ORIENTAZIONI

1) Mappa antipodale e motivazione della teoria del grado sugli interi.

ORIENTAZIONI

2) Richiami sulle orientazioni di spazi vettoriali.
3) Definizione di orientazione su una varietà.
4) Costruzione dell'orientazione opposta ad una data orientazione.
5) Orientazione nel caso m=1
6) Ogni varietà connessa di dimensione > 1 ammette al più due orientazioni.

ORIENTAZIONE SUL BORDO

7) Semispazio canonico nello spazio tangente in un punto di bordo: verifica che è una buona definizione.
8) Orientazione indotta sul bordo di una varietà: verifica che la definizione è ben posta. (cioè non dipende né da v1, né da (v1,v2,....,vm))
9) Definizione del segno e del grado intero deg(f;y) associato ad una mappa liscia f tra varietà orientate e ad un suo valore regolare y.
10) Fatto : Il grado intero deg(f;y) è localmente costante.
11) Lemma 1: . Se f è la **restrizione al bordo** di una mappa liscia allora **deg(f;y) = 0.**
12) Lemma 2: Se y è regolare per **f e g mappe omotope** allora **deg(f;y)=deg(g;y)**
13) Teorema : Se **y e z sono valori regolari per f** allora **deg(f;y)=deg(f;z).**
14) Grado intero di una mappa liscia.

APPLICAZIONI

15) Calcolo del grado della mappa S1 → S1 data da z ↦ z^k
16) Calcolo del grado di una riflessione della sfera di dimensione qualunque.
17) Grado della mappa antipodale sulle sfere

Motivazione della Teoria del grado

La mappa costante c_{x_0}: $S^n \to S^n$ t.c. $c(x) = x_0$ non è surgettiva, quindi $deg_2(c_{x_0}) = 0$.
Inoltre $deg_2(id_{S^n}) = 1$. Quindi c_{x_0} non può essere omotopa all' id_{S^n}

D'altra parte se consideriamo la mappa antipodale A: $S^n \to S^n$ t.c. $c(x) = -x$ si ha che $deg_2(A) = 1$ non riusciamo a capire se è omotopa a id_{S^n} . vVedremoche la risposta dipende da n. in seguito vedremo che che un campo vetoriale tangente a S^n permette di costruire un'omotopia tra A e id_{S^n} . Quindiquesta domanda è rilevante per stabilire la pettinabilità delle sfere

ORIENTAZIONI

Def

- $V = \mathbb{R}$ sp. vett. $\dim V = n$
  $B = (b_1, \dots, b_n)$ $B' = (b_1', \dots, b_n')$ basi di V
  B e B' definiscono la stessa orientazione su V $\iff$ $\det(a_{ij}) > 0$ dove $b_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$

- Un' orientazione e' una classe di equivalenza

- $\mathbb{R}^n$ ha un' orientazione canonica O_0

- Se $\dim V = 0$ un' orientazione e' una scelta tra ± 1

- Sia $L : V \xrightarrow{\text{iso}} V'$ induce $\{\text{orient } V\} \longrightarrow \{\text{orient } V'\}$
  $[b] \longmapsto [Lb]$

infatti $b_i' = \sum a_{ij} b_{ij}$ $L(b_i') = \sum a_{ij} L(b_{ij})$

Def

Una varieta' orientata di dim m e' (M, Θ) $\boxed{\dim M = m > 1}$

$\Theta = [O_x]_{x \in M}$ famiglia di orientazione degli spazi tangenti t.c.

$\forall x \in M \ \exists$ par loc. $g: U \to g(U) \subseteq M$ tc $dg_u(O_0) = O_{g(u)}$ $\forall u \in U$

in questo caso g e' compatibile con Θ

. An *orientation* of X, a manifold with boundary, is a smooth choice of orientations for all the tangent spaces $T_x(X)$. The smoothness condition is to be interpreted in the following sense: around each point $x \in X$ there must exist a local parametrization $h: U \to X$, such that $dh_u: \mathbf{R}^k \to T_{h(u)}(X)$ preserves orientation at each point u of the domain $U \subset H^k$. (The orientation on $\mathbf{R}^k$ is implicitly assumed to be the standard one.) A map like h whose derivative preserves orientations at every point is simply called an *orientation-preserving* map.

$$\begin{array}{ccc} dg_u : \mathbb{R}^m & \longrightarrow & T_{g(u)}M \\ \downarrow & & \downarrow \\ O_0 & & O^M_{g(u)} \end{array} \qquad dg_u(O_0) = O_{g(u)} \quad (\operatorname{sgn} dg_u = 1)$$

$U \subseteq \mathbb{R}^m$

Costruzione di un' orientazione opposta a una data orientazione

(M, Θ) var. orient $\Rightarrow (M, -\Theta)$ e' var. orient. dove $-\Theta = \{-O_x\}_{x \in M}$

Poiche' (M, Θ) var. orient. $\forall x \in M \ \exists g$ par. loc $g: U \to g(U)$ tc $dg_u(O_0) = O_{g(u)}$

prendo come $U = B_r(x) \Rightarrow U \cong \mathbb{R}^m$

prendo $\tilde{g}$ $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\cong} g(U)$, $0 \longmapsto x$ $\qquad h: \mathbb{R}^m \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m$, $(x_1, \dots, x_m) \longmapsto (x_1, \dots, -x_m)$

$h \circ \tilde{g} : \mathbb{R}^m \longrightarrow g(U) \subseteq M$, $0 \longmapsto x$ $\qquad h \circ \tilde{g}$ e' ancora diffeo

$\downarrow$

rifl

mat associata h e' $L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$ L e' mat. cambiamento di base

$\det L < 0$

manda $\{e_1, \dots, e_m\} \longrightarrow \{e_1, \dots, -e_m\}$ $\Rightarrow$ $dh_v(O_0) = -O_{h(v)}$

$$d\tilde{g}_u(O_0) = O_{\tilde{g}(u)} \xrightarrow{\text{applico } dh} dh_v \circ d\tilde{g}_u(O_0) = dh_v(O_{\tilde{g}(u)})$$

$$\shortparallel$$

$$dh_v(O_{g(u)}) = -O_{\tilde{g}(u)}$$

In conclusione ho trovato una fam di par locali per $-\Theta$ (le $h \circ \tilde{g}$)

Def ($m = 1$)

M CPT, CONN ($\circ$ S^1 o un arco), $\dim M = 1$, $\partial M \neq \emptyset$

[$\dim \partial M = 0$ $\Rightarrow$ scelgo uno tra ± 1
$\Rightarrow$ non riesco più a invertire $1 \longrightarrow -1$]

$\theta = \{ d\varphi_t(\theta_0) \}_{t \in [0,1]}$ $\qquad \varphi : [0,1] \xrightarrow{\cong} M$ $\quad \exists$ per la connessione

$\downarrow$

Orientazione su M

$d\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow[\cong]{\text{iso}} T_x M \leq \mathbb{R}$

$t \longmapsto d\varphi_t$

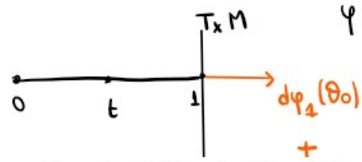
$M =$ copia S^1 oppure copia $[\ ]$

$[0,1] \cong S^1 \qquad [0,1] \cong (a,b)$

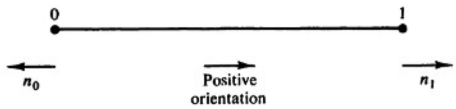
$[0,1] \longrightarrow M$

$0 \longmapsto x$

$\varphi : 1 \longmapsto x$



If dim $X = 1$, then ∂X is zero dimensional. The orientation of the zero-dimensional vector space $T_x(\partial X)$ is equal to the sign of the basis $\{n_x\}$ for $T_x(X)$. Consider, in particular, the compact interval $X = [0, 1]$ with its standard orientation inherited from $\mathbf{R}^1$. At $x = 1$, the outward normal vector is $1 \in \mathbf{R}^1 = T_1(X)$, which is positively oriented, and at $x = 0$ the outward normal is the negatively oriented $-1 \in \mathbf{R}^1 = T_0(X)$. Thus the orientation of $T_1(\partial X)$ is $+1$, and the orientation of $T_0(\partial X)$ is -1.



Reversing the orientation on [0, 1] simply reverses the orientations at each boundary point. Now let X be any compact oriented one-manifold with boundary. Since the boundary points of X are connected by diffeomorphic copies of the interval (thanks to the theorem classifying one-manifolds), we have

Prop.

M var connessa $\Rightarrow$ ammette al più due orient.

dim

$\dim M = m \geq 1$

Sia $O = \{O_x\}$ orient. fissata

Voglio most. che $\forall\ \tilde{O} = \{\tilde{O}_x\}_{x \in M}$ si ha che $\begin{cases} O_x = \tilde{O}_x \\ \text{oppure} \\ O_x = -\tilde{O}_x \end{cases} \forall x \in M$ $\qquad$ cioè $\tilde{O} = \{O, -O\}$

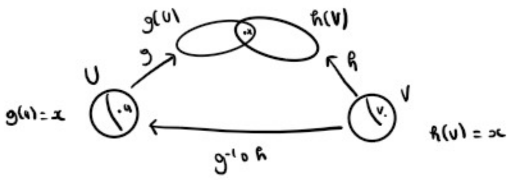
Siano $\quad A = \{x \in M \text{ tc } O_x = \tilde{O}_x\}$

$B = \{x \in M \mid O_x = -\tilde{O}_x\}$

M connessa, se dim che A e B sono aperti ho finito poiché $M = A \cup B \Rightarrow$ uno tra A e B è $\emptyset$

Sia $\quad x \in A$, $g : U \xrightarrow{\cong} g(U)$, $h : V \xrightarrow{\cong} h(V)$

comp con O $\qquad$ comp $\tilde{O}$



$$dg_u(O_0) = O_{g(u)} = O_x \overset{x\in A}{=} \tilde{O}_x = dh_v(O_0)$$

applico dg_u^{-1}

$$O_0 = dg_u^{-1} \circ dh_v(O_0)$$

$$* \; O_0 = d(g^{-1}\circ h)_v(O_0) \iff \det(J(g^{-1}\circ h))_v > 0$$

oss: $\forall v' \in Int(v)$ $\det(J(g^{-1}\circ h)_{v'}) > 0$ per cont. del det.

$\forall v' \in Int(v)$ si ha che $O_0 = d(g^{-1}\circ h)_{v'}(O_0) = dg^{-1}_{h(v')} \circ dh_{v'}(O_0)$

molt per dg

$$\Rightarrow \quad dg_{\underbrace{g^{-1}(h(v'))}_{u'}}(O_0) = dh_{v'}(O_0)$$

$$\underbrace{dg_{u'}(O_0)}_{O_{g(u')}} = dh_{v'}(O_0) = \tilde{O}_{h(v')}$$

$$O_{g(u')} = \tilde{O}_{h(v')}$$

$$O_{x'} = \tilde{O}_{x'} \qquad \forall x' \in Int(x)$$

$\forall x \in A$ h diffeo $Int(V) \cong Int(x)$, $Int(V) = V$, $Int(x) = h(V)$

$\forall x' \in h(V)$ $O_{x'} = \tilde{O}_{x'} \Rightarrow h(V) \subseteq A \Rightarrow A$ è aperto

$O_{x'} = \tilde{O}_{x'}$ $\quad x \in h(V) \subseteq A$

$\dim M = 1$, $\partial M \neq \emptyset$, M cpt

Siano $\{d\varphi_t(O_0)\}$ $\{d\psi_t(O_0)\}$ due orientazioni dove $\varphi, \psi : [0,1] \xrightarrow{\cong} M$

$\psi^{-1}\circ\varphi : [0,1] \xrightarrow{\cong} [0,1]$ $\quad d(\psi^{-1}\circ\varphi) : \mathbb{R} \xrightarrow[\cong]{iso} \mathbb{R}$ ed è non nullo

$0 \longmapsto 0$ perchè è inj $Ker = \{0\}$

Sia $\varepsilon = $ segno $((\psi^{-1}\circ\varphi)'(t))$

$$d(\psi^{-1}\circ\varphi)_t(O_0) = \varepsilon O_0 \iff d\psi^{-1}_{\varphi(t)} \circ d\varphi_t(O_0) = \varepsilon O_0 \iff d\varphi_t(O_0) = \varepsilon \, d\psi_{\psi^{-1}\varphi(t)}(O_0) = \varepsilon \, d\psi_t(O_0)$$

ORIENTAZIONE SUL BORDO

Fatto

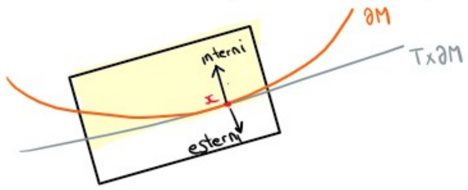
M varietà, $\dim M = m \geq 1$, $\partial M \neq \emptyset$

Un'orientazione su M determina la scelta di uno dei semispazi su $T_xM \setminus \underbrace{T_x\partial M}_{\text{Iperpiano}}$

In part. se $g: U \cap H^m \to g(U \cap H^m)$ con $g(u) = x$ e $u \in \partial H^m$ g comp con l'orientazione
$dg_u(H^m \setminus \partial H^m)$ è il semispazio scelto

$$\begin{array}{c} dg_u(H^m \setminus \partial H^m) \\ \cap \\ dg_u(\mathbb{R}^m \setminus \partial H^m) \underset{dg_u \text{ è iso}}{=} T_xM \setminus T_x\partial M \end{array}$$

La scelta di questo semispazio non dipende da g



dim

Sia $h: V \cap H^m \xrightarrow{\cong} h(V \cap H^m)$ par loc compatibile con l'orient. tc $h(v) = x$, $v \in \partial H^m$
a meno di restringere U e V suppongo che $\exists\, h^{-1} \circ g: U \cap H^m \xrightarrow{\cong} V \cap H^m$

1) $h^{-1} \circ g$ è compatibile con l'orient. cioè $d(h^{-1} \circ g)_u(\mathcal{O}_0) = \mathcal{O}_0 \iff dg_u(\mathcal{O}_0) = dh_v(\mathcal{O}_0)$

molt per $dh_{h^{-1}g(u)} = dh_{h^{-1}(x)} = dh_v$

$$\begin{array}{ccc} dg_u(\mathcal{O}_0) & = & dh_v(\mathcal{O}_0) \\ \| \ g,h \text{ comp.} & & \| \\ \mathcal{O}_{g(u)} & = & \mathcal{O}_{h(v)} \\ \| & & \\ \mathcal{O}_x & = & \mathcal{O}_x \end{array}$$

2) $h^{-1} \circ g: U \cap H^m \to V \cap H^m$

$$d(h^{-1} \circ g): \underset{T_u\partial H^m}{\underset{\|}{\mathbb{R}^{m-1}}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \Rightarrow d(h^{-1} \circ g)_u(\underset{\mathbb{R}^{m-1}}{X}, \underset{\mathbb{R}}{y}) = (\underset{\mathbb{R}^{m-1}}{\phi_1(x,y)}, \underset{\mathbb{R}}{\phi_2(x,y)})$$

(ha det > 0 perché g, h comp con elor)

oss 1: $d(h^{-1} \circ g)_u$ manda i pti di $\mathbb{R}^{m-1} = T_u\partial H^m$ nel $T_u\partial H^m = \mathbb{R}^{m-1}$ (preserva i pti interni a H^m)

Quindi

Nell'ultima riga poiché $h^{-1} \circ g$ manda pti di ∂H^m in ∂H^m

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J(h^{-1} \circ g) = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} * \\ 0 - 0 \end{matrix}}_{T_u\partial H^m = \mathbb{R}^{m-1}} & \begin{matrix} * \\ 1 \end{matrix} \end{array} \right) \qquad 1 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_m} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\phi_2(u + \varepsilon e_m, 0) - \overbrace{\phi_2(u,0)}^{u \in \partial H^m,\ u_m = 0}}{\varepsilon} \geq 0$$

$h^{-1} \circ g$ manda $U \cap \underset{\cup}{H^m} \to V \cap \underset{\cup}{H^m}$
$\phi_2(u + \varepsilon e_m) \geq 0$ poiché $\in H^m$

$\Rightarrow d(h^{-1} \circ g)_u(H^m) = H^m \Rightarrow dg_u(H^m) = dh_v(H^m) \Rightarrow dg_u(H^m \setminus \partial H^m) = dh_v(H^m \setminus \partial H^m)$

vale solo lui $\subseteq$ ma $h^{-1} \circ g$ è diffeo $\Rightarrow$ $\Rightarrow d(h^{-1} \circ g)$ è iso $\Rightarrow$ vale l'$=$

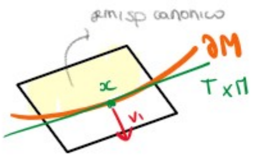
Setting

M varietà orientata con bordo $\boxed{\dim M = m > 1}$

$x \in \partial M$ $\qquad$ stessa orient. di O_x (dell' I)

Sia $(v_1, \dots, v_m)$ base positiva di $T_x M$ con v_1 esterno

e $(v_2, \dots, v_m)$ base di $T_x \partial M$



Lemma

L'orient di $[v_2, \dots, v_m]$ base di $T_x \partial M$ non dipende nè da v_1 nè da $(v_1, v_2, \dots, v_m)$

dim

Sia g par locale

$g: U \cap H^m \longrightarrow g(U \cap H^m)$ $\quad$ g comp con l'or.

$x \in g(U \cap H^m)$

x $x = g(u)$ con $u \in U \cap \partial H^m$

$dg_u^{-1}(v_1) \in \underset{T_u \partial H^m}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}^{m-1}}} \times \mathbb{R}$ $\qquad$ v_1 è esterno $\Rightarrow$ l'ultima coord di $dg_u^{-1}(v_1) < 0$

$\Rightarrow$ le coordinate da $2, \dots, m$ sono nulle

Se $B' = (v_1', \dots, v_m')$ con le stesse proprietà

$M = M_B^{B'}$ $\quad$ v_1' è esterno $\Rightarrow \lambda > 0$ perchè $M(dg_u^{-1}(v_1)) = dg_u^{-1}(v_1')$ mantenendo l'orient.

M manda $(v_1, v_2, \dots, v_m) \longmapsto (v_1', v_2', \dots, v_m')$ entrambe positive $\Rightarrow \det M > 0$

$$\begin{array}{c c} & dg_u^{-1}(v_1) \\ dg_u^{-1}(v_1) & \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \;\text{———}\; 0 \\ \hline * & \\ | & A \\ * & \end{array}\right) \end{array} = M_B^{B'}$$

Per Binet $\underset{\underset{0}{\vee\!|}}{\det M} = \det A \cdot \underset{\underset{0}{\vee\!|}}{\lambda}$ $\Rightarrow \det A > 0$ ovvero A manda $(v_2, \dots, v_m) \longmapsto (v_2', \dots, v_m')$

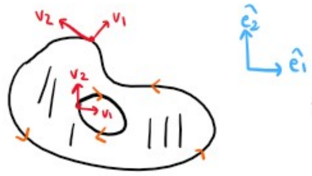
Def

M var or. con bordo.

$\{O_x^{\partial M}\}_{x \in \partial M}$ =: fam di orientazioni su $T_x \partial M$ indotta da O_x^M su $T_x M$

↳ orientazione sul bordo

Quando abbiamo buchi invertiamo le orientazioni

M=  $\subseteq (\mathbb{R}^2, O_{can})$

$S^n = \partial D^{n+1}$ $\qquad$ $D^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ $\qquad$ $T_x D^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$

$\mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow[\text{induce}]{O_0} D^{n+1} \xrightarrow[\text{induce}]{O_x^{\partial D^{n+1}}} S^n = \partial D^{n+1}$

Def. sgn e grado

induce induce

Def. sgn e grado

→ ∃ solo due orientazioni

$f: M \longrightarrow N$ M chiusa (CPT senza bordo), N connessa con $\partial N = \emptyset$, orientate, $\dim M = \dim N$

$x \in M$ regolare per f $\Rightarrow$ $df_x : T_xM \xrightarrow{\cong} T_{f(x)}N$ iso

Allora:

$$\text{segno}(df_x) = \begin{cases} 1 & \text{se } df_x(O_x^M) = O_y^N \\ -1 & \text{se } df_x(O_x^M) = -O_y^N \end{cases} \qquad f(x) = y$$

$\Rightarrow$ y valore reg per n $\Rightarrow$ $\deg(f,y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{segni}(df_x) \in \mathbb{Z}$

Fatto

$\deg(f,y)$ è cost su un int di y.

dim

$$\begin{tikzcd} M \supseteq g(U) \ni x \arrow[r, "f"] & h(V) \subset N \ni y \\ U \ni u \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1}\circ f \circ g"'] & V \ni v \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

g, h due par. loc. comp con l'orient.

dim che $\text{sgn}\, df_x > 0 \iff \det(J(h^{-1}\circ f\circ g)) > 0$

$$\text{sgn}(df_x) = 1 \iff df_x(\underbrace{O_x^M}_{= dg_u(O_0)}) = \underbrace{O_y^N}_{= dh_v(O_0)} \quad g, h \text{ comp.}$$

$dh_y^{-1} \circ df_x \circ dg_u(O_0) = O_0 \iff d(h^{-1}\circ f \circ g)_u(O_0) = O_0$

$\iff h^{-1}\circ f\circ g$ è compatibile con O_0

$\iff \det(J(h^{-1}\circ f \circ g))_u > 0$

Per la cont. del det $\forall u' \in \text{int}(U)$ $\det(J(h^{-1}\circ f\circ g)_{u'}) > 0$

$\Rightarrow \forall x' \in \text{int}(x) = \text{int}(g(u))$, $\text{sgn}\, df_x > 0 \Rightarrow \text{segn}\, df_{x'} > 0$

Itero $\forall x \in f^{-1}(y)$

Per il lemma dei dischi $|f^{-1}(y)| = |f^{-1}(y')|$ $\forall y' \in$ int di y

Ma
$$\underbrace{\sum_{x\in f^{-1}(y)} \text{sgn}\, df_x}_{= \deg(f,y)} = |f^{-1}(y)| \underbrace{\text{sgn}\, df_x}_{\text{è lo stesso } \forall x \in f^{-1}(y)} = |f^{-1}(y')|\, \text{sgn}\, df_{x'} = \underbrace{\sum_{x' \in f^{-1}(y')} \text{sgn}\, df_{x'}}_{= \deg(f,y')} \quad \text{con } y' \in \text{Int}(y)$$

S^1 non contribuisce ai pti di bordo poiché $\dim S^1 = 1$ e $\partial M = 0$ se M ha dim 1

Lemma 1

X cpt, orientata con bordo

$F: X \to N$ C^∞ N connessa, orient.

$\dim N = \dim X - 1$

Se $f := F|_{\partial X}$ e $y \in N$ valore regolare per f allora $\boxed{\deg(f,y)=0}$

dim

step 1

Sia y valore reg per f.

Per Sard sappiamo che i valori regolari per F sono densi in N $\Rightarrow$

$\forall$ aperto A in X, A contiene valori regolari per F

per hp y e' un valore regolare per f $\Rightarrow \exists$ U int $\overset{\text{aperto}}{\text{ap}}$ di y tc. $U \cong V$ $\Rightarrow$ $F(R) \cap \underset{\text{aperto}}{U} \neq \emptyset$

Dal lemma precedente $\exists$ U int di y tc. $\deg(f,y) = \deg(f,y')$ $\forall y' \in U$

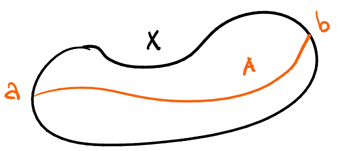
Allora posso supporre spg y valore reg per F

Step 2

Quindi $F^{-1}(y)$ e' una varietà di dim $= \dim X - \dim N = 1$ con bordo $F^{-1}(y) \cap \partial X = f^{-1}(y)$

$F^{-1}(y)$ e' $\underset{\text{chiuso in CPT}}{\text{CPT}}$ di dim 1 per la class. $\Rightarrow$ $F^{-1}(y) = \bigcup^{\text{finita}}$ di copie di S^1 e intervalli chiusi

Sia $A \subseteq F^{-1}(y)$ uno degli archi tc. $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$



Devo mostrare che $\operatorname{sgn}(df_a) + \operatorname{sgn}(df_b) = 0$

step. 3

Sia $\varphi: [0,1] \xrightarrow{\cong} A$ par. locale di A

pongo $v_1(t) = d\varphi_t(1) \in T_{\varphi(t)}A$ $\quad d\varphi_t : \underbrace{T_t([0,1])}_{= T_t\mathbb{R}} \longrightarrow T_{\varphi(t)}A$ $\forall t \in [0,1]$

$t \longmapsto v_1(t)$

$1 \in \mathbb{R}$ (1 e' la basa canonica di $\mathbb{R}$) $[1] = \mathcal{O}_0$

Per un lemma visto

Ho che $T_{\varphi(t)}X = \underbrace{T_{\varphi(t)}A}_{= \operatorname{Ker}(dF_{\varphi(t)})} \oplus (T_{\varphi(t)}A)^{\perp}$

$T_{\varphi(t)}A \subseteq T_{\varphi(t)}(F^{-1}(y)) = \operatorname{Ker}(dF_{\varphi(t)})$

$v_1(t) \in T_{\varphi(t)}A \Rightarrow T_{\varphi(t)}A \neq \emptyset$ $\qquad$ ha dim 1 $\Rightarrow$ vale l'=

$dF_{\varphi(t)}|_{(T_{\varphi(t)}A)^{\perp}} : (T_{\varphi(t)}A)^{\perp} \xrightarrow[\text{isom}]{\cong} T_yN$

inj + lin + spazi della stessa dim.

step 4

Fisso $(w_2,\dots,w_m)$ base positiva di T_yN e pongo $v_i(t) = dF^{-1}_{\varphi(t)}(w_i)$ $\forall i=2,\dots,m$ $\forall t\in[0,1]$

$$dF : T_{\varphi(t)}X \longrightarrow T_yN \qquad df = dF|_{\partial X} : T_{\varphi(t)}\partial X \longrightarrow T_yN$$
$$v_i \longleftarrow w_i$$

affermazione: $(v_1(t),\dots,v_m(t))$ è una base positiva di $T_{\varphi(t)}X$ $\forall t\in[0,1]$ o negativa $\forall t\in[0,1]$

infatti se $g: U \longrightarrow g(U)$ par loc. compatibile
$u \longmapsto \varphi(t)$

se $dg^{-1}_u(v_i(t))$ è positiva $\overset{\text{per cont di } dg}{\Longrightarrow}$ $dg^{-1}_u(v_i(t'))$ è positiva $\forall t'\in \mathrm{Int}(t)$

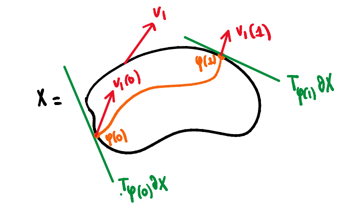
$[v_1(t),\dots,v_m(t)] = \varepsilon(t)\,\theta^M_X$ $\qquad$ cont. $\varepsilon(t): [0,1] \longrightarrow \{\pm 1\}$
$t' \longmapsto 1$ oppure -1
per connessione

$\{t'\}$ è connesso $\Rightarrow$ $\varepsilon(t')$ è connesso
$\Rightarrow$ $\varepsilon(t)$ o è 1 o è -1

idem se è negativa

A meno di usare $\varphi(1-t)$ al posto di φ supponiamo $(v_1(t),\dots,v_m(t))$ base positiva di $T_{\varphi(t)}X$ $\forall t\in[0,1]$

step 5



$v_1(0)$ è interno mentre $v_1(1)$ è esterno

Attorno a $\varphi(1)$: $W\cap X \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$
$\varphi(0)$: $W'\cap X \longrightarrow U' \subseteq \mathbb{R}^m$

spg $U \subseteq \mathbb{R}^m \supseteq U'$ $\quad$ $T_{\varphi(1)}\partial X \subseteq \mathbb{R}^m$ $\quad$ scelgo $\underset{0}{\longrightarrow}$ $v_1(1)$ è esterno $\underset{1}{\longrightarrow}$ $\Rightarrow$ $v_1(0)$ è interno per cont.

step 6

Fisso $(v_2',\dots,v_m')$ base di $T_{\varphi(0)}\partial X$ tc. $(dF_{\varphi(0)}(v_i'))_{i=2}^m$ base positiva di T_yN $**$

$M^{B'}_B$ $\quad \underbrace{(v_1(0), v_2(0),\dots,v_m(0))}_{\text{per * base positiva}} \longrightarrow \underbrace{(v_1(0), v_2'(0),\dots,v_m'(0))}_{\text{questa non so se è positiva}}$

$$\begin{array}{c|c} & v_1(0) \quad v_2(0) \;\dots\; v_m(0) \\ \hline \begin{matrix} v_1(0) \\ v_2'(0) \\ \vdots \\ v_m'(0) \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \;\text{---}\; * \\ \hline 0 & \\ | & B \\ 0 & \end{array}\right) \end{array} = M^{B'}_B$$

$\det B > 0$ perché sia C una matrice camb. di base da $\underbrace{(dF_{\varphi(0)}(v_i(0)))_{i=2}^m}_{\text{positiva per *}} \longrightarrow \underbrace{(dF_{\varphi(0)}(v_i'))_{i=2}^m}_{\text{positiva per **}}$ (basi di T_yN)

$\det C = \det B \cdot 1$
$\det C > 0 \Rightarrow \det B > 0$

$\Rightarrow \det M = \det B \cdot 1 > 0 \quad \Rightarrow (v_1(0), v_2'(0), \ldots, v_m'(0))$ base positiva di $T_{\varphi(0)}X$

Ma $dF_{\varphi(0)}\big|_{T_{\varphi(0)}\partial X} = df_{\varphi(0)}$ perché $f = F|_{\partial X}$

$v_1(0)$ è interno $\Rightarrow (v_2', \ldots, v_m')$ base negativa di $T_{\varphi(0)}\partial X$

$\Rightarrow df_{\varphi(0)}$: manda $\underset{\text{base negativa}}{(v_2', \ldots, v_m')} \longmapsto \underset{\text{base positiva}}{(v_2, \ldots, v_m)}$

$\Rightarrow \operatorname{sgn} df_{\varphi(0)} = -1 \qquad df_{\varphi(0)}(O^X) = -O_y^N$

Analogamente $\varphi(1)$

ma $v_1(1)$ è esterno $\Rightarrow$ base positiva $\Rightarrow \operatorname{sgn} df_{\varphi(1)} = 1$

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(df_x) = \operatorname{sgn} df_{\underbrace{\varphi(0)}_{a}} + \operatorname{sgn} df_{\underbrace{\varphi(1)}_{b}} = -1+1 = 0$$

Orientazioni sulle varietà prodotto

Siano V, V' sp. vettoriali e consideriamo $V \oplus V$

a, b basi di V e b', a' basi di V'

$[a] = [b]$ e $[b'] = [a'] \Rightarrow [(b, b')] = [(a, a')]$

cioè a e b hanno la stessa orientazione

Sia $L : V \to V \quad L = M_a^b$ matrice cambiamento di base da a a b

$\Rightarrow \det L > 0$ perché $[a] = [b]$ hanno la stessa orientazione

Sia $L' : V' \to V' \quad L' = M_{a'}^{b'} \qquad \det L' > 0$

Vale che

$[(b, b')] = [b] \cdot [b']$

$\downarrow$ dim (deriva dai det.

$$M_{(b,b')}^{(a,a')} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L' \end{pmatrix} \qquad \det M = \det L \cdot \det L'$$

$[(a, a')] = [a] \cdot [a'] = [b][b'] = [(b, b')]$

passiamo alle orientazioni

Γ M, M' $\quad \theta^M, \theta^{M'}$

sappiamo $T_{(x,x')}(M \times M') = T_x M \oplus T_{x'} M' \quad \forall (x,x') \in M \times M'$

Im $M \times M'$ e' def un'orient prodotto $\theta^M \times \theta^{M'}$ tale che $(\theta^M \times \theta^{M'})_{(x,x')} = \theta^M_x \times \theta^{M'}_{x'}$ $\llcorner$

Consideriamo $[0,1] \times M$

La varieta' $[0,1] \times M$ e' un prodotto dunque acquisisce un'orientazione indotta da M e da $[0,1]$

Osservazione. Sia M una varietá senza bordo e $N = [0,1] \times M$. Allora $\partial N = \{0\} \times M \sqcup \{1\} \times M$ e, dati gli ovvi diffeomorfismi $M \to \{0\} \times M$ e $M \to \{1\} \times M$, vediamo che le orientazioni indotte su $\{0\} \times M$ e $\{1\} \times M$ sono opposte. Infatti una base $\{+, v_2, \ldots, v_n\}$ di $\{1\} \times M$ é positiva $\iff$ la base $\{-, v_2, \ldots, v_n\}$ di $\{0\} \times M$ é positiva, dove $\{v_2, \ldots, v_n\}$ é una base positiva di M.

$*$

$[0,1] \times M \quad \theta^{[0,1]} = \theta_{can} = \theta_0 \quad , \quad \theta^N = \theta^{can} \times \theta^M$

- sia b base positiva di $T_x M = \mathbb{R}^m$
- $1 \in T_t[0,1] = \mathbb{R}$ $\quad 1$ e' base positiva di $\mathbb{R}$

$\Rightarrow (1, b) =$ base positiva $\quad T_t[0,1] \oplus T_x M$

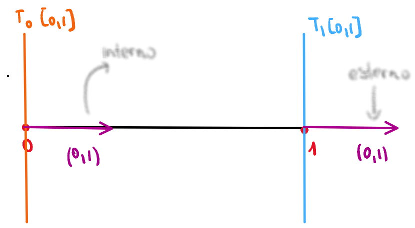
Vediamo l'orient sul bordo $[0,1] \times M$

$\partial([0,1] \times M) = \{1\} \times M \cup \{0\} \times M$

Il bordo orientato e' $\{1\} \times M \cup \{0\} \times (-M)$ per $*$

$(1,0) \in T_1[0,1] \oplus T_x M$ e' esterno

$(1,0) \in T_0[0,1] \oplus T_x M$ e' interno



Lemma 2

M chiusa (CPT + $\partial M = 0$) , N $\quad \dim M = \dim N \quad M, N$ orient.

$F : [0,1] \times M \longrightarrow N$ $\quad C^\infty$ omotopia $\cdot\ F(x,0) = f(x)$
$\cdot\ F(x,1) = g(x)$

y valore reg per f e g

Allora $\deg(f, y) = \deg(g, y)$

dim lemma

y e' valore reg per f e g.

$\forall y' \in U$ int di $y \Rightarrow \deg(f, y) = \deg(f, y')$ e $\deg(g, y) = \deg(g, y')$

Uso la densita' di $F(R) \Rightarrow y$ e' reg per $F : [0,1] \times M \to N$

$$F|_{\partial([0,1]\times M)} = F|_{\{0\}\times M \cup \{1\}\times M} = \begin{cases} F|_{0\times M} = f \\ F|_{1\times M} = g \end{cases}$$

lemma 1

$$0 = \deg(F|_{\partial([0,1]\times M)}, y) = \deg(g,y) - \deg(f,y) \Rightarrow \deg(g,y) = \deg(f,y)$$

* il bordo orientato è $\{1\}\times M \cup \{0\}\times(-M)$

Come nel caso del grado mod 2 ora possiamo dimostrare l'indipendenza di deg (f,y) del valore regolare

Teo

M, N orientabile $\dim M = \dim N$, M chiusa, N connessa

$f: M \longrightarrow N$ C^∞, $y, z \in N$ valori regolari per f

Allora $\deg(f,y) = \deg(f,z)$

dim

Per il lemma di omog $\exists\ h: N \xrightarrow{\sim} N$ h isotopo a id_N tc $h(y) = z$

Considero $\psi: [0,1] \longrightarrow \{\pm 1\}$ con $(dh_t)_y(O_y^N) = \varepsilon_t O^N_{h_t(y)}$ dove h_t è l'isotopia tra h e id_N

$t \longmapsto \varepsilon_t$

$dg_u(O^N) = O^N_{g(u)} = O_y^N$

applico dh

$(dh_t)_y \circ dg_u(O^N) = (dh_t)_y O_y^N$

$d(h_t \circ g)_u(O^N) = (dh_t)_y(O_y^N)$

$\varepsilon_t O^N_{h_t(g(u))} = (dh_t)_y(O_y^N)$

$\varepsilon_t O^N_{h_t(y)} = (dh_t)_y(O_y^N)$

Osserviamo che

1) $\psi(1) = 1$ perché $h_1 = id_N \Rightarrow \underset{id_N}{(dh_1)_y}(O_y^N) = O_y^N$

2) $\psi(t)$ è loc cost $\forall t \in [0,1]$ $\exists$ U int di t tc $\forall t' \in U$ $\psi(t) = \psi(t')$ ovvero $\varepsilon_t = \varepsilon_{t'}$

dim 2

sia t tc $(dh_t)_y(O_y^N) = \varepsilon_t O^N_{h_t(y)}$

spg $\varepsilon_t = 1 \Rightarrow \det(J(dh_t)_y) > 0$ chiamo $J_t = J(dh_t)_y$

Sia $t' \in U$ int di t.

sia $\alpha: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ α cont $\Rightarrow \det(J_{t'}) > 0$ $\forall t' \in \text{Int}(t)$

$t \longmapsto J_t \longmapsto t(J_t)$

$\Rightarrow (dh_{t'})(O_y^N) = \varepsilon_{t'} O^N_{h_{t'}(y)} \Rightarrow \varepsilon_{t'} = 1$

$$(dh_t)_y(O_y^N) = \varepsilon_t O^N_{h_t(y)} \underset{t=1}{\Rightarrow} (dh)_y(O_y^N) = \underset{\psi(1)=1}{\varepsilon_1} O^N_{h(y)=z}$$

$\Rightarrow \deg(f,y) \overset{*}{=} \deg(h \circ f, z) \overset{*}{=} \deg(f, z)$

Lemma 2

* z regolare per f e $f \sim h \circ f$ tramite $\{h_t \circ f\}$

* y reg per $f \Rightarrow z$ reg per $h \circ f$

$$\deg(f,y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} df_x \overset{*}{=} \sum_{x \in \underbrace{(h \circ f)^{-1}(z)}_{f^{-1}(h^{-1}(z)) = f^{-1}(y)}} \operatorname{sgn} d(h \circ f)_x = \deg(h \circ f, z)$$

$$* \quad \sum_{x \in \underbrace{(h \circ f)^{-1}(z)}_{f^{-1}(h^{-1}(z)) = f^{-1}(y)}} \operatorname{sgn} d(h \circ f)_x = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} dh_y \cdot \operatorname{sgn} df_x \overset{*}{=} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} df_x$$

$\operatorname{sgn} dh_y = 1$ perchè $dh_y(O_y^n) = O_z^n$

Def

$\deg(f) = \deg(f,y) \in \mathbb{Z}$ nelle hp del teo (grado intero di una mappa liscia)

Oss

$\deg(f) \overset{*}{=} \deg(f,y) = \deg(g)$ se f e g sono C^∞ omotope

non dip da y

Corollario

$f: M \to M$ diffeo

$df_x(O_x^M) = -O_x^M$ per qualche $x \in M$

Allora f non è C^∞-omotopa nè a id_N né a c_{x_0}

Ricorda

$\deg(c_{x_0}) = 0$, $\deg(id_N) = 1$

Applicazione 1

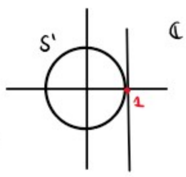
Consideriamo $S^1 = \partial D^2 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

Vogliamo calcolare il grado di $f_k : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^k$, $k \in \mathbb{Z}$

f_k e' $C^\infty \Rightarrow f_k$ si estende a $F_k: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tc $F_k(z) = z^k$

sia $1 \in S^1$ possiamo calcolare $(df_k)_1$ usando F_k

$T_1\mathbb{C} = \operatorname{Span}(1, i) \supset \operatorname{Span}(i) = T_1 S^1$



Se $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto e^{i\theta}$ con $\gamma'(0) = ie^{i\theta}\big|_{\theta=0} = i$

$$(dF_K)_1(i) = (dF_K)_1(\gamma'(0)) = \frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} F_K(\gamma(\theta)) = \frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0} e^{iK\theta} = Ki$$

$(df_K)_1 : \underbrace{K.}_{\text{molt. per } K}$ $\quad T_1S^1 \to T_1S^1$, $\quad i \mapsto Ki$ $\quad$ e' iso $\iff K \neq 0$

inj + spazi della stessa dim + lineare

se $K=0$

$f_0(z) = z^0 = 1 \Rightarrow \deg f_0 = 0$

Supp allora $K \neq 0$

dim che $1 \in S^1$ e' regolare per f_K

$f_K^{-1}(1) = \{z \in S^1 \text{ tc } z^K = 1\}$ = radici K-esime dell'unita'

Se $\xi \in f_K^{-1}(1) \subseteq S^1 \Rightarrow \xi\cdot : S^1 \to S^1$, $x \mapsto \xi . x$ e' diffeo isotopo a Id_{S_1}

$$\boxed{\begin{array}{ll} H: S_1 \times [0,1] \to S_1 & \\ (x, t) \mapsto \xi^t x & \\ \text{se } t=0 \quad (x,t) \mapsto x & H(x,0) = id \\ \text{se } t=1 \quad (x,t) \mapsto \xi x & H(x,1) = \xi. \end{array}}$$

Quindi poiche' $\xi.$ isot a $Id_{S^1} \Rightarrow$ segno$(d(\xi.)) = 1$

Inoltre

$f_K \circ \xi = f_K$ perche' $f_K(\xi.(z)) = f_K(\xi z) = \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\xi^K} z^K = z^K = f_K(z)$

$$\text{sgn } d(f_K)_\xi \overset{\text{sgn } d(\xi.)=1}{=} \text{sgn}\Big(d(f_K)_{\underset{\substack{\parallel \\ \xi.1=\xi}}{\xi(1)}} \cdot d(\xi.)_1 \Big) = \text{sgn}\big(d(f_K \circ (\xi))_1\big)$$

$$\deg(f_K, 1) = \sum_{\xi \in f_K^{-1}(1)} \text{segno}(d(f_K)_\xi) = \sum_{\xi \in f_K^{-1}(1)} \text{sgn } d(f_K \circ \xi)_1 = \sum \text{sgn } d(f_K)_1 = |K| \text{ segno}(K) = K$$

$$\parallel$$

$$|K| \text{ segno}(K) = \begin{cases} \text{se } K > 0 & |K| = K \\ \text{se } K < 0 & -|K| = -(-K) = K \end{cases}$$

lineare + spazi della stessa dim + inj $\quad \text{Ker } d(f_K)_1 = \{0\}$ $\quad df_K\ T_1S^1 \xrightarrow{\cong} T_1S^1$, $\quad K \mapsto Ki$

$d(f_K)_1$: e' iso $\Rightarrow$ surg. $\quad$ 1 e' pto reg.

$\forall K \neq 0 \quad \forall x \in f_K^{-1}(1) \quad df_{K_x}$ e' surgettivo $\quad$ 1 e' regolare

In part $f_K : S^1 \longrightarrow S^1$ non si estende a una mappa da $D^2 \longrightarrow \partial D^2 = S^1$
se così fosse:
1 valore reg per S^1 $\Rightarrow$ 1 è valore reg per $F|_{\partial D^2} = f$

$\Rightarrow \deg(f, y) = 0$ ↯ ho trovato che è k.

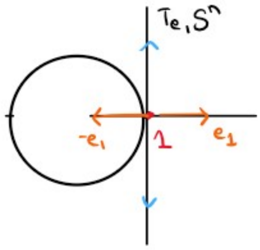
Calcolo del grado di una riflessione della sfera di dimensione qualunque

Sia $\tilde{r}_i : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la mappa che cambia il sgn dell'i-esima coordinata

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$$

Sia r_i la restrizione su S^n di $\tilde{r}_i$ cioè $r_i : S^n \longrightarrow S^n$
r_i è diffeo, vogliamo capire se conserva o inverte l'orient di S^n

controllo nel pto $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$



$\langle e_i \rangle^\perp = \{ v \in S^n \text{ tc } v \cdot e_i = 0 \} = T_{e_i} S^n = \langle -e_i \rangle^\perp = T_{\underbrace{r_i(e_i)}_{-e_i}} S^n$

La mappa $\tilde{r}_i$ è lineare e ha mat $\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$ -1 nel posto (i,i)
$\Rightarrow d\tilde{r}_i = \tilde{r}_i$
e manda la base $b = (e_i, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1})$ di $T_{e_i}\mathbb{R}^{n+1} = \text{Span}(e_i) \oplus T_{e_i}S^n$
$\downarrow$
$b' = (-e_i, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1})$ di $T_{-e_i}\mathbb{R}^{n+1} = \text{Span}(-e_i) \oplus T_{-e_i}S^n$

$\det \tilde{r}_i = -1$ quindi uno tra b e b' induce $\mathcal{O}_0$ su $\mathbb{R}^{n+1}$

Ma $e_i \in \mathbb{R}^{n+1} = T_{e_i}D^{n+1}$ è esterno e $-e_i \in \mathbb{R}^{n+1} = T_{-e_i}D^{n+1}$ è esterno

Questo mostra che $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1})$ è l'orient di bordo di uno solo tra $T_{e_i}S^n$ e $T_{-e_i}S^n$

Inoltre $(dr_i)_{e_i} \overset{r_i = \tilde{r}_i|_{S^n}}{\boxed{=}} \left(d\tilde{r}_i|_{T_{e_i}S^n} \right) = \tilde{r}_i|_{\text{Span}(e_i)^\perp} = id_{\text{Span}(e_i)^\perp}$
$\Rightarrow \text{sgn}(dr_i)_{e_i} = (\deg r_i) = -1$

Grado della mappa antipodale sulle sfere.

$$A : S^n \longrightarrow S^n \qquad \deg(A) = (-1)^{n+1}$$
$$x \longrightarrow -x$$

se n è pari $\Rightarrow \deg(A) = -1 \Rightarrow A$ non è omotopa all'id_{S^n}
dim
$A = r_1 \circ r_2 \circ \dots \circ r_{n+1} \Rightarrow \deg(A) = \sum \text{sgn}(dr_i)_{e_i} = (-1)^{n+1}$