NORME DI VETTORI E MATRICI

mercoledì 7 dicembre 2022 11:02

Norme di vettori

Definizione

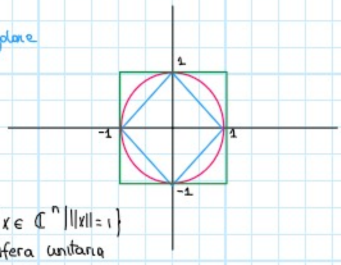
Un'applicazione $\|\cdot\|: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ viene detta **norma vettoriale** se:
- $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{C}^n$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$ disuguaglianza triangolare

Esempi di norme

$$\left.\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ \|x\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \|x\|_\infty &= \max_i |x_i| \end{aligned}\right\}$$

sono casi speciali della norma di Holder $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $\quad p \geq 1$

dove $\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p$



$S = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| = 1\}$ sfera unitaria

Osservazioni

$\{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ è un **insieme convesso** per una norma $\Rightarrow$ $0 < p < 1$ $\|x\|_p$ non è una norma essendo $\{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ non convesso

Definizione

Un **prodotto scalare** su $\mathbb{C}^n$ è un'applicazione da $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che:

$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle$

- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
- $\langle \alpha x, y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$
- $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

Esempi

$\langle x, y \rangle = x^T y$ in $\mathbb{R}^n$ è il prodotto scalare euclideo

$\langle x, y \rangle = x^H y$ in $\mathbb{C}^n$ è il prodotto scalare hermitiano

Osservazione

Dato $\langle x, y \rangle$ su $\mathbb{C}^n$ $\Rightarrow$ la mappa $x \longmapsto \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ è la **norma indotta** dal p. scalare

Esempio

$\|x\|_2$ è indotta dal p. scalare hermitiano

Osservazione

Un p. scalare rispetta la disuguaglianza di **Cauchy-Schwarz** cioè $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

idea dim

- Se $y = 0$
- Se $y \neq 0 \Rightarrow$ pongo $t = \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \Rightarrow 0 \leq \langle x - ty, x - ty \rangle = \langle x, x \rangle - \langle ty, ty \rangle = \langle x, x \rangle - |t|^2 \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle^{\cancel{2}}} \cancel{\langle y, y \rangle} = \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}$ + moltiplico per $\langle y, y \rangle$

Osservazioni

Essa implica che $\langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall x, y$ tali che $\|x\| = \|y\| = 1$

In $\mathbb{R}^n$ $\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{(\|x\|\,\|y\|)}$ $\theta \in [0, \pi]$; in $\mathbb{C}^n$ $\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}$ con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Definizione

Due **vettori** sono **ortogonali** se $\langle x, y \rangle = 0$

Teorema

Una norma $\|\cdot\|$ è indotta da un p. scalare $\iff$ vale la legge del parallelogramma $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
cioè la somma dei □ delle diagonali di un parallelogramma = somma dei □ dei 4 lati.

Su $\mathbb{R}^n \mapsto \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

Su $\mathbb{C}^n \longmapsto \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\right)$

Osservazione

La disuguaglianza triangolare si può riesprimere nel seguente modo: $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\| \quad x,y \in \mathbb{C}^n$

Proposizione

La norma è una funzione U.C. cioè $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x,y \in \mathbb{C}^n \ |x_i - y_i| \leq \delta \Rightarrow \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \varepsilon$

Teorema Equivalenza delle norme

Per ogni coppia di norme $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ su $\mathbb{C}^n$ $\exists \ \alpha, \beta$ costanti positive t.c. $\forall x \in \mathbb{C}^n$ vale $\alpha \|x\|' \leq \|x\|'' \leq \beta \|x\|'$

Definizione

Una **norma** è **assoluta** se verifica la seguente proprietà: $x = (x_i) \in \mathbb{C}^n$ e $y = (y_i)$ dove $y_i = |x_i|$ Se $\|\cdot\|$ è $\|\cdot\|_1 \vee \|\cdot\|_2 \vee \|\cdot\|_\infty$ vale $\|x\| = \|y\|$

Teorema

$\forall x \in \mathbb{C}^n$ si ha
1. $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$
2. $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$
3. $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$

Osservazione ⚠

La $\|\cdot\|_2$ è invariante sotto trasformazioni unitarie. Infatti se $y = Ux$ e U è unitaria $\Rightarrow \|y\|_2^2 = y^H y = (Ux)^H (Ux) = x^H U^H U x = x^H x = \|x\|_2^2$

Norme di matrici

Definizione

Si dice **norma di matrice** un'applicazione $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n \times n}$ in $\mathbb{R}$ t.c.:
- $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$
- $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ p. submoltiplicativa

Norma di Frobenius

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\|A\|_F = tr\,(A^H A)^{\frac{1}{2}}$ ed è la $\|\cdot\|$ indotta dal p. scalare $\langle A, B \rangle = tr\,(A^H B)$

Norme operatore o norme di matrici indotte

Setting: $\|\cdot\|$ su $\mathbb{C}^n$ e $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$S = \{ x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| = 1 \}$ è un CPT + $\|\cdot\|$ f. continua $\overset{W}{\Rightarrow} \exists \max\limits_{x \in S} \|A x\|$ che è una norma

$\|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|A x\|$ (norma indotta da una norma vettoriale (Ax è un vettore di $\mathbb{C}^n$) mi sputa fuori una norma matriciale)

Proprietà

- $\|A x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$
- $\|I\| = 1$ se è una norma indotta ⇝ Frobenius non lo è! $\|I\|_F = \sqrt{n}$

Teorema Come sono fatte le norme di matrice indotte da $\|\cdot\|_1 ; \|\cdot\|_2 ; \|\cdot\|_\infty$?

Per le norme di matrice indotte dalla norma $1, 2, \infty$ vale:
- $\|A\|_1 = \max\limits_{j} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- $\|A\|_2 = (\rho(A^H A))^{\frac{1}{2}}$ dove $\rho(A)$ = raggio spettrale cioè il max dei moduli dei suoi autovalori
- $\|A\|_\infty = \max\limits_{i} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Esempio

$$A = \begin{array}{cccc|c} \left[\begin{matrix} -1 & 7 & 0 & 8 \\ 11 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 10 & -9 & 0 & -1 \end{matrix}\right] & & & & \begin{matrix} 16 \\ 19 \\ 11 \\ 20 \end{matrix} \end{array}$$

$\begin{matrix} 22 & 20 & 7 & 17 \end{matrix}$

$\|A\|_1 = 22 \qquad \|A\|_\infty = 20$

$\|A\|_2 \ ??$

idea dim

1. le relazioni valgono con $\leq$
2. $\exists \ x$ con $\|x\| = 1$ per cui vale $\|Ax\| =$ rel 1, rel 2, rel 3

Osservazioni

- $\|A\|_2 \le \|A\|_F$ per def
- Se U e V sono mat. unitarie e $B = UAV \Rightarrow B^H B$ e $A^H A$ sono simili $\Rightarrow$ spec.e tr. sono invarianti

Norme e raggio spettrale

Proprietà

$\|A\| \ge \rho(A)$ [segue da $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$]

Teorema Quando $\rho(A)$ è una norma?

$\forall A$ mat, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \|\cdot\|$ indotta t.c. $\rho(A) \le \|A\| \le \rho(A) + \varepsilon$

Inoltre se i λ_j t.c. $|\lambda_j| = \rho(A)$ stanno in blocchi di Jordan di dim 1 $\Rightarrow \|A\| = \rho(A)$

idea dim

$\|A\|_S = \max_{\|x\|_S=1} \|Ax\|_S = \max_{\|Sx\|=1} \|SAx\| \underset{y=Sx}{=} \max_{\|y\|=1} \|SAS^{-1}y\| = \|SAS^{-1}\|$

1. S invertibile $\longmapsto x \longrightarrow \|Sx\|$ è norma $\longmapsto$ definiamo $\|x\|_S = \|Sx\| \longmapsto \|A\|_S = \|SAS^{-1}\|$
2. Portare A in f. di Jordan $J = W^{-1}AW$

   $\hat{J} = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_n(\lambda_n) \end{bmatrix}$

   2A $D_\varepsilon = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}) \Rightarrow \hat{J} = D_\varepsilon^{-1} J D_\varepsilon$

   caso 1

   2B se $|\lambda_i| = \rho(A)$ e $J_i(\lambda_i)$ ha dim > 1 $\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon & \\ & \ddots & \varepsilon \\ & & \lambda \end{bmatrix}$ blocco di Jordan con $\lambda = \rho(A)$

   $\Longrightarrow \|\hat{J}\|_\infty = \rho(A) + \varepsilon$

   caso 2

   2C Se $\forall i$ t.c. $|\lambda_i| = \rho(A)$ stanno in $J_i(\lambda_i)$ di dim 1 $\Rightarrow$ scelgo ε t.c. $\forall \lambda_k \ne \lambda_i$ vale $|\lambda_k| + \varepsilon \le \rho(A) \Rightarrow \|\hat{J}\|_\infty = \rho(A)$

   ⚠ $J_k(\lambda_k)$ può avere qualsiasi dim.
3. Conclusione il Teo vale con $\|A\| = \|A\|_S$ $S = D_\varepsilon^{-1} W^{-1}$

esempio caso 2C

$\begin{bmatrix} J_1(5) & & \\ & J_2(-5) & \\ & & J_3(4{,}99) \end{bmatrix}$ J_1 e J_2 hanno dim 1

$|4{,}99| + \varepsilon \le \rho(A) = 5 \Rightarrow \|\hat{J}\|_\infty = 5$

Teorema 6

$\forall \|\cdot\|$ e $\forall A$ mat. vale $\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$

idea dim

1. Se $\exists$ lim non dipende dalla norma
   - a Considero $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ e suppongo $\exists$ il lim
   - b uso α e β $\Rightarrow \alpha\|X\| \le \|X\|' \le \beta\|X\|$
   - c scelgo $X = A^k$
   - d Uso carabinieri
2. Scelgo una norma speciale t.c. $\lim = \rho(A)$
   - a $J = S^{-1}AS$ (Jordan)
   - b $\|A\| = \|J\|_\infty \Rightarrow \|A^k\| = \|J^k\|_\infty$

     b1 Se il blocco relativo a λ ($|\lambda| = \rho(A)$) ha dim 1 $\Rightarrow \|\hat{J}^k\|_\infty = |\lambda^k|$ ($\hat{J}^k$ = blocco relativo a λ)

     b2 Se il blocco ha dim > 1 $\Rightarrow$ applico b. Newton $\Rightarrow \|\hat{J}^k\|_\infty = \sum_{i=0}^{m-1} |\lambda|^{k-i} \binom{k}{i}$

     prendo la radice $\sqrt[k]{\ }$ e passo al lim. $\Rightarrow |\lambda| = \lim_{k\to\infty} \left(\|\hat{J}^k\|_\infty\right)^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$

Corollario

$\|(I - A)^{-1}\| \le \dfrac{1}{1 - \|A\|}$ se $\|A\| < 1$ $|\lambda| < 1 \Rightarrow I - A$ invert

Numero di condizionamento

Obiettivo: Se introduco una perturbazione nel vettore dei termini noti o nelle entrate di A quanto si ripercuote (ampli.) nella sol.? $Ax=b$

(1) $\delta_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\delta_b \in \mathbb{C}^n$ $\overset{\text{se } b, A \neq 0}{\Longrightarrow}$ $\varepsilon_b = \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|}$ e $\varepsilon_A = \frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{(A+\delta_A)(x+\delta_x) = b+\delta_b}_{\text{siste ma perturbato}}$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_x = \frac{\|\delta_x\|}{\|x\|}$

(2) Se $\delta_A = 0$ e uso $Ax=b$ $\Rightarrow A\delta_x = \delta_b$ $\Rightarrow$ $\frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|}$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_x \leq \underbrace{\|A\|\|A^{-1}\|}_{\substack{\text{numero di condizionamento} \\ \mu(A)}} \varepsilon_b$

det A $\neq 0$ — $\delta_x = A^{-1}\delta_b$

p-norme — $\|\delta_x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta_b\|$

$Ax=b$ — $\|b\| \leq \|A\|\|x\|$

Teorema 7

Se $\det A \neq 0$ e $\|A^{-1}\|\|\delta_A\| < 1 \Rightarrow \det(A+\delta_A) \neq 0$ e $\varepsilon_x \leq \frac{\|A\|\|A^{-1}\|}{1-\varepsilon_A\|A\|\|A^{-1}\|}(\varepsilon_b + \varepsilon_A)$

Osservazione

- A herm. def. pos. $\Rightarrow \mu_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$
- A herm. non def pos $\Rightarrow \mu_2(A) = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$
- A normale $\Rightarrow \overbrace{D = Q^H A Q}^{\text{Schur}} = \mu_2(A) = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$