# INTRODUZIONE

sabato 11 giugno 2022 14:52

IN QUESTA SEZIONE HO AGGIUNTO SOLO LE DEFINIZIONE DI BASE DI TOPOLOGIA E GLI ARGOMENTI DELLA PARTE INIZIALE DEL CORSO CHE IN GENERE VENGONO CHIESTI ALL'ESAME

## $\exists!$ $\mathbb{R}$ tramite le sezioni di Dedekind

$\boxed{\exists}$

idea $\longmapsto$ $\mathbb{R}$ è estensione di $\mathbb{Q}$

dimostrazione

- Ogni numero razionale divide $\mathbb{Q}$ in 2 insiemi:
  1. $A_r = \{ a \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } a < r \ \forall r \in \mathbb{Q} \}$
  2. $B_r = \{ b \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } b \geq r \ \forall r \in \mathbb{Q} \}$

- La coppia $(A_r, B_r)$ è una sezione di Dedekind

  In generale una sezione è una coppia $(A,B)$ di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{Q}$ tali che
  1. $A \cap B = \emptyset$
  2. $A \cup B = \mathbb{Q}$
  3. $\forall a \in A, \ \forall b \in B \quad a < b$

- In questo modo però ogni razionale determina due sezioni: 1. $(A,B)$ dove $\begin{cases} A = \{ a \in A \text{ t.c. } a < r \} \\ B = \{ b \in B \text{ t.c. } b \geq r \} \end{cases}$

  2. $(A', B')$ dove $\begin{cases} A' = \{ a \in A' \text{ t.c. } a \leq r \} \\ B' = \{ b \in B' \text{ t.c. } b > r \} \end{cases}$

- Per evitare ambiguità definiamo una sezione nel modo seguente:

  Una sezione è un sottoinsieme $A$ di $\mathbb{Q}$ t.c.
  1. $A \neq \emptyset$ e $A \neq \mathbb{Q}$
  2. $\forall a \in A$, se $a' < a \Rightarrow a' \in A$
  3. $A$ non ha max. cioè $\nexists \ m \in A$ t.c. $m > a \ \forall a \in A$

In questo modo ogni numero razionale viene associato a un'unica sezione

- Definiamo $\mathbb{R}$ come l'insieme delle sezioni
- esempio $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ e' definito dalla sezione

$A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 0 \text{ oppure } a^2 < 2\}$

Di conseguenza in $\mathbb{R}$ c'e' una copia isomorfa a $\mathbb{Q}$

$\{X_q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ dove $X_q \equiv$ segmento iniziale $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}$

- come passano le proprieta' da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$

relazione d'ordine totale

L'insieme delle sezioni ha una relazione d'ordine data dall'inclusione che gli fornisce la struttura di insieme totalmente ordinato

$(A, B) \leq (A', B') \iff A \subseteq A'$

Questo ordinamento ci permette di avere l'assioma di continuita' / completezza dato dall'assioma di Dedekind

Assioma di Dedekind $\mapsto$ cioè ogni insieme non vuoto e limitato ha un sup.

dim. assioma

Chiamo B l'insieme dei maggioranti di A

$B \neq \emptyset$ perche' A è limitato per hp.

$\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ $a \leq b$ per def. di maggiorante

Per ass. di continuita'/elt. separatore $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c.

1. $a \leq c$ $\forall a \in A$ $\rightsquigarrow$ c è un maggiorante
2. $c \leq b$ $\forall b \in B$ $\rightsquigarrow$ c e' il piu' piccolo dei maggioranti

$\Rightarrow$ c e' il sup.

$\mapsto$

Questa proprietà equivale a richiedere che $\mathbb{R}$ sia uno spazio metrico completo.

addizione $\mapsto$ $A, B$ sezioni $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$

prodotto $\mapsto$ $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, a > 0, b \in B, b > 0\}$

si estende ai num. negativi usando la regola del segno

- conseguenze

$(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo commutativo
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è un campo archimedeo completo

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ t.c. $0 < x < y$ $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $nx > y$
se fosse falso $\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ avrebbero un maggiorante in $\mathbb{R}$ $(n \leq y/x)$

unicità

Supp. per ass che $\exists$ altri reali $(\mathbb{R}', +', \cdot', \leq')$

Dentro $\mathbb{R}'$ c'è $\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ c'è 0 el. neutro di $+'$
1 el. neutro di $\cdot'$

Sommo a un elt. sempre 1 $a+1$, $a+1+1$, … ottengo numeri diversi

Se $\mathbb{N}$ è dentro $\mathbb{R}$ allora c'è $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ c'è $\mathbb{Q}$

Per propr. dell'elt. separatore ogni $q \in \mathbb{Q}$ si identifica con le sue sezioni

Deve avere tutte le sezioni perché se ne manca una non vale quanto detto prima

Se avesse una sezione in più allora perderei l'ordine totale cioè se $\exists\, x \in \mathbb{R}' \setminus \mathbb{R} \Rightarrow$

$x = S = (A, B) = \{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\} \in \mathbb{R}$ ↯

Quindi $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$

## TEOREMA DI CANTOR

$\forall$ insieme $A$ $\quad |A| < +\infty$ o $|A| = +\infty \Rightarrow |P(A)| > |A|$

### dimostrazione

caso $|A| < +\infty$

Se $|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^{|A|} = 2^n \Rightarrow 2^n > n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

caso $|A| = +\infty$

Prendo due insiemi $X$ e $S$ t.c. $|X| < |S|$

$|X| < |S| \Leftrightarrow \forall f : f : X \to S$ non e' surgettiva

Dunque basta far vedere che $\nexists\, f$ t.c.

$f : A \to P(A)$ t.c. $f$ suriettiva

Per ass. supp che $f$ sia suriettiva

Prendo $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\} \in P(A)$

Per costruzione $\exists\, \bar{a} \in A$ t.c. $f(\bar{a}) = B$

Ora ho due casi $\bar{a} \in B \vee \bar{a} \notin B$

Se $\bar{a} \in f(\bar{a}) \Leftrightarrow \bar{a} \in B \Leftrightarrow \bar{a} \notin f(\bar{a})$ ↯

Quindi $B \notin Im(f) \Rightarrow f$ non è suriettiva

Non resta che trovare $g$ inj $\quad g : A \to P(A)$

$g(x) = \{x\} \qquad x \mapsto \{x\}$

DEFINIZIONI IMPORTANTI

$A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$

- A è limitato superiormente se $\exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq m$ $\forall a \in A$

Tutti gli m si chiamano maggioranti

- A è limitato inferiormente se $\exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $m \leq a$ $\forall a \in A$

Tutti gli m si chiamano minoranti.

- $M = \max(A)$ se $M \geq a$ $\forall a \in A$ → M è maggiorante
  $M \in A$

- $m = \min(A)$ se $m \leq a$ $\forall a \in A$ → m è minorante
  $m \in A$

- $\sup(A) =$
  - $\to = +\infty$ 1. se A non è lim. superiormente
    cioè $\forall r \in \mathbb{R}$ $\exists a \in A$ t.c. $a \geq r$
  - $\to = L$ 1. se A è lim. superiormente
    cioè $a \leq L$ $\forall a \in A$
    2. L è il più piccolo dei maggioranti
    cioè $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a \in A$ t.c. $L - \varepsilon \leq a$

- $\inf(A) =$
  - $\to = +\infty$ 1 se A non è lim. inferiormente
    cioè $\forall r \in \mathbb{R}$ $\exists a \in A$ t.c. $a \leq r$
  - $\to = \ell$ 1 se A è lim. inferiormente
    cioè $\ell \leq a$ $\forall a \in A$
    2 $\ell$ è il più grande dei minoranti
    cioè $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a \in A$ t.c. $a \leq \ell + \varepsilon$

# DEFINIZIONI DI TOPOLOGIA

## distanza

$E$ insieme $d: E \times E \to [0, +\infty)$ $d$ è una distanza se:

$d(x,x) = 0$

$d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

$(E,d)$ si chiama spazio metrico

## palla

$B_r(x) \equiv \{ y \in E \mid d(x,y) < r \} \equiv$ palla di centro $x$ e raggio $r$

## intorno

$A \subseteq E$, $x \in A$. Se $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq A \Rightarrow A$ è intorno di $x$

## insiemi aperti e chiusi

- $A \subseteq E$ si dice Aperto se $\forall x \in A$ $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq A$ cioè $A$ è intorno di ogni suo p.to.
- $A$ è chiuso se il suo complementare è aperto

## proprietà

| | |
|---|---|
| $\emptyset, E$ sono aperti | $\emptyset, E$ sono chiusi |
| $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ è aperta | $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ è chiusa |
| $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ è aperta | $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ è chiusa |

## punti

- $x$ è interno ad $A \iff \exists r > 0 \mid B_r(x) \subset A$
- $x$ è esterno ad $A \iff \exists r > 0 \mid B_r(x) \subset A^c$
- $x$ è sulla frontiera di $A \iff x \in A$ e $x \in A^c$
- $x$ è di accumulazione per $A \iff \forall r > 0$ $B_r(x) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$
  cioè $B_r(x) \cap A$ ha $\infty$ ell.
- $x$ è isolato $\iff$ $x$ non è di accumulazione
  $\iff \exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \setminus \{x\} \cap E = \emptyset$
- $x$ è aderente ad $A \iff \forall r > 0$ $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$

## insiemi densi e discreti

- A si dice discreto se tutti i suoi p.ti sono isolati
- A si dice denso $\iff \bar{A} = E$

### notazione

- $\mathring{A} \equiv$ punti interni
- $D(A) \equiv$ punti di accumulazione
- $\delta A \equiv$ frontiera
- $\bar{A} \equiv$ aderenza

### relazioni

**p.ti di accumulazione**

- $x_0 \in E \vee x_0 \notin E$
- $\forall$ intorno
- i punti egli estremi di un intervallo sono di accumulazione

$(a, b) \cup \{c\}$

$[a, b]$ sono di accum.

**p.ti isolati**

- $x_0 \in E$
- $\exists$ intorno
- un intervallo $\not\supset$ p.ti isolati

$[a, b) \cup \{c\}$ c è p.to isolato

**p.ti di frontiera**

- $(a, b)$, $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ $\rightsquigarrow \delta E = \{a, b\}$
- $(-\infty, a)$, $[-\infty, a]$, $(a, +\infty)$ $[a, +\infty)$ $\rightsquigarrow \delta E = \{a\}$
- $x_0 \in E$ o $x_0 \notin E$

p.ti interni

- $(a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $[a, b]$ $\quad \mathring{A} = (a, b)$

- $(-\infty, a)$ , $(-\infty, a]$ $\quad \mathring{A} = (-\infty, a)$
- $(a, +\infty)$ , $[a, +\infty)$ $\quad \mathring{A} = (a, +\infty)$
- $x_0$ per essere interno deve $\in$ all'insieme

p.to esterno $\notin$ Insieme.

p.ti di aderenza

- $x_0$ p.to di accum $\Rightarrow$ $x_0$ p.to di aderenza

$\not\Leftarrow$

- $E = \mathring{A} \cup \delta A \cup \mathring{(A^C)}$
- $\mathring{A} \subseteq A$
- $\overline{A} = A \cup D(A)$
- $\overline{A} = A \cup \delta A$
- $A = \mathring{A} \cup \delta A$

Teorema di Bolzano - Weierstrass

$E \subseteq \mathbb{R}^n$

$E \neq \emptyset$

$E$ limitato

$|E| = \infty$

Allora $E$ ha p.ti di acumulazione

dim $n=1$

Costruisco iterativamente intervalli $[a_j, b_j] \subseteq [a_{j-1}, b_{j-1}]$

dove $|b_j - a_j| = \frac{b-a}{2^j}$ con $a_0 = a$ $b_0 = b$

t.c. $E \cap [a_j, b_j]$ ha $\# \infty$

Considero $\bigcap_j [a_j, b_j] = \bar{x} \in \mathbb{R}$

$\bar{x} = \sup_j a_j = \inf_j b_j$

Si ha che $\bar{x}$ è p.to di accumulazione per $E$.

Infatti $\forall \varepsilon > 0$ $[\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon] \supseteq [a_j, b_j]$ per tutti i

$j$ abb. grandi. cioè definitivamente

$\exists j_0$ t.c. $[a_j, b_j] \subseteq [\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon]$ $\forall j > j_0$

Dunque per $n=1$ $\Rightarrow E \subseteq \mathbb{R}' = \mathbb{R}$

L'idea è che dato che $E$ è limitato e' contenuto in un certo intervallo $E \subseteq [a, b]$

Divido l'intervallo a metà e guardo la metà che ha ancora $\infty$ elt. Itero

P.I $n > 1$

caso $n=2$ $E \subseteq Q_0$ ↱ cubo

Divido $Q_0$ in $2^n$ cubi di lato metà e scelgo $Q_1$ t.c. $E \cap Q_1$ ha $\# \infty$

$\Rightarrow Q_j \subseteq Q_{j-1}$ $L_j = \frac{L_0}{2^j}$ = lungh. spigolo di $Q_j$

etc.

## Osservazione

$E$ è chiuso $\iff D(E) \subseteq E$

$\iff \partial E \subseteq E$

Se $x_0$ p.to di acc $\notin E \Rightarrow E$ non è chiuso cioè $E$ è aperto

Un sp. aperto $\not\ni$ la frontiera

## TOPOLOGIA & ORDINE in $\mathbb{R}$

**Prop**: $A \subseteq \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset)$, $\sigma \doteq \sup A < +\infty$

$\sigma \notin A \Rightarrow \sigma$ è punto di accumulazione per $A$

Vale enunciato analogo per l'inf$A$

**Dim**: $\sigma = \sup A \overset{def}{\iff} \begin{cases} \sigma \geq a \quad \forall a \in A & (i) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_0 \in A : \quad \sigma - \varepsilon < a_0 & (ii) \end{cases}$

se $\varepsilon > 0$ fissato $\exists a \in A : \sigma - \varepsilon \underset{(ii)}{<} a \underset{(i)}{\leq} \sigma$

$\sigma \notin A \Rightarrow \boxed{\exists a \in A : \sigma - \varepsilon < a < \sigma}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad A \cap B_\varepsilon(\sigma) \setminus \{\sigma\} \neq \emptyset$