SUPERFICI

Superfici di rotazione: Data una curva L giacente sul piano $x0z$ di equazione $f(x,z)=0$, l'equazione della superficie ottenuta ruotando L attorno all'asse z si ottiene sostituendo x con $\sqrt{x^2+y^2}$. Analogamente negli altri casi.

Sfere ed ellissoidi

Sfera: La sfera di centro (x_0, y_0, z_0) e raggio r ha

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

Ellissoide: Un ellissoide ha

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

dove a, b, c individuano la lunghezza dei semiassi lungo gli assi x, y, z.
Se $a=b$ allora le sezioni parallele al piano $x0y$ sono circonferenze. Tale ellissoide si ottiene ruotando l'ellisse del piano $x0z$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

attorno all'asse z.
Se $a=b=c=r$ l'ellissoide si riduce alla sfera di centro l'origine e raggio r, di

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Iperboloidi

Iperboloide a una falda: Se orientato lungo l'asse z ha

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Le sezioni parallele al piano $x0y$ sono ellissi, quelle parallele ai piani $x0z$ e $y0z$ sono iperboli.
Se $a=b$ allora le sezioni parallele al piano $x0y$ sono circonferenze. Tale iperboloide si ottiene ruotando l'iperbole del piano $x0z$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

attorno all'asse z. Le sezioni parallele al piano $x0y$ sono circonferenze.

Iperboloide a due falde: Se orientato lungo l'asse z ha

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Le sezioni parallele al piano $x0y$ ($|z|\geq c$) sono ellissi, quelle parallele ai piani $x0z$ e $y0z$ sono iperboli.
Se $a=b$ allora le sezioni parallele al piano $x0y$ sono circonferenze. Tale iperboloide si ottiene ruotando l'iperbole del piano $x0z$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

attorno all'asse z.

Paraboloidi

Paraboloide ellittico: Se la retta $0z$ è il suo asse, allora ha

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Se $a = b$, esso è un paraboloide di rotazione, ottenuto ruotando la parabola $z = \frac{x^2}{a^2}$ del piano $x0z$ attorno all'asse z.

Paraboloide iperbolico (sella): Ha

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

La sezione col piano $x0y$ è la coppia di rette

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Superfici coniche

Superficie conica: si chiama così ogni superficie generata dal moto di una retta (*generatrice*) che in ogni posizione passa per un punto fisso detto *vertice*. Ogni curva che interseca la generatrice in qualunque sua posizione si chiama *direttrice*.

Cono del secondo ordine: Se il cono è orientato lungo l'asse z e ha vertice in (x_0, y_0, z_0) esso ha

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 0.$$

Se orientato lungo l'asse z e ha vertice nell'origine, allora ha

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{0.1}$$

La sua sezione col piano $x0z$ è data dalle rette $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$ e $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$.
La sua sezione col piano $y0z$ è data dalle rette $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ e $\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$.

Cono circolare retto: Se in (0.1) è $a = b$, allora si ha un cono a due falde circolare retto di vertice l'origine di

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad z^2 = m^2(x^2 + y^2),$$

con $m^2 = \frac{c^2}{a^2}$.
Esso si ottiene prendendo una retta nel piano $x0z$ di equazione $z = mx$, $m = \frac{c}{a}$, e ruotandola attorno all'asse z.

Superfici cilindriche

Superfici cilindriche con generatrici parallele a un asse: Ogni equazione che non contiene la coordinata z e che sul piano $x0y$ individua una curva L, rappresenta nello spazio una superficie cilindrica la cui generatrice è parallela all'asse z e di direttrice L. Analogamente negli altri casi.

Cilindro ellittico: Ha per

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cilindro iperbolico: Ha per

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cilindro parabolico: Ha per

$$\text{equazione cartesiana:} \qquad y^2 = ax.$$