ESERCIZI SULLE SERIE NUMERICHE

a cura di Michele Scaglia

RICHIAMI TEORICI

Richiamiamo brevemente i principali risultati riguardanti le serie numeriche.

Teorema (Condizione Necessaria per la Convergenza)

Sia $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie numerica.

Se $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tale teorema porta alle seguenti conclusioni:

- Se $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0}$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è sicuramente **non convergente**.
  L'affermazione precedente indica come la **condizione** $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$ sia **necessaria** ai fini della convergenza.

- Tuttavia, se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ può convergere come può non convergere: cioè la condizione $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$ **non è sufficiente** per concludere la convergenza della serie.
  Servono opportuni criteri di convergenza per stabilirne il carattere.

L'esempio tipico che mostra come la condizione $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ non sia sufficiente a garantire la convergenza della serie è dato dalla serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Tale serie è divergente pur verificando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

SERIE A TERMINI POSITIVI

Si chiamano *serie a termini positivi* quelle serie numeriche $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ in cui $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq \overline{n}$, $\overline{n} \in \mathbb{N}$.

Si tratta quindi di serie numeriche i cui addendi, da un certo indice $\overline{n}$ in poi, assumono sempre valore positivo o nullo.

Si può dimostrare che le serie a termini positivi possono essere solamente *convergenti* o *positivamente divergenti* (avere cioè per somma $+\infty$). Non possono essere indeterminate.

Un'ultima precisazione: vi sono anche le serie a termini negativo: lo studio del loro carattere è lo stesso di quello delle serie a termini positivi. Questo perché, raccogliendo il segno meno nel termine generale a_n della serie e portandolo fuori dalla sommatoria sfruttando la *linearità*, si ottiene l'opposta di una serie a termini positivi. Pertanto la convergenza o divergenza è ricondotta alla convergenza o divergenza della corrispondente serie a termini positivi (chiaramente, se la serie a termini positivi converge, la corrispondente serie a termini negativi converge ma ad un valore numerico opposto; stesso discorso per la divergenza, nel qual caso avremo la divergenza della serie a $-\infty$).
Ad esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

diverge positivamente (essendo la serie armonica), ne segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$$

diverge negativamente.

Il problema nello studio del carattere è invece rappresentato dalle serie di segno variabile, nelle quali il segno degli addendi non è costante e può anche variare senza una particolare regola. Ma su di queste torneremo più avanti.

Per le serie a termini positivi valgono dei criteri che consentono di stabilirne il carattere (convergenza o positiva divergenza).

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi. Supponiamo che si abbia

$$a_n \leq b_n,$$

per ogni $n \geq \overline{n}$, con $\overline{n} \in \mathbb{N}$.
Allora valgono i seguenti fatti:

- Se $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge allora anche $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.
- Se $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge allora anche $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge.

Se, invece,
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$
diverge, nulla si può dire del carattere della serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, in quanto, avendo gli addendi più piccoli della serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$, potrebbe essere convergente ma anche divergente.

Analogamente, se
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$
converge, non si può dir nulla circa il carattere di
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n,$$
in quanto i suoi addendi, essendo più grandi di quelli della prima serie, potrebbero comportare la divergenza della seconda serie, come pure potrebbero comportarne la convergenza.

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Si tratta del criterio più importante nell'ambito delle serie a termini positivi. Tale criterio consente di ricondurre lo studio del carattere di una serie dal termine generale a_n piuttosto complesso allo studio di una serie dal termine generale più semplice o quantomeno riconducibile a qualche serie notevole della quale si conosca il carattere.

L'enunciato del criterio è il seguente.

Siano $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi.
Consideriamo, se esiste, il limite
$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

1. Se $\ell \in]0, \infty[$, allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge, cioè le due serie hanno esattamente lo stesso carattere.
2. Se $\ell = 0$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.

3. Se $\ell = +\infty$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge, allora anche $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge.

Il punto più importante del precedente teorema, anche al fine degli esercizi, è il punto 1. Come anticipato in precedenza, esso dice che se $\ell \neq 0$ e $\ell \neq \infty$ allora le due serie di termini generali a_n e b_n hanno esattamente lo stesso carattere (la convergenza/divergenza dell'una comporta la convergenza/divergenza dell'altra, e viceversa).

Assegnata la serie di termine generale a_n, si cerca quindi di individuare un'opportuna successione b_n più semplice a_n che verifichi

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in]0, \infty[.$$

In tal modo si studia il carattere di $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$, che è lo stesso di $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ (in forza del criterio).

Ma come introdurre la successione b_n che renda quel limite diverso da 0 e da ∞?

Le regole che ora daremo consentono di introdurre una successione b_n che, in realtà, rende il limite $\ell = 1$ (condizione non strettamente richiesta dal teorema, il quale si limita a richiedere $\ell \neq 0, +\infty$). Pertanto, con tali regole, si individuerà una successione b_n tale che

$$a_n \;\sim\; b_n \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Si procede come segue. Si considerano i vari **fattori** che compaiono nel termine generale a_n della serie assegnata:

- se un **fattore** è **illimitato**, cioè tende a $+\infty$, nell'introdurre b_n lo si sostituisce con l'addendo corrispondente all' **infinito di ordine superiore**;
- se un fattore è **infinitesimo**, cioè ha limite 0, lo si sostituisce con un opportuno **infinitesimo equivalente** dedotto dai **limiti notevoli** o, nel caso di cancellazioni, dallo **sviluppo di Taylor** opportunamente arrestato all'ordine necessario.
- Se, infine un **fattore** tende ad un **valore finito**, lo si **sostituisce con tale valore**.

Mostriamo un esempio.
Data la serie numerica a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3 + \log n - \arctan n) \cdot \sin\left(\dfrac{2}{n^4}\right)}{e^{2/n} \cdot (\log n)^2}.$$

cerchiamo una $b_n \;\sim\; a_n$ per $n \to +\infty$ che si possa sostiture, nello studio del carattere, alla serie di

termine generale a_n. Seguiamo le regole che abbiamo scritto appena sopra.
Si ha

$$a_n = \frac{(n^3 + \log n - \arctan n) \cdot \sin\left(\dfrac{2}{n^4}\right)}{e^{2/n} \cdot (\log n)^2}.$$

Consideriamo il **primo fattore**: $(n^3 + \log n - \arctan n)$.
Risulta

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^3 + \log n - \arctan n\right) = +\infty.$$

In questo caso dobbiamo individuare l'infinito di ordine superiore. Si tratta, a causa della gerarchia degli infiniti, del fattore n^3.

Possiamo quindi dire che

$$\left(n^3 + \log n - \arctan n\right) \;\sim\; n^3 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Il **secondo fattore**: $\sin\left(\dfrac{2}{n^4}\right)$.
Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{2}{n^4}\right) = 0,$$

il che significa che il secondo fattore è ***infinitesimo***.
Dobbiamo quindi individuare un infinitesimo equivalente di tipo polinomiale.
Poiché vale

$$\sin x \;\sim\; x \quad \text{per } x \to 0,$$

posto $x = \dfrac{2}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, possiamo concludere che

$$\sin\left(\frac{2}{n^4}\right) \;\sim\; \left(\frac{2}{n^4}\right) \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Il **terzo fattore**: $e^{1/n}$.
Si ha

$$\lim_{n\to\infty} e^{1/n} = e^0 = 1 \in]0; \infty[.$$

Tale fattore lo sostituiremo in b_n con il valore costante 1.

Quarto fattore: $(\log n)^2$.
Questo fattore si presenta già in una forma favorevole in quanto si tratta di un fattore che tende a $+\infty$ scritto già in forma semplice ($\log n$ è infatti una successione notevole elementare che compare nel termine generale della serie armonica generalizzata col logaritmo, della quale si conosce il carattere).

La nuova successione

$$b_n = \frac{n^3 \cdot \left(\dfrac{2}{n^4}\right)}{1 \cdot (\log n)^2}$$

è quindi tale che

$$a_n \ \sim \ b_n \ \text{ per } n \to +\infty,$$

cioè

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 = \ell \neq 0, +\infty,$$

come richiesto dal criterio del confronto asintoctico.
Pertanto potremo studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 \cdot \left(\dfrac{2}{n^4}\right)}{(\log n)^2} = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log n)^2},$$

facilmente trattabile in quanto riconducibile alla serie armonica generalizzata con il logaritmo.

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi.

Consideriamo, se esiste, il limite

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Valgono i seguenti fatti.

1. Se $\ell < 1$ allora $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.
2. Se $\ell > 1$, allora $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge.
3. Se $\ell = 1$, allora il criterio non consente di concludere nulla circa il carattere di $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Nel caso in cui si verifichi $\ell = 1$, bisogna stabilire il carattere per altra via. Può essere utile, in tali casi, controllare se sia soddisfatta o meno la *condizione necessaria per la convergenza*: se dovesse essere $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, si concluderebbe immediatamente che la serie diverge.

CRITERIO DELLA RADICE

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi.

Consideriamo, se esiste, il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Valgono i seguenti fatti.

1. Se $\ell < 1$, allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.
2. Se $\ell > 1$, allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge.
3. Se $\ell = 1$, allora il criterio non consente di concludere nulla circa il carattere di $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Anche per questo criterio, nel caso in cui $\ell = 1$, valgono le stesse considerazioni fatte per il criterio del rapporto.

SERIE DI SEGNO VARIABILE

Sono dette serie *di segno variabile* quelle serie numeriche il cui termine generale a_n non assume segno costante.
Ad esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{n^4+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^2+1}$$

sono delle serie di segno variabile (in particolare, la seconda è di *segno alterno*, in quanto i suoi addendi si alternano: uno positivo, uno negativo, uno positivo, ...).
Per lo studio di tali serie esistono fondamentalmente due criteri. Quello della convergenza assoluta, che può essere invocato in presenza di una qualsivoglia serie di segno variabile, e il criterio di Leibniz, applicabile solo alle serie di segno alterno.

CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie di segno variabile.
Se la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$$

converge (ovvero *la serie converge assolutamente*), allora converge anche la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.
Se, invece,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$$

diverge, non si può concludere nulla circa il carattere della serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Il teorema afferma quindi che **la convergenza assoluta implica la convergenza** della serie assegnata.
La mancanza di convergenza assoluta non autorizza a trarre alcuna informazione sul carattere della serie.

Il criterio che segue è una condizione sufficiente di convergenza che vale solo per le serie di **segno alterno**, ossia le serie in cui a_n è del tipo $(-1)^n b_n$ con $b_n \geq 0$, vale a dire le serie della forma

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n, \quad \text{con} \quad b_n \geq 0.$$

CRITERIO DI LEIBNIZ

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n$ una serie di segno alterno.

Supponiamo che

- $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$ e
- $\{b_n\}$ sia una successione monotona decrescente, ossia tale che $b_{n+1} \leq b_n$ per ogni $n \geq \overline{n}$, $\overline{n} \in \mathbb{N}$.

Sotto tali condizioni la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n$$

è convergente.

Nello studio del carattere di una serie di segno variabile, per prima cosa si studia la *convergenza assoluta*, la quale, come detto in precedenza, implica la convergenza.
Nel caso di mancata convergenza assoluta, bisogna cercare di stabilire il carattere per altra via, senza una regola ben precisa. Anche in questi acsi può essere utile controllare se valga o meno la condizione necessaria di convergenza, in assenza della quale si concluderebbe immediatamente la non convergenza della serie.

Tuttavia, se la serie è di *segno alterno*, si può allora ricorrere al Criterio di Leibniz.

Una serie che non converge assolutamente (cioè la cui serie dei valori assoluti non converge) ma che ugualmente converge viene detta serie **semplicemente convergente**.
Ne è un esempio tipico la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n}.$$

La serie dei valori assoluti diverge (serie armonica) ma il criterio di Leibniz consente di affermare che la serie risulta essere convergente.

ALCUNE SERIE NOTEVOLI

SERIE GEOMETRICA

Sia $q \in \mathbb{R}$. Allora la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

ha il seguente comportamento:

- CONVERGE se $|q| < 1$ e ha per somma $S = \dfrac{1}{1-q}$,
- DIVERGE a $+\infty$ se $q \geq 1$,
- È INDETERMINATA se $q \leq -1$.

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- CONVERGE per $\alpha > 1$;
- DIVERGE POSITIVAMENTE per $\alpha \leq 1$.

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA CON IL LOGARITMO

La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- CONVERGE
  - per $\alpha > 1$ e per ogni β
  - per $\alpha = 1$ e per $\beta > 1$
- DIVERGE POSITIVAMENTE
  - per $\alpha < 1$ e per ogni β,
  - per $\alpha = 1$ e per $\beta \leq 1$.

VARIANTE DELLA SERIE ARMONICA GENERALIZZATA CON IL LOGARITMO

La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e^{\gamma n} \cdot n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

- se $\gamma > 0$ (cioè l'esponenziale rimane a denominatore) la serie CONVERGE per ogni α e per ogni β
- se $\gamma < 0$ (cioè l'esponenziale compare a numeratore) la serie DIVERGE per ogni α e per ogni β
- se $\gamma = 0$ otteniamo la serie armonica generalizzata col logaritmo e di cui si è già discusso il carattere.

ESERCIZI SVOLTI

1) Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{e^n} \left[\log \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)^{e^n} \right]^n .$$

Svolgimento.

La serie è a termini positivi.
Vista la struttura del termine generale, conviene applicare il criterio della radice.

Dobbiamo calcolare il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{e^n} \left[\log \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)^{e^n} \right]^n} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n^5}{e^n} \left[\log \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)^{e^n} \right]^n \right\}^{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/n}}{e} \log \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)^{e^n} .$$

Anzitutto si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^{5/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\log n^{5/n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{5 \log n}{n}} = e^0 = 1.$$

Inoltre, ricordando il limite notevole

$$\lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e,$$

risulta, per il teorema di sostituzione, posto $t = e^n$,

$$\lim_{n\to\infty} \log \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)^{e^n} = \log \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)^{e^n} = \log e = 1.$$

Tornando al limite sotto studio si ottiene allora

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/n}}{e} \log \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)^{e^n} = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e} < 1.$$

Quindi, per il criterio della radice, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

risulta convergente.

2) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^3(2n)!}.$$

Svolgimento.

La serie è a termini positivi.
I vari fattori che costituiscono il termine generale a_n sono già in forma semplice. Vista la presenza di fattoriali, conviene applicare il criterio del rapporto.

Dobbiamo calcolare, se esiste, il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Risulta

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(n+1)^3[2(n+1)]!} \cdot \frac{n^3(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{[n!(n+1)]^2}{(n+1)^3(2n+2)!} \cdot \frac{n^3(2n)!}{(n!)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(n+1)^2}{(n+1)^3(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{n^3(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} \cdot \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Quindi, per il criterio del rapporto, la serie assegnata converge.

3) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \sin n}{2n^5 + \log n + n}.$$

Svolgimento.

Cerchiamo di stabilire se la serie è a termini positivi o negativi.
Consideriamo pertanto il termine generale

$$a_n = \frac{n^3 + \sin n}{2n^5 + \log n + n}.$$

Poiché $-1 \leq \sin n \leq 1$ ed essendo $n \geq 1$, si ha banalmente

$$n^3 + \sin n > 0 \quad \forall n \geq 1.$$

Ancor più semplice è osservare che

$$2n^5 + \log n + n > 0 \quad \forall n \geq 1.$$

Quindi la serie è a termini positivi.

La struttura piuttosto elaborata del termine generale a_n suggerisce di fare riferimento al criterio del confronto asintotico, di ricondurre cioè lo studio della serie assegnata allo studio di una nuova serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

tale che

$$b_n \;\sim\; a_n \;\text{ per } n \to +\infty.$$

Per introdurre una tale successione b_n, seguiamo i suggerimenti dati nei richiami teorici: consideriamo cioè ciascun fattore di a_n e ne stabiliamo il limite.
Il primo fattore,

$$n^3 + \sin n,$$

consta di due addendi, n^3, che tende a $+\infty$ e $\sin n$, che non ammette limite per $n \to \infty$ ma è *limitato* tra -1 e 1. Tuttavia, per applicazione del Teorema del Confronto per le successioni, la somma dei due addendi tende all'infinito (fatto osservato quando si sono studiati i limiti di successione).
Pertanto risulta

$$n^3 + \sin n \to +\infty \;\text{ per } n \to +\infty.$$

Sostituiremo quindi tale fattore con l'addendo di infinito di ordine superiore, vale a dire n^3 che, d'altra parte, è anche l'unico addendo che tende a $+\infty$.
Cioè

$$n^3 + \sin n \;\sim\; n^3 \;\text{ per } n \to +\infty$$

Consideriamo il secondo fattore:

$$2n^5 + \log n + n.$$

Ogni addendo di questo fattore tende a $+\infty$, quindi l'intero fattore tende a $+\infty$.
Poiché l'infinito di ordine superiore è $2n^5$, avremo

$$2n^5 + \log n + n \quad\sim\quad 2n^5 \text{ per } n \to +\infty.$$

Pertanto, la successione b_n adatta al criterio del confronto asintotico è

$$b_n = \frac{n^3}{2n^5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sarà quindi lo stesso della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \sin n}{2n^5 + \log n + n}.$$

Poiché la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge (trattandosi della serie armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$), ne segue, per il criterio del confronto asintotico, che pure la serie di partenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \sin n}{2n^5 + \log n + n}$$

converge.

4) Dopo aver osservato che è convergente, si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{-2n+1}}{3^{n-2}}.$$

Svolgimento.

Il fatto di dover calcolare la somma ci suggerisce che si tratti o di una serie geometrica o di una serie telescopica. Vista la struttura del termine generale (nel quale compaiono potenze del tipo q^n), indirizziamoci verso una serie geometrica.

Applicando le proprietà delle potenze si trova

$$a_n = \frac{2^{-2n+1}}{3^{n-2}} = \frac{2^{-2n} \cdot 2^1}{3^n \cdot 3^{-2}} = \frac{(2^{-2})^n \cdot 2 \cdot 3^2}{3^n} = \frac{18}{(2^2)^n \cdot 3^n} = \frac{18}{(12)^n} = 18 \cdot \frac{1}{(12)^n} = 18 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^n.$$

Pertanto, sfruttando anche la linearità, risulta

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{-2n+1}}{3^{n-2}} = \sum_{n=2}^{\infty} 18 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^n = 18 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^n.$$

Si tratta di una *serie geometrica*, vale a dire una serie del tipo

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n, \quad q \in \mathbb{R}.$$

Nel nostro caso risulta

$$|q| = \left|\frac{1}{12}\right| = \frac{1}{12} < 1,$$

pertanto la serie converge.

Per calcolarne la somma, applichiamo la formula ricordata nei richiami teorici, prestando però attenzione al fatto che in questo caso si comincia a sommare dall'addendo che corrisponde al naturale $n = 2$: dovremo pertanto sottrarre al risultato fornito dalla formula la somma dei due addendi che corrispondono a $n = 0$ e $n = 1$.
Risulta

$$S = 18 \cdot \left[\frac{1}{1-q} - q^0 - q^1\right] = 18 \cdot \left[\frac{1}{1-\frac{1}{12}} - 1 - \frac{1}{12}\right] = 18 \cdot \left[\frac{12}{11} - \frac{13}{12}\right] =$$

$$= 18 \cdot \frac{144 - 143}{11 \cdot 12} = \frac{3}{22}.$$

5) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{\log n}}.$$

Svolgimento.

Si tratta di una serie di *segno alterno*, ossia una serie del tipo $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n b_n$.

In questo caso lo studio della convergenza assoluta non porta ad alcun risultato. Infatti, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{1/2}} = \frac{1}{n^0 (\log n)^{1/2}}$$

diverge, trattandosi della serie armonica generalizzata con il logaritmo in cui $\alpha = 0 < 1$.

Per studiarne il carattere, considerato che la serie è di segno alterno, possiamo applicare il criterio di Leibniz.

Ovviamente si ha $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{\log n}} \geq 0$ per ogni $n \geq 2$.

Dobbiamo controllare se la successione b_n sia infinitesima e decrescente.

Che sia infinitesima è banale. Infatti, a causa del fatto che $\log n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, dal teorema di sostituzione segue che

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} = 0.$$

Resta da controllare che b_n sia decrescente, ossia che

$$b_{n+1} \leq b_n \qquad \forall n \geq 2.$$

Impostando la disequazione si ottiene,

$$\frac{1}{\sqrt{\log(n+1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\log n}},$$

ossia

$$\sqrt{\log(n+1)} \geq \sqrt{\log n}.$$

Elevando al quadrato entrambi i membri e sfruttando la crescenza della funzione $\sqrt{}$ otteniamo

$$\log(n+1) \geq \log n,$$

da cui, per la crescenza della funzione log,

$$n+1 \geq n, \qquad \text{ossia} \qquad 1 \leq 0,$$

che risulta banalmente verificata per ogni $n \geq 2$.

Quindi la successione b_n soddisfa entrambe le ipotesi del criterio di Leibniz.

Ne segue che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n b_n = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{\log n}}$ risulta convergente (ma non assolutamente convergente). Cioè, la serie è *semplicemente convergente*.

6) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n\alpha}}{n!}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento.
Osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi.

Vista la forma del termine generale a_n, conviene ricorrere al criterio del rapporto.

Dobbiamo valutare il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

e discuterne il valore al variare di α.

Risulta

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{(n+1)\alpha}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{n\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n\alpha} \cdot (n+1)^{\alpha}}{n!(n+1)} \cdot \frac{n!}{n^{n\alpha}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n\alpha} \cdot \frac{(n+1)^{\alpha}}{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\right]^{\alpha} \cdot (n+1)^{\alpha-1} = e^{\alpha} \lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1}.$$

Si tratta ora di stabilire, al variare di α, il valore del limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1}.$$

- Se $\alpha - 1 > 0$, ossia se $\alpha > 1$, allora

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} = +\infty.$$

  Di conseguenza risulta

$$\ell = e^{\alpha} \lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} = +\infty > 1,$$

  da cui la divergenza della serie.

- Se $\alpha - 1 = 0$, ossia se $\alpha = 1$, allora

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{0} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

  Pertanto

$$\ell = e^{\alpha} \lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} = e^{1} \cdot 1 = e > 1,$$

  da cui la divergenza della serie.

- Se $\alpha - 1 < 0$, ossia se $\alpha < 1$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} = 0.$$

Quindi risulta

$$\ell = e^{\alpha} \lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} = e^{\alpha} \cdot 0 = 0 < 1,$$

da cui la convergenza della serie.

In conclusione, la serie risulta convergente solo per $\alpha < 1$.

7) Sia E l'insieme deglia $\alpha > 0$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + \log n}{n^{\alpha} \log(n+1)} \right)^{1/2}$$

sia convergente. Determinare l'estremo inferiore di E.

Svolgimento.

Applicando il criterio del confronto asintotico, cerchiamo di ricondurre lo studio della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ allo studio un'opportuna $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tale che

$$b_n \ \sim \ a_n \text{ per } n \to +\infty.$$

Dobbiamo quindi studiare il comportamento di ciascun fattore del termine generale a_n al tendere di n all'infinito.

Osservando il primo fattore, cioè l'intero numeratore, notiamo immediatamente che esso tende all'infinito; in particolare l'infinito di ordine superiore è l'addendo n^2, da cui

$$n^2 + \log n \ \sim \ n^2 \text{ per } n \to +\infty.$$

Nell'introdurre b_n sostituiremo pertanto $(n^2 + \log n)$ con n^2.
Passiamo al denominatore.
Il fattore n^{α} si presenta già in forma favorevole.

Inoltre, per quanto riguarda $\log(n+1)$, fattore infinito (in quanto l'argomento del log tende all'infinito) si ha ovviamente

$$\log(n+1) \ \sim \ \log n \text{ per } n \to +\infty$$

pertanto sostituiremo $\log(n+1)$ con $\log n$.

Se introduciamo quindi la successione

$$b_n = \left(\frac{n^2}{n^\alpha \log n} \right)^{1/2},$$

risulta ovviamente (per come è stata costruita)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in]0; +\infty[.$$

Possiamo quindi invocare il criterio del confronto asintotico e affermare che le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno esattamente lo stesso carattere. In particolare, gli α per cui converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sono tutti e soli gli α per cui converge $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Stabiliamo quindi per quali $\alpha > 0$ si ha la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^\alpha \log n} \right)^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha-2} \log n} \right)^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha-2}{2}} \log^{1/2} n}.$$

Facendo riferimento alla serie armonica generalizzata col logaritmo, concludiamo ha che la serie converge se e soltanto se

$$\frac{\alpha - 2}{2} > 1,$$

da cui

$$\alpha > 4.$$

Per $\alpha = 4$, invece, si otterrebbe la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^{1/2} n},$$

divergente, in quanto $\frac{1}{2} < 1$.

Quindi l'insieme E degli α in cui si ha la di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è

$$E =]4; +\infty[,$$

il cui estremo inferiore è 4.

8) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}.$$

Svolgimento.

Osserviamo anzitutto che la serie è convergente grazie al criterio del confronto asintotico.
Infatti, detta

$$b_n = \frac{2}{4n^2} = \frac{1}{2n^2},$$

si ha ovviamente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in]0, +\infty[,$$

cioè

$$a_n \sim b_n \text{ per } n \to +\infty.$$

Pertanto le due serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

hanno lo stesso carattere.
Poiché la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge (trattandosi dell'armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$), ne segue che pure la serie di partenza

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$$

risulta convergente.

Dovendo calcolarne la somma, ci aspettiamo che si tratti o di una serie geometrica o di una telescopica.
Vista la forma del termine generale, escludiamo la prima eventualità.

Si deve trattare quindi di una serie telescopica, vale a dire della forma

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (b_n - b_{n+1}).$$

Sappiamo che la somma di una serie del tipo è

$$S = \left(b_{n_0} - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}\right).$$

Cerchiamo di scrivere il termine generale nella forma

$$b_n - b_{n+1}.$$

Nel caso in cui il termine generale sia un rapporto di polinomi, si deve procedere con la decomposizione della frazione utilizzando il metodo dei fratti semplici.
Scomponiamo anzitutto il denominatore in fattori. Si tratta di un polinomio di secondo grado.

Ricordiamo che, assegnato un polinomio di secondo grado

$$ax^2 + bx + c,$$

per scomporlo in fattori occorre, per prima cosa, risolve l'equazione associata

$$ax^2 + bx + c = 0$$

trovando le due soluzioni reali x_1 e x_2 (nel caso in cui non esistano soluzioni reali, il polinomio non è fattorizzabile in $\mathbb{R}$).
A questo punto si scompone il polinomio con la formula

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

Nel nostro caso (dimenticandoci per il momento che $n \in \mathbb{N}$), risolvendo l'equazione algebrica

$$4n^2 + 8n + 3 = 0,$$

si trova

$$n_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{4} = \frac{-4 \pm 2}{4},$$

da cui

$$n_1 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}, \qquad n_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Pertanto

$$4n^2 + 8n + 3 = 4 \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(n + \frac{3}{2}\right) = 2 \cdot 2 \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(n + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= (2n+1) \cdot (2n+3).$$

La frazione da analizzare è quindi

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Decomponiamola col *metodo dei fratti semplici*: poiché il denominatore è prodotto di fattori di primo grado, cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3}.$$

Si ottiene

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3} = \frac{A(2n+3) + B(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{2An + 3A + 2Bn + B}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2A+2B) + 3A + B}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Per il principio di identità dei polinomi, l'uguaglianza tra il primo e l'ultimo termine risulta verificata se e soltanto se

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ 3A + B = 2 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} A = -B \\ 3A + B = 2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} A = -B = 0 \\ -2B = 2 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}.$$

Pertanto

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}.$$

Detta

$$b_n = \frac{1}{2n+1}$$

risulta

$$b_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3}.$$

Quindi il termine generale della serie è proprio della forma

$$b_n - b_{n+1},$$

il che conferma che la serie è telescopica.
Come già ricordato, la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

vale

$$S = \left(b_{n_0} - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} \right) = \left(b_2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} \right) = \left(\frac{1}{2\cdot 2+1} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} \right) =$$

$$= \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}.$$

9) Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n!).$$

Svolgimento.

La presenza del termine $\sin(n!)$ rende la serie di segno variabile ma non alterno: infatti, l'argomento del sin tende a $+\infty$ e la funzione seno oscilla tra i valori -1 e 1. Non si tratta quindi di una serie a termini positivi.

Procediamo con lo studio della convergenza assoluta. Se la serie dei valori assoluti risultasse convergente, potremmo concludere la convergenza della serie di partenza.

Consideriamo pertanto la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n!) \right|.$$

e studiamone il carattere.

Si tratta di una serie a termini positivi. Tuttavia, il fattore $|\sin(n!)|$, che non ammette limite per

$n \to +\infty$, non ci autorizza ad applicare immediatamente il criterio del confronto asintotico, il quale richiede di valutare i limiti dei vari fattori che formano il termine generale.
D'altra parte, dalla disuguaglianza

$$|\sin(n!)| \leq 1,$$

valida per la funzione limitata sin, risulta

$$|a_n| = \left| \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n!) \right| \leq \left| \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}} \right| = b_n.$$

La precedente maggiorazione ci indirizza verso l'applicazione del *criterio del confronto.* Se infatti riuscissimo a dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ risulta convergente, allora avremmo automaticamente provata pure la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, in forza del criterio del confronto, per l'appunto. Nulla potremmo concludere, al contrario, nel caso in cui la $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ risultasse divergente.

Cerchiamo quindi di studiare la serie di termine generale

$$b_n = \left| \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}} \right| = \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}}$$

(l'ultima uguaglianza è banale in quanto la frazione è a termini positivi).

Per lo studio di tale serie (che è a termini positivi) procediamo come segue.
Anzitutto, attraverso il criterio del confronto asintotico, cerchiamo di rendere lo studio di $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ il più semplice possibile, riconducendoci ad una serie con un termine generale $c_n \sim b_n$ per $n \to +infty$ ma dalla forma più semplice.

Osserviamo che, per $n \to \infty$ si ha $\arctan(n^3) \to \frac{\pi}{2}$; segue quindi che

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ 3^{n-2} + \arctan(n^3) \right\} = +\infty + \frac{\pi}{2} = +\infty.$$

Il fattore è quindi illimitato. Ne segue che

$$\left\{ 3^{n-2} + \arctan(n^3) \right\} \sim 3^{n-2} \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

Gli altri fattori si presentano già in forma favorevole.

Se consideriamo quindi la successione

$$c_n = \frac{3^{n-2}}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}}$$

si ha chiaramente

$$b_n \sim c_n \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

hanno lo stesso carattere.

Quindi possiamo considerare, in luogo di $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}}.$$

A tale serie conviene applicare, vista la struttura del termine generale, il criterio del rapporto.

Dobbiamo valutare, nel caso esista, il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Si ha

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^{n-1}}{(2n+2)!\ 4^{n+2}}}{\dfrac{3^{n-2}}{(2n)!\ 4^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3^{-1}}{(2n+2)(2n+1)(2n)! \cdot 4^n \cdot 4^2} \cdot \frac{(2n)! 4^n \cdot 4}{3^n \cdot 3^{-2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1.$$

Poiché il limite del rapporto è $\ell < 1$, segue immediatamente, per il criterio del rapporto, che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}}$$

è convergente.
Quindi, per confronto asintotico, pure la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\ 16^{\frac{n+1}{2}}}$$

è convergente.
A sua volta, ricordando la disuguaglianza

$$|a_n| \le b_n,$$

segue, per il criterio del confronto, che pure

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

è convergente.

Come già osservato all'inizio dello svolgimento, essendo $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergente, ne segue che la serie di partenza, ossia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-2} + \arctan(n^3)}{(2n)!\, 16^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n!),$$

è convergente a causa del teorema sulla convergenza assoluta.

10) Studiare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1}.$$

Svolgimento.

Anche in questo caso la serie è di segno variabile, o meglio, di segno alterno.

Controlliamo se la serie converge assolutamente. Se così fosse, avremmo automaticamente anche la convergenza della serie di partenza.

Consideriamo quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n}{n^3+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}.$$

Studiamo allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}.$$

Cerchiamo di ricondurre tale serie alla serie armonica generalizzata (in forza del criterio del confronto asintotico).
Il numeratore va già bene.

Banalmente, per quanto riguarda il denominatore, risulta

$$n^3 + 1 \sim n^3 \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

Pertanto, introdotta la successione

$$b_n = \frac{n}{n^3},$$

si ha ovviamente

$$b_n \;\sim\; |a_n| \;\text{ per }\; n \to +\infty.$$

Pertanto, per il Criterio del Confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno esattamente lo stesso carattere.
Studiamo allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Tale serie è chiaramente convergente, trattandosi della serie armonica generalizzata in cui $\alpha = 2 > 1$.
Di conseguenza, per confronto asintotico, anche $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Dalla convergenza assoluta segue anche la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Non è stato quindi necessario ricorrere al Criterio di Leibniz.

11) Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right).$$

Svolgimento.

Siamo in presenza di una serie di segno variabile, più precisamente di segno alterno.

Cominciamo col controllare se la serie converga assolutamente: in tal caso si avrebbe pure la convegenza della serie di partenza. In caso di riposta negativa, procederemo col Criterio di Leibniz, essendo in presenza di una serie di segno alterno.

Consideriamo quindi la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right).$$

Studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right).$$

Cerchiamo di applicare il criterio del confronto asintotico.

Per $n \to \infty$ si ha

$$e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \to 0,$$

il numeratore è quindi infinitesimo.

Cerchiamo di sostituirlo con un infinitesimo equivalente.
Poiché

$$e^x - 1 \ \sim \ x \ \text{ per } \ x \to 0$$

si ha, posto $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

$$e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \ \sim \ \frac{1}{\sqrt{n}} \ \text{ per } \ n \to +\infty.$$

Se consideriamo allora la successione

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

risulta ovviamente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1}{b_n} = 1 \in]0; \infty[,$$

cioè

$$b_n \ \sim \ |a_n|.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

hanno lo stesso carattere.
Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

diverge, trattandosi della serie armonica generalizzata con $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$, ne segue, per confronto asintotico, che pure la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)$$

diverge.

Non si ha quindi assoluta convergenza. Bisogna pertanto ricorrere al Criterio di Leibniz.

Bisogna controllare che la successione

$$\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)$$

sia infinitesima e decrescente.

Che sia infinitesima l'abbiamo già osservato.

Dobbiamo mostrarne la decrescenza.
Poiché la successione $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ è decrescente e poiché la funzione esponenziale in base $e > 1$ è strettamente crescente, ne segue, per composizione, che pure la successione

$$e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

è strettamente decrescente, cosiccome lo è pure la successione

$$e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1.$$

Quindi per il criterio di Leibniz, la serie assegnata converge. Non vi è invece, come già osservato, convergenza assoluta.
Diciamo in questo caso che la serie è semplicemente convergente.

12) Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x + 6}}\right)^{2n}.$$

Per tali valori di x calcolarne la funzione somma $S(x)$ e determinare il valore del limite

$$\lim_{x \to -\infty} S(x).$$

Svolgimento.

Si tratta di una serie geometrica, vale a dire di una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \ q \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo di riscrivere opportunamente il termine generale. Si ha
Si ha

$$\left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x + 6}}\right)^{2n} = \left[\left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x + 6}}\right)^2\right]^n = \left(\frac{e^{2x}}{e^x + 6}\right)^n.$$

Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x+6}}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{2x}}{e^x+6}\right)^{n},$$

cioè una serie geometrica.
Tale serie converge se e soltanto se

$$|q|<1,$$

ossia, se e solo se

$$\left|\frac{e^{2x}}{e^x+6}\right|<1,$$

vale a dire

$$\begin{cases}\dfrac{e^{2x}}{e^x+6}>-1\\ \dfrac{e^{2x}}{e^x+6}<1\end{cases}.$$

La prima delle due disequazioni è sempre soddisfatta (essendo $e^x>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$). Pertanto il sistema si riduce alla sola disequazione

$$\frac{e^{2x}}{e^x+6}<1,$$

cioè

$$\frac{e^{2x}-e^x-6}{e^x+6}<0,$$

che equivale a

$$e^{2x}-e^x-6<0,$$

poiché il denominatore (e^x+6) è sempre maggiore strettamente di 0 (quindi non influisce sul segno della frazione).
Per risolvere l'ultima disequazione, effettuiamo la sostituzione

$$e^x=t,$$

ottenendo

$$t^2-t-6<0.$$

Risolvendo l'equazione associata si trova

$$t_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm5}{2},$$

da cui

$$t_1 = -2, \qquad t_2 = 3.$$

La disequazione risulta quindi soddisfatta per

$$-2 < t < 3,$$

vale a dire, risostituendo t con e^x,

$$-2 < e^x < 3.$$

L'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ che risolvono la precedente disequazione è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ che risolvono il sistema

$$\begin{cases} e^x > -2 \\ e^x < 3 \end{cases}.$$

Vista la positività della funzione esponenziale, la prima disequazione risulta sempre verificata.

Il sistema si riduce pertanto alla seconda delle due disequazioni, vale a dire

$$e^x < 3,$$

che, passando al logaritmo (in base e) a entrambi i membri, equivale a

$$x < \log 3.$$

In definitiva, l'insieme degli x per cui converge la serie di partenza è

$$]-\infty, \log 3[.$$

Per tali valori di x calcoliamo la *funzione somma*, applicando la nota formula (in questo caso non bisogna sottrarre nulla alla somma in quanto la sommatoria parte da $n = 0$):

$$S(x) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{e^{2x}}{e^x+6}} = \frac{1}{\frac{e^x+6-e^{2x}}{e^x+6}} = \frac{e^x+6}{-e^{2x}+e^x+6}.$$

Dobbiamo a questo punto calcolare il

$$\lim_{x\to-\infty} S(x).$$

Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} S(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+6}{-e^{2x}+e^x+6} = \left[\frac{0+6}{0+0+6}\right] = 1.$$

13) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2/3} \left| \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha} \right|$$

al variare di $\alpha > 0$.

Svolgimento.

La serie è evidentemente a termini positivi grazie alla presenza del valore assoluto.

Utilizzeremo anzitutto il criterio del confronto asintotico per semplificare la struttura del termine generale.

Vista la forma del termine entro valore assoluto, ovviamente infinitesimo quando $n \to +\infty$, osservata la cancellazione che seguirebbe dai limiti notevoli, si intuisce immediatamente che, per studiarne il comportamento all'infinito, bisogna ricorrere agli sviluppi in serie di Taylor.

Ricordando che, per $x \to 0$, si ha

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4),$$

si ha nel nostro caso, per $n \to \infty$ (e conseguentemente $x = \dfrac{1}{n} \to 0$),

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Pertanto risulta

$$\left| \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha} \right| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - \frac{1}{n^\alpha} \right|.$$

L'ordine di infinitesimo di tale termine dipende dai valori assunti dal parametro α.

- Se $\alpha = 1$ si ottiene, per $n \to \infty$,

$$\left| \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha} \right| = \left| -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right| = \left| \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right|,$$

  cioè

$$\left| \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha} \right| \sim \frac{1}{6n^3} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Se consideriamo quindi la successione

$$b_n = n^{2/3} \cdot \frac{1}{6n^3}$$

otteniamo

$$a_n \sim b_n \text{ per } n \to +\infty.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno esattamente lo stesso carattere.

Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2/3} \cdot \frac{1}{6n^3} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/3}}$$

converge (in quanto si tratta della serie armonica generalizzata con $\alpha = \dfrac{7}{3} > 1$), ne segue che anche la serie di partenza $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

- Se $\alpha > 1$, allora l'infinitesimo da tenere, quello di ordine inferiore, è chiaramente $\dfrac{1}{n}$, in quanto di grado più basso degli altri addendi infinitesimi.
  Se consideriamo quindi la successione

  $$b_n = n^{2/3} \cdot \frac{1}{n}$$

  risulta

  $$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in]0; +\infty[,$$

  cioè

  $$b_n \sim a_n \text{ per } n \to +\infty.$$

  Quindi, per il criterio del confronto asintotico, le due serie

  $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

  hanno esattamente lo stesso carattere.

Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2/3} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$$

diverge (in quanto si tratta della serie armonica generalizzata con $\alpha < 1$), si ha che diverge pure la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Se $\alpha < 1$, l'infinitesimo da tenere (quello di grado minore) è ovviamente $\dfrac{1}{n^\alpha}$.
Detta
$$b_n = n^{2/3} \cdot \frac{1}{n^\alpha},$$
si ha
$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$
Per il Criterio del Confronto asintotico, le due serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
hanno lo stesso carattere.
In particolare, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge per tutti e soli i valori di α per cui converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
In realtà
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2/3} \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-2/3}}$$
converge se e solo se
$$\alpha - \frac{2}{3} > 1,$$
ossia, se e solo se
$$\alpha > \frac{5}{3},$$
in disaccordo con l'ipotesi $\alpha < 1$.

Quindi per $\alpha < 1$ non vi è convergenza di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, quindi nemmeno di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

[T.E. 26/01/2009]

14) Determinare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}.$$

Svolgimento.

Si tratta di una serie di segno variabile, in particolare, è una serie a segno alterno. Infatti il termine generale è dato dal prodotto di $(-1)^n$ per il termine sempre positivo $\frac{(2n)!}{5^n(n!)^2}$.

Cominciamo col considerare l'assoluta convergenza. Se la serie dei valori assoluti risulta convergente, allora lo è pure la serie di partenza. In caso contrario, il test dell'assoluta convergenza non ci dice nulla in merito al carattere della serie di partenza.
In quel caso, ricorreremo al criterio di Leibniz, applicabile in quanto la serie è di segno alterno.

Cominciamo col vedere se la serie converge assolutamente.
Dobbiamo studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{(2n)!}{5^n(n!)^2}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n)!}{5^n(n!)^2}.$$

Per lo studio di quest'ultima serie ricorriamo al criterio del rapporto.
Consideriamo il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Si ha

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2n+2)!}{5^{n+1}\left[(n+1)!\right]^2}}{\dfrac{(2n)!}{5^n(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{5^n\cdot 5(n!)^2(n+1)^2}\cdot\frac{5^n(n!)^2}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4}{5} < 1,$$

quindi la serie $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ converge.

Di conseguenza, la $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ converge assolutamente, quindi converge.

15) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log^2 n}.$$

Svolgimento.

Innanzitutto, osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi, in quanto $\log n > 0$ per ogni $n > 1$.
Poiché si ha, per ogni $n > 0$,

$$\log n < \sqrt{n},$$

segue immediatamente che

$$\log^2 n < n.$$

Da cui, passando ai reciproci, si ottiene

$$\frac{1}{\log^2 n} > \frac{1}{n}.$$

Detta

$$b_n = \frac{1}{n},$$

si ha quindi

$$a_n > b_n.$$

Poiché

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

è divergente (trattandosi della serie armonica), segue che, per il criterio del confronto, pure la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ risulta divergente.

16) Studiare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Svolgimento.

Cerchiamo anzitutto di capire se si tratta di una serie a termini positivi o a segno variabile.

Elenchiamo, in ordine crescente d'indice, alcuni termini della successione a_n, termine generale della serie:

$$a_1 = 1 \cdot \tan \frac{\pi}{4} = 1 \cdot 1 = 1, \quad a_2 = 2 \tan \frac{\pi}{8}, \quad a_3 = 3 \tan \frac{\pi}{16}, ...,$$

e così via. I valori assunti dalla successione sono tutti positivi (in quanto la tangente, tra 0 e $\frac{\pi}{4}$, è positiva).
Pertanto la serie in questione è a termini positivi.

Per il suo studio conviene ricorrere al criterio del Confronto asintotico.
Osseviamo preliminarmente che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} = 0;$$

quindi, per composizione, si ha pure

$$\lim_{n \to \infty} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} = 0.$$

Alla luce di questa osservazione viene spontaneo cercare di sostituire il termine generale della serie con uno più semplice ad esso equivalente per $n \to \infty$.

Notiamo che si ha (per il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$)

$$\tan \frac{\pi}{2^{n+1}} \;\sim\; \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Pertanto possiamo sostituire la successione a_n originaria con la successione

$$b_n = n \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}} \;\sim\; a_n \quad \text{per } t \to +\infty.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere.
Studiamo quindi il carattere di

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Lo studio di tale serie lo si può effettuare, ad esempio, ricorrendo al criterio del rapporto.
Bisogna pertanto valutare il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Si ha

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)\pi}{2^{n+2}}}{\frac{n\cdot\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\pi}{2^n \cdot 2^2} \cdot \frac{2^n \cdot 2}{n\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1,$$

quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Per il criterio del Confronto asintotico, converge pure la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

17) **[T.E. 31/08/15]**

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\beta}}{\log^2 n} \cdot \left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)^2.$$

Svolgimento.

La serie è a termini positivi.
Applichiamo il criterio del confronto asintotico cercando una b_n tale che

$$b_n \sim a_n \quad \text{per } n \to +\infty.$$

I fattori n^β e $\log^2 n$ si presentano già in forma favorevole.
Si tratta di capire il comportamento del terzo fattore.
Poiché per $n \to +\infty$, risulta $\frac{1}{n} \to 0$ da cui segue che il fattore

$$\left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$$

è infinitesimo.
Dai limiti notevoli si deduce che $\sin x \sim x$ quando $x \to 0$, da cui anche $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$.
Tuttavia tale approssimazione porta chiaramente alla cancellazione

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2.$$

Dobbiamo quindi approssimare il sin con un infinitesimo equivalente dedotto dallo sviluppo di Taylor.
Risulta sufficiente fermarsi al terzo ordine.
Poiché per $x \to 0$ risulta

$$\sin x \sim x - \frac{1}{6}x^3,$$

si ha pure

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Pertanto, per $n \to +\infty$, risulta

$$\left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 \sim \left[\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}\right)\right]^2 = \left(\frac{1}{6n^3}\right)^2 = \frac{1}{36n^6}.$$

Pertanto, detta

$$b_n = \frac{n^\beta}{\log^2 n} \cdot \frac{1}{36n^6},$$

si ha ovviamente

$$b_n \sim a_n \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Studiamo quindi per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} b_n = \frac{1}{36} \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^\beta}{\log^2 n \cdot n^6} = \frac{1}{36} \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{6-\beta} \log^2 n}.$$

Si tratta di una serie armonica generalizzata in cui l'esponente di $\log n$ è maggiore di 1.
Pertanto si ha convergenza se e solo se risulta

$$6 - \beta \geq 1,$$

vale a dire $\beta \leq 5$. Per $\beta > 5$, invece, la serie diverge positivamente.
Per confronto asintotico, vale la medesima discussione per la serie originaria di termine generale a_n.

18) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+2} \cdot \left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}.$$

Svolgimento.

Dovrà trattarsi di una serie telescopica, vale a dire della forma

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (b_n - b_{n+1}).$$

Cerchiamo quindi di scrivere il termine generale a_n della serie in tale modo.

Anzitutto osserviamo che

$$n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$$

(a tale risultato si giunge con l'usuale scomposizione del trinomio di secondo grado o attraverso la regola di *somma e prodotto*).
Riscriviamo quindi la frazione:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+2} \cdot \left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)} \cdot \left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+2} \cdot \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)}$$

(la radice del prodotto l'abbiamo scritta tranquillamente come prodotto di due radici in quanto i due fattori sono entrambi positivi).
A questo punto razionalizziamo opportunamente:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+2} \cdot \left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}\cdot\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot(n+2-(n+1))} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}} - \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Detta

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

si ha

$$b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Pertanto siamo riusciti a scrivere la serie nella forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}).$$

Per quanto già richiamato, la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$$

vale

$$S = \left(b_{n_0} - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}\right) = \left(b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+1}} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

19) **[T.E. 12/01/2015]** Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n!)^{3\alpha}\sinh\left(\frac{e^n}{(2n+1)!}\right).$$

Svolgimento.

Si tratta di una serie a termini positivi.
Per prima cosa cerchiamo di semplificare il termine generale applicando il criterio del confronto asintotico.
Il fattore $(n!)^{3\alpha}$ si presenta già in forma favorevole.
Per quanto riguarda il secondo fattore, osserviamo anzitutto che, a causa della gerarchia degli infiniti, risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{(2n+1)!} = 0.$$

Pertanto l'argomento del sinh è infinitesimo, da cui

$$\sinh\left(\frac{e^n}{(2n+1)!}\right) \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty,$$

in quanto il seno iperbolico tende a 0 quando il suo argomento tende a 0.
Trattandosi di un fattore infinitesimo, cerchiamo di sostituirlo con un infinitesimo equivalente.
Dagli sviluppi di Taylor sappiamo che

$$\sinh x \ \sim \ x \quad \text{per } x \to 0.$$

Se ne deduce che, posto $x = \dfrac{e^n}{(2n+1)!}$,

$$\sinh\left(\frac{e^n}{(2n+1)!}\right) \ \sim \ \frac{e^n}{(2n+1)!} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Introdotta quindi

$$b_n = (n!)^{3\alpha} \cdot \frac{e^n}{(2n+1)!},$$

risulta

$$b_n \ \sim \ a_n \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Pertanto, grazie al criterio del confronto asintotico, possiamo studiare per quali α converge la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n!)^{3\alpha} \cdot \frac{e^n}{(2n+1)!}.$$

Per studiare il carattere di tale serie conviene utilizzare il criterio del rapporto, vista la presenza di fattoriali e di termini di tipo geometrico.
Dobbiamo discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Si ha

$$b_{n+1} = [(n+1)!]^{3\alpha} \cdot \frac{e^{n+1}}{[2(n+1)+1]!} = [(n+1)\cdot n!]^{3\alpha} \cdot \frac{e^n \cdot e}{(2n+3)!}.$$

Ne segue che

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} [(n+1)\cdot n!]^{3\alpha} \cdot \frac{e^n\cdot e}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{e^n \cdot (n!)^{3\alpha}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{3\alpha}}{(2n+3)(2n+2)} \cdot e = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{4} \cdot \frac{n^{3\alpha}}{n^2}.$$

Confrontando i gradi di n e ricordando che $n \to +\infty$ possiamo concludere che:

- se $3\alpha = 2$, cioè se $\alpha = \frac{2}{3}$, $\ell = \frac{e}{4} < 1$, pertanto la serie converge;
- se $3\alpha > 2$, cioè se $\alpha > \frac{2}{3}$, $\ell = \frac{e}{4} \cdot (+\infty) = +\infty > 1$, pertanto la serie diverge positivamente;
- se $3\alpha < 2$, cioè se $\alpha < \frac{2}{3}$, $\ell = 1 \cdot 0 = 0$, pertanto la serie converge.

In conclusione, la serie converge per $\alpha \leq \frac{2}{3}$.

20) Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}.$$

Svolgimento.

Si tratta di una serie di segno alterno, in quanto il termine generale è del tipo

$$a_n = (-1)^n b_n,$$

ove $b_n = \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ è una successione strettamente positiva (infatti, per $x > 0$ si ha $\arctan x > 0$).

Partiamo considerando la convergenza assoluta. Consideriamo quindi la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}},$$

alla quale possiamo applicare il criterio del confronto asintotico.

Il fattore
$$\arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$$
è infinitesimo per $n \to \infty$.
Poiché
$$\arctan x \;\sim\; x \quad \text{per } x \to 0,$$
si ha, posto $x = \dfrac{1}{\sqrt[5]{n}} \to 0$ per $n \to +\infty$,
$$\arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \;\sim\; \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Pertanto, per confronto asintotico, le due serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}.$$
hanno lo stesso carattere.
Poiché la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/5}}$$
diverge (essendo l'armonica generalizzata con $\alpha = \dfrac{1}{5} < 1$), ne segue che pure la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$$
diverge.
Non essendoci convergenza assoluta, non si può concludere nulla circa il carattere della serie iniziale.

Tuttavia, trattandosi di una serie di segno alterno, si può utilizzare il criterio di Leibniz.

Dobbiamo controllare che b_n sia infinitesima e decrescente.

Ovviamente si ha
$$\lim_{n\to\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}} = 0,$$
quindi a_n è infinitesima.

Per controllare la decrescenza di b_n dovremmo controllare i valori di n per cui è soddisfatta la disequazione

$$b_{n+1} \leq b_n.$$

Si ha:

$$\arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \leq \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}};$$

ma, essendo la funzione arctan monotona crescente, la precedente disequazione è equivalente a

$$\frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[5]{n}},$$

ossia

$$\sqrt[5]{n} \leq \sqrt[5]{n+1},$$

banalmente vera per ogni $n > 0$, a causa della stretta monotonia della funzione $\sqrt[5]{n}$. Pertanto la successione b_n è decrescente.

Ne segue, per il criterio di Leibniz, che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$$

è convergente.

21) Studiare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sin^2 n + 2}{4^n + 1}.$$

Svolgimento.

La serie è a termini positivi (in quanto il sin compare con potenza quadra).

Non è possibile applicare immediatamente il criterio del confronto asintotico, in quanto non esiste

$$\lim_n \sin^2 n$$

e, di conseguenza, nemmeno il

$$\lim_n \left(3^n \sin^2 n + 2\right).$$

Dobbiamo procedere diversamente.

Poiché

$$0 \leq \sin^2 n \leq 1,$$

si ha ovviamente

$$3^n \sin^2 n + 2 \leq 3^n \cdot 1 + 2 = 3^n + 2,$$

quindi, detta

$$b_n = \frac{3^n + 2}{4^n + 1},$$

risulta

$$a_n = \frac{3^n \sin^2 n + 2}{4^n + 1} \leq \frac{3^n + 2}{4^n + 1} = b_n,$$

cioè

$$a_n \leq b_n.$$

Se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

risultasse convergente, potremmo concludere pure la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, grazie al criterio del confronto. Non potremmo invece concludere nulla nel caso in cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergesse.

Stabiliamo quindi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2}{4^n + 1}.$$

Per lo studio di tale serie a termini positivi possiamo ricorrere al criterio del confronto asintotico in quanto tutti i termini di b_n ammettono limite per $n \to +\infty$.

Il numeratore tende all'infinito a causa della successione geometrica 3^n con $q = 3 > 1$.
Pertanto

$$3^n + 2 \;\sim\; 3^n \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Per lo stesso motivo si ha

$$4^n + 1 \;\sim\; 4^n \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Ne segue che

$$b_n \;\sim\; c_n = \frac{3^n}{4^n} \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

hanno lo stesso carattere.
Essendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

convergente, in quanto una serie geometrica di ragione $q = -1 < \frac{3}{4} < 1$, ne segue che anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è convergente.
A sua volta, per il criterio del confronto, anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sin^2 n + 2}{4^n + 1}$$

è convergente.

22) Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)!}{(n+7)^\alpha n!}.$$

Svolgimento.

Osserviamo che la serie è a termini positivi.

Riscriviamo il termine generale in maniera semplificata:

$$a_n = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!}{(n+7)^\alpha n!} = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+7)^\alpha}.$$

Quindi dobbiamo discutere per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+7)^\alpha}.$$

Come al solito, cerchiamo di ricondurre lo studio della $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ allo studio di un'opportuna $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, utilizzando il criterio del confronto asintotico.

Osserviamo che il numeratore è equivalente, per $n \to \infty$, a n^4, essendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{n^4} = 1.$$

Allo stesso modo, risulta pure

$$(n+7)^\alpha \;\sim\; n^\alpha \quad \text{per } n \to +\infty,$$

dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+7)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_n \left(\frac{n+7}{n}\right)^\alpha = 1^\alpha = 1.$$

Quindi, detta

$$b_n = \frac{n^4}{n^\alpha},$$

risulta

$$b_n \;\sim\; a_n \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^\infty b_n$$

hanno esattamente lo stesso carattere.
Di coseguenza

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \quad \text{converge se e solo se} \quad \sum_{n=1}^\infty b_n \quad \text{converge.}$$

Ma la serie

$$\sum_{n=1}^\infty b_n = \sum_{n=1}^\infty \frac{n^4}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\alpha-4}}$$

converge se e solo se $\alpha - 4 > 1$, ossia se e solo se $\alpha > 5$.
Quindi, anche la serie

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty \frac{(n+4)!}{(n+7)^\alpha n!}$$

converge per $\alpha > 5$.

23) **[T.E. 09/01/09]**

Determinare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=2}^\infty \left(n^{3\beta} + \log n^7\right) \cdot \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

Svolgimento.

Essendo la serie a termini positivi, cercheremo di applicare il criterio del confronto asintotico.

Studiamo sin da subito il secondo fattore, indipendente dal parametro β).
Si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)=0,$$

si tratta cioè di un fattore infinitesimo. L'approssimazione $\sin x \sim x$ per $x \to 0$ porterebbe a una cancellazione. Cercheremo quindi l'infinitesimo equivalente ricorrendo agli sviluppi di Taylor.
Ricordando che, per $x \to 0$, si ha

$$\sin x \sim x-\frac{x^3}{6}$$

si ha, posto $x=\frac{1}{n}\to 0$ per $n\to\infty$,

$$\sin\frac{1}{n} \sim \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}\right).$$

Quindi, per $n\to\infty$, risulta

$$\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}\right)=\frac{1}{6n^3}.$$

Discutiamo ora il primo fattore del termine generale, esaminando i vari casi.

- Se $\beta<0$, allora si ha

  $$\lim_n n^{3\beta}=0,$$

  pertanto

  $$\lim_{n\to\infty}\left(n^{3\beta}+\log n^7\right)=0+\infty=+\infty.$$

  In particolare l'infinito di ordine superiore (e anche unico addendo illimitato che compare nel fattore) è $\log n^7=7\log n$.
  Quindi, per $\beta<0$, risulta

  $$n^{3\beta}+\log n^7 \sim 7\log n \quad \text{per } n\to+\infty.$$

  Introducendo quindi la successione

  $$b_n=\frac{1}{6n^3}\cdot 7\log n,$$

  risulta chiaramente

  $$b_n \sim a_n \quad \text{per } n\to+\infty.$$

Pertanto possiamo, per il criterio del confronto asintotico, studiare il carattere di

$$\frac{7}{6}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3(\log n)^{-1}}.$$

Poiché tale serie armonica generalizzata col logaritmo converge (essendo l'esponente di n maggiore di 1), segue che pure la serie di partenza converge.

La discussione condotta finora ci consente di affermare che la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge per ogni $\beta < 0$.

- Sia ora $\beta = 0$.
  La serie si riduce alla serie

$$7\sum_{n=2}^{\infty}\left(\log n^7\right)\cdot\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right),$$

che è equivalente a

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3(\log n)^{-1}},$$

convergente.
Quindi, anche per $\beta = 0$, si ha la convergenza di $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

- Sia ora $\beta > 0$.
  In questo caso si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^{3\beta} = +\infty.$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{3\beta}+\log n^7\right) = +\infty.$$

Però, in questo caso, l'infinito di ordine superiore è la potenza $n^{3\beta}$, si avrà, per $\beta > 0$,

$$n^{3\beta}+\log n^7 \ \sim\ n^{3\beta} \quad \text{per } n\to+\infty.$$

Introdotta la successione

$$b_n = n^{3\beta} \cdot \frac{1}{n^3},$$

si ha banalmente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in]0, +\infty[,$$

cioè

$$b_n \;\sim\; a_n \;\text{ per } n \to +\infty.$$

Quindi, dal criterio del confronto asintotico, il carattere di $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ è lo stesso di $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$.
Studiamo quindi per quali $\beta > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} n^{3\beta} \cdot \frac{1}{n^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3-3\beta}}.$$

Tale serie (armonica generalizzata) converge per

$$3 - 3\beta > 1,$$

ossia per

$$\beta < \frac{2}{3},$$

mentre diverge per $\beta \geq \dfrac{2}{3}$.
Pertanto, ricordando che siamo nel caso $\beta > 0$, la serie converge se e solo se

$$\begin{cases} \beta > 0 \\ \beta < \dfrac{2}{3} \end{cases},$$

ossia se e solo se

$$0 < \beta < \frac{2}{3}.$$

In definitiva, l'insieme dei $\beta \in \mathbb{R}$ per cui converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(n^{3\beta} + \log n^7\right) \cdot \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$$

è dato da

$$\beta \leq 0 \quad \cup \quad 0 < \beta < \frac{2}{3}.$$

Quindi la serie data converge per

$$\beta < \frac{2}{3}.$$

24) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

Svolgimento.

È banale osservare che siamo in presenza di una serie a termini positivi.
Vista la forma del termine generale della serie, conviene applicare il criterio della radice.

Consideriamo quindi il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}}.$$

Si ha

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = \lim_n \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} = \lim_n \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n} \right]^{-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n} \right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1.$$

Quindi, per il criterio della radice, la serie assegnata risulta convergente.

25) Si determini il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n + 3n! - 2\log n}{(2^n+1)(2n)!}.$$

Svolgimento.

Osserviamo che la serie è a termini positivi.
Per poter applicare il criterio del confronto asintotico, dobbiamo cercare di capire quale sia il comportamento del termine generale a_n per $n \to \infty$, per poter così esibire un'opportuna successione b_n

tale che $b_n \sim a_n$.

Il numeratore tende all'infinito. In questo caso sappiamo di dover tenere l'addendo di infinito maggiore, vale a dire

$$n^n.$$

Pertanto

$$n^n + 3n! - 2\log n \quad \sim \quad n^n.$$

Passando al denominatore, il primo fattore, vale a dire

$$2^n + 1$$

tende all'infinito e pertanto, per i soliti discorsi, può essere sostituito con

$$2^n.$$

Il fattore $(2n)!$ non ha bisogno di essere sostituito con qualche altro fattore.

Introduciamo quindi la nuova successione

$$b_n = \frac{n^n}{2^n(2n)!} \sim a_n \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere.

Studiamo quindi il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n(2n)!}.$$

Si tratta di una tipica serie studiabile col criterio del rapporto (a causa dei fattoriali e delle potenze $n-$esime).

Si ha

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_n \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}[2(n+1)]!} \cdot \frac{2^n \cdot (2n)!}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)}{2^n \cdot 2(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{2^n(2n)!}{n^n} = \lim_n \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e \cdot \lim_n \frac{(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot 0 = 0 < 1.$$

Pertanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

è convergente.

Ne segue, per il Criterio del Confronto asintotico, che anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

è convergente.

26) Si studi al variare di $\alpha \in [0, +\infty[$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}}{n\sqrt{n} \cdot \left(1 - \cos\left(n^{-\alpha/2}\right)\right)}$$

Svolgimento.

Applicheremo il criterio del confronto asintotico, cercando di ricondurci alla serie armonica generalizzata.

Cominciamo col fattore a numeratore: guardiamo il contenuto della tonda (poi eleveremo alla α). Innanzitutto osserviamo che

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Poiché

$$\arctan x \;\sim\; x$$

risulta, posto $x = \frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$,

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \;\sim\; \frac{1}{n} \quad \text{per } n \to +\infty,$$

da cui

$$\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha} \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Proseguiamo considerando il fattore $n\sqrt{n}$. Si ha

$$n\sqrt{n} = n \cdot n^{1/2} = n^{3/2}.$$

Studiamo infine l'ultimo fattore, vale a dire

$$\left(1 - \cos\left(n^{-\alpha/2}\right)\right) = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)\right).$$

Poiché $\alpha > 0$, risulta

$$\frac{1}{n^{\alpha/2}} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Quindi,

$$1 - \cos\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right) \to 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0.$$

Il fattore è pertanto infinitesimo.
Poiché dal limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

si ricava

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad \text{per } x \to 0,$$

risulta, posto $x = \dfrac{1}{n^{\alpha/2}} \to 0$ per $n \to +\infty$,

$$1 - \cos\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)^2 = \frac{1}{2 \cdot n^{\alpha}} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Detta

$$b_n = \frac{\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}}{n^{3/2} \cdot \left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

si ha chiaramente

$$b_n \sim a_n \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico, le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}}{n\sqrt{n}\cdot(1-\cos n^{-\alpha/2})} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

hanno lo stesso carattere (pertanto i valori di α per cui converge la seconda sono tutti e soli i valori di α per cui converge la prima).
Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

converge, ne segue che pure la serie di partenza converge.

Analizziamo ora il caso $\alpha = 0$. Sostituendo, ci si riconduce alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{0}}{n\sqrt{n}\cdot(1-\cos n^{0/2})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}(1-\cos 1)} =$$

$$\frac{1}{(1-\cos 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}},$$

che converge (essendo l'armonica generalizzata con $\alpha > 1$).

Quindi la serie iniziale converge per ogni

$$\alpha \geq 0.$$

27) **[T.E. 29/03/10]**

Determinare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{\frac{2}{n}}\left(\cosh\left(\frac{2}{n^2}\right)-1\right)}{\frac{2}{n^{2/3}} - \sin\left(\frac{2}{n^{2/3}}\right)}.$$

Svolgimento.

Cercheremo di applicare il Criterio del Confronto asintotico.

Consideriamo i vari fattori che compongono il termine generale a_n al fine di introdurre una nuova successione b_n più semplice.

Il primo fattore: si ha

$$e^{\frac{2}{n}} \to e^0 = 1.$$

Nell'introdurre la nuova successione b_n, sostituiremo tale fattore con il termine 1.
Il secondo fattore.
Vista la forma, procediamo con gli sviluppi di Taylor intorno a 0 (applicabili in quanto $\frac{2}{n^2} \to 0$ per $n \to \infty$).
Ricordando che

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0,$$

si ha, nel nostro caso,

$$\cosh\left(\frac{2}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)^3 = 1 + \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^6}\right) \quad \text{per } n \to \infty.$$

Quindi risulta

$$\left(\cosh\left(\frac{2}{n^2}\right) - 1\right) = 1 + \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^6}\right) - 1 = \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Nell'introdurre la nuova successione b_n sostituiremo il fattore

$$\left(\cosh\left(\frac{2}{n^2}\right) - 1\right)$$

con

$$\frac{2}{n^4}.$$

Anche il terzo fattore è infinitesimo; in particolare è dato dalla sottrazione di due infinitesimi.

Procediamo anche in questo caso con gli sviluppi di Taylor.
Ricordando che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \quad \text{per } \ x \to 0,$$

si ha, per $n \to \infty$,

$$\sin\left(\frac{2}{n^{2/3}}\right) = \frac{2}{n^{2/3}} - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{n^{2/3}}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)^4 = \frac{2}{n^{2/3}} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^{8/3}}\right).$$

Quindi

$$\frac{2}{n^{2/3}} - \sin\left(\frac{2}{n^{2/3}}\right) = \frac{2}{n^{2/3}} - \frac{2}{n^{2/3}} + \frac{4}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^{8/3}}\right) =$$

$$= \frac{4}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^{8/3}}\right) \quad \text{per} \quad n \to \infty.$$

Sostituiremo quindi il fattore

$$\frac{2}{n^{2/3}} - \sin\left(\frac{2}{n^{2/3}}\right)$$

con

$$\frac{4}{3n^2}.$$

La successione adatta al criterio del confronto asintotico è pertanto

$$b_n = \frac{1 \cdot \frac{2}{n^4}}{\frac{4}{3n^2}} = \frac{3}{2n^2}.$$

Le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hanno quindi lo stesso carattere.

Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n^2} = \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge (trattandosi della serie armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$), ne segue che pure la serie di partenza

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{\frac{2}{n}}\left(\cosh\left(\frac{2}{n^2}\right) - 1\right)}{\frac{2}{n^{2/3}} - \sin\left(\frac{2}{n^{2/3}}\right)}$$

risulta convergente.

28) **[T.E. 16/01/2014]**

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \cos\left(\sqrt{3 + n^{2(\beta-1)}} - n^{\beta-1}\right)\right].$$

Svolgimento.

A causa del fatto che la funzione cos risulta minore o uguale a 1 in tutto il suo dominio, la serie è a termini positivi.
Applicheremo il criterio del confronto asintotico. Poiché $\beta \in \mathbb{R}$, dobbiamo discutere il comportamento di $n^{\beta-1}$ (e quindi di $n^{2(\beta-1)}$) al tendere di n a $+\infty$.
Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases},$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\beta-1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta > 1 \\ 0 & \text{se } \beta < 1 \\ 1 & \text{se } \beta = 1 \end{cases}$$

e, analogamente,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{2(\beta-1)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta > 1 \\ 0 & \text{se } \beta < 1 \\ 1 & \text{se } \beta = 1 \end{cases}.$$

Pertanto, lo studio del termine generale della serie cambia a seconda che sia $\beta < 1$, $\beta = 1$, $\beta > 1$.

Se $\beta = 1$, risulta costantemente $n^{\beta-1} = 1$, quindi la serie diviene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \cos\left(\sqrt{3+1} - 1\right)\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} [1 - \cos 1].$$

Tale serie è chiaramente divergente in quanto viene meno la condizione necessaria per la convergenza. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} [1 - \cos 1] \neq 0.$$

Analogamente per il caso $\beta < 1$ in cui $n^{\beta-1} \to 0$ per $n \to +\infty$.

Risulta

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left[1 - \cos\left(\sqrt{3+n^{2(\beta-1)}} - n^{\beta-1}\right)\right] = \left[1 - \cos\sqrt{3}\right] \neq 0.$$

Quindi per $\beta \leq 1$ la serie diverge positivamente venendo meno la condizione necessaria per la convergenza.

Studiamo ora il caso $\beta > 1$, che comporta $n^{\beta-1} \to +\infty$ per $n \to +\infty$.
Per applicare il criterio del confronto asintotico dobbiamo stabilire il comportamento di a_n per $n \to +\infty$.
Consideriamo l'argomento del cos. Poiché $n^{\beta-1}$ e $n^{2(\beta-1)}$ tendono a $+\infty$ si ottiene, trascurando l'addendo 3 sotto radice,

$$\sqrt{3+n^{2(\beta-1)}} - n^{\beta-1} \ \sim\ \sqrt{n^{2(\beta-1)}} - n^{\beta-1} = n^{\beta-1} - n^{\beta-1},$$

vale a dire una *cancellazione*. Dobbiamo quindi procedere con la razionalizzazione.
Risulta

$$\left(\sqrt{3+n^{2(\beta-1)}} - n^{\beta-1}\right) = \left(\sqrt{3+n^{2(\beta-1)}} - n^{\beta-1}\right) \cdot \frac{\sqrt{3+n^{2(\beta-1)}} + n^{\beta-1}}{\sqrt{3+n^{2(\beta-1)}} - n^{\beta-1}} =$$

$$= \frac{3 + n^{2(\beta-1)} - n^{2(\beta-1)}}{\sqrt{3+n^{2(\beta-1)}} + n^{\beta-1}} = \frac{3}{\sqrt{3+n^{2(\beta-1)}} + n^{\beta-1}}.$$

A questo punto, trascurando l'addendo finito 3 sotto la radice a denominatore, troviamo, per $n \to +\infty$,

$$\left(\sqrt{3+n^{2(\beta-1)}} - n^{\beta-1}\right) = \frac{3}{\sqrt{3+n^{2(\beta-1)}} + n^{\beta-1}} \ \sim\ \frac{3}{\sqrt{n^{2(\beta-1)}} + n^{\beta-1}} = \frac{3}{2n^{\beta-1}}.$$

Pertanto risulta, per $\beta > 1$ e per $n \to +\infty$,

$$\left[1 - \cos\left(\sqrt{3+n^{2(\beta-1)}} - n^{\beta-1}\right)\right] \ \sim\ \left[1 - \cos\left(\frac{3}{2n^{\beta-1}}\right)\right].$$

Poiché, per $x \to 0$ si ha

$$1 - \cos x \ \sim\ \frac{1}{2}x^2,$$

risulta, essendo $x = \dfrac{3}{2n^{\beta-1}} \to 0$ per $\beta > 1$ e $n \to +\infty$,

$$\left[1 - \cos\left(\frac{3}{2n^{\beta-1}}\right)\right] \ \sim\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2n^{\beta-1}}\right)^2 = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{n^{2(\beta-1)}}.$$

Introdotta quindi la successione

$$b_n = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{n^{2(\beta-1)}},$$

si ha chiaramente, nel caso $\beta > 1$,

$$b_n \sim a_n \text{ per } n \to +\infty.$$

Studiamo quindi per quali valori di $\beta > 1$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{3}{8} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2(\beta-1)}}.$$

Si tratta di una serie armonica generalizzata col logaritmo. Essa converge se e soltanto se

$$2(\beta - 1) > 1,$$

cioè se e solo se

$$\beta > \frac{3}{2},$$

compatibile con l'ipotesi $\beta > 1$.

Pertanto per $\beta > \frac{3}{2}$ converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ e quindi, per confronto asintotico, anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

29) **[T.E. 27/03/2013]**

Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(e^{(\alpha-7)n} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} + \frac{\log(n^n)}{n^{\alpha+2}(\log n)^3} \right)$$

è convergente.

Svolgimento.

Conviene scrivere

$$a_n = b_n + c_n,$$

essendo

$$b_n = e^{(\alpha-7)n} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}, \qquad b_n = \frac{\log(n^n)}{n^{\alpha+2}(\log n)^3}.$$

Pertanto si ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} (b_n + c_n) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n + \sum_{n=2}^{\infty} c_n,$$

dove l'ultima uguaglianza è possibile solo quando non si genera la forma indeterminata $[+\infty - \infty]$: tale eventualità non può verificarsi poiché le serie a termini positivi possono essere solamente convergenti o positivamente divergenti.

Nell'esercizio si devono individuare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la serie $\sum_{n=2}^{\infty}$ è convergente, vale a dire gli α per cui convergono contemporaneamente le due serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{\infty} c_n.$$

Cominciamo a stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2} e^{(\alpha-7)n} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}.$$

Per prima cosa applichiamo il criterio del confronto asintotico.
I fattori $e^{(\alpha-7)n}$ e $\sqrt{n} = n^{1/2}$ si presentano già in forma favorevole.
Quanto al fattore (n^2+1), fattore illimitato per $n \to +\infty$, si ha

$$n^2 + 1 \ \sim \ n^2 \ \text{ per } n \to +\infty.$$

Detta

$$d_n = e^{(\alpha-7)n} \cdot \frac{n^{1/2}}{n^2} = e^{(\alpha-7)n} \cdot \frac{1}{n^{3/2}},$$

si ha chiaramente

$$d_n \ \sim \ b_n \ \text{ per } n \to +\infty.$$

Studiamo quindi il carattere di

$$\sum_{n=2}^{\infty} d_n = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{(\alpha-7)n} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$$

applicando il criterio della radice.
Valutiamo, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{d_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e^{(\alpha-7)n} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{(\alpha-7)} \cdot \frac{1}{(n^{3/2})^{1/n}}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} (n^{3/2})^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log(n^{3/2})^{1/n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{3\log n}{2n}} = e^0 = 1,$$

si trova che

$$\ell = e^{(\alpha-7)} \cdot 1 = e^{(\alpha-7)}.$$

Dal criterio della radice otteniamo che:

- se $e^{(\alpha-7)} < 1$, cioè $\alpha - 7 < 0$, vale a dire $\alpha < 7$, la serie converge;

- se $e^{(\alpha-7)} > 1$, cioè $\alpha - 7 > 0$, vale a dire $\alpha > 7$, la serie diverge;
- se $e^{(\alpha-7)} = 1$, cioè $\alpha - 7 = 0$, vale a dire $\alpha = 7$, non è possibile stabilire per questa via il carattere della serie. Analizziamo quindi la serie nel caso $\alpha = 7$. Essa diviene

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^0 \cdot \frac{1}{n^{3/2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}};$$

si tratta di una serie armonica generalizzata convergente in quanto $\frac{3}{2} > 1$. Quindi il caso $\alpha = 7$ rende la serie convergente.

In definitiva, la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} d_n$ e quindi, per confronto asintotico, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ convergono se e solo se $\alpha \leq 7$.

Stabiliamo ora per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$.

Poiché

$$c_n = \frac{\log(n^n)}{n^{\alpha+2}(\log n)^3} = \frac{n \cdot \log n}{n^{\alpha+2}(\log n)^3} = \frac{1}{n^{\alpha+1}(\log n)^2},$$

la serie da studiare è una serie armonica generalizzata con il logaritmo.
Poiché l'esponente del log è strettamente maggiore di 1, si ha convergenza se e solo se $\alpha + 1 \geq 1$, vale a dire se e solo se $\alpha \geq 0$.

Concludendo, la serie di partenza $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} b_n + \sum_{n=2}^{\infty} c_n$ converge per gli α tali che

$$\begin{cases} \alpha \leq 7 \\ \alpha \geq 0 \end{cases},$$

vale a dire per

$$0 \leq \alpha \leq 7.$$

30) **[T.E. 01/04/2015]**

Discutere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{n+3}}{7^n \arctan n \cdot \log(n^3+1)}.$$

Svolgimento.

Poiché $\beta \in \mathbb{R}$, bisogna distinguere i casi in cui $\beta = 0$, $\beta > 0$, $\beta < 0$, a seconda dei quali cambia la natura della serie.

CASO $\beta = 0$.

Osserviamo che per $\beta = 0$ otteniamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^{n+3}}{7^n \arctan n \cdot \log(n^3+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 0,$$

vale a dire la **serie identicamente nulla**, che è banalmente convergente a 0.
Quindi per $\boldsymbol{\beta = 0}$ la serie **converge**.
Dobbiamo quindi studiare i casi $\beta > 0$ e $\beta < 0$.

CASO $\beta > 0$.

Per $\beta > 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{n+3}}{7^n \arctan n \cdot \log\left(n^3+1\right)}$$

è a **termini positivi**.
Possiamo quindi applicare tutti i criteri per le serie a termini positivi. Cominciamo col ***criterio del confronto asintotico*** che ci consente di studiare una serie di termine generale b_n più semplice di a_n ma con lo stesso carattere della serie assegnata.
Consideriamo quindi il termine generale

$$a_n = \frac{\beta^n \cdot \beta^3}{7^n \arctan n \cdot \log(n^3+1)}$$

e analizziamone i vari fattori, osservando in particolare che il fattore β^3 è costante (in quanto indipendente da n) e potrà essere portato fuori dal simbolo di sommatoria per linearità.

I fattori β^n e 7^n si presentano già in forma favorevole.
Per quanto riguarda il fattore $\arctan n$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2},$$

pertanto, nell'introdurre la successione b_n, sostituiremo il fattore $\arctan n$ con il fattore costante $\frac{\pi}{2}$.
Infine, il fattore $\log(n^3+1)$ è tale che

$$\lim_{n \to +\infty} \log(n^3+1) = +\infty;$$

quindi, trascurando l'addendo finito 1 nell'argomento del log, possiamo affermare che

$$\log(n^3+1) \sim \log(n^3) = 3\log n \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Studiamo quindi il carattere della serie numerica di termine generale

$$b_n = \frac{\beta^n \cdot \beta^3}{7^n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3 \log n},$$

cioè la serie

$$\frac{2\beta^3}{3\pi} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta^n}{7^n \cdot \log n},$$

nella quale si inizia a sommare in corrispondenza di $n = 2$, in quanto per $n = 1$ si annullerebbe il denominatore del termine generale. Tale scelta non comporta nulla circa il carattere della serie di partenza: sappiamo infatti che il carattere di una serie non varia se si modifica il numero naturale da cui cominciare la sommatoria.

D'ora in poi, ci limiteremo a studiare la serie vera e propria, tralasciando la costante moltiplicativa $\frac{2\beta^3}{3\pi}$.

Trattandosi di una serie a termini positivi, possiamo applicare, vista la struttura del termine generale, il ***criterio della radice***.
Valutiamo quindi il limite

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\beta^n}{7^n \log n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\beta}{7 \cdot (\log n)^{1/n}}.$$

Risulta

$$\lim_{n\to+\infty} (\log n)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log(\log n)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log(\log n)}{n}} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\log n)}{n}} = e^0 = 1,$$

poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\log n)}{n} = 0,$$

essendo $\log(\log n)$ un infinito di ordine inferiore rispetto a n.

Pertanto si ha

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{\beta}{7}.$$

A seconda del valore di tale limite, il criterio della radice fornisce risposte differenti circa il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e, quindi, per confronto asintotico, anche della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ di partenza.
In particolare:

- se $\ell = \frac{\beta}{7} < 1$, cioè se $\beta < 7$, ovvero $\boldsymbol{0 < \beta < 7}$, la serie **converge**;
- se $\ell = \frac{\beta}{7} > 1$, ovvero se $\boldsymbol{\beta > 7}$, la serie **diverge positivamente**;

- se $\ell = \frac{\beta}{7} = 1$, cioè se $\boldsymbol{\beta = 7}$, il criterio della radice è inefficace: dobbiamo quindi stabilire per altra strada il carattere della serie.
  A tale scopo, riscriviamo la serie sostituendo a β il valore 7. Otteniamo

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{7^n}{7^n \log n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^0 \cdot (\log n)^1},$$

  serie **divergente**, poiché si tratta della *serie armonica generalizzata col logaritmo* in cui l'esponente di n è $0 < 1$.

In definitiva, per $\beta > 0$ la serie converge se e soltanto se $0 < \beta < 7$.

La discussione condotta finora ci consente di affermare che la serie converge certamente per $\boldsymbol{0 \leq \beta < 7}$.

Studiamo ora il caso $\beta < 0$.

CASO $\boldsymbol{\beta} < 0$.

Essendo $\beta < 0$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n \cdot \beta^3}{7^n \arctan n \cdot \log(n^3 + 1)}$$

è una **serie di segno variabile**. In particolare, poiché è $\beta < 0$, è possibile scrivere

$$\boldsymbol{\beta = -|\beta| = (-1) \cdot |\beta|},$$

cosicché la serie diviene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot |\beta|^n \cdot \beta^3}{7^n \arctan n \cdot \log(n^3 + 1)} = \beta^3 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{|\beta|^n}{7^n \arctan n \cdot \log(n^3 + 1)},$$

vale a dire una **serie di segno alterno**.
Di tale serie dobbiamo discutere il carattere al variare di $\beta < 0$. Anche in questo caso tralasciamo la costante (negativa) β^3, ininfluente ai fini dello studio del carattere.

Trattandosi di una serie di segno alterno, studiamo dapprima la ***convergenza assoluta*** (la quale implica la convergenza); nel caso in cui venisse meno la convergenza assoluta stabiliremo il carattere ricorrendo al criterio di Leibniz o seguendo qualche altra strategia.

Studiamo quindi per quali β vi sia convergenza assoluta, cioè per quali $\beta < 0$ risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{|\beta|^n}{7^n \arctan n \cdot \log(n^3+1)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\beta|^n}{7^n \arctan n \cdot \log(n^3+1)}.$$

Abbiamo ottenuto chiaramente una serie a termini positivi alla quale applichiamo nuovamente il criterio del confronto asintotico (introducendo un'opportuna successione b_n) e poi della radice.
Lo studio è il medesimo di quello precedente; risulta

$$\ell = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{|\beta|}{7}.$$

Discutiamo quindi il valore di ℓ al variare di $\beta < 0$.

- **se** $\ell = \dfrac{|\beta|}{7} < 1$, cioè se $|\beta| < 7$, vale a dire $-7 < \beta < 7$, ovvero, essendo $\beta < 0$, $\boldsymbol{-7 < \beta < 0}$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ converge; essendoci convergenza assoluta, ne segue che **la serie** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ **è convergente**.

- **se** $\ell = \dfrac{|\beta|}{7} > 1$, cioè se $|\beta| > 7$, vale a dire $\beta < -7 \cup \beta > 7$, ovvero, essendo $\beta < 0$, $\boldsymbol{\beta < -7}$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ non converge; pertanto **non c'è convergenza assoluta**.
  La mancanza di convergenza assoluta non consente di concludere nulla circa il carattere di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.
  Dobbiamo quindi capire per altra via quale sia il carattere della serie

  $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{|\beta|^n}{7^n \arctan n \cdot \log(n^3+1)}.$$

  nel caso $\beta < -7$.

  A tale scopo, consideriamo il limite del termine generale:

  $$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(-1)^n \cdot \frac{|\beta|^n}{7^n \arctan n \cdot \log(n^3+1)}.$$

  Il fattore $(-1)^n$ è limitato ma non ammette limite, trattandosi di una successione oscillante tra i valori -1 e $+1$.
  Si tratta ora di stabilire il valore del limite

  $$\lim_{n\to+\infty}\frac{|\beta|^n}{7^n \arctan n \cdot \log(n^3+1)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{|\beta|}{7}\right)^n}{\arctan n \cdot \log(n^3+1)}.$$

  Essendo $|\beta| > 7$, si ha che

  $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{|\beta|}{7}\right)^n = +\infty,$$

trattandosi di una successione geometrica q^n con $|q| = \frac{|\beta|}{7} > 1$.
Il denominatore è il prodotto della *successione limitata* $\arctan n$ per la successione infinita $\log(n^3+1) \sim 3\log n$.
Il limite si presenta pertanto nella forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; tuttavia, q^n con $q > 1$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $\log n$, pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{|\beta|}{7}\right)^n}{\arctan n \cdot \log(n^3+1)} = +\infty.$$

Ne segue che **non esiste il limite**

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \cdot \frac{|\beta|^n}{7^n \arctan n \cdot \log(n^3+1)},$$

poiché il fattore $(-1)^n$, che non ammette limite ed oscilla tra un valore positivo e uno negativo, moltiplica un fattore illimitato.
In particolare,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0,$$

il che nega la *condizione necessaria* per la *convergenza* della serie.

In definitiva, per $\boldsymbol{\beta < -7}$ **la serie** di partenza **non converge**.

- **se** $\ell = \frac{|\beta|}{7} = 1$, cioè se $|\beta| = 7$, vale a dire $\beta = \pm 7$, ovvero, essendo $\beta < 0$, $\boldsymbol{\beta = -7}$, il criterio della radice non ci consente di trarre alcuna conclusione circa il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Torniamo alla serie originaria e studiamo quindi il caso $\boldsymbol{\beta = -7}$, riscrivendo per tale valore di β la serie di cui dobbiamo stabilire il carattere:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{|\beta|^n}{7^n \arctan n \cdot \log(n^3+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{|-7|^n}{7^n \arctan n \cdot \log(n^3+1)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{7^n}{7^n \arctan n \cdot \log(n^3+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\arctan n \cdot \log(n^3+1)},$$

Si tratta di una serie di segno alterno che non converge assolutamente: infatti la serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\arctan n \cdot \log(n^3+1)}$$

è una serie a termini positivi asintotica a

$$\frac{2}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log n},$$

serie chiaramente divergente (armonica generalizzata col logaritmo).

Possiamo tuttavia ricorrere al **criterio di Leibniz**.

Banalmente risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\arctan n\cdot\log(n^3+1)}=0.$$

La questione non banale da stabilire è la decrescenza della successione

$$b_n=\frac{1}{\arctan n\cdot\log(n^3+1)}.$$

Una verifica diretta con la definizione non risulta possibile in quanto la disequazione

$$b_{n+1}\le b_n,$$

vale a dire

$$\frac{1}{\arctan(n+1)\cdot\log\left((n+1)^3+1\right)}\le\frac{1}{\arctan n\cdot\log(n^3+1)},$$

non risulta algebricamente gestibile.
Per stabilire la crescenza/decrescenza della successione b_n facciamo riferimento alla funzione ausiliaria

$$f(x)=\frac{1}{\arctan x\cdot\log(x^3+1)},$$

da studiarsi sulle $x\ge 1$, essendo, nella serie, $n\ge 1$.
In particolare, siamo interessati al segno della derivata prima di tale funzione.
Risulta, per le formule sulla derivata di un quoziente e di un prodotto,

$$f'(x)=\frac{-\left(\frac{1}{x^2+1}\cdot\log(x^3+1)+\arctan x\cdot\frac{3x^2}{x^3+1}\right)}{\left(\arctan x\cdot\log(x^3+1)\right)^2}.$$

Ricordando anche che $x\ge 1$, osserviamo che

- $x^2+1>0$;
- $x^3+1\ge 2$, da cui $\log(x^3+1)>0$ (infatti il log è positivo se il suo argomento è maggiore di 1);

- $\arctan x > 0$ (infatti arctan è positiva per argomenti positivi).

Ne segue che il contenuto della parentesi tonda a numeratore, poiché somma di prodotti di termini positivi, risulta positivo e quindi, a causa del segno $-$, il numeratore è negativo per qualsiasi $x \geq 1$. Il denominatore è invece sempre positivo.
In definitiva, la derivata prima risulta negativa per ogni $x \geq 1$, quindi la funzione $f(x)$ risulta **monotona decrescente** su $[1, +\infty[$.
Ne segue che pure la successione

$$b_n = \frac{1}{\arctan n \cdot \log(n^3 + 1)}$$

è monotona decrescente per $n \geq 1$.

Possiamo quindi applicare il criterio di Leibniz e concludere che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\arctan n \cdot \log(n^3 + 1)}$$

risulta essere convergente. In particolare è semplicemente convergente, essendo non assolutamente convergente.

Concludiamo quindi che per $\boldsymbol{\beta = -7}$ la serie è **semplicemente convergente**.

La **discussione finale** dell'esercizio è la seguente:

- per $\boldsymbol{-7 < \beta < 7}$ la **serie converge**;
- per $\boldsymbol{\beta = -7}$ la **serie converge semplicemente**;
- in tutti gli altri casi la serie non converge.