

Laboratorio di Analisi Numerica

Lezione 3

Leonardo Robol <leonardo.robol@unipi.it>

Igor Simunec <igor.simunec@sns.it>

15 Ottobre 2021

Quantità di esercizi: in questa dispensa ci sono *più esercizi* di quanti uno studente medio riesca a farne durante una lezione di laboratorio, specialmente tenendo conto anche degli esercizi facoltativi. Questo è perché è pensata per “tenere impegnati” per tutta la lezione anche quegli studenti che già hanno un solido background di programmazione. Quindi fate gli esercizi che riuscite, partendo da quelli *non* segnati come facoltativi, e non preoccupatevi se non li finite tutti!

1 Sottomatrici e determinanti

Utilizzando l'operatore `:` (*range operator*), in MATLAB è possibile selezionare un'intera sottomatrice di una matrice:

```
>> A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
```

```
A =
```

```
1 2 3
4 5 6
7 8 9
```

```
>> A(1:2,2:3)
```

```
ans =
```

```
2 3
5 6
```

```
>> A(2:end,1:end-2)
```

```
ans =
```

```
4
7
```

```
>> A(1:end,1:end)
ans =

    1  2  3
    4  5  6
    7  8  9

>> A(1,:)
ans =

    1  2  3
```

La sintassi `a:b` seleziona tutte le righe/colonne comprese tra `a` e `b` (estremi inclusi). Il valore `end` viene sostituito con il massimo indice disponibile. Il solo `:` è un'abbreviazione per `1:end`.

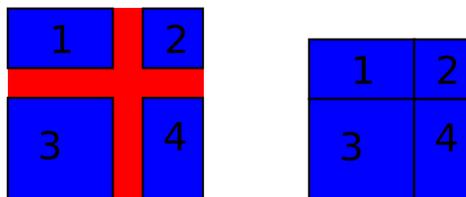
Possiamo anche assegnare un valore a una sottomatrice selezionata in questo modo:

```
>> A(1:2,1:2)=eye(2)
A =

    1  0  3
    0  1  6
    7  8  9
```

Ovviamente le dimensioni devono essere compatibili: non posso selezionare una sottomatrice 2×2 e assegnarle il valore `eye(3)`!

La seguente function restituisce la *matrice minore* di (i, j) in A , cioè la matrice che si ottiene eliminando la i -esima riga e la j -esima colonna di A .



```
function B = minor(A,i,j)
X=A(1:i-1,1:j-1);
Y=A(1:i-1,j+1:end);
Z=A(i+1:end,1:j-1);
W=A(i+1:end,j+1:end);
B=[X Y; Z W];
end
```

Abbiamo già visto che se X, Y, Z, W sono numeri, la riga di codice `B=[X Y; Z W]` crea la matrice

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}.$$

Ora vediamo che la stessa sintassi funziona anche se X, Y, Z, W sono matrici di dimensioni “compatibili” e crea la matrice formata accostando i quattro blocchi.

Esercizio 1. Creare una **function** `d=mydet(A)` che calcoli il determinante di una matrice quadrata A utilizzando la formula di Laplace sulla prima riga, cioè

$$\det(A) = A_{11} \det A^{(11)} - A_{12} \det A^{(12)} + A_{13} \det A^{(13)} - \dots + (-1)^{n+1} A_{1n} \det A^{(1n)}$$

dove A_{ij} è l’elemento di A nella posizione (i, j) e $A^{(ij)}$ è la matrice minore di A rispetto a (i, j) . [Hint: la funzione può essere *ricorsiva*, cioè chiamare se stessa al suo interno. Fate attenzione: bisogna definire un caso base!]

Poi testarla su alcune matrici, confrontandola con la funzione `det` di MATLAB, per esempio le matrici di Vandermonde `V=vander(1:2)`, `V=vander(1:3)`, `V=vander(1:4)`...

Esercizio 2 (facoltativo). La seguente function è equivalente a `minor(A,i,j)`. Come funziona? [Hint: osservate cosa succede eseguendo `A(v,w)` dove v e w sono vettori contenenti interi.]

```
function B = minor2(A,i,j)
    B = A([1:i-1 i+1:size(A,1)], [1:j-1 j+1:size(A,2)]);
end
```

2 Tempi di calcolo

Le funzioni `tic` e `toc` misurano il tempo necessario ad eseguire più istruzioni. La prima fa partire il cronometro, la seconda lo ferma e restituisce il valore ottenuto. Per esempio, le istruzioni

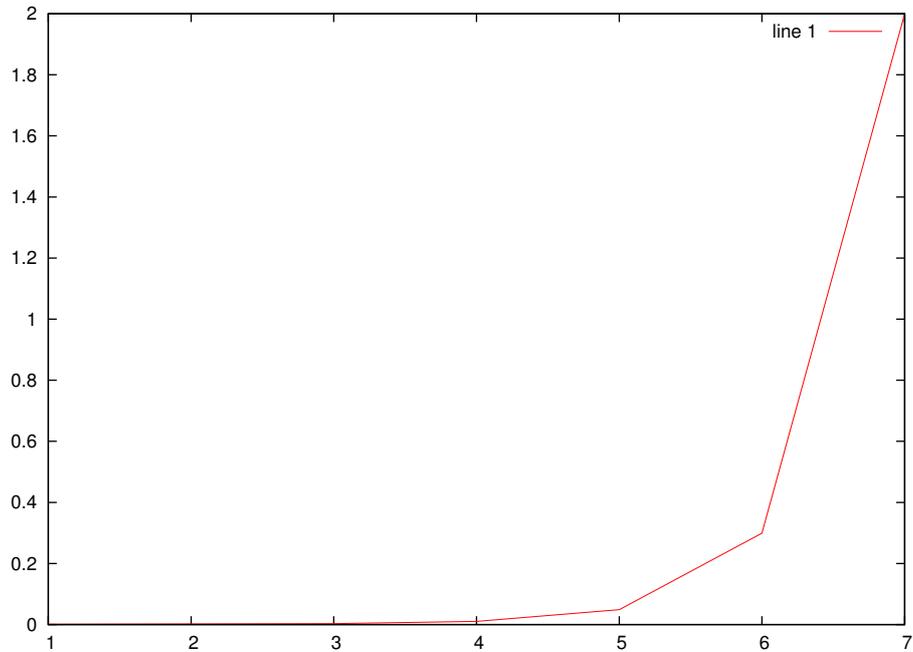
```
tic;
x=10;
myexp2(x,500);
t=toc;
```

salvano in `t` il tempo necessario ad eseguire le due righe centrali.

La seguente funzione disegna un grafico del tempo impiegato per calcolare i determinanti delle matrici `vander(1:n)` con $n=1:7$.

```
function plottimes();
n=7;
tempi=zeros(n,1); %prepara un vettore vuoto con i tempi
for i=1:n
    A=vander(1:i); %la matrice viene generata prima di ‘tic’:perche’?
    tic;
```

```
d=mydet(A);
tempi(i)=toc;
end
plot(1:n,tempi);
end
```



I tempi di calcolo crescono molto velocemente. Già per $n = 9$ la funzione è praticamente inutilizzabile. Difatti, con questo algoritmo, per calcolare un determinante di dimensione n dobbiamo calcolarne n di dimensione $n - 1$; quindi vale

$$\text{tempo}(n) \approx n \cdot \text{tempo}(n - 1)$$

da cui $\text{tempo}(n) \approx n! \cdot \text{tempo}(1)$. Il nostro algoritmo quindi non è adatto a calcolare il determinante in modo efficiente.

3 Determinante con l'eliminazione di Gauss

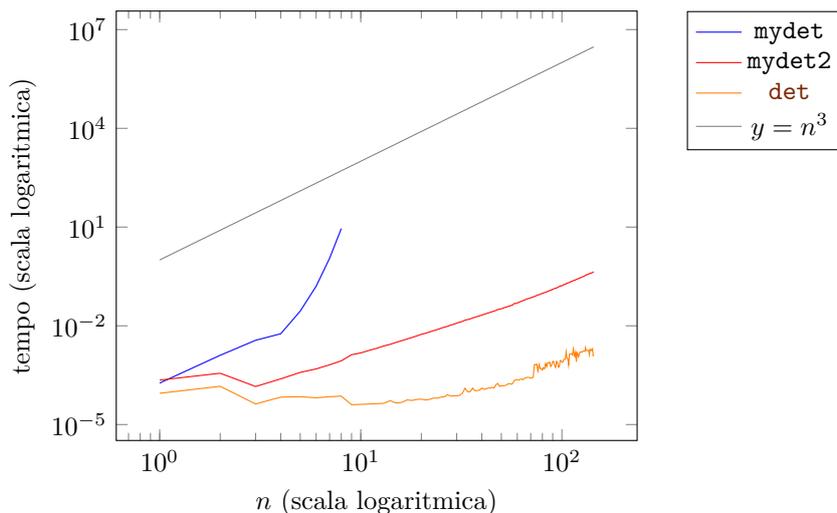
Esercizio 3. Scrivete una `function` `d=mydet2(A)` che calcoli il determinante utilizzando l'eliminazione di Gauss. Suggestimenti:

- utilizzate espressioni del tipo `A(i,:)=A(i,:)+A(j,:)` per sommare due righe di una matrice, invece di scrivere un ciclo `for`.

- per ora, ignorate il fatto che i pivot possono essere zero; se incontrate un pivot nullo, terminate con un messaggio di errore (potete farlo con l'istruzione `error('ho incontrato un pivot nullo')`).
- per controllare che tutto vada bene, in una prima fase fatevi scrivere a schermo il valore di A dopo ogni passo di eliminazione di Gauss

Esercizio 4. Disegnare un grafico analogo a quello più sopra per i tempi di calcolo di `mydet2`.

Esercizio 5. Ecco un grafico più completo, disegnato in scala logaritmica.



Per riferimento abbiamo riportato anche il grafico di $y = n^3$, sempre sulla stessa scala logaritmica. Qual è la pendenza della retta che corrisponde ad esso? Come potete determinare dal grafico che `mydet2` richiede $O(n^3)$ operazioni mentre `mydet` è asintoticamente più costoso? La funzione `det` di MATLAB dovrebbe essere anch'essa cubica, ma il suo comportamento è più complicato da determinare per via delle ottimizzazioni usate; i tempi esatti dipendono fortemente dall'architettura del calcolatore.

Esercizio 6. Testate la funzione `mydet2` su alcune matrici per cui dovrebbe generare un errore a causa del pivot nullo. Per esempio, generate usando `rand` una matrice 10×10 in cui tutte le entrate sono casuali, tranne la nona riga che è la somma delle otto righe precedenti. Cosa succede? Incontrate effettivamente un errore? Perché?

Esercizio 7 (facoltativo). Provare a disegnare un grafico simile a quello qui sopra, che riporti i tempi dei tre diversi algoritmi in scala logaritmica.

Esercizio 8 (facoltativo). Scrivete una funzione che scambi opportunamente le righe quando incontra un pivot nullo, in modo da poter continuare l'algoritmo. Cosa succede al determinante quando scambio due righe?

Testate la funzione su alcune matrici, per esempio `A=vander(1:10)`, confrontandola con `det` di MATLAB.