  $\mathcal{B}'$  è un multiplo dell'identità, allora lo è in qualunque altra base. Abbiamo quindi la relazione

$$\vec{M}_O = I \vec{\omega} \quad (9.21)$$

Siccome  $\vec{M}_O$  è un integrale primo nel sistema di riferimento  $\Sigma$ , anche  $\vec{\omega} = \vec{M}_O/I$  è costante lungo le orbite, quindi il moto per inerzia è un moto rotatorio uniforme attorno a un asse fisso nello spazio (nel riferimento inerziale), che è l'asse istantaneo di rotazione. Questo segue dalla formula fondamentale della cinematica rigida applicata ad un generico punto  $P$  e al punto fisso  $O$ :

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times (P - O). \quad (9.22)$$

Se ruotiamo il sistema di riferimento  $\Sigma$  in modo da avere  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$ , con  $\omega \in \mathbb{R}$ , e denotiamo con  $x, y, z$  le coordinate di  $P$  in  $\Sigma$ , l'equazione (9.22) si scrive

$$\dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x, \quad \dot{z} = 0,$$

che ha per soluzione

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}, \quad z(t) = z(0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che in questo caso i vettori  $\vec{\omega}$  e  $\vec{M}_O$  sono costanti anche nel sistema di riferimento  $\Sigma'$ , solidale al corpo.

**Caso 2:**  $I_1 = I_2 \neq I_3$  (simmetria giroscopica)

**Proposizione 57.** I vettori  $\vec{\omega}$ ,  $\hat{e}'_3$ ,  $\vec{M}_O$  soddisfano le seguenti proprietà:

1.  $\omega_3$  e  $|\boldsymbol{\omega}|$  sono costanti;
2. il momento angolare  $\vec{M}_O$ , la velocità angolare  $\vec{\omega}$  e l'asse  $\hat{e}'_3$  sono complanari;
3. gli angoli tra due qualsiasi dei vettori  $\vec{M}_O, \vec{\omega}, \hat{e}'_3$  sono costanti.

**Osservazione 35.** La terza proprietà ci dice in particolare che sono costanti le componenti del vettore velocità angolare  $\vec{\omega}$  sui vettori  $\hat{e}'_3$  ed  $\vec{M}_O$ .

*Dimostrazione.* Le equazioni di Eulero si scrivono nel modo seguente

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\ I_1 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = 0, \end{cases} \quad (9.23)$$

dunque otteniamo

$$\omega_3 = \text{costante}, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{costante},$$

per cui è costante anche  $|\boldsymbol{\omega}|$ .

Siano  $\alpha$  l'angolo tra  $\vec{M}_O$  ed  $\vec{\omega}$ ,  $\beta$  l'angolo tra  $\vec{\omega}$  ed  $\hat{e}'_3$  e  $\gamma$  l'angolo tra  $\vec{M}_O$  ed  $\hat{e}'_3$ . Scriviamo le espressioni dei coseni di tali angoli:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega}}{|\vec{M}_O| |\boldsymbol{\omega}|} = \frac{2E}{|\vec{M}_O| |\boldsymbol{\omega}|}, \\ \cos \beta &= \frac{\omega_3}{|\boldsymbol{\omega}|}, \\ \cos \gamma &= \frac{M_3}{|\vec{M}_O|} = \frac{I_3 \omega_3}{|\vec{M}_O|}. \end{aligned}$$

Usando il punto 1., la conservazione dell'energia cinetica e della norma del momento angolare otteniamo che  $\cos \alpha$  è costante. Dal punto 1. segue immediatamente che anche  $\cos \beta$  è costante. La dimostrazione che  $\cos \gamma$  è costante si fa in modo analogo.

Il fatto che i vettori  $\vec{M}_O, \vec{\omega}, \hat{e}'_3$  siano coplanari durante il moto si ottiene dalla relazione

$$\det \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 & I_1 \omega_2 & I_3 \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

□

**Proposizione 58. (coni di Poinsot)** *Si consideri il moto di un corpo rigido con un punto fisso  $O$  avente simmetria giroscopica attorno all'asse  $\hat{e}'_3$ . Il vettore  $\vec{\omega}$  ruota uniformemente attorno alla direzione fissa del momento angolare  $\vec{M}_O$  descrivendo un cono di rotazione  $\mathcal{C}$  con velocità angolare costante. Analogamente la traccia di  $\vec{\omega}$  sul corpo descrive un cono di rotazione  $\mathcal{C}'$  con velocità angolare costante. Considerando  $\mathcal{C}$  fisso e  $\mathcal{C}'$  solidale al corpo rigido, si ha che i due coni rotolano l'uno sull'altro senza strisciare.*

*Dimostrazione.* Il vettore  $\vec{\omega}$  descrive un cono in entrambi i sistemi di riferimento poiché l'angolo tra  $\vec{\omega}$  ed  $\vec{M}_O$  e l'angolo tra  $\vec{\omega}$  ed  $\hat{e}'_3$  sono costanti. A questi due coni, denotati con  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$ , possiamo attribuire un moto considerandoli solidali a  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  rispettivamente. Si ottiene che  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  rotolano senza strisciare l'uno sull'altro poiché i punti del corpo che si trovano sull'asse passante per  $O$  e parallelo ad  $\vec{\omega}$  hanno tutti velocità nulla ( $O\vec{\omega}$  è l'asse istantaneo di rotazione e  $\vec{v}_O = \vec{0}$ ). Tale asse corrisponde alla retta istantanea di contatto tra i due coni e ha velocità istantanea nulla sia nel sistema di riferimento inerziale che nel riferimento solidale (la derivata temporale di  $\vec{\omega}$  fatta nei due riferimenti è la stessa).

Dimostriamo adesso che il moto di rotazione è uniforme. Posto

$$\hat{e}_{M_O} = \frac{\vec{M}_O}{|\vec{M}_O|}$$

si ha

$$\vec{\omega} = \omega' \hat{e}_{M_O} + \omega'' \hat{e}'_3,$$

con  $\omega', \omega''$  costanti. Dalle formule di Poisson segue che

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{e}'_3 \right|_{\Sigma} = \vec{\omega} \times \hat{e}'_3 = \omega' \hat{e}_{M_O} \times \hat{e}'_3.$$

Quindi  $\hat{e}'_3$  ruota uniformemente attorno a  $O\hat{e}_{M_O}$ , costante in  $\Sigma$ , e per la coplanarità di  $\hat{e}'_3$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{M}_O$  e l'invarianza dell'angolo tra  $\vec{\omega}$  ed  $\hat{e}'_3$  trascina nel suo moto uniforme attorno ad  $O\hat{e}_{M_O}$  anche  $\vec{\omega}$ .

La dimostrazione del moto rotatorio uniforme di  $\vec{\omega}$  attorno ad  $\hat{e}'_3$  in  $\Sigma'$  si fa in modo analogo a partire dall'equazione differenziale

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{e}_{M_O} \right|_{\Sigma'} = -\vec{\omega} \times \hat{e}_{M_O} = -\omega'' \hat{e}'_3 \times \hat{e}_{M_O},$$

che segue dalla relazione

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{e}_{M_O} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d}{dt} \hat{e}_{M_O} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \hat{e}_{M_O}$$

e dal fatto che

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{e}_{M_O} \right|_{\Sigma} = \vec{0}.$$

□



**Caso 3:**  $I_1 > I_2 > I_3$

Le equazioni di Eulero (9.19) ammettono sempre gli integrali primi

$$\begin{cases} |\mathbf{M}_O|^2 = I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2, \\ T = \frac{1}{2}(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2). \end{cases}$$

**Definizione 27.** Chiamiamo **rotazioni stazionarie** le soluzioni  $\vec{\omega}_s$  costanti delle equazioni di Eulero (9.19).

Ricordiamo che  $\vec{\omega}$  è costante nel riferimento  $\Sigma'$  se e solo se è costante in  $\Sigma$ .

Dalla (9.19) si vede che se  $\vec{\omega}_s$  è una rotazione stazionaria si ha

$$\mathfrak{I}_O \vec{\omega}_s \parallel \vec{\omega}_s,$$

cioè le rotazioni stazionarie sono gli autovettori di  $\mathfrak{I}_O$  e quindi sono necessariamente parallele ad uno degli  $\hat{e}'_j$ . Si parla dunque di rotazioni stazionarie attorno agli assi  $O\hat{e}'_1$ ,  $O\hat{e}'_2$ ,  $O\hat{e}'_3$ . Dalla relazione  $\vec{M}_O = \mathfrak{I}_O \vec{\omega}_s$  si ottiene che anche  $\vec{M}_O$  deve essere parallelo ad  $\vec{\omega}_s$ . Quindi in questo caso  $\vec{M}_O$  è costante anche in  $\Sigma'$ . Per capire la geometria delle traiettorie delle soluzioni di (9.19) consideriamo le equazioni di Eulero scritte nella forma

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{M}_O \right|_{\Sigma'} = \vec{M}_O \times \vec{\omega}. \quad (9.24)$$

Siano  $c^2, E$  i valori degli integrali primi  $|\mathbf{M}_O|^2, T$ . Le relazioni

$$\begin{cases} M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = c^2, \\ \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E \end{cases} \quad (9.25)$$

rappresentano l'intersezione di una sfera di raggio  $|c|$  con un ellissoide di semiasse  $\sqrt{2EI_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , e individuano le traiettorie possibili per le coordinate  $(M_1, M_2, M_3)$  del momento angolare nella base  $\mathcal{B}'$ . Fissiamo un valore  $E$  per l'energia e consideriamo l'insieme delle coordinate  $(M_1, M_2, M_3)$  che soddisfano (9.25). Il fatto che questo insieme sia non vuoto è garantito dalle relazioni

$$2EI_3 \leq c^2 \leq 2EI_1.$$

Descriviamo l'insieme delle traiettorie delle soluzioni di (9.20) nei vari casi. Ci sono cinque possibilità:

- 1)  $2EI_3 = c^2$ ,
- 2)  $2EI_3 < c^2 < 2EI_2$ ,
- 3)  $c^2 = 2EI_2$ ,
- 4)  $2EI_2 < c^2 < 2EI_1$ ,
- 5)  $c^2 = 2EI_1$ .

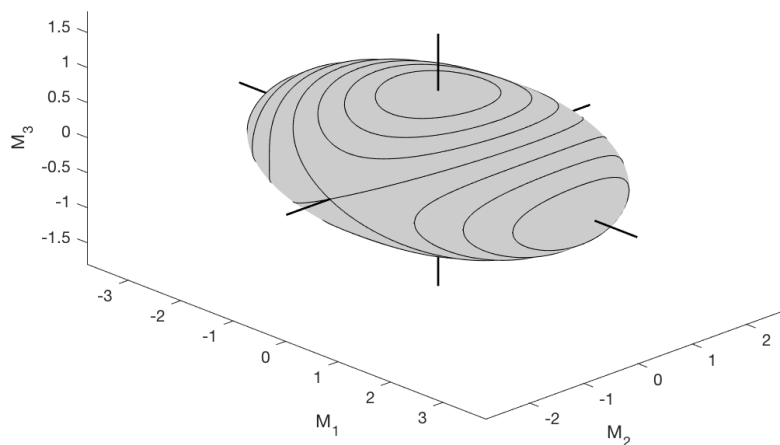


Figura 9.1: Possibili traiettorie della curva  $t \mapsto \mathbf{M}_O(t)$ , soluzione di (9.24), ottenute fissando un valore di  $T$  e usando valori diversi di  $|\mathbf{M}|$ .

Nel caso 1) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse  $O\hat{e}'_3$ , che corrispondono alle rotazioni stazionarie con  $\vec{\omega}$  parallelo a  $\hat{e}'_3$ . Nel caso 2) abbiamo due curve chiuse attorno all'asse  $O\hat{e}'_3$ . Nel caso 3) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse  $O\hat{e}'_2$  e quattro curve che li congiungono, che corrispondono alle separatrici stabili e instabili delle equazioni (9.24) ristrette all'ellissoide di energia costante. Nel caso 4) abbiamo due curve chiuse attorno all'asse  $O\hat{e}'_1$ . Nel caso 5) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse  $O\hat{e}'_1$ .

Osservando le curve disegnate nella Figura 9.1 possiamo concludere che le rotazioni stazionarie attorno agli assi  $O\hat{e}'_1$  e  $O\hat{e}'_3$ , corrispondenti ai momenti principali di inerzia massimo e minimo, sono stabili. Invece, le rotazioni stazionarie attorno a  $O\hat{e}'_2$  sono instabili. La definizione formale di stabilità degli equilibri è enunciata di seguito.

### 9.3.1 Equilibri e stabilità

Consideriamo un sistema di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad m \geq 1. \quad (9.26)$$

**Definizione 28.** Si definiscono **equilibri** di (9.26) i punti  $\mathbf{x}_0$  tali che  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ .

**Definizione 29.** Un equilibrio  $\mathbf{x}_0$  è **stabile** (per tempi positivi) se per ogni intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  esiste un intorno  $V$  di  $\mathbf{x}_0$ ,  $V \subseteq U$ , tale che per ogni  $\mathbf{y} \in V$ , la soluzione  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{y})$  di (9.26) con condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}$  soddisfa

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{y}) \in U, \quad \forall \mathbf{y} \in V, \forall t \geq 0.$$

**Definizione 30.** Un equilibrio  $\mathbf{x}_0$  è **instabile** (per tempi positivi) se non è stabile, cioè se esiste un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  tale che per ogni intorno  $V$  di  $\mathbf{x}_0$  con  $V \subseteq U$  esistono  $\mathbf{y} \in V$  e  $\bar{t} > 0$  tali che la soluzione  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{y})$  di (9.26) con condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}$  soddisfa

$$\mathbf{x}(\bar{t}; \mathbf{y}) \notin U.$$

Descriviamo due esempi standard di equilibri di sistemi autonomi piani lineari: uno è stabile, l'altro instabile.

**Esempio 20.** (*centro*) Il sistema

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x \tag{9.27}$$

ha l'origine  $(x, y) = (0, 0)$  come unico equilibrio. Inoltre esso ammette l'integrale primo

$$G(x, y) = x^2 + y^2,$$

infatti

$$\dot{G}(x, y) = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 2(-xy + yx) = 0,$$

per cui le traiettorie delle soluzioni diverse dall'equilibrio sono circonferenze centrate nell'origine. Questo ci permette di dire che l'origine è stabile.

**Esempio 21.** (*sella*) Il sistema

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y \tag{9.28}$$

ha l'origine  $(x, y) = (0, 0)$  come unico equilibrio. Inoltre esso ammette l'integrale primo

$$G(x, y) = xy,$$

infatti

$$\dot{G}(x, y) = \dot{x}y + x\dot{y} = -xy + xy = 0,$$

per cui le traiettorie delle soluzioni diverse da quelle che giacciono sugli assi coordinati sono delle iperboli. Questo ci permette di dire che l'origine è instabile.

### 9.3.2 Fase geometrica nel moto del corpo rigido

Consideriamo adesso un moto periodico attorno ad una rotazione stazionaria stabile, per esempio attorno a  $O\hat{e}_1$ . Vogliamo calcolare l'angolo  $\Delta\theta$ , che ci dice di quanto è ruotato il corpo rigido dopo un periodo di  $\mathbf{M}_O$ .

Riportiamo qui una formula dimostrata da Montgomery in [14]:

$$\Delta\theta = 2\frac{ET}{|\mathbf{M}_O|} - \Omega \quad (9.29)$$

in cui  $T$  è il periodo del moto ed  $\Omega$  è l'angolo solido tracciato sulla sfera unitaria centrata in  $O$  e solidale al corpo dalla direzione del momento angolare  $\vec{\mathbf{M}}_O$ .

In [10] si trova una dimostrazione della formula (9.29) utilizzando il teorema di Gauss-Bonnet e la Proposizione 56.

## 9.4 Effetto giroscopico

Si consideri un corpo rigido a simmetria giroscopica, con un punto fisso  $O$  e momenti principali di inerzia  $I_j$ , con  $I_1 = I_2 \neq I_3$

Se il corpo è omogeneo, per esempio una trottola, l'asse  $O\hat{e}'_3$  corrisponde al suo asse di simmetria (**asse giroscopico**). Introduciamo la componente della velocità angolare  $\vec{\omega}$  ortogonale a tale asse:

$$\vec{\omega}^\perp = \omega_1\hat{e}'_1 + \omega_2\hat{e}'_2.$$

Il momento angolare rispetto ad  $O$  si può scrivere

$$\vec{\mathbf{M}}_O = I_1\vec{\omega}^\perp + I_3\omega_3\hat{e}'_3.$$

Supponiamo che la componente lungo  $\hat{e}'_3$  del momento delle forze attive esterne rispetto ad  $O$  sia nulla:

$$N_3 = \vec{\mathbf{N}}_O \cdot \hat{e}'_3 = 0.$$

L'equazione di bilancio del momento angolare diventa quindi

$$\left. \frac{d}{dt}\vec{\mathbf{M}}_O \right|_\Sigma = \left. \frac{d}{dt}(I_1\vec{\omega}^\perp + I_3\omega_3\hat{e}'_3) \right|_\Sigma = \vec{\mathbf{N}}_O = N_1\hat{e}'_1 + N_2\hat{e}'_2. \quad (9.30)$$

Le equazioni di Eulero si scrivono

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3 + N_1, \\ I_1\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + N_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 = 0. \end{cases}$$

Consideriamo condizioni iniziali della forma

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0, \quad \omega_3(0) \gg 1.$$

Osserviamo che, anche se in generale non si avrà  $\omega_1(t) = \omega_2(t) = 0$  per ogni  $t > 0$ , in questo caso si potrà assumere che

$$\vec{\omega}^\perp(t) \simeq \vec{0} \quad (9.31)$$

insieme con la sua derivata temporale in  $\Sigma$  di  $\vec{\omega}^\perp$ .

almeno per un certo intervallo di tempo. Dato che  $\omega_3(t) = \omega_3(0)$ ,  $\forall t > 0$ , per l'ipotesi (9.31) possiamo approssimare l'equazione (9.30) con

$$I_3 \omega_3(0) \left. \frac{d}{dt} \hat{e}'_3 \right|_\Sigma = \vec{N}_O. \quad (9.32)$$

Dalla (9.32) segue che, se il momento  $\vec{N}_O$  è prodotto da una forza  $\vec{F}$  applicata in un punto  $P \neq O$  dell'asse giroscopico  $O\hat{e}'_3$ , quest'ultimo non si sposta nella direzione della forza ma nella direzione di  $\vec{N}_O$ , ad essa perpendicolare (**tendenza al parallelismo** dell'asse giroscopico al momento  $\vec{N}_O$ ).

Dalla (9.32) segue anche che per provocare un determinato spostamento dell'asse giroscopico è necessario un momento delle forze attive di norma tanto più grande quanto più grande è  $\omega_3(0)$  (**tenacia dell'asse giroscopico**).

# Capitolo 10

## Equazioni di Lagrange

Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$ , soggetti a vincoli olonomi con varietà delle configurazioni  $\mathcal{C}_t$ , che può dipendere dal tempo  $t$ . Introduciamo per ogni istante  $t$  un sistema di coordinate locali su  $\mathcal{C}_t$ :

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t) \in \mathcal{C}_t \subset \mathbb{R}^{3N}$$

**Proposizione 59.** *L'energia cinetica  $T$  è una funzione quadratica delle velocità lagrangiane  $\dot{\mathbf{q}}$ . In particolare*

$$T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + T_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + T_0(\mathbf{q}, t),$$

dove  $T_i$  è omogenea di grado  $i$  nelle variabili  $\dot{\mathbf{q}}$ . Inoltre  $T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}}$ , in cui la matrice  $A(\mathbf{q}, t)$  è simmetrica e definita positiva.

*Dimostrazione.* Introduciamo la matrice diagonale di ordine  $3N$

$$M = \text{diag}\{m_1, m_1, m_1, \dots, m_N, m_N, m_N\},$$

in cui ogni massa  $m_j$  dei punti del sistema appare tre volte sulla diagonale. Sia inoltre

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}(\mathbf{q}, t)$$

il vettore di  $\mathbb{R}^{3N}$  che rappresenta le velocità possibili degli  $N$  punti. Con questa notazione l'energia cinetica si scrive

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot M \mathbf{v} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \right) \cdot M \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \right) = T_2 + T_1 + T_0, \end{aligned}$$

con

$$T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}}, \quad T_1 = \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad T_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} \cdot M \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t},$$

dove  $A = A(\mathbf{q}, t)$  è una matrice simmetrica, detta **matrice cinetica**, con coefficienti

$$a_{hk} = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q_h} \cdot M \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q_k}, \quad h, k = 1, \dots, n,$$

e  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{q}, t)$  è un vettore, con coefficienti

$$b_h = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q_h} \cdot M \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t}, \quad h = 1, \dots, n.$$

Mostriamo che la matrice cinetica  $A$  è definita positiva.

Sia  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  con  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ . Allora

$$\mathbf{u} \cdot A \mathbf{u} = \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q_h} \cdot M \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q_k} u_h u_k = \left( \sum_{h=1}^n \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q_h} u_h \right) \cdot M \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q_k} u_k \right) > 0,$$

infatti  $M$  è definita positiva e, se  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , si ha

$$\sum_{h=1}^n \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q_h} u_h \neq \mathbf{0}$$

poichè i vettori  $\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q_n}$  sono linearmente indipendenti. □

**Osservazione 36.** *Nel caso di vincoli fissi si ha semplicemente*

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

*cioè l'energia cinetica è una forma quadratica omogenea nelle velocità lagrangiane.*

**Esempio 22.** Calcoliamo la matrice cinetica per il sistema meccanico piano composto da un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $r$  e da un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$ . Il disco può rotolare senza strisciare sull'asse  $Ox$  di un riferimento  $\Sigma = Oxy$  nel piano del moto e l'asta ha un estremo incernierato nel baricentro  $B$  del disco.

Sia  $G$  il baricentro dell'asta. Le coordinate della posizione e della velocità di  $B$  e  $G$  sono date da

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= s \mathbf{e}_1 + r \mathbf{e}_2, & \mathbf{x}_G &= (s + \ell \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (r - \ell \cos \theta) \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{v}_B &= \dot{s} \mathbf{e}_1, & \mathbf{v}_G &= (\dot{s} + \ell \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_1 + \ell \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso l'energia cinetica del sistema. Le velocità angolari del disco e dell'asta sono rispettivamente

$$\boldsymbol{\omega}_d = -\frac{\dot{s}}{r}\mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\omega}_a = \dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

ed i loro momenti principali rispetto agli assi  $B\hat{\mathbf{e}}_3$  e  $G\hat{\mathbf{e}}_3$  sono

$$I_3^d = \frac{1}{2}Mr^2, \quad I_3^a = \frac{1}{3}m\ell^2.$$

Usando il teorema di König si ottiene

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_d \cdot I_3^d\boldsymbol{\omega}_d + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_a \cdot I_3^a\boldsymbol{\omega}_a \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2}M + m\right)\dot{s}^2 + \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2 + 2m\ell \cos\theta\dot{s}\dot{\theta}\right), \end{aligned} \quad (10.1)$$

quindi la matrice cinetica è

$$A(s, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}M + m & m\ell \cos\theta \\ m\ell \cos\theta & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix},$$

che è definita positiva in quanto i determinanti dei minori principali

$$\frac{3}{2}M + m, \quad \det A = 2Mm\ell^2 + m^2\ell^2\left(\frac{4}{3} - \cos^2\theta\right) > 0$$

sono positivi.

**Osservazione 37.** *Nell'esempio precedente le dimensioni delle componenti della matrice cinetica non sono le stesse poiché  $s$  ha le dimensioni di una lunghezza e l'angolo  $\theta$  è una coordinata adimensionale.*

## 10.1 Vincoli ideali e principio di D'Alembert

**Definizione 31.** *Diciamo che i vincoli olonomi considerati sono anche ideali se il vettore delle reazioni vincolari  $(\Phi_1, \dots, \Phi_N)$  che essi possono esercitare sugli  $N$  punti del sistema in una qualunque configurazione  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_t$ , sia che essi stiano in quiete che in movimento, soddisfa ad ogni istante la relazione*

$$\sum_{j=1}^N \Phi_j \cdot \mathbf{v}_j = 0$$

per ogni scelta del vettore delle velocità virtuali  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}_t$ .



**Osservazione 38.** *I vincoli senza attrito o di puro rotolamento sono esempi di vincoli ideali.*

Sia  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  una qualunque soluzione delle equazioni di Newton

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \Phi_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Assumendo che i vincoli siano ideali possiamo scrivere

$$\sum_{j=1}^N \left( m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) - \mathbf{F}_j(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \right) \cdot \mathbf{v}_j = 0, \quad (10.2)$$

per ogni scelta del vettore delle velocità virtuali  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) \in T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{C}_t$ . Se queste equazioni sono soddisfatte diciamo che il sistema meccanico soddisfa il **principio di D'Alembert**. Poiché i vettori

$$\frac{\partial \chi}{\partial q_1}(\mathbf{q}(t), t), \dots, \frac{\partial \chi}{\partial q_n}(\mathbf{q}(t), t)$$

formano ad ogni istante  $t$  una base di  $T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{C}_t$ , dove

$$\mathbf{x}(t) = \chi(\mathbf{q}(t), t), \quad (10.3)$$

le equazioni (10.2) sono soddisfatte se e solo se

$$\sum_{j=1}^N \left( m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) - \mathbf{F}_j(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \right) \cdot \frac{\partial \chi_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) = 0, \quad h = 1, \dots, n. \quad (10.4)$$

Le equazioni (10.4) sono equazioni pure, cioè non vi appaiono le reazioni vincolari. L'incognita è la curva  $\mathbf{q}(t)$ , infatti usando la relazione (10.3) abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h + \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{q}, t) \\ \ddot{\mathbf{x}} &= \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_k \partial q_h}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{h=1}^n \left( 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial q_h}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h + \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) \ddot{q}_h \right) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(\mathbf{q}, t) \end{aligned} \quad (10.5)$$

dove abbiamo assunto che  $\chi$  sia di classe  $C^2$ .

Consideriamo le forze generalizzate<sup>1</sup>

$$Q_h = Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\chi(\mathbf{q}, t), \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t) \cdot \frac{\partial \chi_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t), \quad h = 1, \dots, n \quad (10.6)$$

---

<sup>1</sup>tra le  $\mathbf{F}_j$  ci sono anche le forze interne: non importa che il sistema delle forze interne  $\{(\mathbf{F}_j^{(I)}, P_j)\}_j$  sia equilibrato perché in (10.6) non appaiono solo  $\mathbf{R}^{(I)}$ ,  $\mathbf{N}_Q^{(I)}$  come nelle equazioni cardinali.

che avevamo già introdotto in (8.4) nel caso di vincoli fissi e forze indipendenti dal tempo. Utilizzando le forze generalizzate possiamo scrivere le equazioni (10.4) del principio di D'Alembert come

$$\sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) = Q_h(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t), \quad h = 1, \dots, n. \quad (10.7)$$

In generale, nel calcolo delle  $Q_h$  non possiamo sostituire al sistema di forze applicate  $\{(\vec{\mathbf{F}}_j, P_j)\}_j$  un qualunque sistema ad esso equivalente. Però nel caso di un corpo rigido eventualmente soggetto ad altri vincoli indipendenti dal tempo questo è possibile, infatti, per  $j = 1, \dots, N$ , si ha

$$\boldsymbol{\chi}_j(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\chi}_{O'}(\mathbf{q}) + R(\mathbf{q})\mathbf{x}'_j,$$

con  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq d \leq 6$ , per cui

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{O'}}{\partial q_h}(\mathbf{q}) + \frac{\partial R}{\partial q_h}(\mathbf{q})\mathbf{x}'_j.$$

Derivando rispetto a  $q_h$  la relazione  $RR^T = I$  si trova che la matrice

$$\Omega^{(h)} = \frac{\partial R}{\partial q_h} R^T$$

è antisimmetrica, quindi possiamo scrivere

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{O'}}{\partial q_h} + \boldsymbol{\omega}^{(h)}(\mathbf{q}) \times R\mathbf{x}'_j,$$

dove  $\boldsymbol{\omega}^{(h)} = \boldsymbol{\omega}^{(h)}(\mathbf{q})$  è il vettore associato ad  $\Omega^{(h)}$  tramite la relazione

$$\Omega^{(h)}\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}^{(h)} \times \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Quindi, se  $\{(\mathbf{F}_j, \boldsymbol{\chi}_j)\}_j$  sono le coordinate del sistema di forze applicate ai punti del corpo, si ha

$$\begin{aligned} Q_h &= \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}), \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}) \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{O'}}{\partial q_h}(\mathbf{q}) + \mathbf{N}_{O'}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}^{(h)}(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

cioè  $Q_h$  dipende solo dalla risultante  $\mathbf{R}$  e dal momento risultante  $\mathbf{N}_{O'}$  delle forze e dunque possiamo sostituire al sistema di forze applicate al corpo rigido un sistema ad esso equivalente.

**Esempio 23.** Calcoliamo le componenti lagrangiane della forza di gravità  $Q_1, \dots, Q_n$  nel caso di un sistema vincolato di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$ . Se  $\mathbf{q} \rightarrow \boldsymbol{\chi}_j(\mathbf{q}, t) \in \mathbb{R}^3$  rappresenta ad ogni istante  $t$  le coordinate in  $\mathbb{R}^3$  del punto  $P_j$  in funzione delle coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$ , si ha

$$\begin{aligned} Q_h &= \sum_{j=1}^N (-m_j g \mathbf{e}_3) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} = -g \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} \left( \sum_{j=1}^N m_j \boldsymbol{\chi}_j \right) \\ &= -g \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} m \boldsymbol{\chi}_B = -m g \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_B}{\partial q_h}, \end{aligned}$$

dove

$$\boldsymbol{\chi}_B = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j \boldsymbol{\chi}_j$$

fornisce le coordinate del baricentro  $B$  del sistema ed  $m = \sum_{j=1}^N m_j$  è la massa totale. Quindi, nel caso della forza di gravità si può sostituire il sistema di forze applicate  $\{(-m_j g \mathbf{e}_3, P_j)\}_j$  con un'unica forza  $-m g \mathbf{e}_3$  applicata al baricentro  $B$ .

Nel caso dei corpi continui si ha

$$Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t; \mathbf{x}') \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (10.8)$$

dove  $\mathbf{x}'$  sono le coordinate dei punti del corpo in un riferimento solidale  $\Sigma'$  ed  $\mathbf{f}$  è una distribuzione continua di forze agenti sugli elementi materiali che costituiscono il corpo.

**Esempio 24.** Consideriamo un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  che si può muovere in un piano  $Oxy$ , con un estremo incernierato nell'origine  $O$ . Assumiamo che tale piano ruoti uniformemente attorno all'asse  $Oy$  con velocità angolare costante  $\omega \hat{\mathbf{e}}_2$ . Usando come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  che l'asta forma con la direzione verticale calcoliamo la componente lagrangiana  $Q_\theta$  della forza centrifuga.

La densità di massa dell'asta è  $\lambda = \frac{m}{2\ell}$ . Se  $r$  è una coordinata lungo l'asta si ha

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}(\theta; r) &= r \sin \theta \mathbf{e}_1 - r \cos \theta \mathbf{e}_2, & \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \theta}(\theta; r) &= r \cos \theta \mathbf{e}_1 + r \sin \theta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{f}(\theta; r) &= -\lambda \omega^2 \mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\chi}) = \lambda \omega^2 (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Si trova che

$$Q_\theta = \int_0^{2\ell} \mathbf{f}(\theta; r) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \theta} dr = \lambda \omega^2 \int_0^{2\ell} r^2 \sin \theta \cos \theta dr = \frac{4}{3} m \ell^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (10.9)$$

Mostriamo adesso che il sistema delle forze centrifughe è equivalente ad un sistema composto dalla sola risultante  $\mathbf{R}$  delle forze centrifughe applicato al punto  $Q'$  dove l'asse centrale incrocia l'asta. La risultante è data da

$$\mathbf{R} = \int_0^{2\ell} \mathbf{f}(\theta; r) dr = \int_0^{2\ell} \lambda \omega^2 r \sin \theta dr \mathbf{e}_1 = m \omega^2 \ell \sin \theta \mathbf{e}_1.$$

Un punto  $Q$  dell'asse centrale è dato dalla relazione

$$Q - O = \frac{1}{|\mathbf{R}|^2} \vec{\mathbf{N}} \times \vec{\mathbf{N}}_O,$$

dove  $\vec{\mathbf{N}}_O$  è il momento delle forze centrifughe rispetto all'origine  $O$ . In coordinate nel riferimento  $Oxy$  si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_O &= \int_0^{2\ell} \boldsymbol{\chi}(\theta; r) \times \mathbf{f}(\theta; r) dr = \lambda \omega^2 \int_0^{2\ell} (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{e}_1) \boldsymbol{\chi} \times \mathbf{e}_1 dr \\ &= \lambda \omega^2 \int_0^{2\ell} r^2 \sin \theta \cos \theta dr = \frac{4}{3} m \omega^2 \ell^2 \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Le coordinate del punto  $Q$  sono quindi

$$\mathbf{x}_Q = -\frac{4}{3} \ell \cos \theta \mathbf{e}_2.$$

Poiché il trinomio invariante  $\mathbf{N}_Q \cdot \mathbf{R}$  è nullo si ha  $\mathbf{N}_Q = \mathbf{0}$  se e solo se  $Q$  è un punto dell'asse centrale, che è parallelo a  $\mathbf{R}$ . Quindi il sistema delle forze centrifughe è equivalente al sistema composto dalla risultante  $\mathbf{R}$  applicata nel punto  $Q'$  dell'asta di coordinate

$$\mathbf{x}_{Q'} = \boldsymbol{\chi}_{Q'}(\theta) = \frac{4}{3} \ell (\sin \theta \mathbf{e}_1 - \cos \theta \mathbf{e}_2).$$

Osserviamo che nelle equazioni del principio di D'Alembert possiamo utilizzare il sistema equivalente  $(\vec{\mathbf{R}}, Q')$  per calcolare  $Q_\theta$ . Infatti,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{Q'}}{\partial \theta} = \frac{4}{3} \ell (\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2),$$

quindi

$$\mathbf{R} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{Q'}}{\partial \theta} = \frac{4}{3} m \ell^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta,$$

che corrisponde all'espressione in (10.9).

Osserviamo anche che il baricentro  $B$  dell'asta, di coordinate

$$\boldsymbol{\chi}_B(\theta) = \ell (\sin \theta \mathbf{e}_1 - \cos \theta \mathbf{e}_2),$$

non è un punto dell'asse centrale e se sostituiamo  $(\vec{\mathbf{R}}, B)$  al sistema di forze centrifughe otteniamo un risultato sbagliato:

$$\mathbf{R} \cdot \frac{\partial \chi_B}{\partial \theta} = m\ell^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta.$$

**Esempio 25.** Consideriamo un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  che può rotolare senza strisciare sull'asse  $Ox$  di un piano  $Oxy$ . Assumiamo che tale piano ruoti uniformemente attorno all'asse  $Oy$  con velocità angolare costante  $\omega \hat{e}_2$ . Usando come coordinata lagrangiana l'ascissa  $s$  lungo l'asse  $Ox$  del baricentro  $B$  del disco, calcoliamo la componente lagrangiana della forza centrifuga.

La densità di massa del disco è  $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$ . Se  $(r, \theta)$  sono coordinate polari per il disco centrate in  $B$  si ha

$$\begin{aligned} \chi(s; r, \theta) &= (s + r \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (R + r \sin \theta) \mathbf{e}_2, & \frac{\partial \chi}{\partial s}(s; r, \theta) &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{f}(s; r, \theta) &= -\sigma \omega^2 \mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_2 \times \chi) = \sigma \omega^2 (\chi \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Si trova che

$$Q_s = \int_0^{2\pi} \int_0^R \mathbf{f}(s; r, \theta) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s}(s; r, \theta) dr d\theta = \sigma \omega^2 \int_0^{2\pi} \int_0^R (s + r \cos \theta) r dr d\theta = m\omega^2 s.$$

**Esercizio 30.** Dimostrare che nel caso dell'Esempio 25 il baricentro  $B$  del disco appartiene all'asse centrale, quindi possiamo sostituire al sistema di forze centrifughe il sistema  $(\vec{\mathbf{R}}, B)$ , dove  $\vec{\mathbf{R}}$  è la risultante di tali forze.

**Proposizione 60.** Assumiamo che la mappa  $\mathbf{q} \mapsto \chi(\mathbf{q}, t)$ , che a ogni istante  $t$  fornisce coordinate locali sulla varietà delle configurazioni  $\mathcal{C}_t$ , sia di classe  $C^2$ . Una curva  $t \mapsto \mathbf{q}(t)$  soddisfa le equazioni del principio di D'Alembert (10.4) se e solo se essa soddisfa<sup>2</sup>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial T}{\partial q_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad h = 1, \dots, n. \quad (10.10)$$

<sup>2</sup>nell'equazione differenziale (10.10) si intende che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2 T}{\partial q_k \partial \dot{q}_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{q}_h}.$$

Le (10.10) rappresentano una forma delle **equazioni di Lagrange**.

*Dimostrazione.* Le equazioni del principio di D'Alembert si possono scrivere

$$M\ddot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial q_h} = Q_h, \quad h = 1, \dots, n, \quad (10.11)$$

dove  $\ddot{\mathbf{x}}$  è data da (10.5). Dobbiamo quindi verificare che lungo le soluzioni di (10.2) si abbia

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = M\ddot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial q_h}, \quad h = 1, \dots, n. \quad (10.12)$$

Consideriamo l'energia cinetica  $T = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot M \mathbf{v}$ , con

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

Per  $h = 1, \dots, n$  si ha

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} \cdot M \mathbf{v} = \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \mathbf{v}$$

poichè

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \chi}{\partial q_h},$$

quindi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \mathbf{v} + \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

in cui

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{h=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \ddot{\mathbf{x}}$$

lungo le soluzioni. Inoltre si ha

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} \cdot M \mathbf{v}.$$

Dalle relazioni

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial q_h} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial q_h}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_h \partial t}, \end{aligned}$$

scambiando l'ordine di derivazione si ottiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial q_h} = \frac{\partial v}{\partial q_h}. \quad (10.13)$$

per cui<sup>3</sup>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \frac{dv}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \ddot{x}.$$

□

Osserviamo che le (10.10) si possono scrivere come sistema di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale. Infatti, dalla relazione

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + c(\mathbf{q}, t)$$

si ottiene

$$\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t),$$

dunque le equazioni di Lagrange si possono scrivere

$$A(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (10.14)$$

con

$$F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \nabla_{\mathbf{q}} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{dA}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \dot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{b}}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

dove

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{q}} T &= \left( \frac{\partial T}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial q_n} \right)^T, & \frac{\partial T}{\partial q_h} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial A}{\partial q_h} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial q_h} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial c}{\partial q_h}, \\ \frac{dA}{dt} &= \sum_{h=1}^n \frac{\partial A}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial A}{\partial t}, & \frac{d\mathbf{b}}{dt} &= \sum_{h=1}^n \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Poiché la matrice cinetica  $A$  è invertibile, introducendo la variabile  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  le (10.14) si possono scrivere come sistema del primo ordine in forma normale:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q}, t) F(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t). \end{cases} \quad (10.15)$$

**Definizione 32.** Chiamiamo **sistemi lagrangiani** i sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine della forma (10.10) per i quali

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \text{ è definita positiva per ogni } \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t.$$

<sup>3</sup>osserviamo che, anche se appaiono alcune derivate terze, grazie alla (10.13) basta avere  $F \in C^2$ .

## 10.2 Forze conservative e lagrangiana

**Definizione 33.** In un sistema di equazioni di Lagrange della forma (10.10) le forze generalizzate  $Q_1, \dots, Q_n$  si dicono **conservative** se esiste una funzione  $V(\mathbf{q}, t)$  tale che

$$Q_h(\mathbf{q}, t) = -\frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t), \quad h = 1, \dots, n.$$

La funzione  $V$  si chiama energia potenziale delle forze  $Q_h$ .

Se il sistema di forze  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$  è conservativo con energia potenziale  $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ , cioè si ha

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}), \quad -\nabla_{\mathbf{x}_j} \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, N,$$

allora possiamo scegliere

$$V(\mathbf{q}, t) = \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)),$$

infatti

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) &= -\sum_{j=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_j} \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) = \\ &= \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) = Q_h(\mathbf{q}, t). \end{aligned}$$

Nel caso di un sistema lagrangiano conservativo possiamo scrivere le equazioni (10.10) nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial L}{\partial q_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad (10.16)$$

dove

**Definizione 34.** La funzione

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t)$$

si dice **lagrangiana**, o *funzione di Lagrange*.

**Esempio 26.** Consideriamo un sistema meccanico costituito da un disco e da un'asta come nell'Esempio 22. Assumiamo anche che sul sistema agisca la forza di gravità, di accelerazione  $g\mathbf{e}_2$ , ed una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla che collega l'estremo libero  $A$  dell'asta all'asse  $Oy$  mantenendosi sempre parallela ad  $Ox$ .



L'energia potenziale delle forze attive è data da

$$V(s, \theta) = MgR + mg(R - \ell \cos \theta) + \frac{1}{2}k(s + 2\ell \sin \theta)^2.$$

Tenendo conto dell'espressione dell'energia cinetica calcolata in (10.1) e trascurando le costanti additive si ha

$$L = T - V = \left(\frac{3}{4}M + \frac{m}{2}\right)\dot{s}^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\ell \cos \theta \dot{s}\dot{\theta} + mgl \cos \theta - \frac{1}{2}k(s + 2\ell \sin \theta)^2,$$

per cui

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} &= \left(\frac{3}{2}M + m\right)\dot{s} + m\ell \cos \theta \dot{\theta}, \\ \frac{\partial L}{\partial s} &= -k(s + 2\ell \sin \theta), \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta} + m\ell \cos \theta \dot{s}, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -m\ell \sin \theta \dot{s}\dot{\theta} - mgl \sin \theta - 2k(s + 2\ell \sin \theta)\ell \cos \theta.\end{aligned}$$

Concludiamo che le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}M + m\right)\ddot{s} - m\ell \sin \theta \dot{\theta}^2 + m\ell \cos \theta \ddot{\theta} + k(s + 2\ell \sin \theta) &= 0, \\ \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + m\ell \cos \theta \ddot{s} + mgl \sin \theta + 2k(s + 2\ell \sin \theta)\ell \cos \theta &= 0.\end{aligned}$$

### 10.3 Lagrangiane equivalenti

Vale il seguente risultato

**Lemma 3.** *Sia  $F(\mathbf{q}, t)$  una funzione di classe  $C^2$  e sia*

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Allora si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left( \frac{dF}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial q_h} \left( \frac{dF}{dt} \right) = 0, \quad h = 1, \dots, n.$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial F}{\partial q_h},$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_h}.$$

Inoltre

$$\frac{\partial}{\partial q_h} \left( \frac{dF}{dt} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial t}.$$

Si conclude usando la regolarità di  $F$ .

□

Siano  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ ,  $F(\mathbf{q}, t)$  funzioni di classe  $C^2$ . Se definiamo

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = c L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt} F(\mathbf{q}, t), \quad (10.17)$$

con  $c \neq 0$  costante, e

$$\frac{d}{dt} F(\mathbf{q}, t) = \sum_{h=1}^n \dot{q}_h \frac{\partial F}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{q}, t),$$

allora, dal Lemma 3 segue che  $L$  e  $\mathcal{L}$  definiscono le stesse equazioni di Lagrange.

**Esercizio 31.** *In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $Oxz$  con asse  $Oz$  verticale ascendente e si consideri un triangolo rettangolo  $ABC$  di altezza  $h$ , con angolo retto in  $A$  e angolo  $\alpha$  in  $B$ , il cui lato  $AB$  scivola sull'asse  $Ox$  con legge oraria  $A(t) \equiv (s(t), 0)$ , dove  $s \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  è una funzione nota del tempo. Sul triangolo può rotolare senza strisciare un disco omogeneo  $\mathcal{C}$  di massa  $m$  e raggio  $R$ . Sul disco agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Usando come coordinata lagrangiana l'ascissa  $q$  del punto di contatto  $P$  tra disco e triangolo sul lato  $BC$  del triangolo*

*i) scrivere la lagrangiana  $L$  del disco relativa al sistema di riferimento  $Oxz$  e la lagrangiana  $L'$  relativa a un sistema solidale al triangolo;*

*ii) trovare una funzione  $F(q, t)$  tale che*

$$L = L' + \frac{d}{dt} F.$$

**Soluzione.** Nel riferimento  $Oxz$  le coordinate del baricentro  $G$  del disco sono

$$x_G(q, t) = s(t) + q \cos \alpha + R \sin \alpha, \quad z_G(q, t) = h - q \sin \alpha + R \cos \alpha.$$

Nel riferimento  $Ax'z'$ , con assi  $Ax'$ ,  $Az'$  paralleli ad  $Ax$ ,  $Az$  rispettivamente, le coordinate del baricentro  $G$  del disco sono

$$x'_G(q, t) = q \cos \alpha + R \sin \alpha, \quad z'_G(q, t) = h - q \sin \alpha + R \cos \alpha$$

Le lagrangiane del problema nei due riferimenti si scrivono rispettivamente:

$$L = T - V, \quad L' = T' - V'$$

con

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_G\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{2}\dot{q}^2 + \dot{s}^2 + 2\cos\alpha\dot{s}\dot{q}\right),$$

$$V = mg(h - q \sin \alpha)$$

e

$$T' = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}'_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_G\boldsymbol{\omega} = \frac{3}{4}m\dot{q}^2,$$

$$V' = mg(h - q \sin \alpha) + m\ddot{s}(q \cos \alpha + R \sin \alpha).$$

Il secondo termine nell'ultima formula corrisponde all'energia potenziale delle forze apparenti di trascinamento, che possiamo considerare un'unica forza  $-m\ddot{s}\mathbf{e}_1$  applicata al baricentro  $G$ . Dimostriamo quest'ultima affermazione. Sia  $\mathbf{F}_{\mathbf{x}'}$  la densità di forza di trascinamento,  $\rho = m/(\pi R^2)$  la densità di massa del disco  $\mathcal{C}$  e  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') \in \mathbb{R}^3$  le coordinate del punto  $\mathbf{x}'$  del corpo nel riferimento  $Ax'z'$  in funzione delle coordinate lagrangiane  $\mathbf{q}$ . La forza generalizzata corrispondente si scrive

$$Q_h = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_{\mathbf{x}'} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' = -\rho\ddot{s} \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_1 = -m\ddot{s} \frac{\partial(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A)}{\partial q_h} \cdot \mathbf{e}_1.$$

Questa forza generalizzata deriva dall'energia potenziale  $m\ddot{s}x'_G$ , dove

$$x'_G = x_G - x_A = q \cos \alpha + R \sin \alpha.$$

□

## 10.4 Covarianza delle equazioni di Lagrange

Verifichiamo che la forma delle equazioni

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (10.18)$$

resta la stessa se operiamo un cambiamento di coordinate.

**Proposizione 61.** Consideriamo un sistema lagrangiano definito da una funzione  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ . Sia  $\mathbf{q} \mapsto \varphi(\mathbf{q})$  un cambiamento di variabili di classe  $C^2$ . Allora  $t \mapsto \mathbf{q}(t)$  è una soluzione delle equazioni di Lagrange per  $L$  se e solo se  $t \mapsto \mathbf{Q}(t) = \varphi(\mathbf{q}(t))$  è una soluzione delle equazioni di Lagrange per

$$\mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L\left(\varphi^{-1}(\mathbf{Q}), \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t\right).$$

*Dimostrazione.* Si introduce la trasformazione

$$(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \mapsto \Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \left(\varphi(\mathbf{q}), \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, t\right).$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_h} \left( \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_\ell} \dot{Q}_\ell \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h}$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h} = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left( \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_k^{-1}}{\partial Q_\ell \partial Q_h} \dot{Q}_\ell \right).$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_h} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial}{\partial Q_h} \left( \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_\ell} \dot{Q}_\ell \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left( \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h \partial Q_\ell} \dot{Q}_\ell \right). \end{aligned}$$

Usando il fatto che  $\varphi^{-1}$  è di classe  $C^2$  si ottiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{Q}} = \left( \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}} \right]^{-1} \right) \circ \Phi^{-1}.$$

□

**Osservazione 39.** La Proposizione 61 non vale se  $\varphi$  dipende anche da  $t$ .

**Esercizio 32.** Trovare come cambiano le equazioni di Lagrange facendo un cambiamento di coordinate dipendente dal tempo.

## 10.5 Energia potenziale generalizzata

Diciamo che le componenti lagrangiane delle forze  $Q_h$  ammettono un'energia potenziale generalizzata se esiste una funzione  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  tale che

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t). \quad (10.19)$$

Se esiste una tale funzione  $V$ , allora definendo  $L = T - V$  le equazioni di Lagrange (10.10) si possono scrivere nella forma (10.16). Notiamo che, se esiste  $V$  che soddisfa (10.19), allora si ha

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = V_0(\mathbf{q}, t) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (10.20)$$

con  $V_i$  omogenea di grado  $i$  ( $i = 0, 1$ ) nelle  $\dot{\mathbf{q}}$ , infatti per ogni  $h = 1, \dots, n$  si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \dot{q}_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = Q_h.$$

Poiché le forze attive  $\mathbf{F}_j$  agenti sui punti del sistema possono dipendere solo dalle loro posizioni e velocità e dal tempo, si ha necessariamente

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad h, k = 1, \dots, n. \quad (10.21)$$

Allora, integrando due volte la (10.21), si ottiene

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + V_0(\mathbf{q}, t), \quad (10.22)$$

per certe funzioni  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  e  $V_0$ . Se le componenti lagrangiane  $Q_h$  delle forze ammettono un potenziale generalizzato, allora dalle (10.19), (10.22) si ottiene

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) + B(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(\mathbf{q}, t),$$

dove  $B(\mathbf{q}, t)$  è una matrice antisimmetrica con coefficienti

$$B_{hk} = \frac{\partial a_h}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_h},$$

infatti

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \dot{q}_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial a_h}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_h} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial a_h}{\partial t} - \frac{\partial V_0}{\partial q_h}. \end{aligned}$$

**Proposizione 62.** *Le forze apparenti ammettono l'energia potenziale generalizzata*

$$V' = m\vec{a}_{O'} \cdot (P - O') - \frac{1}{2}m|\vec{\omega} \times (P - O')|^2 - m\vec{\omega} \times (P - O') \cdot \vec{v}', \quad (10.23)$$

Scrivendo i vettori in coordinate nella base  $\mathcal{B}$  si ha

$$V' = m\mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q} - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}|^2 - m\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} \cdot R\dot{\mathbf{q}}, \quad (10.24)$$

in cui  $\mathbf{q}$  è il vettore delle coordinate cartesiane di  $P - O'$  nella base  $\mathcal{B}'$  ed  $R = (R_{ij})$  con  $R_{ij} = \hat{e}'_j \cdot \hat{e}_i$ .

*Dimostrazione.* La differenza delle energie cinetiche,  $T'$  nel riferimento  $\Sigma'$  e  $T$  nel riferimento  $\Sigma$ , ci fornisce un'espressione per l'energia potenziale delle forze apparenti che agiscono su un punto materiale di massa  $m$ . Per dimostrarlo basta scrivere le equazioni di Lagrange di prima specie per il punto materiale in  $\Sigma'$  ed in  $\Sigma$ , utilizzando le stesse coordinate lagrangiane. Assumendo che sul punto non agiscano forze nel riferimento  $\Sigma$ , si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} T' - \frac{\partial}{\partial q_h} T' = Q'_h, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} T - \frac{\partial}{\partial q_h} T = 0, \quad h = 1, \dots, n,$$

dove  $Q'_h$  sono le componenti lagrangiane delle forze apparenti. Siccome le equazioni devono essere le stesse, per differenza si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} (T' - T) - \frac{\partial}{\partial q_h} (T' - T) = Q'_h \quad h = 1, \dots, n.$$

Notiamo che i termini quadratici nelle velocità lagrangiane  $\dot{\mathbf{q}}$  spariscono, infatti

$$\begin{aligned} T' - T &= \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{q}}|^2 - \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}|^2 = \\ &= -\frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'}|^2 - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}|^2 - m\mathbf{v}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}) - m\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} \cdot R\dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

quindi possiamo scegliere  $V' = T' - T$ .

Utilizziamo adesso il Lemma 3. Il termine  $\frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'}|^2$  è una funzione nota solo del tempo e può essere tralasciata. Inoltre si ha

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{O'} \cdot R\mathbf{q}) = \mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q} + \mathbf{v}_{O'} \cdot (\dot{R}\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q} + \mathbf{v}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}),$$

per cui possiamo sostituire

$$-m\mathbf{v}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}})$$

con

$$m\mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q} - m\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{O'} \cdot R\mathbf{q})$$

e trascurare il secondo termine perché è una derivata totale di una funzione di  $(\mathbf{q}, t)$ . Infatti se

$$\tilde{V} = V + \frac{d}{dt}F,$$

dove  $F = F(\mathbf{q}, t)$ , e si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q},$$

allora vale anche

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}.$$

La dimostrazione è la stessa fatta nella Sezione 10.3. □

**Osservazione 40.** *In generale non si riesce a distinguere tra i termini relativi alle forze di trascinamento e quelli della forza di Coriolis.*

**Proposizione 63.** *Nel caso particolare in cui  $\vec{\omega}$  è costante possiamo definire separatamente un'energia potenziale per le forze di trascinamento  $-m\vec{\mathbf{a}}_{O'}$ ,  $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O'))$ , e per la forza di Coriolis  $-2m\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}'$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  con posizione  $P-O'$ , velocità  $\vec{\mathbf{v}}'$  e accelerazione  $\vec{\mathbf{a}}'$  relative a  $\Sigma'$ , rappresentate dai vettori  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^3$  nella base  $\mathcal{B}'$ . Sia inoltre  $\boldsymbol{\omega}$  il vettore delle coordinate della velocità angolare in  $\mathcal{B}$ .

Usiamo il risultato seguente

**Lemma 4.** *Se  $\boldsymbol{\omega}$  è costante, esiste una matrice costante di rotazione  $R_0$  tale che*

$$R_0 R^T \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}, \quad (10.25)$$

dove  $R$  è la matrice di cambiamento di base da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$ .

*Dimostrazione.* Se il vettore  $\vec{\omega}$  è costante in  $\Sigma$  allora è costante anche in  $\Sigma'$ . Scegliamo  $R_0 = R(0)$ . Consideriamo il sistema di riferimento  $\Sigma'' = O'\hat{\mathbf{e}}_1''\hat{\mathbf{e}}_2''\hat{\mathbf{e}}_3''$ , i cui versori  $\hat{\mathbf{e}}_h''$  sono rappresentati in  $\mathcal{B}$  da

$$\mathbf{e}_h''(t) = R_0^T \mathbf{e}_h'(t), \quad h = 1, 2, 3.$$

Poiché vale  $\mathbf{e}_h'(0) = R_0 \mathbf{e}_h$ , si ha  $\mathbf{e}_h''(0) = \mathbf{e}_h$  per  $h = 1, 2, 3$ .

Il vettore  $\vec{\omega}$  è anche la velocità angolare di  $\Sigma''$  rispetto a  $\Sigma$ , quindi  $\vec{\omega}$  è costante anche in  $\Sigma''$ . Le coordinate di  $\vec{\omega}$  nella base  $\mathcal{B}''$  sono date da  $R_0 R^T \boldsymbol{\omega}$ ; si ha dunque

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times R_0 R^T \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}.$$

Poiché per ipotesi si ha  $R_0 R^T(0) = I$ , si ottiene

$$\boldsymbol{\omega} \times R_0 R^T \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0},$$

da cui, sfruttando il fatto che  $R_0 R^T$  è un'isometria e che  $R(t)$  è continua, si ottiene la (10.25). □

Nel seguito assumeremo per semplicità che  $R_0 = I$ , cioè che al tempo  $t = 0$  l'orientazione del riferimento  $\Sigma'$  coincida con quella di  $\Sigma$ . In questa ipotesi, la (10.25) si può scrivere come

$$R\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}. \quad (10.26)$$

Siano  $\mathbf{q}$  le coordinate cartesiane di  $P - O'$  in  $\mathcal{B}'$ . Per ciascun termine  $\mathbf{F}$  delle forze apparenti

$$-m\ddot{\mathbf{x}}_{O'}, \quad -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}), \quad -2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}}$$

cerchiamo una funzione  $V$  tale che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = Q_h = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}, \quad (10.27)$$

con

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{x}_{O'}(t) + R(t)\mathbf{q},$$

per cui

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} = R\mathbf{e}_h = \mathbf{e}'_h,$$

e la (10.27) diventa

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}'_h.$$

Quindi al membro destro delle (10.27) dobbiamo ottenere le componenti delle forze apparenti nella base  $\mathcal{B}'$ .

La forza di trascinamento dovuta al moto di  $O'$  è

$$\mathbf{F}_{tr} = -m\ddot{\mathbf{x}}_{O'}.$$



Tale forza ammette l'energia potenziale

$$V_{tr}(\mathbf{q}, t) = m\ddot{\mathbf{x}}_{O'} \cdot R\mathbf{q}, \quad (10.28)$$

infatti

$$-\frac{\partial}{\partial q_h} V_{tr} = -m\ddot{\mathbf{x}}_{O'} \cdot \mathbf{e}'_h.$$

La forza centrifuga è

$$\mathbf{F}_{centr} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}).$$

Tale forza ammette l'energia potenziale<sup>4</sup>

$$V_{centr}(\mathbf{q}, t) = -\frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}|^2 = -\frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}|^2, \quad (10.29)$$

in cui abbiamo usato (10.26) ed il fatto che  $R$  è un'isometria. Infatti

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V_{centr}}{\partial q_h} &= m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_h = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_h = \\ &= -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}'_h = \mathbf{F}_{centr} \cdot \mathbf{e}'_h. \end{aligned}$$

La forza di Coriolis è

$$\mathbf{F}_{Cor} = -2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}}.$$

Tale forza ammette l'energia potenziale generalizzata

$$V_{Cor}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = mR\dot{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}} = m\dot{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}. \quad (10.30)$$

Infatti

$$\frac{\partial V_{Cor}}{\partial q_h} = m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}_h = m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}'_h,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial V_{Cor}}{\partial \dot{q}_h} &= m \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{q}} \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_h = \\ &= m\dot{\mathbf{q}} \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_h = -m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}'_h, \end{aligned}$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V_{Cor}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V_{Cor}}{\partial q_h} = -2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}'_h = \mathbf{F}_{Cor} \cdot \mathbf{e}'_h.$$

□

**Osservazione 41.** *Dalle espressioni a destra nelle (10.29), (10.30) si vede che in realtà queste energie potenziali non dipendono dal tempo.*

<sup>4</sup>Dalla seconda espressione di  $V_{centr}$  si nota che in effetti essa non dipende da  $t$ .

Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  e assumiamo che su di essi agiscano delle forze  $\mathbf{F}_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$  che ammettono un'energia potenziale generalizzata, cioè che esista una funzione  $\mathcal{V}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$  take che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_j} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{x}_j} = \mathbf{F}_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Se il sistema di punti è soggetto a vincoli olonomi e a ogni istante  $t$  la mappa

$$\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$$

rappresenta una parametrizzazione locale della varietà delle configurazioni  $\mathcal{C}_t$ , allora la funzione

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t), \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t)$$

è un'energia potenziale generalizzata per le forze agenti sul sistema vincolato, infatti per  $h = 1, \dots, n$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{x}} \right] \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \right) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} \right] \\ &= \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t), \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} = Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \end{aligned}$$

poiché

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h}.$$

**Esempio 27.** Calcoliamo l'energia potenziale della forza centrifuga per il sistema dell'Esempio 24. Si ha

$$V(\theta) = \int_0^{2\ell} -\frac{1}{2} \lambda |\omega \mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\chi}|^2 dr,$$

dove

$$\lambda = \frac{m}{2\ell}, \quad \boldsymbol{\chi}(\theta; r) = 2r(\sin \theta \mathbf{e}_1 - \cos \theta \mathbf{e}_2), \quad r \in [0, 2\ell],$$

sono rispettivamente la densità di massa dell'asta ed il vettore delle coordinate di un generico punto dell'asta. Quindi

$$V(\theta) = -\frac{1}{2} \lambda \omega^2 \int_0^{2\ell} r^2 \sin^2 \theta dr = -\frac{2}{3} m \omega^2 \ell^2 \sin^2 \theta.$$

Si verifica facilmente che

$$-\frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_\theta,$$

in cui la forza generalizzata  $Q_\theta$  è data dalla (10.9).

**Esempio 28.** (*Problema dei tre corpi ristretto circolare piano in un sistema di riferimento ruotante*) Consideriamo un punto materiale  $P$  di massa  $\mu$  che si muove in un piano sotto l'azione della forza di attrazione gravitazionale prodotta da due punti materiali  $P_1, P_2$  di masse  $m_1, m_2$  molto più grandi di  $\mu$ . Assumiamo che il moto di  $P_1$  e  $P_2$  non sia influenzato dalla presenza di  $P$  e che questi punti si muovano nello stesso piano di  $P$  su orbite circolari, soluzioni del problema dei due corpi, centrate nel loro baricentro  $O$ . Consideriamo un riferimento  $\Sigma = Oxyz$ , dove  $Oxy$  è il piano del moto dei punti considerati. Sia  $d$  la distanza  $|P_1 - P_2|$  e  $G$  la costante gravitazionale di Newton. Possiamo scegliere le unità di misura in modo che

$$d = 1, \quad m_1 + m_2 = 1, \quad G = 1.$$

Poniamo  $m = m_2$  e consideriamo un riferimento  $\Sigma' = O\xi\eta\zeta$ , che si muove rispetto a  $\Sigma$  in modo che  $Oz' = Oz$  e la direzione del vettore  $P_2 - P_1$  corrisponda a quella dell'asse  $O\xi$  (vedi figura). La velocità angolare di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$  è  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$ , con  $\hat{e}_3$  perpendicolare al piano del moto, e con le unità di misura scelte si ha<sup>5</sup>

$$\omega = 1.$$

Inoltre, usando l'integrale del centro di massa, si ha

$$|P_1 - O| = m, \quad |P_2 - O| = 1 - m.$$

Siano  $\mathbf{q} = (\xi, \eta, 0)$  le coordinate del punto  $P$  nel riferimento  $\Sigma'$ . L'energia potenziale per unità di massa  $\mu$  delle forze che agiscono su  $P$  è

$$\begin{aligned} V &= -\frac{(1-m)}{|P-P_1|} - \frac{m}{|P-P_2|} - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}|^2 - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} \\ &= -\frac{(1-m)}{\sqrt{(\xi+m)^2 + \eta^2}} - \frac{m}{\sqrt{(\xi-1+m)^2 + \eta^2}} - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) - (\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}). \end{aligned}$$

## 10.6 Funzione di dissipazione di Rayleigh

Dato un sistema di  $N$  punti materiali dividiamo le forze attive in due categorie, quelle che ammettono un'energia potenziale generalizzata  $V$  e quelle che non la ammettono. Possiamo scrivere le equazioni di Lagrange nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = Q_h, \quad h = 1, \dots, n \quad (10.31)$$

<sup>5</sup>per dimostrarlo basta usare la terza legge di Keplero.

dove  $L = T - V$  e  $Q_h$  sono le componenti lagrangiane delle forze che non ammettono energia potenziale. Se le  $Q_h$  sono prodotte da forze dissipative della forma

$$\vec{F}_j = -k\vec{v}_j, \quad j = 1, \dots, N$$

possiamo considerare la **funzione di dissipazione di Rayleigh**

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}k \sum_{j=1}^N |\mathbf{v}_j|^2, \quad (10.32)$$

dove  $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  sono le velocità dei punti del sistema in funzione delle posizioni e velocità lagrangiane. Osserviamo che si ha

$$\mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t), \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t) = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{v}_j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

per cui le forze generalizzate si scrivono

$$Q_h = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} = -\sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{v}_j} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} = -\sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{v}_j} \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \dot{q}_h} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_h}.$$

In questo caso le (10.31) diventano

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_h} = 0, \quad h = 1, \dots, n.$$



# Capitolo 11

## Simmetrie e integrali primi

In questo capitolo consideriamo sistemi lagrangiani della forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (11.1)$$

dove  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  è una lagrangiana di classe  $C^2$ , e descriviamo la relazione tra l'invarianza di  $L$  per una famiglia ad un parametro di trasformazioni e l'esistenza di integrali primi di (11.1).

### 11.1 Variabili cicliche

Consideriamo un sistema lagrangiano definito da  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ .

**Definizione 35.** *Se la coordinata  $q_k$  non appare esplicitamente nell'espressione di  $L$  allora si dice che  $q_k$  è **ciclica**, o **ignorabile**.*

**Definizione 36.** *Chiamiamo **momento coniugato** alla coordinata  $q_k$  la quantità*

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (11.2)$$

**Proposizione 64.** *Se la variabile  $q_k$  è ciclica in  $L$ , allora il corrispondente momento coniugato  $p_k$  definito da (11.2) è un integrale primo.*

*Dimostrazione.* Segue immediatamente da (11.1). □

Chiaramente la proprietà di avere una o più coordinate cicliche dipende dalla scelta delle coordinate, quindi non è una proprietà intrinseca del sistema lagrangiano considerato.

Anche quando la variabile temporale  $t$  non appare esplicitamente in  $L$  abbiamo una legge di conservazione. Vale infatti la seguente

**Proposizione 65.** (*Integrale di Jacobi*) Se la lagrangiana  $L$  non dipende da  $t$  allora la funzione

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (11.3)$$

è un integrale primo del sistema lagrangiano (11.1).

*Dimostrazione.*

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = 0$$

lungo le soluzioni di (11.1). □

Osserviamo che se la lagrangiana  $L$  è della forma

$$L_2 + L_1 + L_0$$

con  $L_j$  funzione omogenea di grado  $j$  in  $\dot{\mathbf{q}}$ , allora

$$J = L_2 - L_0.$$

Infatti, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee si ha

$$\dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial L_j}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = j L_j, \quad j = 0, 1, 2.$$

### 11.1.1 Riduzione di Routh

Assumiamo che  $L = L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t)$  con  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$ ,  $1 \leq s < n$  un vettore di variabili cicliche e supponiamo che la matrice  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2}$  sia definita positiva. Consideriamo la soluzione

$$t \mapsto \mathbf{q}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \quad (11.4)$$

del sistema di equazioni di Lagrange definito da  $L$ , con condizioni iniziali

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{y}}_0 \quad (11.5)$$

per  $t = 0$ . Sia

$$\mathbf{c} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{y}}_0, 0)$$

il valore del momento coniugato a  $\mathbf{x}$ , costante lungo la soluzione  $\mathbf{q}(t)$ , e sia

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})$$

la funzione definita implicitamente dalla relazione

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}, \mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c}), \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{c}. \quad (11.6)$$

Osserviamo che si può applicare il teorema delle funzioni implicite alla (11.6) poiché vale la relazione

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{x}}^2} \neq 0, \quad (11.7)$$

infatti la matrice  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{x}}^2}$  è definita positiva poiché è un minore principale di  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2}$ , che è definita positiva. In queste ipotesi vale la seguente:

**Proposizione 66.** *La componente  $\mathbf{y}(t)$  della soluzione (11.4) delle equazioni di Lagrange per  $L$  con condizioni iniziali (11.5) è la soluzione delle equazioni di Lagrange definite dalla funzione*

$$L_R^{(\mathbf{c})}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \left[ L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) - \mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right] \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})}$$

con condizioni iniziali

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \dot{\mathbf{y}}(0) = \dot{\mathbf{y}}_0$$

e la componente  $\mathbf{x}(t)$  di (11.4) è definita da

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(\mathbf{y}(\tau), \dot{\mathbf{y}}(\tau), \tau, \mathbf{c}) d\tau. \quad (11.8)$$

*Dimostrazione.* Per la regola di derivazione di funzioni composte abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_R^{(\mathbf{c})}}{\partial \dot{y}_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) &= \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) - \mathbf{c} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{y}_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c}) \right] \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})} \\ &= \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) \right] \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})} \end{aligned}$$

lungo la componente  $\mathbf{y}(t)$  della soluzione  $\mathbf{q}(t)$ . Analogamente lungo  $\mathbf{y}(t)$  abbiamo

$$\frac{\partial L_R^{(\mathbf{c})}}{\partial y_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \left[ \frac{\partial L}{\partial y_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) \right] \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})}.$$

Quindi la mappa  $t \rightarrow \mathbf{y}(t)$ , che è soluzione di

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})} = \mathbf{0},$$



risolve le equazioni di Lagrange per  $L_R^{(c)}$ . L'equazione (11.8) si ottiene immediatamente integrando la relazione

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), t, \mathbf{c}).$$

□

**Definizione 37.** La funzione  $L_R^{(c)}$  della Proposizione 66 è detta **lagrangiana ridotta**, oppure **funzione di Routh**.

**Osservazione 42.** Se  $L = L_2 + L_1 + L_0$ , con  $L_j$  omogenea di grado  $j$  in  $\dot{\mathbf{x}}$ , allora per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee si ha

$$L_R^{(c)} = [-L_2 + L_0]_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})}.$$

**Esempio 29.** (moto centrale piano) Usando coordinate polari  $\rho, \theta$  la lagrangiana si scrive

$$L(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - V(\rho),$$

quindi la variabile  $\theta$  è ciclica e il suo momento coniugato

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta}$$

è un integrale primo. Sia  $c$  il valore di tale integrale in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$\rho_0, \theta_0, \dot{\rho}_0, \dot{\theta}_0$$

assegnate al tempo  $t = 0$ . La lagrangiana ridotta è

$$L_R^{(c)}(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - V(\rho) - \frac{c^2}{2m\rho^2}.$$

Introducendo l'energia potenziale efficace

$$V_R^{(c)}(\rho) = V(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

e usando la Proposizione 65 si ottiene che il sistema lagrangiano a un grado di libertà definito da  $L_R^{(c)}$  ha l'integrale primo

$$J_R^{(c)}(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_R^{(c)}(\rho),$$

che corrisponde all'integrale di Jacobi del sistema a due gradi di libertà ristretto al vincolo dato da  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = c$ :

$$J_R^{(c)}(\rho, \dot{\rho}) = J\left(\rho, \dot{\rho}, \frac{c}{m\rho^2}\right)$$

**Esempio 30.** (*coordinate jacobiane nel piano*) Consideriamo tre punti di massa unitaria che si muovono nel piano sotto l'azione di forze elastiche, con energia potenziale

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \frac{k}{2}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2 + |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3|^2 + |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3|^2),$$

dove  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^2$  sono le coordinate cartesiane dei tre punti e  $k > 0$  è una costante. Mostriamo che nelle coordinate  $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ , definite dalle relazioni

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3}{3}, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2, \quad \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3}{2}, \quad (11.9)$$

la lagrangiana del sistema non dipende dalle due componenti di  $\boldsymbol{\xi}$ . Infatti, detta

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \mapsto (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3),$$

la trasformazione di coordinate definita in (11.9), la sua inversa ha componenti

$$\mathbf{x}_1 = \boldsymbol{\xi} + \frac{2}{3}\boldsymbol{\zeta}, \quad \mathbf{x}_2 = \boldsymbol{\xi} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\zeta}, \quad \mathbf{x}_3 = \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\zeta}, \quad (11.10)$$

quindi l'energia potenziale  $V = \mathcal{V} \circ \boldsymbol{\Phi}^{-1}$  nelle nuove coordinate si scrive

$$V(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \frac{k}{2} \left( \left| \boldsymbol{\zeta} + \frac{\boldsymbol{\eta}}{2} \right|^2 + \left| \boldsymbol{\zeta} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{2} \right|^2 + |\boldsymbol{\eta}|^2 \right).$$

Inoltre, usando la trasformazione corrispondente a (11.9) per i vettori velocità  $\dot{\boldsymbol{\xi}}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, \dot{\boldsymbol{\zeta}}$ , possiamo scrivere l'energia cinetica come segue:

$$T = \frac{1}{2}(|\dot{\mathbf{x}}_1|^2 + |\dot{\mathbf{x}}_2|^2 + |\dot{\mathbf{x}}_3|^2) = \frac{1}{2} \left( 3|\dot{\boldsymbol{\xi}}|^2 + \frac{1}{2}|\dot{\boldsymbol{\eta}}|^2 + \frac{2}{3}|\dot{\boldsymbol{\zeta}}|^2 \right).$$

Osserviamo che la lagrangiana  $L = T - V$  non dipende dal vettore  $\boldsymbol{\xi}$ . Possiamo quindi applicare il metodo di Routh. Sia  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$  il vettore dei valori dei momenti

$$p_{\xi_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1} = 3\dot{\xi}_1, \quad p_{\xi_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_2} = 3\dot{\xi}_2.$$

La lagrangiana ridotta è

$$L_R^c = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}|\dot{\boldsymbol{\eta}}|^2 + \frac{2}{3}|\dot{\boldsymbol{\zeta}}|^2 \right) - \frac{k}{2} \left( \left| \boldsymbol{\zeta} + \frac{\boldsymbol{\eta}}{2} \right|^2 + \left| \boldsymbol{\zeta} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{2} \right|^2 + |\boldsymbol{\eta}|^2 \right) - \frac{|\mathbf{c}|^2}{6}.$$

## 11.2 La trottola di Lagrange

Consideriamo un rotatore simmetrico omogeneo di massa  $m$  con un punto fisso  $O$ , diverso dal suo baricentro  $B$ . Usando la notazione del Capitolo 6 assumiamo che i momenti principali di inerzia soddisfino le relazioni  $I_1 = I_2 \neq I_3$ .<sup>1</sup> Sia  $\ell$  la distanza del baricentro  $B$  dal punto fisso  $O$ . L'energia cinetica  $T$  e l'energia potenziale della forza peso  $V$  sono date da

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathfrak{I}_O \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2,$$

$$V = mgl \cos \theta.$$

Osserviamo che le coordinate  $\varphi, \psi$  sono cicliche nella lagrangiana  $L = T - V$ . In corrispondenza abbiamo gli integrali primi

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta,$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta).$$

**Osservazione 43.** *I momenti coniugati  $p_\varphi, p_\psi$  corrispondono rispettivamente alle proiezioni del momento angolare totale  $\vec{M}_O$  su  $\hat{e}_3$  ed  $\hat{e}'_3$ . Infatti, se  $I_O, \omega$  rappresentano  $\mathfrak{I}_O, \vec{\omega}$  nella base principale  $\mathcal{B}'$ , si ha*

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{\varphi}} \cdot I_O \omega, \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{\psi}} \cdot I_O \omega,$$

e dalla relazione (vedi (6.24))

$$\omega = (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^T,$$

si ha

$$\frac{\partial \omega}{\partial \dot{\varphi}} = (\sin \theta \sin \psi, \sin \theta \cos \psi, \cos \theta)^T, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \dot{\psi}} = (0, 0, 1)^T.$$

Usando le formule (6.23), (6.22) si vede che  $\frac{\partial \omega}{\partial \dot{\varphi}}$  rappresenta  $\hat{e}_3$  in  $\mathcal{B}'$ .

I momenti  $p_\varphi, p_\psi$  si conservano perchè il momento risultante delle forze esterne  $\vec{N}_O$  è diretto come la linea dei nodi, che è ortogonale sia a  $\hat{e}_3$  che a  $\hat{e}'_3$ . Più precisamente si ha

$$\vec{N}_O = \ell \hat{e}'_3 \times (-mg \hat{e}_3) = mgl \sin \theta \hat{e}_N.$$

<sup>1</sup>Questa discussione vale più in generale nel caso di un corpo rigido non omogeneo, con  $I_1 = I_2 \neq I_3$  e con il baricentro sull'asse principale relativo a  $I_3$ .

Oltre a  $p_\varphi$ ,  $p_\psi$  si conserva anche l'energia totale  $E = T + V$ , infatti  $L$  non dipende dal tempo e l'integrale di Jacobi in questo caso corrisponde all'energia  $E$ . La conservazione dell'energia totale si può anche dedurre dalle relazioni

$$\dot{T} = \mathbf{N}_O \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_O = mgl\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{V} = -mgl\dot{\theta} \sin \theta.$$

Mostriamo che il problema si può integrare a meno di inversioni e quadrature, cioè che è integrabile secondo Liouville. Scriviamo la lagrangiana ridotta secondo il metodo di Routh per valori costanti  $c_\varphi, c_\psi$  degli integrali  $p_\varphi, p_\psi$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{1}{I_1 \sin^2 \theta} (c_\varphi - c_\psi \cos \theta) =: v_\varphi(\theta, \dot{\theta}, c_\psi, c_\varphi), \\ \dot{\psi} &= \frac{c_\psi}{I_3} - \frac{\cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} (c_\varphi - c_\psi \cos \theta) =: v_\psi(\theta, \dot{\theta}, c_\psi, c_\varphi), \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} L_R^{(c_\varphi, c_\psi)}(\theta, \dot{\theta}) &= \left[ L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) - c_\varphi \dot{\varphi} - c_\psi \dot{\psi} \right] \Big|_{\dot{\varphi}=v_\varphi, \dot{\psi}=v_\psi} = \\ &= \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \frac{(c_\varphi - c_\psi \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{c_\psi^2}{I_3}. \end{aligned}$$

Le equazioni di Lagrange per  $L_R^{(c_\varphi, c_\psi)}$  corrispondono alle equazioni del moto unidimensionale

$$I_1 \ddot{\theta} = -\frac{d}{d\theta} V_R^{(c_\varphi, c_\psi)}(\theta) \quad (11.11)$$

con

$$V_R^{(c_\varphi, c_\psi)}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{(c_\varphi - c_\psi \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta,$$

per cui il problema è integrabile secondo Liouville.

Siccome  $L_R^{(c_\varphi, c_\psi)}$  non dipende esplicitamente da  $t$ , l'equazione differenziale (11.11) ha l'integrale primo

$$E_R^{(c_\varphi, c_\psi)}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V_R^{(c_\varphi, c_\psi)}(\theta).$$

**Osservazione 44.** La conservazione di  $E_R^{(c_\varphi, c_\psi)}$  corrisponde alla conservazione dell'energia totale  $E$  sugli insiemi di livello  $p_\varphi = c_\varphi$ ,  $p_\psi = c_\psi$  (verificarlo!).

Mostriamo che nel piano delle fasi ridotto  $(\theta, \dot{\theta})$  c'è un unico equilibrio e tutte le orbite sono periodiche. Sia  $e$  il valore dell'energia  $E_R^{(c_\varphi, c_\psi)}$  corrispondente alle condizioni iniziali. Dalla relazione  $E_R^{(c_\varphi, c_\psi)}(\theta, \dot{\theta}) = e$ , moltiplicando per  $\frac{2}{I_1} \sin^2 \theta$ , si ottiene

$$\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \frac{(c_\varphi - c_\psi \cos \theta)^2}{I_1^2} + 2 \frac{mgl}{I_1} \cos \theta \sin^2 \theta = 2 \frac{e}{I_1} \sin^2 \theta.$$

Poniamo per semplicità

$$a = \frac{c_\psi}{I_1}, \quad b = \frac{c_\varphi}{I_1}, \quad \alpha = 2\frac{e}{I_1}, \quad \beta = 2\frac{mg\ell}{I_1}.$$

L'angolo di nutazione  $\theta$  varia nell'intervallo  $[0, \pi]$ . Usando la variabile

$$u = \cos \theta \in [-1, 1],$$

per cui  $\dot{u}^2 = \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta$ , si ottiene l'equazione differenziale

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2.$$

Di seguito ricaviamo alcuni aspetti qualitativi del moto. Gli zeri del polinomio

$$f(u) = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2$$

corrispondono a valori di inversione del moto di  $\theta$ . Abbiamo che

$$f(-1) = -(b + a)^2 \leq 0, \quad f(1) = -(b - a)^2 \leq 0.$$

Consideriamo il caso generico in cui  $b \neq a$ . Poiché  $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty$ , esiste sempre una radice  $u_3 > 1$ , che non corrisponde a valori reali di  $\theta$ . Ma  $\lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = -\infty$ , quindi il polinomio  $f(u)$  deve avere 2 radici  $u_1, u_2$  in  $(-1, 1)$ :

$$u_1 \leq \cos \theta \leq u_2,$$

perché il moto deve poter esistere.

**Definizione 38.** Si dice **luogo dell'asse di simmetria** la curva descritta dal punto di intersezione dell'asse di simmetria con la sfera unitaria centrata in  $O$ .

Tale curva è compresa tra due *cerchi limite*, di co-latitudine

$$\theta_1 = \arccos u_1, \quad \theta_2 = \arccos u_2,$$

in corrispondenza ai quali  $\dot{\theta}$  si annulla.

Poniamo

$$\bar{u} = \frac{b}{a}.$$

Se  $\bar{u} > u_2$ , dalla relazione

$$\dot{\varphi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

si trova che  $\dot{\varphi}$  ha lo stesso segno per tutti i possibili valori dell'angolo di nutazione compresi tra  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Quindi l'asse del rotatore precede attorno all'asse verticale in modo irregolare, cioè appaiono anche delle *nutazioni*.

Se  $u_1 < \bar{u} < u_2$  la direzione del moto di precessione è diversa in corrispondenza dei due cerchi limite. Il luogo dell'asse di simmetria presenta dei *loop*.

Se  $\bar{u} = u_1$  oppure  $\bar{u} = u_2$  allora sia  $\dot{\theta}$  che  $\dot{\varphi}$  si annullano sul cerchio limite corrispondente ed il luogo dell'asse di simmetria ha delle *cuspidi* che toccano il cerchio limite.

Osserviamo che per condizioni iniziali  $\theta = \theta_0 \in (0, \pi)$ ,  $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$  si ha necessariamente  $\theta_0 = \theta_2$ , infatti il rotatore parte sempre in caduta.

... inserire figura del luogo dell'asse di simmetria ...

### 11.3 Teorema di Noether

Ricordiamo le proprietà dell'azione  $\varphi : U \times G \rightarrow U$  di un gruppo a un parametro di diffeomorfismi  $G$  su un insieme  $U$ . In particolare consideriamo  $G = \mathbb{R}$ ,  $U = \mathbb{R}^n$ .

- i)  $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un diffeomorfismo per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- ii)  $\varphi_0 = \text{Id}$ ;
- iii)  $\varphi_{\alpha+\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  (proprietà di **semigrupp**);

Oltre a  $\varphi_\alpha(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  useremo anche la notazione  $\varphi(\mathbf{q}, \alpha)$  e assumeremo in seguito che le mappe  $\varphi$  siano di classe  $C^2$  nella coppia di variabili  $(\mathbf{q}, \alpha)$ .

**Definizione 39.** Dato un gruppo a un parametro di diffeomorfismi  $\varphi_\alpha(\mathbf{q})$ , si dice **generatore infinitesimo** dell'azione il vettore

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0). \quad (11.12)$$

**Proposizione 67.** Ogni azione  $\varphi(\mathbf{q}, \alpha)$  è il flusso del suo generatore infinitesimo.

*Dimostrazione.* La tesi segue dalla definizione di derivata parziale e dalla proprietà di semigrupp:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, \alpha) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{q}, \alpha + h) - \varphi(\mathbf{q}, \alpha)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\varphi(\mathbf{q}, \alpha), h) - \varphi(\varphi(\mathbf{q}, \alpha), 0)}{h} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\varphi(\mathbf{q}, \alpha), 0) = \boldsymbol{\xi}(\varphi(\mathbf{q}, \alpha)). \end{aligned}$$

□

**Osservazione 45.** Nel contesto delle varietà ho bisogno di restringermi ad un'azione locale (gruppo a un parametro locale di diffeomorfismi), vedi [16].

Si consideri l'azione di un gruppo  $G$  a un parametro (locale) di diffeomorfismi di classe  $C^2$  sulla varietà delle configurazioni  $\mathcal{C}$ :

$$\mathbf{q} \mapsto \mathbf{Q} = \varphi_\alpha(\mathbf{q}) = \varphi(\mathbf{q}, \alpha),$$

e la corrispondente azione indotta sul fibrato tangente  $T\mathcal{C}$ :

$$(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \left( \varphi(\mathbf{q}, \alpha), \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \alpha) \dot{\mathbf{q}} \right)$$

Vale il seguente

**Teorema 2.** (Noether) *Se la Lagrangiana  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  è invariante per l'azione indotta su  $T\mathcal{C}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , cioè*

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L\left(\varphi(\mathbf{q}, \alpha), \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \alpha) \dot{\mathbf{q}}, t\right), \quad (11.13)$$

allora le equazioni di Lagrange ammettono l'integrale primo

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}). \quad (11.14)$$

dove  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  è il momento coniugato a  $\mathbf{q}$  e  $\boldsymbol{\xi}$  è il generatore infinitesimo dell'azione  $\varphi_\alpha$ , dato dalla (11.12).

*Dimostrazione.* Deriviamo la (11.13) rispetto ad  $\alpha$  e valutiamo il risultato in  $\alpha = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L\left(\varphi(\mathbf{q}, \alpha), \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \alpha) \dot{\mathbf{q}}, t\right) \right|_{\alpha=0} = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, 0) \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

in cui abbiamo usato<sup>2</sup>

$$\varphi(\mathbf{q}, 0) = \mathbf{q}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, 0) = \text{Id}.$$

Lungo le soluzioni  $t \rightarrow \mathbf{q}(t)$  dell'equazione di Lagrange, scambiando l'ordine di derivazione e ricordando la (11.12) si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, 0) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, 0) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{q} \partial \alpha}(\mathbf{q}, 0) \dot{\mathbf{q}} = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) \right), \end{aligned}$$

<sup>2</sup>la seconda relazione segue da

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_h}(\mathbf{q}, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{q} + k \hat{e}_h, 0) - \varphi(\mathbf{q}, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k \hat{e}_h}{k} = \hat{e}_h, \quad h = 1, \dots, n.$$

quindi

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q})$$

è un integrale primo del sistema lagrangiano. □

**Esempio 31.** Consideriamo la lagrangiana

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{q}}|^2 - V(|\mathbf{q}|), \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3,$$

relativa al moto di un punto materiale  $P$  di massa  $m$  in  $\mathbb{R}^3$ , soggetto ad una forza centrale, di centro l'origine del sistema di coordinate, con energia potenziale  $V$ . La lagrangiana  $L$  è invariante per l'azione  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}, \alpha) = R_\alpha(\mathbf{a})\mathbf{q}$  dove  $R_\alpha(\mathbf{a})$  è la matrice di rotazione di un angolo qualunque  $\alpha$  attorno ad un qualunque asse  $O\mathbf{a}$  di direzione  $\mathbf{a}$  ( $|\mathbf{a}| = 1$ ), passante per l'origine  $O$ .

Il generatore infinitesimo dell'azione è

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) = \mathbf{a} \times \mathbf{q}$$

in quanto  $R_\alpha(\mathbf{a}) = \exp(\alpha A)$ , dove  $A$  è la matrice antisimmetrica associata ad  $\mathbf{a}$  tramite la relazione

$$A\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{u}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3,$$

come si vede calcolando esplicitamente la soluzione generale

$$\mathbf{u}(t) = \exp(At)\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^3$$

dell'equazione differenziale lineare

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}.$$

Dal Teorema di Noether si ottiene l'integrale primo

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m\mathbf{a} \times \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = m\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{a}$$

per ogni scelta di  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ . Dall'arbitrarietà di  $\mathbf{a}$  otteniamo quindi la conservazione del momento angolare rispetto al centro  $O$ .

Mostriamo adesso come si trasformano i flussi in corrispondenza ad un cambiamento di coordinate.



**Proposizione 68.** Sia  $\Phi^t(\mathbf{x})$  il flusso integrale dell'equazione differenziale

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (11.15)$$

Consideriamo un cambiamento di coordinate  $\mathbf{y} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  e l'equazione differenziale corrispondente a (11.15) nelle coordinate  $\mathbf{y}$ :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(\mathbf{y}), \quad (11.16)$$

dove

$$\mathbf{G} = \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F} \right) \circ \mathbf{u}^{-1}.$$

Allora la mappa

$$\Psi^t(\mathbf{y}) = \mathbf{u} \circ \Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y}) \quad (11.17)$$

è il flusso integrale di (11.16).

*Dimostrazione.* Osserviamo che si ha

$$\Psi^0(\mathbf{y}) = \mathbf{u} \circ \Phi^0. \quad (11.18)$$

Inoltre, dalla formula (11.17) e dalla relazione

$$\mathbf{F} = \left( \frac{\partial \mathbf{u}^{-1}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{G} \right) \circ \mathbf{u} = \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} (\mathbf{G} \circ \mathbf{u})$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi^t(\mathbf{y}) &= \frac{d}{dt} (\mathbf{u} \circ \Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} (\Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \frac{d}{dt} (\Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} (\Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \mathbf{F}(\Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} (\mathbf{G} \circ \mathbf{u}) \right) (\Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \\ &= \mathbf{G}(\mathbf{u} \circ \Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \\ &= \mathbf{G}(\Psi^t(\mathbf{u})). \end{aligned}$$

□

Nella dimostrazione della prossima proposizione useremo il seguente risultato:

**Teorema 3.** (rettificazione locale) Sia  $\Phi^t(\mathbf{x})$  il flusso dell'equazione differenziale

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

e assumiamo che esista  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  tale che  $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$ . Allora esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $\bar{\mathbf{x}}$  ed un cambiamento di coordinate locale

$$\mathcal{U} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

tale che

$$\mathbf{u}^{-1} \circ \Psi^t(\mathbf{y}) = \Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y}), \quad (11.19)$$

dove

$$\Psi^t(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + t\mathbf{e}_1.$$

**Osservazione 46.** Prima di dimostrare il teorema notiamo che dalla Proposizione 68 e da (11.19) segue che  $\Psi^t$  è il flusso dell'equazione differenziale  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(\mathbf{y})$ , con  $\mathbf{G} = (\mathbf{F}) \circ \mathbf{u}^{-1}$ , che rappresenta l'equazione differenziale  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  nelle nuove coordinate  $\mathbf{y}$ . Il teorema ci dice quindi che in un intorno di ogni punto che non sia un equilibrio esistono delle coordinate le linee di flusso sono rette parallele, parametrizzate in modo lineare dal tempo  $t$ .

*Dimostrazione.* A meno di traslare l'origine e rinumerare le coordinate possiamo assumere che

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad F_1(\mathbf{0}) \neq 0,$$

dove  $F_1$  è la prima componente di  $\mathbf{F}$ . Consideriamo la mappa

$$\mathbf{w}(\mathbf{y}) = \Phi^{y_1}(0, y_2, \dots, y_n).$$

Dalle relazioni

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y_1}(\mathbf{0}) = \mathbf{F}(\mathbf{0}), \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y_j}(\mathbf{0}) = \mathbf{e}_j, \quad j = 2, \dots, n$$

si ottiene

$$\det \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{0}) = F_1(\mathbf{0}),$$

quindi  $\mathbf{w}$  definisce un diffeomorfismo da un intorno  $\mathcal{V}$  di  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  ad un intorno  $\mathcal{U}$  di  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Sia  $\mathbf{u} = \mathbf{w}^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  il diffeomorfismo inverso.

Ponendo

$$\Psi^t(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + t\mathbf{e}_1$$

e usando la proprietà di semigruppato del flusso si ottiene la (11.19), infatti

$$\mathbf{w} \circ \Psi^t(\mathbf{y}) = \Phi^{y_1+t}(0, y_2, \dots, y_n) = \Phi^t \circ \mathbf{w}(\mathbf{y}).$$

□

**Proposizione 69.** Sia  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  una lagrangiana invariante per l'azione  $\varphi_\alpha$ , cioè tale che

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\varphi_\alpha(\mathbf{q}), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, t)$$

per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Sia inoltre  $\bar{\mathbf{q}}$  una configurazione per cui  $\boldsymbol{\xi}(\bar{\mathbf{q}}) \neq \mathbf{0}$ , dove  $\boldsymbol{\xi}$  è il generatore infinitesimo di  $\varphi_\alpha(\mathbf{q})$ . In queste ipotesi esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $\bar{\mathbf{q}}$  ed una trasformazione di coordinate

$$\mathcal{U} \ni \mathbf{q} \mapsto \mathbf{Q} = \Psi(\mathbf{q})$$

tale che la coordinata  $Q_1$  (i.e. la prima componente di  $\mathbf{Q}$ ) sia ciclica nella lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L\left(\Psi^{-1}(\mathbf{Q}), \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t\right), \quad (11.20)$$

che per la Proposizione 61 definisce la dinamica nelle coordinate  $\mathbf{Q}$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo  $\bar{\mathbf{q}}$  tale che  $\boldsymbol{\xi}(\bar{\mathbf{q}}) \neq \mathbf{0}$ , con  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0)$ . Per il teorema di rettificazione del flusso (vedi Teorema 3) possiamo trovare un cambiamento di coordinate  $\mathbf{Q} = \Psi(\mathbf{q})$  in un intorno di  $\bar{\mathbf{q}}$  che coniuga l'azione  $\varphi_\alpha$ , che è il flusso del suo generatore infinitesimo  $\boldsymbol{\xi}$ , alla mappa

$$\eta_\alpha(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} + \alpha \mathbf{e}_1 = \Psi \circ \varphi_\alpha \circ \Psi^{-1}(\mathbf{Q}).$$

Inoltre la lagrangiana  $\mathcal{L}$ , definita da (11.20), è invariante per l'azione  $\eta_\alpha$ , infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) &= L\left(\Psi^{-1}(\mathbf{Q}), \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t\right) = \\ &= L\left(\varphi_\alpha \circ \Psi^{-1}(\mathbf{Q}), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \circ \Psi^{-1}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t\right) = \\ &= L\left(\Psi^{-1} \circ \eta_\alpha(\mathbf{Q}), \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial \mathbf{Q}} \circ \eta_\alpha(\mathbf{Q}) \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t\right) = \\ &= \mathcal{L}(\eta_\alpha(\mathbf{Q}), \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{Q} + \alpha \mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{Q}}, t). \end{aligned} \quad (11.21)$$

Nel ricavare la relazione precedente abbiamo usato l'invarianza di  $L$  per l'azione  $\varphi_\alpha$  e la relazione di coniugazione, che si può scrivere anche

$$\Psi^{-1} \circ \eta_\alpha = \varphi_\alpha \circ \Psi^{-1}$$

da cui, derivando rispetto a  $\mathbf{Q}$ , si ottiene

$$\frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial \mathbf{Q}} \circ \eta_\alpha(\mathbf{Q}) \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q}) = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \circ \Psi^{-1}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q}).$$

Concludiamo che  $\mathcal{L}$  è indipendente da  $Q_1$ , infatti dalla (11.21) segue che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{Q} + h\mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{Q}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)}{h} = 0.$$

□



# Capitolo 12

## Equilibri e stabilità

Consideriamo le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (12.1)$$

per vincoli fissi, cioè  $T = T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ , e per forze non dipendenti da  $t$ . Le (12.1) si possono scrivere nel modo seguente:

$$A(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (12.2)$$

con

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{dA}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}.$$

Poiché  $A$  è definita positiva, le (12.2) si possono mettere in forma normale ed equivalgono al sistema di equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{v}). \end{cases} \quad (12.3)$$

Si ottiene che i punti di equilibrio sono della forma  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ ,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (12.4)$$

infatti  $\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{0})$ .

**Definizione 40.** *I valori  $\mathbf{q}_0$ , soluzioni di (12.4), si chiamano **configurazioni di equilibrio**.*

**Osservazione 47.** *In corrispondenza alle configurazioni di equilibrio  $\mathbf{q}_0$  si hanno soluzioni costanti  $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$  delle equazioni di Newton.*

Se le forze attive derivano da un'energia potenziale generalizzata  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = V_0(\mathbf{q}) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  possiamo scrivere la lagrangiana

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

In questo caso le configurazioni di equilibrio sono definite dall'equazione

$$\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}, \quad (12.5)$$

infatti, dalla relazione

$$\mathbf{Q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}},$$

tenendo conto che

$$V_1 = \mathbf{a}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial V_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{q}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \dot{\mathbf{q}},$$

si ottiene

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}).$$

## 12.1 Linearizzazione attorno a un equilibrio

Dato un punto di equilibrio  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ , proviamo ad analizzare la sua stabilità linearizzando le equazioni (12.3) in un intorno di questo punto. Poiché i termini

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{dA}{dt} \dot{\mathbf{q}}$$

sono quadratici omogenei in  $\dot{\mathbf{q}}$ , le equazioni linearizzate sono

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q}_0) \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})\mathbf{v} \right]. \end{cases} \quad (12.6)$$

Se le forze attive derivano dall'energia potenziale  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = V_0(\mathbf{q}) + \mathbf{a}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}$  si ha  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) + B(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$  (vedi Sezione 10.5) e le equazioni linearizzate sono

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -A^{-1}(\mathbf{q}_0) [V_0''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - B(\mathbf{q}_0)\mathbf{v}], \end{cases} \quad (12.7)$$

dove  $B$  è antisimmetrica con componenti  $B_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i}$ . Le (12.7) sono le equazioni di Lagrange per la funzione

$$\begin{aligned} L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}_0) \dot{\mathbf{q}} - V_0(\mathbf{q}_0) - \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \cdot V_0''(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \\ &\quad - \left[ \mathbf{a}(\mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \right] \cdot \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (12.8)$$

che è lo sviluppo di Taylor di  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  al secondo ordine centrato in  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ . Verifichiamo che le (12.7) corrispondono alle equazioni di Lagrange per  $L_0$ . Dalle relazioni

$$\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = A(\mathbf{q}_0)\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{a}(\mathbf{q}_0) - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0), \quad \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{q}} = -V_0''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - \left[ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) \right]^T \dot{\mathbf{q}}$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{q}} = A(\mathbf{q}_0)\ddot{\mathbf{q}} - \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) - \left[ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) \right]^T \right) \dot{\mathbf{q}} + V_0'''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0),$$

che dimostra che le equazioni di Lagrange per  $L_0$  corrispondono alle (12.7).

Nel caso particolare in cui  $V = V_0$ , tralasciando la costante  $-V_0(\mathbf{q}_0)$ , si ottiene

$$L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}_0)\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \cdot V''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0). \quad (12.9)$$

Le equazioni di Lagrange per (12.9) sono

$$A(\mathbf{q}_0)\ddot{\mathbf{q}} + V''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = \mathbf{0} \quad (12.10)$$

e si possono scrivere come

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \Lambda(\mathbf{q}_0) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}, \quad (12.11)$$

con

$$\Lambda(\mathbf{q}_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -A^{-1}V''(\mathbf{q}_0) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}.$$

In questo caso la matrice del sistema linearizzato ha autovalori che dipendono solo dagli autovalori di  $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$ . Siccome  $A(\mathbf{q}_0)$ ,  $V''(\mathbf{q}_0)$  sono simmetriche, con  $A$  definita positiva, sappiamo (vedi Sezione 12.7) che gli autovalori  $\lambda_h$  di  $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$  sono reali e che possiamo trovare una base di autovettori  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_h\}_{h=1, \dots, n}$  ortonormali rispetto al prodotto scalare definito da  $A(\mathbf{q}_0)$ , cioè tali che

$$\mathbf{u}_h \cdot A(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_k = \delta_{hk},$$

dove  $\delta_{hk}$  è il delta di Kronecker. Per il teorema di Binet si ha

$$\det(A^{-1}V'' - \lambda I) = \det A^{-1} \det(V'' - \lambda A),$$

quindi gli autovalori  $\lambda_h$  si possono calcolare risolvendo l'equazione

$$\det(V''(\mathbf{q}_0) - \lambda A(\mathbf{q}_0)) = 0,$$



detta **equazione secolare**, evitando di calcolare  $A^{-1}(\mathbf{q}_0)$ . Inoltre si ha

$$\mathbf{u}_h \cdot V''(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_h \cdot \lambda_k A(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_k = \lambda_k \delta_{hk},$$

cioè nella base  $\mathcal{B}$  entrambe le matrici  $A(\mathbf{q}_0), V''(\mathbf{q}_0)$  sono in forma diagonale.

Osserviamo che, se  $\lambda_h, h = 1, \dots, n$  sono gli autovalori di  $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$ , allora gli autovalori di  $\Lambda(\mathbf{q}_0)$  sono

$$\pm\sqrt{-\lambda_h}, \quad h = 1, \dots, n.$$

In particolare, se  $\lambda_k < 0$  per qualche  $k$  allora  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  è instabile perché il sistema (12.11) ha un esponente di Lyapounov positivo.<sup>1</sup>

Se  $\lambda_h \geq 0$  per  $h = 1, \dots, n$  allora gli autovalori di  $\Lambda(\mathbf{q}_0)$  sono tutti immaginari puri oppure nulli, quindi gli esponenti di Lyapounov sono tutti nulli ed il metodo di linearizzazione non ci permette di concludere niente sulla stabilità di  $\mathbf{q}_0$ . In questo caso per studiare la stabilità possiamo usare il metodo descritto nella prossima sezione.

## 12.2 Il teorema di Lagrange-Dirichlet

Si consideri un punto di equilibrio  $\mathbf{x}_0$  del sistema di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (12.12)$$

**Definizione 41.** Si dice che una funzione  $f \in C^1(U; \mathbb{R})$ , definita in un intorno  $U$  di un punto di equilibrio  $\mathbf{x}_0$  di (12.12), è una funzione di Lyapounov per  $\mathbf{x}_0$  se valgono le seguenti proprietà:

- i)  $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$  per ogni  $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ ;
- ii)  $\frac{df}{dt}(\mathbf{x}) \leq 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in U$ .

dove  $\frac{df}{dt}$  è la derivata di  $f$  lungo una qualunque soluzione di (12.12), cioè

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Vale il seguente risultato:

**Teorema 4.** (Lyapounov) Se un punto di equilibrio ammette una funzione di Lyapounov, allora è stabile.

<sup>1</sup>gli esponenti di Lyapounov di un punto di equilibrio  $\mathbf{X}_0$  di un sistema di equazioni differenziali  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$  sono le parti reali degli autovalori della matrice  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}_0)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di Lyapounov per il punto di equilibrio  $\mathbf{x}_0 \in U$ , dove  $U$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Per ogni palla  $B = B(\mathbf{x}_0, r)$  di centro  $\mathbf{x}_0$  e raggio  $r$  contenuta in  $U$  sia  $\partial B$  la sfera che costituisce il bordo di  $B$  e definiamo

$$m = \min_{\mathbf{x} \in \partial B} f(\mathbf{x}).$$

Tale minimo esiste poiché  $f$  è continua sull'insieme compatto  $\partial B$ . Consideriamo la componente connessa  $V$  dell'insieme

$$\{\mathbf{x} \in B : f(\mathbf{x}) < m\}$$

che contiene  $\mathbf{x}_0$ . Se  $\mathbf{y} \in V$ , allora la traiettoria della soluzione  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; 0, \mathbf{y})$  di (12.12) che parte da  $\mathbf{y}$  al tempo  $t = 0$  non potrà mai uscire da  $B$  per tempi  $t > 0$  perchè per farlo dovrebbe necessariamente passare dal bordo di  $B$  sul quale la funzione composta  $f(\mathbf{x}(t))$  avrebbe un valore superiore al valore iniziale  $f(\mathbf{y})$ , contraddicendo la proprietà *ii*) delle funzioni di Lyapounov. □

**Teorema 5.** *Consideriamo il sistema lagrangiano definito da*

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - V_0(\mathbf{q}) - V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (12.13)$$

*Se  $\mathbf{q}_0$  è un minimo locale stretto di  $V_0$  allora  $\mathbf{q}_0$  è una configurazione di equilibrio stabile.*

*Dimostrazione.* Si osserva che  $\mathbf{q}_0$  è una configurazione di equilibrio in quanto soddisfa (12.5). Siccome la lagrangiana (12.13) non dipende da  $t$ , allora la funzione

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + V_0(\mathbf{q}).$$

è un integrale primo delle equazioni di Lagrange per  $L$  (è l'integrale di Jacobi, vedi Proposizione 65). Inoltre  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  è un punto di minimo locale stretto per  $J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , quindi si può usare  $J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  come funzione di Lyapounov relativa al punto  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  restringendola ad un opportuno intorno di tale punto. □

## 12.3 Analisi della stabilità

Nel caso in cui le forze generalizzate siano conservative, con energia potenziale  $V = V_0(\mathbf{q})$ , l'analisi del solo spettro di  $V''(\mathbf{q}_0)$ , dove  $\mathbf{q}_0$  è una configurazione di equilibrio, ci può permettere di studiare la stabilità dei punti di equilibrio di (12.11).

Se  $V''(\mathbf{q}_0)$  ha tutti gli autovalori positivi allora  $\mathbf{q}_0$  è un minimo stretto (non degenero) di  $V$ , quindi il punto  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

Se  $V''(\mathbf{q}_0)$  ha un autovalore  $\mu < 0$  con autovettore  $\mathbf{v}$ , sia  $\mathbf{v} = \sum_h v_h \mathbf{u}_h$  l'espressione di  $\mathbf{v}$  come combinazione lineare degli elementi della base  $\mathcal{B}$ . Allora

$$\begin{aligned} 0 > \mu |\mathbf{v}|^2 &= \mathbf{v} \cdot V''(\mathbf{q}_0) \mathbf{v} = \sum_{h,k=1}^n v_h v_k \mathbf{u}_h \cdot V''(\mathbf{q}_0) \mathbf{u}_k = \sum_{h,k=1}^n v_h v_k \lambda_k \mathbf{u}_h \cdot A(\mathbf{q}_0) \mathbf{u}_k = \\ &= \sum_{h,k=1}^n v_h v_k \lambda_k \delta_{hk} = \sum_{h=1}^n v_h^2 \lambda_h, \end{aligned}$$

quindi esiste  $k$  con  $\lambda_k < 0$  ed il punto  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  è instabile.

## 12.4 Stabilizzazione con termini girostatici

Se le componenti lagrangiane delle forze attive ammettono un'energia potenziale generalizzata  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = V_0(\mathbf{q}, t) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  è possibile che un punto di massimo di  $V_0$  sia stabile: infatti la presenza del termine  $V_1$  modifica lo spettro del linearizzato, anche se non modifica gli equilibri. Questo fenomeno si chiama **stabilizzazione girostatica**.

**Esempio 32.** (*oscillatore armonico in un riferimento rotante*)

Fissiamo un sistema di riferimento  $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$  in  $\mathbb{R}^3$ . Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  collegato all'origine  $O$  del riferimento da una molla di costante elastica  $k$ . Scegliamo delle condizioni iniziali  $\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0$  per il punto al tempo  $t = 0$ . Siccome il campo di forze è centrale, dalla conservazione del momento angolare sappiamo che il moto è piano. Possiamo quindi orientare il riferimento  $\Sigma$  in modo tale che, per queste condizioni iniziali, il moto avvenga nel piano  $Oxy$ . Consideriamo adesso un riferimento  $\Sigma' = O' \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3$ , con  $O' = O$ , e con velocità angolare costante  $\vec{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_3$ ,  $\omega \neq 0$ , rispetto a  $\Sigma$ .

La stabilità dell'origine per l'oscillatore armonico è nota a priori in  $\Sigma$ , e vale anche in  $\Sigma'$ . Introduciamo coordinate cartesiane  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$  relative a  $\Sigma'$  e studiamo la stabilità dell'equilibrio  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$  nel riferimento rotante con il metodo della linearizzazione.

L'energia potenziale, tenendo conto delle forze apparenti, è

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} k |\mathbf{q}|^2 - \frac{1}{2} m |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}|^2 + m \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot (kI + m\Omega^2) \mathbf{q} + m \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}, \quad (12.14)$$

con

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

infatti

$$|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}|^2 = \Omega \mathbf{q} \cdot \Omega \mathbf{q} = -\mathbf{q} \cdot \Omega^2 \mathbf{q},$$

poiché  $\Omega^T = -\Omega$ . Possiamo scrivere la (12.14) come  $V = V_0 + V_1$ , con  $V_j$  omogenea di grado  $j$  in  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Gli equilibri (in questo caso solo  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ ) si ottengono cercando i punti critici di  $V_0$ . Se  $\omega^2 > \frac{k}{m}$  allora  $V_0''$  ha autovalori negativi, quindi se considerassimo solo il termine  $V_0$  per lo studio della stabilità si otterrebbe che l'origine è instabile.

Includiamo adesso anche  $V_1$  nello studio della stabilità. Le equazioni del moto corrispondenti all'energia potenziale (12.14) si scrivono

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{k}{m}\mathbf{q} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}$$

oppure, come sistema del primo ordine,

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(\frac{k}{m}I + \Omega^2) & -2\Omega \end{bmatrix}.$$

Dato che la terza componente di  $\mathbf{q}$  e di  $\dot{\mathbf{q}}$  è identicamente nulla, possiamo descrivere il moto con il sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \beta I & -2\omega J \end{bmatrix},$$

dove

$$\mathbf{z} = (q_1, q_2)^T, \quad \beta = \omega^2 - \frac{k}{m}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di  $\Gamma$  si ottengono dall'equazione

$$\det(\Gamma - \lambda I) = \lambda^4 + 2(2\omega^2 - \beta)\lambda^2 + \beta^2 = 0. \quad (12.15)$$

Il discriminante è

$$\Delta = 16\omega^2(\omega^2 - \beta) = 16\omega^2 \frac{k}{m} > 0,$$

quindi le radici  $\lambda^2$  di (12.15) sono reali e distinte. Inoltre, dato che  $2\omega^2 > \beta$ , per la regola dei segni di Cartesio le radici  $\lambda^2$  sono negative o nulle e gli autovalori di  $\Gamma$  sono immaginari puri o nulli:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega', \quad \omega' \neq \omega.$$

L'origine risulta quindi una configurazione di equilibrio stabile.

**Osservazione 48.** L'esempio precedente mostra che nel teorema di Lagrange-Dirichlet l'ipotesi che  $\mathbf{q}_0$  sia un punto di minimo stretto per  $V_0$  è una condizione sufficiente, ma non necessaria, per la stabilità di  $\mathbf{q}_0$ , infatti

$$V_0'' = kI + m\Omega^2 = (k - m\omega^2)I$$

e, se  $\omega > \sqrt{k/m}$ , allora  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$  è un punto di massimo per  $V_0$ .

## 12.5 Piccole oscillazioni attorno a un equilibrio stabile

Assumiamo che la lagrangiana abbia la forma

$$L = T_2 - V,$$

con  $V = V_0$ , e che  $\mathbf{q}_0$  sia un minimo non degenere di  $V$ . Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gli autovalori di  $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$ , soluzioni di

$$\det(V''(\mathbf{q}_0) - \lambda A(\mathbf{q}_0)) = 0.$$

Osserviamo che moltiplicando scalarmente l'equazione  $V''(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_h = \lambda_h A\mathbf{u}_h$  per  $\mathbf{u}_h$  si ottiene

$$\lambda_h = \frac{\mathbf{u}_h \cdot V''(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_h}{\mathbf{u}_h \cdot A(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_h} > 0, \quad h = 1, \dots, n.$$

La soluzione generale del sistema lineare (12.10) è

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \sum_{h=1}^n c_h \cos(\omega_h t + \varphi_h)\mathbf{u}_h \quad (12.16)$$

con  $c_h \geq 0$ ,  $\varphi_h \in S^1$ ,  $\omega_h = \sqrt{\lambda_h} > 0$ , come si può facilmente verificare per sostituzione di (12.16) in (12.10).

Le quantità  $\omega_h$  si chiamano **frequenze proprie** del sistema e le famiglie di soluzioni particolari

$$c_h \cos(\omega_h t + \varphi_h)\mathbf{u}_h, \quad h = 1, \dots, n$$

si chiamano **modi normali** di oscillazione attorno all'equilibrio  $\mathbf{q}_0$ .

## 12.6 Alcuni esempi

**Esempio 33.** *Si consideri il sistema meccanico in Figura 12.1. Calcolare tutti gli equilibri e studiarne la stabilità al variare dei parametri.*

L'energia potenziale è data da

$$\begin{aligned} V(\theta, \phi) &= \frac{1}{2}k_1(|P - A|^2 + |Q - B|^2) + \frac{1}{2}k_2|P - Q|^2 \\ &= 2k_1(\cos \phi - \cos \theta) - k_2 \cos(\phi - \theta) + \text{costante}. \end{aligned}$$

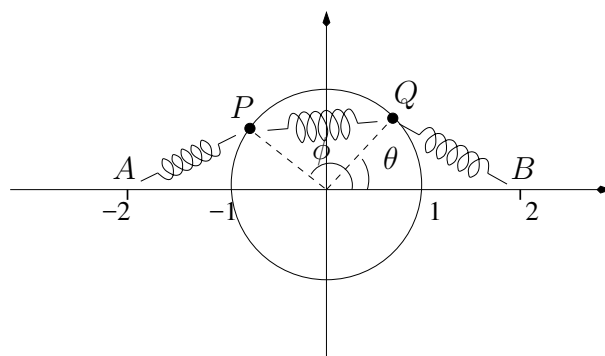


Figura 12.1:

Gli equilibri sono le soluzioni di

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta, \phi) &= 2k_1 \sin \theta - k_2 \sin(\phi - \theta) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \phi}(\theta, \phi) &= -2k_1 \sin \phi + k_2 \sin(\phi - \theta) = 0\end{aligned}$$

Sommando le due equazioni si ha

$$\sin \theta = \sin \phi \quad (12.17)$$

e sostituendo nella prima

$$\sin \theta [2k_1 + k_2(\cos \phi - \cos \theta)] = 0$$

Da  $\sin \theta = \sin \phi = 0$  abbiamo le quattro configurazioni di equilibrio

$$(\theta, \phi) = (0, 0); \quad (0, \pi); \quad (\pi, 0); \quad (\pi, \pi) \quad (12.18)$$

e, se  $k_1 < k_2$ , a queste si aggiungono le due configurazioni  $(\theta, \phi) = (\bar{\theta}, \bar{\phi})$ , con  $\bar{\theta}$  soluzione di  $\cos \theta = k_1/k_2$  e  $\bar{\phi} = \pi - \bar{\theta}$ . Studiamo la stabilità di questi equilibri. Le derivate seconde di  $V$  sono

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(\theta, \phi) &= 2k_1 \cos \theta + k_2 \cos(\phi - \theta) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \theta}(\theta, \phi) &= -k_2 \cos(\phi - \theta) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}(\theta, \phi) &= -2k_1 \cos \phi + k_2 \cos(\phi - \theta).\end{aligned}$$

Consideriamo la matrice hessiana  $V''$  di  $V$  valutata nelle configurazioni di equilibrio (12.18):

$$V''(0, 0) = \begin{bmatrix} 2k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -2k_1 + k_2 \end{bmatrix}, \quad V''(0, \pi) = \begin{bmatrix} 2k_1 - k_2 & k_2 \\ k_2 & 2k_1 - k_2 \end{bmatrix},$$

$$V''(\pi, 0) = \begin{bmatrix} -2k_1 - k_2 & k_2 \\ k_2 & -2k_1 - k_2 \end{bmatrix}, \quad V''(\pi, \pi) = \begin{bmatrix} -2k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & 2k_1 + k_2 \end{bmatrix}.$$

Dalle relazioni

$$\begin{aligned} \det V''(0, 0) &= -4k_1^2, & \det V''(\pi, \pi) &= -4k_1^2, \\ \det V''(\pi, 0) &= 4k_1(k_1 + k_2), & \operatorname{tr} V''(\pi, 0) &= -2(2k_1 + k_2) \end{aligned}$$

si ottiene che  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$ ,  $(\pi, \pi)$  sono instabili, poiché in tali punti  $V''$  ha almeno un autovalore  $< 0$ .

Invece, dalle relazioni

$$\det V''(0, \pi) = 4k_1(k_1 - k_2), \quad \operatorname{tr} V''(0, \pi) = 2(2k_1 - k_2),$$

si ha che la configurazione  $(0, \pi)$  è stabile se  $k_1 > k_2$ , instabile se  $k_1 < k_2$ .

Infine, osservando che

$$\cos(\bar{\phi} - \bar{\theta}) = -\cos^2 \bar{\theta} + \sin^2 \bar{\theta} = 1 - 2\cos^2 \bar{\theta} = 1 - 2\frac{k_1^2}{k_2^2}$$

e che  $\cos \bar{\phi} = -\cos \bar{\theta}$ , si ottiene

$$V''(\bar{\theta}, \pi - \bar{\theta}) = V''(-\bar{\theta}, \pi + \bar{\theta}) = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 + 2\frac{k_1^2}{k_2} \\ -k_2 + 2\frac{k_1^2}{k_2} & k_2 \end{bmatrix},$$

da cui

$$\det V''(\bar{\theta}, \pi - \bar{\theta}) = 4k_1^2 \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) > 0, \quad \operatorname{tr} V''(\bar{\theta}, \pi - \bar{\theta}) = 2k_2 > 0.$$

Concludiamo che le configurazioni di equilibrio  $(\theta, \varphi) = (\bar{\theta}, \pi - \bar{\theta})$ ,  $(-\bar{\theta}, \pi + \bar{\theta})$  sono stabili. Osserviamo che c'è una biforcazione per  $k_1 = k_2$ : l'equilibrio  $(\theta, \phi) = (0, \pi)$  da stabile diventa instabile e nascono due nuovi equilibri stabili  $(\theta, \phi) = (\bar{\theta}, \pi - \bar{\theta})$ ,  $(\pi - \bar{\theta}, \bar{\theta})$ .

**Esempio 34.** *Nel piano  $Oxy$  si consideri il sistema meccanico formato da  $n$  punti materiali  $P_1, \dots, P_n$  di ugual massa  $m$ . Il punto  $P_i$  è vincolato a muoversi sulla retta  $x = i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Inoltre ogni  $P_i$  è collegato ai punti  $P_{i-1}$  e  $P_{i+1}$  da due molle di costante elastica  $k$ , dove si è posto  $P_0 \equiv (0, 0)$ ,  $P_{n+1} \equiv (n+1, 0)$ . Si usano come coordinate i valori  $q_i = y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  delle ordinate dei punti  $P_i$ . Scrivere le equazioni di Lagrange, trovare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.*

L'energia cinetica e potenziale del sistema sono

$$T = \frac{1}{2}m \sum_{h=1}^n \dot{q}_h^2, \quad V = \frac{1}{2}k \sum_{h=0}^n |P_{h+1} - P_h|^2 = \frac{1}{2}k \sum_{h=0}^n (q_{h+1} - q_h)^2 + \text{costante}$$

dove  $q_0 = q_{n+1} = 0$ .

Dimostriamo che l'unica configurazione di equilibrio è  $(y_1, \dots, y_n) = (0, \dots, 0)$ . Gli equilibri sono soluzioni di

$$V_{q_h} = -k(q_{h+1} - 2q_h + q_{h-1}) = 0, \quad h = 1, \dots, n.$$

Otengo il sistema lineare  $M\mathbf{q} = 0$ , con

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sia  $\lambda$  un autovalore di  $M$ , con autovettore  $\mathbf{v}$ . Allora

$$\mathbf{v} \cdot M\mathbf{v} = 2 \left( \sum_{h=1}^n v_h^2 - \sum_{h=1}^n v_{h+1}v_h \right) = [(v_1 - v_2)^2 + \dots + (v_{n-1} - v_n)^2 + v_1^2 + v_n^2] \geq 0$$

ed è nullo solo se  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Questo ci dice che  $M$  è definita positiva, quindi  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  è l'unica soluzione di  $M\mathbf{q} = 0$ .

Tale configurazione di equilibrio è stabile, come si vede applicando il teorema di Lagrange-Dirichlet, dato che  $V$  ha un minimo stretto in  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Gli autovalori della matrice hessiana  $V'' = kM$  sono tutti positivi.

Le equazioni di Lagrange sono date da

$$m\ddot{q}_h = -V_{q_h} = k(q_{h+1} - 2q_h + q_{h-1}), \quad h = 1, \dots, n.$$

## 12.7 Diagonalizzazione simultanea di forme quadratiche

Consideriamo le forme quadratiche

$$a(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}, \quad b(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot B\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

con  $A, B$  matrici di ordine  $n$  simmetriche,  $A$  definita positiva. L'insieme di livello

$$\mathcal{E}_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a(\mathbf{x}) = 1\}$$

è un ellissoide, quindi è compatto. Dunque esiste  $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{E}_A$  tale che

$$b(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_A} b(\mathbf{x}).$$



Il vettore  $\mathbf{x}_1$  è un punto stazionario di  $b(\mathbf{x})$ , vincolato a  $\mathcal{E}_A$ . Dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange si ottiene

$$B\mathbf{x}_1 = \lambda_1^{(1)}A\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_1 \cdot A\mathbf{x}_1 = 1,$$

per cui  $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{E}_A$  è autovettore di  $A^{-1}B$  con autovalore  $\lambda_1^{(1)} = b(\mathbf{x}_1)$ .

Sia  $\mathcal{S}^{n-1} = \mathbf{x}_1^\perp$  il sottospazio di dimensione  $n-1$  costituito dai vettori di  $\mathbb{R}^n$  ortogonali a  $\mathbf{x}_1$  rispetto al prodotto scalare definito da  $A$ . Denoto con  $\mathcal{E}_A^{n-2} = \mathcal{E}_A \cap \mathcal{S}^{n-1}$  l'ellissoide di dimensione  $n-2$  e considero  $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{E}_A^{n-2}$  tale che

$$b(\mathbf{x}_2) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_A^{n-2}} b(\mathbf{x}).$$

Dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$B\mathbf{x}_2 = \lambda_2^{(2)}A\mathbf{x}_2 + \lambda_1^{(2)}A\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_2 \cdot A\mathbf{x}_2 = 1, \quad \mathbf{x}_2 \cdot A\mathbf{x}_1 = 0. \quad (12.19)$$

Moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{x}_1$  la prima delle (12.19) e usando la simmetria di  $A$  e  $B$  si ottiene

$$\lambda_1^{(2)} = \mathbf{x}_1 \cdot B\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 \cdot B\mathbf{x}_1 = \lambda_1^{(1)}\mathbf{x}_2 \cdot A\mathbf{x}_1 = 0,$$

per cui  $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{E}_A^{n-2}$  è autovettore di  $A^{-1}B$  con autovalore  $\lambda_2^{(2)} = b(\mathbf{x}_2)$ . Tale procedimento si può iterare cercando per ogni  $k = 3, \dots, n$  un vettore  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$b(\mathbf{x}_k) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_A^{n-k}} b(\mathbf{x}),$$

con  $\mathcal{E}_A^{n-k} = \mathcal{E}_A \cap \mathcal{S}^{n-k+1}$ , ed  $\mathcal{S}^{n-k+1}$  il sottospazio di dimensione  $n-k+1$  costituito dai vettori di  $\mathbb{R}^n$  ortogonali a  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$  rispetto al prodotto scalare definito da  $A$ . In questo modo trovo una base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  di autovettori di  $A^{-1}B$  ortonormali rispetto al prodotto scalare definito da  $A$ , con autovalori reali

$$\lambda_1 = b(\mathbf{x}_1), \quad \lambda_2 = b(\mathbf{x}_2), \quad \dots \quad \lambda_n = b(\mathbf{x}_n),$$

dove  $\lambda_j = \lambda_j^{(j)}$ . Per calcolare esplicitamente gli autovalori  $\lambda_j$  si risolve l'equazione secolare

$$\det(B - \lambda A) = 0.$$

Denoto con  $U$  la trasposta della matrice che ha come colonne i vettori della base  $\mathcal{B}$ . Osserviamo che si ha

$$U^T A U = I, \quad U^T B U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (12.20)$$

infatti  $\mathbf{x}_i \cdot A\mathbf{x}_j = \delta_{ij}$  e  $\mathbf{x}_i \cdot B\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_i \cdot A\mathbf{x}_j = \lambda_j \delta_{ij}$ . Concludiamo che le forme quadratiche  $a(\mathbf{x})$ ,  $b(\mathbf{x})$  sono rappresentate da matrici diagonali nella base  $\mathcal{B}$ .

# Bibliografia

- [1] Albouy, A.: *Lectures on the two-body problem*, in *Classical and Celestial Mechanics (the Recife lectures)*, H. Cabral and F. Diacu eds., Princeton University press, 2002
- [2] Arnol'd, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, 1989
- [3] Arnol'd, V. I., Avez, A.: *Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique*, Gauthier-Villars Paris, 1967
- [4] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A.: *Appunti di Meccanica Razionale*
- [5] Bertrand, J.: *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*, C. R. Acad. Sci. **77**, 849-853, 1873
- [6] Fassò, F.: *Appunti del corso di Istituzioni di Fisica Matematica*
- [7] Goldstein, H., Poole, C. P., Safko, J. L.: *Classical Mechanics*, 3rd Edition, Pearson Education Limited, 2014
- [8] Hirsch, M. W. and Smale, S.: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press Inc., 1974
- [9] Lagrange, J. L.: *Essai sur le Problème des trois Corps*, Oeuvres de Lagrange, volume: Tome 6, 229-332, 1772
- [10] Levi, M.: *Geometric Phases in the Motion of Rigid Bodies*, Arch. Rational Mech. Anal. **122** 213-229, 1993
- [11] Levi-Civita, T., Amaldi, U.: *Lezioni di Meccanica Razionale Vol. I*, Edizioni CompoMat, 2012
- [12] Lyons, D. W.: *An elementary Introduction to the Hopf Fibration*, Mathematics Magazine, **76/2**, 87-98, 2003
- [13] Mattei, G.: *Lezioni di Meccanica Razionale*, SEU, Pisa, 2007

- [14] Montgomery, R.: *How much does the rigid body rotate? A Berry's phase from the 18th century*, Am. J. of Phys. **59** (5), 1991
- [15] Newton, I.: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687
- [16] Olver, P. J.: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer
- [17] Picasso, L. E.: *Lezioni di Fisica Generale I*, Edizioni ETS, Pisa, 1999
- [18] Whittaker E. T.: *A treatise on the Analytic Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press, 1988

# Indice analitico

- accelerazione centripeta, 68
- accelerazione di Coriolis, 68
- accelerazione di trascinamento, 68
- angoli di Eulero, 105
- angolo di nutazione, 105
- angolo di precessione, 105
- angolo di rotazione propria, 105
- arco a tre cerniere, 162
- asse giroscopico, 185
- asse centrale, 83
- asse istantaneo di rotazione, 115
- asta scarica, 162
- atto di moto elicoidale, 117
  
- base, 118
- base di Frénet, 137
- base di Frénet, 138
- base principale, 125
- biforcazione degli equilibri, 156
- braccio della coppia, 85
  
- campo conservativo, 24
- campo di forze centrale, 37
- catena cinematica, 137
- centro dei vettori paralleli, 86
- centro delle accelerazioni, 122
- centro delle velocità, 118
- centro istantaneo di rotazione, 118
- configurazioni di equilibrio, 151, 227
- coniugato di un quaternioni, 109
- coordinata ciclica, 211
- coordinate lagrangiane, 143
- coordinate locali, 99
- coppia di vettori applicati, 84
  
- coppie cinematiche, 136
- corpo rigido continuo, 97
- corpo rigido discreto, 97
- curvatura, 138
  
- determinismo meccanicistico, 13
- differenziale virtuale, 148
- direzioni principali di inerzia, 125
  
- ellissoide di inerzia, 177
- energia potenziale, 24
- energia totale, 24, 89
- equazione secolare, 230
- equazioni cardinali della Statica, 157
- equazioni cardinali, 77
- equazioni di Eulero, 176
- equazioni di Lagrange, 195
- equazioni pure, 155
- equilibri, 183
- equilibrio instabile, 184
- equilibrio stabile, 183
- erpoloide, 179
  
- fibrato tangente, 142
- formula fondamentale, 112
- formula di Binet, 41
- formule di Poisson, 64
- forze interne, 76
- forze esterne, 76
- forze generalizzate, 155
- forze generalizzate conservative, 197
- frequenze proprie, 234
- funzione di dissipazione di Rayleigh, 209
- funzione di Routh, 214

- generatore infinitesimo, 219  
 gradi di libertà, 21  
 gruppo di Galileo, 18  
 integrale primo, 26  
 isometria, 15  
 lagrangiana, 197  
 lagrangiana ridotta, 214  
 lavoro virtuale, 152  
 legge delle aree, 41  
 legge di Coulomb-Morin, 139  
 linea dei nodi, 105  
 linea di azione, 78  
 luogo dell'asse di simmetria, 218  
 manovellismo, 137  
 mappa di Hopf, 111  
 massa ridotta, 47  
 matrice cinetica, 188  
 metodo di scomposizione, 162  
 modi normali, 234  
 momenti principali di inerzia, 125  
 momento angolare assiale, 27  
 momento coniugato, 211  
 momento di inerzia, 90, 123  
 moti per inerzia, 176  
 moti periodici, 32  
 moti unidimensionali, 30  
 moti vincolati, 97  
 moto rigido piano, 117  
 numero di gradi di libertà, 143  
 operatore di inerzia, 122  
 operazioni elementari, 79  
 parametrizzazione locale, 98  
 poloide, 179  
 postulato caratteristico dei solidi, 158  
 principio di relatività, 18  
 principio dei lavori virtuali, 155  
 principio di azione e reazione, 77  
 principio di d'Alembert, 190  
 principio di inerzia, 14  
 principio di sovrapposizione degli effetti, 162  
 problema iperstatico, 161  
 problema isostatico, 161  
 prodotto vettoriale, 8  
 profili coniugati, 121  
 punti di inversione, 31  
 quaternioni, 109  
 quaternioni puri, 109  
 quaternioni unitari, 109  
 reazioni vincolari, 136  
 regola della mano destra, 10  
 retta di applicazione, 78  
 rettificazione del flusso, 223  
 riferimenti inerziali, 18  
 riferimento del baricentro, 73  
 riferimento solidale, 102  
 rotazioni stazionarie, 182  
 ruletta, 118  
 semigruppò, 219  
 sistema di riferimento, 11  
 sistema di vettori applicati, 78  
 sistema di vettori nel piano, 86  
 sistema equilibrato, 79  
 sistema meccanico galileiano, 21  
 sistema meccanico classico, 21  
 sistemi meccanici conservativi, 89  
 sistemi di vettori equivalenti, 78  
 sistemi integrabili, 28  
 sistemi isolati, 22  
 sistemi lagrangiani, 196  
 sottovarietà, 98  
 spazio tangente, 142  
 spazio-tempo di Galileo, 7  
 spostamenti virtuale, 148  
 stabilizzazione girostatica, 232

tenacia dell'asse giroscopico, 186  
tendenza al parallelismo, 186  
tensore di inerzia, 122  
teorema di Bertrand, 46  
teorema di Huygens-Steiner, 124  
teorema di Chasles, 118  
teorema di Eulero, 15  
teorema di König, 76  
teorema di Rivals, 121  
terne levogire, 10  
trinomio invariante, 84

valori critici, 31  
valori regolari, 31  
varietà delle configurazioni, 143  
velocità angolare, 64  
velocità lagrangiane, 144  
velocità virtuali, 144  
vettore di Laplace-Lenz, 51  
vettore tangente, 141  
vincoli bilaterali, 135  
vincoli ideali, 189  
vincoli unilaterali, 135  
vincoli fissi, 135  
vincoli integrabili, 146  
vincoli mobili, 135  
vincoli olonomi, 145