INTERPOLAZIONE

mercoledì 28 dicembre 2022 13:02

Introduzione

Obiettivo $\mapsto$ approssimare il valore che $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ assume in un p.to $\xi \in [a,b]$ cioè $f(\xi)$

Interpolazione lineare

Siano $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ f. assegnate definite su $[a,b]$ a valori in $\mathbb{R}$ lin. indip.

Siano (x_i, y_i) per $i=0,\dots,m$ dei valori assegnati in modo che $x_i \in [a,b]$ e $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$

Il problema dell'interpolazione lineare consiste nel deter. dei coeff. $a_i \in \mathbb{R}$ t.c.

$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$ soddisfi $f(x_i) = y_i$ condizioni di interpolazione

x_i = nodi dell'interpolazione

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

$\varphi_i(x) = x^i$ su base dei monomi

La condizione di interpolazione diventa $\mapsto \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x_i) a_j = y_j$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{V_n = \text{mat. Vandermonde}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Teorema 1

$$\det V_n = \prod_{0 \le j \le i \le n} (x_i - x_j)$$

idea dim

1 caso $x_i = x_j$ per $i \neq j$ $\Rightarrow \det V_n = 0$ (2 righe uguali)

$\prod = 0$, ha un fattore 0

2 caso $x_i \neq x_j$ per ind. su n

P.B $n=1$ $\det V_1 = x_1 - x_0$

P. I
- Considero $V_n(\lambda) = V_n$ tranne che in R_n sostit. $(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n)$
- Calcolo $\det V_n(\lambda)$ con Laplace rispetto a R_n

$1 \cdot \det(A_1) + \lambda \det(A_2) + \dots + \lambda^n \det(V_{n-1})$

$\det(V_{n-1}) \cdot \underbrace{\left(\frac{\lambda^n}{1} + \dots + \frac{\det(A_1)}{\det(V_{n-1})} \right)}_{p(\lambda)}$

- $\det V_n(\lambda) = \det V_{n-1}\, p(\lambda)$
- Poiché $\det(V_n(x_i)) = 0$ ($V_n(\lambda)$ ha 2 righe uguali) $\Rightarrow p(x_i) = 0$ $\forall i = 0, \dots, n-1$
- $\Rightarrow p(x_n) = \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) \Rightarrow \det V_n = \det(V_n(x_n)) = \det(V_{n-1}) p(x_n)$

$$\det(V_{n-1}) = \prod_{0 \le j \le i \le n-1} (x_i - x_j) \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)$$

$p(x)$ = pol. di interpol.

Costo $\frac{2}{3} n^3$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE NELLA BASE DI LAGRANGE

Consideriamo una base di polinomi diversa da quella dei monomi. Definiamo allora

$$L_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} (x - x_j) / \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} (x_i - x_j), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

base dei pol. di Lagrange

$L_i(x_i) = 1$ e $L_i(x_j) = 0$ se $i \neq j$

pol. di Lagrange

$\varphi_i(x) = l_i(x)$ => la cond. di interp ha $M = I$ e $p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$

L'espressione (5) permette di calcolare il valore di $p(x)$ in un punto in modo efficiente. Infatti vale

$$p(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i/\theta_i}{x - x_i}, \quad \theta_i = \prod_{j=0\, j\neq i}^{n} (x_i - x_j). \tag{6}$$

costo $O(n^2)$

ma add un p.to costa $O(n)$

RESTO DELL'INTERPOLAZIONE

Se f è regolare => $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$

$p_n(x)$ = pol. di interp. di $f(x)$ rel. ai nodi $x_0 < \dots < x_n$

Teorema 2 *Sia $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ e $p(x)$ il polinomio di interpolazione di $f(x)$ relativo ai nodi $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Per ogni $x \in [a, b]$ esiste $\xi \in (a, b)$ tale che*

$$r_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Teorema 3 *Se la funzione $f(x)[a, b] \to \mathbb{R}$ è la restrizione di una funzione analitica definita sull'insieme $\Omega \subset \mathbb{C}$ tale che*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \quad \exists x \in [a, b], |z - x| \leq b - a\}$$

allora per ogni successione di nodi $x_i^{(n)}$ il polinomio di interpolazione $p_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$.

Teorema 4 *Se la funzione $f(x)$ è continua sull'intervallo $[a, b]$, allora esiste una scelta della successione di nodi per cui $p_n(x)$ converge uniformemente ad $f(x)$.*